image
not
available

EVCLIDES
ADAVCTVS,
ET METHODICVS
D. GVARINO GVARINO.



EVCLIDES ADAVCTVS
ET METHODICVS
MATHEMATICAQ; VNIVERSALIS

CAROLO EMANVELI II.
SABAVDIAE DVCI PEDEMONTIVM PRINCIPI
REGI CYPRI, &c.

DICATA,

Quæ ne dum propoſitionum dependentiam, ſed & rerum ordinem obſeruat. Et complectitur ea omnia, quæ de quantitate tum diſcreta, tum continua abſtracta ſpeculari queunt. Reſectis ſuperfluis demonſtrationibus, & requiſitis omnibus profusè coadunatis.

Singuli quoque Tractatus nouis propoſitionibus adaucti ſunt, & aliqui etiam ex integro adornati. Omneſque tùm figuris, tùm verbis clarè, dilucidèque propoſiti.

AVCTORE

D. GVARINO GVARINO
MVTINENSI C.R. THEATINO,
Philoſofo, Theologo & eiuſdem R. C. Mathematico.





AVGVSTÆ TAVRINORVM, M DC. LXXI.

Typis Bartholomæi Zapatæ Bibliopolæ S. R. C.

Superiorum permiſſu.



REGALIS CELSITVDO.

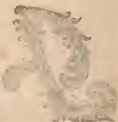


OLIA hæc, quæ Vniuersalis Mathematicæ limpidissimas demonstrationes candidis sinubus concepere, insolubili obligatione deuincta, & mole officiorum coacta, sub augustissimo nomine R. C. V. in scenam literariam prodire gliscunt. Illi enim gloriosissimo suæ magnitudinis iubare obscura huius voluminis incunabula irradiare iuuabit, quòd ab ea facultate deriuet, qua nobilis inter alias Magnorum Principum limina familiari terit incessu, & modo ad pedes R. C. V. se obsequiosa prouoluit in tributum profusa illius maiestatis, quæ omnigena virtutis, & ingenuæ, ne dum in solidissimum columen, & liberalissimum Mæcenatem se se magnanimo offert subsidio: sed insuper Thaumaturga Mathematicorum miraculorum insigni, verèque Regali architectura coruscat: Talem etenim illam plaudenti conclamant aspectu Venariæ amænis instructæ viridarijs, substructionibusque superbis turrita, regiusque voluptatum, deliciarumque thronus, augustissima Palatia, Ædes sumptuosissimæ, aditus triumphales magnarum vrbium, aliaque permulta sua admirabili protoplastice excogitata, & ad artem vltimam solis nutibus, aspectuque directa.

✠ 2 *Excipiat*

Excipiat itaque R. V. C. pacato vultu, serenaque clementia illam; quam toties in concipiendis sublimibus ideis vasto ingenij sui sinu fouit mathesim, & in ea adornanda exanthlatos laboris mei conatus; qui simul opportunitatem mihi aperiunt, & me, & totius voluntatis meæ dicatissimas vires in hostiam obsequij, deuotique cultus consecrandi. Dum ad terram demisso vultu profundissimum in flexum deciduus regales vestros poplites humillimus adoro.

V. R. C.



Humillimus, Obsequentiss.mus & Oblig.mus Seruus

D. Guarinus Guarinus C. R.

BENEVOLO LECTORI.



VM inter illos, qui in elementa Euclidis desudarunt, nullum intuear, vnico consarcinare volumine, quæ ad quantitatem sub genere inuestigandam faciunt, secutus sęculi genium, quod centuriat, vt plurimùm, & florilegia condit, putaui nequaquam me frugem perdere; si huic muneri vniuersaliùs inseruirem, & Mathematica rerum exordia ex omni parte rotunda, & contornata exiberem. Siquidem ex meo labore didici, cuius pretij, cuius vtilitatis id operis emergat; quod ea omnia, quæ Mathematicas luces, & euidentias in vnicum lucis fontem, adeoq; solem ne dum tumultuaria collectione aglomeret: sed etiam ordinato agmine disponat, in seriesq; suas naturali consecutione distinguat præcipuè illis, qui nullo Mercurio tramitis indice, aut duce audent se huic studio consignare, & admodùm dificilem prouinciam in suam sarcinam traducere. Pone enim me tibi offerre pulcherrimam, eamq; vtilissimam demonstrationem, quæ tamen; aut Pergæi, aut Archimedis, aut Pappi rarissimos libros ad sui euidentiam exposcat, quos, aut nunquam perlustraueris, aut ne quidem consequi te posse fidas: quam hauries lucem, aut quam scientiam adipisceris? aut potiùs quibus tenebris, qua caligine non confuderis? Ideoq; cum tota Mathematica sit alligata in vnumq; corpus naturali lege deuincta: quod diuidi non patiatur sine totius detrimento, si quis totum non colligat, nihil colligit, & frugiperda nixu monstrum nulla euidentia animarum in malè destinatos trahit amplexus.

Scio quidem Herigonium Parisijs, & Schotum in Belgio cursus Mathematicos eruditissimos cudisse: sed hic ostensiones sæpius solis operibus occupatus ex industria præterit, ille multis libris diuersoq; tempore editis, vt rarus sit ille, qui in suum commòdum congerere possit, institutum prosequutus est. Quamobrem cum nullus in Italia huic locubrationi se dederit, & exteri, aut nullatenùs obtineri; aut non sine magno pretio negotioq; à suo cęlo in nostras regiones peregrinari cogantur; non ingratum reipublicę literarię fore suspicatus sum; si illud laboris, quod meis priuatis profectibus desudaram, publici iuris facerem: Maximè quia in illud, quod omnes huius rei scriptores posthabuerunt, pręcipuè animum fixi; vt propositiones ne dum in seriem, quoad earum, vt assolet, deriuationem, sed etiam quoad doctrinæ dignitatem, rerumq; naturalem sedem digererem: & à superfluis, & quæ nullius vtilitatis erant expiarem: nullas aduenas rogarem assertiones in veritatis vadimonium; doctrinam in se se redeuntem, sibiq; ipsi famulam ab omni alieno iure absoluerem, vt qui legit nihil aliud ad perfectum captum desideret, quæ omnia non sine eluctamento obtinui. Odopęium me præstiti; nullisq; parcens verbis, aut figuris, amfractus, alioquin senticosos, petricososq; ab omni offendiculo immunes in vias veluti consulares aperui: Et ne aliquis subrostrarius mihi obmurmuret, in fastidiumq; versus torcularibus incassùm defatigatis misereatur; non omnia ex pęnu rurido antiquitatis prolata; lapidem, & nos protulimus, & antiquos Mathesis limites aliquantùm submouimus. Herculeos enim terminos præterlabenti ingenio nouæ doctrinarum regiones, illęq; feraces, & vtiles detectę. Multę ostensiones, aut quod nullę extabant, aut quòd proniores exoptarentur instructę; quidam tractatus denuò magna ex parte adornati, aliqui ex integro conditi, paucis non additum. Quæ omnia asterismis pręnotaui, aut saltem plurima (in paucis enim ex incuria pretermissum) Scilicet ne videar alienis pennis

amici-

amiciri malę ominata cornix, & de cęterò, vt nostra cautiùs excipiantur, tanquam nulla auctoritatę suffulta, & si aliquid erratum fuerit, aut in meliùs fęliciori ingeniò restituatur, aut saltem ab humanitate lectorum meę imbecillitati condonetur. Noui hominum non vnam esse indolem; cuicunq; necesse est suos ante se cernere antistomos, suos audire antisthrofos. Vatesq; mihi sum eos, qui omne encęnismum stomacantur vindices annositatis quęsituros in scirpo nodum, vt quid culpent, nanciscantur. Sed faciant per me; licet. Talibus infortunijs assueui. Meus, etenim liber, quem inscripsi *Placita Philosophica*, & Parisijs cusioni dedi anno 1665. iam pridem in hoc detrimentum, & quidem à limine incespirauit. Anno enim 1667. Ioannes Bonifacius Bagatta, quondam meus auditor Cursum Philosoficum edidit, qui ne dum philosofantium more multa in quęstionem protrait: sed videtur maiori nixu me persequi. Omnia veterat. Auctores plurimi saltem aliqui anonymi iam sententias omnes meas proposoere, dicant, vel saltem accinant, vel etiam pænitùs non alludant, verum semper est idem iam protulisse. In meas aliquas rationes inuehitur non tamen in omnes ferocescit: sed nec quidem earum meminit, vt scilicet credatur funditùs omnia prostrauisse. Sententias non semel meas amplectitur; Sed quasi in occulto eas diuersis verbis personatas proponens, quasi piaculum foret, me aperto vultu sequi, & aliquando in verba Magistri iurasse. Sed quod dissimulare nequęo, me vocat in memetipsum, & cogit contra fas in me, & iniustè quidem, pugnare. Et ne videar in ventos fari; hoc siuę aliud exemplum in spectaculum producam. Ipse enim Sec. 2. de præd. p. 77. n. 14. in resp. vbi tantùm aliqua mea argumenta ostendentia Modum pędicamenti dignitate non potiri subuertere nititur, dicit. *Deinde secundùm communem sententiam, quam, & ipse Guarinus sustinet actio, & passio sunt diuersa prædicamenta, & tamen*. & cæt. Intuere an actionem, & passionem in diuersa pędicamenta secerni, cum communi fatear, & lege meam disput. 12. Exp. 2. lit. B. pag. 105. probat. 2. vbi ex eo quod *aliqua ex prædicamentis non distinguantur inuicem, vt actio, & passio* arguo. *Diuisionem entis in decem prædicamenta potiùs per modum exempli ab Aristotele fuisse traditam; quam quod existimauerit eam esse bonam, & adæquatam*. Et ibidem conc. 2. assero. *Quæ verè, & certè prædicamenta appellantur sunt substantia, & accidens*. Si itaq; duo tantùm prædicamenta statuö substantiam, & accidens, qui sustineo actionem, & passionem prædicamenta quoq; multiplicare? Vidisti ne: vt sua confirmet, quàm me versatilem efficiat? Sed & patere aliud huius rei specimen adhuc proponi. Conclusionem statuit dis. 2. sec. 2. in 1 L. phisic. pag. 54. conc. 2. n. 11. *Formam materialem substantialem non esse entitatem distinctam à materia (sed esse actualem terminum substantialem intrinsecum eiusdem materiæ, à quo materia taliter modificata, & affecta, & terminata constituitur in determinata phisica specie.) Fitq; potens ad conseruanda ea omnia, quæ ad totalem conseruationem compositi spectant*. Deinde subinfert: *eam etiam aliquo pacto defendit Guarinus asserendo eam esse puram potentiam*. Sed heus sequere; ne quęso mancha proferas effata; quid pono dis. 3. phisicæ conc. 1. pag. 119? Non ne hic affirmo; formam de se non habere vllam entitatem: sed esse puram potentiam? quod deinde declaro pag. 200. l. D, conc. 2. *Dicimus*; inquiens, *formam esse puram potentiam; quia agens naturale per suas operationes nihil aliud facit; nisi imprimere quandam potentiam in materia per quam efficitur sibi principium suorum accidentium conseruatiuam, & reparatiuam; & etiam omnium aliarum operationum*. Tolle ergo à tua Thesi verba quæ parenthesi clauduntur; veluti ea, quæ ex eo quod forma dicatur: naturali lege sequantur, & ipsissimam defendam opinionem: non aliquo pacto imitabor: Sed quid deinde in mea argumenta buccinas? ad

quid

quid immeritò me cogis? vt tibi videaris efficacissimum in me vibrasse argumentum inquis. *Si agens naturale non haberet virtutem producendi ex nihilo*. Hoc enim ad confirmandam propositionem assumpsi. *neque formas accidentales posset producere, quod tamen nec ipse Guarinus asserere potest*. Sed cur accidentia ab agente non produci affirmare nequeo? Non ne disp. 14. logicæ exp. 5. pag. 117. accidens ab alijs accidentibus edi per modificationem diuersam probaui? Non ne eadem disp. exp. 4. & disp. 6. phisicæ exp. 10. conc. 1. pag. 124. affirmaui accidentia de subiecto in subiectum peregrinari, & per communicationem produci. Non ne disp. 5. de gener. & corrupt. exp. 4. conc. 2. effectum formalem ab efficiente distinxi, & posse accidens in subiecto commorari absque eo, quod vllum sui inditium przberet in mouendo subiecto. Igitur, & si aliqua causa denudata accidente videatur. V G. aqua feruida frigore; frigus tamen latens in se, vel in minimo gradu tuetur quoad entitatem, quamuis non prodeat in frigefactionem; quod remota causa efficaciori calorem extraneum de se euanescentem vt dico disp. eadem exp. 2. in resp. ad arg. 2. facilè desijcit, & in pristina se restituit. Semper itaq; exeret accidens, ex aliquo gradu sui; cum nunquam à materia elliminetur. Vbi est ergo ex meis principijs formarum accidentalium ex nihilo prolatio siue in compositi proprios sinus, siue in alienos?

Hæc autem non dixerim; quod virum in crimen vocem, quasi ex instituto, & arte subdola hæc mihi inusserit; neq; enim candidos eius mores ea suspicione fædare fas, & honestum permittit: Sed quod aut tædio victus, vel agendorum machina pressus, non potuerit totum volumen perlustrare. vel quod scriptorum meorum, quos extemporaneos, & subsestos eccepit aliqua fortè positione delusus iudicauit eamet typis mandasse. Quid quid causę id fuerit non potuit in adeo religioso viro; quod in me actum est, non nisi ab honestatis amore, studioq; veritatis excludi.

Debui tamen meis non deesse; beneuoloq; lectori dementum, improuidamq; allucinationem aperire, ne quis putaret mea tela mihi inimica, & in mea præcipitia ædificasse. Contineat ergo fidem suam quis quis æquus iudex in illum Cursum Philosoficum inciderit; donec, & nostra euoluat, & quod mihi tribuitur, meum esse dignoscat: auritus vtrinq; sit, nec reum damnet, donec in ius compellat, & denunciatos lapsus ipsa re intueatur.

Interim hunc Librum eccipe, in quo non multæ opiniones: omnia solidissimis demonstrationibus illustrata, ex quò facilè dignosces an in Placitis Philosophicis adeo inconstanti voce vibrissare potuerim, & alternatione tam continuata ludere. interim dum rerum mensuras, & Symbolizationes stupendas eccipis Diuinam artem admirari non intermittas: qui omnia trutina examinauit, lanceq; suæ omnipotentiæ, vt semper admirabilis dignosceretur appendit.

LIBRVM hunc, cui titulus Euclides adauctus, & methodicus à doctissimo Patre D. Guarino Guarino conscriptum vidi iussu Reuerendissimi P. Magistri Thomæ Camotti Generalis Inquisitoris Taurinen. in eoq; nihil, quod orthodoxæ religioni, vel bonis moribus aduersetur, deprehendi: quinimo preclarum hoc opus omnibus matheseos studiosis vtilissimum, & publica luce dignissimum censeo. Datum in Collegio Societatis Iesu die 31. Martij 1671.

Franciscus de Malines Societatis Iesu
in Collegio Taurinensi studiorum Præfectus.

EGO infrascriptus Sacræ Theologiæ Lector de mandato Reuerendissimi Patris F. Thomæ Camotti Inquisitoris Taurini diligenter perlegi opus, cui titulus est, Euclides adauctus, & methodicus ab Adm. Reuerendo Patre D. Guarino Guarinio Ordinis Clericorum Regularium conscriptum, & elaboratum, & nihil in eo animaduerti Sanctæ fidei, aut bonis moribus aduersum; Imo omnia in eo contenta perutilia fore Reipublicæ literariæ, & Mathematicarum artium professoribus. In quorum fidem, &c. Datum in Conuentu S. Dominici de Taurino die 20. Martij. 1671.

F. Petrus Martyr Rubeus Ord. Præd.

Imprimatur.
F. THOMAS CAMOTTVS Ord. Prędicatorum Inquisitor Taurini.

EVclidem Methodicum Adm. Reu. P. Guarini Guarini sedulò consului. Euclides ipse est si apodexion puritatem, acumen, neruos estimauero; nec ipse tamen, si doctrinæ ordinem, copiam, iucunditatem. Tam multa, noua, pulcherrima accessere, vt sibi admodùm blandiri queat Euclides Iconem suum, hactenus rudem, ac salebrosum, iam tandem accuratissimà viri, verè viri industriâ absolutissimè, efformatum. Promus condus ipse est Mathematicę vniuersæ, totaq; exhauritur Geometria: de numeris numerosissimè, deq; dimensionibus supra humani mensuram ingenij. Nec modò latet in eo quicquam Patrijs legibus onerosum: Quin totum tantum opus est: vnde maximum sint habituræ, & literaria, & Politica Respublica incrementum. Ergò ne quæso publica fraudetur luce purgatissimis luminibus volumen micans. Ita sentio. Taurini 4. Aprilis. 1671.

Bartholomæus Torinus vidi de mandato Illustriss.
& Excellentiss. D. Magni Cancellarij.

Permittitur imprimi.
BVSCHETTVS.

IVssu A. R. P. D. Petri Pauli Nobilioni Præp. Generalis nostræ Religionis Euclidem Adauctum, & Methodicum à R. P. D. Guarino Guarino compositum diligenter perspeximus, & cum nihil in eo deprehenderimus, quod catholicę Religioni, aut bonis moribus aduersetur: imò potiùs tanta diligentia, ac ingenio elaboratum vt nihil ad perfectionem sumpti argumenti desiderari videatur. Ideo vt typis excussus in publicam lucem prodeat non solum dignissimum putamus, verùm, & necessarium, tam pro Mathematicarum artium professorum vtilitate, quàm vt ab ijsdem collatus cum eiusdem auctoris Philosofia iam impressa ipsius ingenij fæcunditas acumen, & profunditas agnoscatur. Datum Taurini in domo S. Laurentij die 3. Aprilis 1671.

D. Amedeus Romagnanus C. R.

D. Carolus Saluaticus C. R.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Clericorum Regularium.

HOc opus, cui inscriptio Euclides adauctus à D. Guarino Guarino nostræ Religionis Theologo Sacerdote compositum, & iuxta præfixam assertionem patrum, quibus id commisimus approbatum, vt typis mandetur, quoad nos spectat, facultatem concedimus. Datum Romæ die 30. Iunij 1671.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Cl. Reg.

Locus † Sigilli.

D. Antonius Maria Rinaldus Secret.

INDEX

Tractatuum & Expensionum totius operis

Vt id, in quo erratum sit singulis tractatibus, expensionibusque pareret, faciliorque euaderet correctio; hic errores aliquos, quos in relegendo potui aduertere, emendaui: alios, qui fortè me prætererierunt, tuæ humanitati, & beneuolentiæ relinquo.



INDEX

TRACTATVS IX.

Pars 1. in 5. Euc. lib. de proportionum notione.

Pars 2. De proportionib. in genere.

TRACTATVS X.

In 6. lib. Euc. De proportione quantitatis continua.

TRACTATVS XI.

In 7.lib.Euc. Pars 1. De proportionibus numerorum in genere.

Pars 2. De ſpeciali numerorum proportione.

TRACTATVS XII.

TRACTATVS XIII.

De numeris proportionalibus Pars 1.

Pars 2. De numeris proportionalibus inueniendis.

TRACTATVS XIV.

De proportionibus numericis continuis.

Pars 2. De proportione Arithmetica continua.

Pars 3.

Pars 3. De maximorum circulorum & minorum in sphæra contactibus & intersectionibus.

TRACTATVS XXIV.

De sectionibus conicis.

TRACTATVS XXV.

De sectionibus corporum conicorum per planas superficies.

TRACTATVS XXVI.

De Proiectionibus Pars 1. De Orthographia.

De Stereographia Pars 2.

TRACTATVS XXVII.

Trigonometria Pars 1. De triangulis planis soluendis.

Pars 2. De triangulis sphæricis soluendis.



TRACTATVS I. PRÆLIMINARIS.

De eſſentia Quantitatis continuæ.



NTEQVAM agamus cùm Euclide de proportionibus Mathematicis quantitatis, neceſſarium videtur, eſſentiam quantitatis ipſius, proprietateſque Metaphyſicas cognouiſſe. Definitiones enim primas vix independenter ab eſſentiâ quantitatis poteſt haurire cognitio: Quarum notitiâ obſcuriùs perceptâ, cætera omnia, quæ ab ipſis dependent in apertum prodire nequaquam poſſunt. Verum quidem eſt, quòd nec ipſa quantitatis eſſentia probè dignoſcitur; niſi dependenter à multis propoſitionibus, quæ deinde ſunt oſtendendæ: Vnde nos tanquam Philoſophos gerentes, quibus anticipare non inſuetum, & præſuponere non indecens, earum probationibus, aut principijs ad oportuna loca ſeruatis, quæ ad quantitatis notionem faciunt Theoremata hîc vſurpabimus, tanquam nota, & oſtenſa, vt ſolùm, quantùm neceſſitas repoſcit, percipi poſſit ipſius quanti conſtitutio.

EXPENSIO I.

In quo conſiſtat conceptus quantitatis in genere, & in quot ſpecies ſecernatur.

HAnc queſtionem diffuſiùs agitaui in noſtris placitis philoſophicis diſ. 15. pag. 119. ex qua diſputatione liceat aliqua, quæ magis ad Mathematicam faciunt, hîc delibare; vt deinde euidentiùs ipſa quantitatis eſſentia ſeſe in apertum prodat.

PRÆASSVMPTVM.

COmmunis hominum conceptus in id conſpirat; vt quantitatis nomine notet, tum continuam quandam rerum ſucceſſionem, aut multitudinem, tum vnius rei extenſam molem. Et quamuis Virtutum, potentiarum, accidentiumque intenſionem, & vim operatiuam quantitatis menſuris ſubigant: an tamen verè ſub quantitatis definitione veniant, incertum, & apud Philoſophos controuerſum. Motus quoque & temporis incerta, & anceps quantitatiua denominatio, & licet menſurentur, non propterea certum eſt, quantitatis ſub genere contineri. Quamobrem, vt omnino pateat, quænam inter quantitates enumeranda ſint, priùs Quantitatis, quæ apud nullos eſt controuerſa, vt eſt ſucceſſiua, continua, & diſcreta, conceptus, & definitio eſt inquirenda.

CONCLVS. I. PROPOS. I.

Eſſentia quantitatis *in genere eo conſiſtit; vt ſit capacitas quædam entitatis ad partes habendas*, vel actu, vel potentiâ, vel ſaltem per intellectus deſignationem.

1 PRobatur. Quia hæc definitio omnibus quantis etiam ſpiritualibus aptatur. Nam, & quantitas molis, & intenſionis, & ſucceſſionis, & numeri, & temporis, & loci, & extenſionis, & omne aliud genus quantitatis ſine partibus concipi nequit, ſiue illæ actu ſint, ſiue potentiâ, ſiue deſignatione concipiantur. Sic in numero adſunt partes actu, in quantitate molis fieri queunt, in Cœlo, ſi eſſet incorruptibile, ſaltem concipi.

2 Probatur. Quia hæc capacitas ad obtinendas partes, omnium aliarum proprietatum; quæ de quacumque quantitate dicantur, fons eſt, & origo. Prima eſt apud Vaſq. T. 3. in 3. par. diſ. 90. c. 3. n. 15.; Quòd det aliquam diſtinctionem materiæ: Nam ſi partes ſint reales, dat diſtinctionem realem, ſi factibiles, vel conceptibiles dat diſtinctionem, aut virtualem, aut per intellectum. Secunda, quod menſuret, aut menſuretur: Nam ſi capacitate ad partes conſequendas potitur; ergo erit inter partes, quæ excedat, quæ exæquet, aut ab alia quantitate deficiat. Tertia eſt numerari; nam partes, vel actu factæ, vel deſignatæ plures ſunt: Quamobrem numerationi obnoxiæ erunt. Quarta eſt proportio.

Etenim, vbi sunt partes datur maius, minusque, & vbi datur maius, aut minus, datur maior quoque, vel minor continentia, vel totius, vel aliquarum partium eius, & ideo maior, aut minor proportio, quæ in hac continentia consistit: Quinta est vis quædam occupatiua loci. Quoniam, quod partes habet extensas, secundùm eam extensionem loco correspondere potest. Sexta. Quòd obtineat partes in semetipsa ordinatas, & se inuicem excludentes; Nam vbi diuisio est, vel conceptibilis, vel actualis, vel possibilis; ibi necesse est, vnam partem excludere aliam; alioquin si hæc aliam suâ ipsâ entitate inuolueret, non posset, nec quidem intellectus concipere cum fundamento partes; quia rei conceptus formalis earum excluderet multiplicitatem.

Dicet fortè aliquis ex Metaphysicis. Ratio, per quam essentia alicuius rei secernitur, debet esse omnibus alijs prædicatis essentialibus prior; sed extensio est prior capacitate partium; ergo extensio erit ratio constitutiua quantitatis.

Sed respond. Id optimè se habere, cùm plures proprietates adsunt eadem vniuersalitate pollentes, quæ rem aliquam constituant. Tunc enim inter multas rationes eodem modo distinctiuas, cùm eadem, & æquâ specie se diffundant, illa debet seligi, quæ radix aliarum sit, & alijs prior, & præeminens habeatur. At in contrarium res est. Si quidem extensio licet in quantitate molis sit ratio prior, & per quam illa partibus fruatur, vt aduersarijs morem geramus, non tamen adeo latè patet; cùm nec quantitas discreta, nec virtutis, nec temporis extensione patescat. Verùm, nec equidem concedo. Extensionem in quantitate cõtinua esse partium habitudine priorem, cùm imò entitas partium existẽs sit illa, quæ extensionem causat; cùm vna extra aliam est: Quoniam si penetrentur extensio non manet, & tamen essentia quantitatis adhuc est, & corpora diuinâ virtute penetrata quantitatis essentia non expoliantur.

2 Dices. Diuidere aliam quantitatem, essentia quantitatis nõ est; ergo neque diuidi. Verùm, nec diuidere, nec diuidi esse quantitatis constituit: Neque enim in hac sententia sumus. Sed id asserimus; ex eo quantitatem constitui: quòd sit entitas talis, cuius vna pars nõ sit omnis pars, & toti adæquetur. Si detur itaque aliquod ens, cuius hæc entitas designata non sit alia simpliciter, & sine reduplicatione intellectiuâ; hoc erit ens quantum, & hoc est consequi capacitatem partium saltem dessignabilem.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Species quantitatis sex sunt. Quantitas Molis, Numeri, Temporis, Motus, Virtutis, Ponderis.

PRob. Nam quantum, aut est substantiale, aut accidentale. Si substantiale est, aut consideratur, vt extensum loco, vel vt habens plures partes in eodem loco. Si consideratur, vt loco substantia extensa, iam quantitas molis est, quæ trinam dimensionem consequitur altitudinis, longitudinis, latitudinis. Si verò eius partes vna intra aliam latent, & eundem locum occupent; tunc est quantitas ponderis. At si quantum est accidentale; tunc, aut consideratur accidens in subiecto extensum, & tunc cum se accomodet subiecto eandem constituit cum eo molis quantitatem: licet propriè extensionis vocetur. Si verò in eadem parte subiecti se colligat; tunc est quantitas virtutis, seu intensionis. Quòd si substantia, seu accidens intelligantur moueri, tunc quantitas motus enascitur, & si perseueret in motu, quantitas durationis, seu temporis emergit. Tandem si substantia, aut accidens motus, & duratio intelligantur diuisa, & in plures partes seiuncta, discreta quantitas est, & vocatur, quantitas numeri.

COROLLARIVM.

HInc euenit, quòd, cùm quantitas molis, & numeri sint, tum substantiæ, tum accidentium, in substantia extensorum, quòd etiam ab illa dependeat quantitas, & ponderis, & motus, & temporis, & virtutis. Et hinc quod de illis primo discurrendum sit, vtpotè, quòd vniuersale præbeat fundamentum ad alias quantitates penitiùs considerandas.

Constat autem hoc de quantitate ponderis: nam à magnitudine rei pondus dependet; cùm pro sui quantitate leue pondus in specie possit æquare maius, ratione superadditæ molis. Et ita quantitas motus, & temporis à multitudine, magnitudineque partium pertranseuntium depẽdet: Sic quantitas virtutis à mole, seu magnitudine agentis, seu à numero mouentium, seu à magnitudine figuraque rerum motarum exerit. Quapropter in hoc libro agendum de *Quantitate Discreta, & Continua*; vtpote in quo res mathematicæ vniuersalitèr tractantur; ideoque de illis tanquam vniuersalissimis quantis agendum, quorum cognitio omnem aliarum quantitatum cognitionem subalternat, & ab illis euidentia principia mercantur. Subest & insuper alia ratio. Nempe omnia alia genera quantitatum sub ratione quantitatis discretæ, seu continuæ considerari, vt patebit (si Deo dante) ad illarum attingendos tractatus deueniamus.

EXPENSIO II.

An aliquod argumentum mathematicum euidenter ostendat quantitatem, ex punctis non constare.

QVamuis hæc quæstio requireret legentem mathematicâ imbutum: Cùm tamen sit quoque philosophica, & Philosophi, licet Mathesi non exornati illam percurrant, & ventilent præsupponendo ea, quæ à Mathematica dependent, vel lumine naturæ cognita, vel ab eâ demonstrata: hinc est, quòd hic eam collocandam duximus, tanquam ad cætera, quæ deinde considerantur pernecessariam.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Nullum mathematicum argumentum, ex punctis indiuisibilibus quantitatem molis constare, ostendit.

HÆc conclusio est negatiuè ostendenda; nempe argumentorum eam impugnantium euidenti solutione. Primò itaque aliqui credunt, ex punctis constare quantitatem ex illa

propos.

propos. Eucl. l. 3. p. 13. in qua probat circulũ aliũ circulũ non tangere in pluribus punctis, quam vno, & hoc adducit Bagata in 6. lib. sec. 3. d. 4. de quantitate, tanquam vnicum, & ineuitabile argumentum ad puncta indiuisibilia in quantitate ostendẽda, & citat fallaciter Euc. lib. 1. propos. 16.

Sed Respond. 1. Euclidem probare circulum non tangere planum, vel (quod specialiter ipse probat) circulum intrinsecùs in pluribus punctis, quam vno sensibiliter dissitis; non autem immediatis. 2. Ostendere, non tangere in pluribus punctis, quam vno; sed diuisibili; siquidem non ostendit illud punctum contactus, aut esse diuisibile, aut indiuisibile.

Verùm dices. Licet id ipse non ostendat ex eius tamen demonstratione colligitur: Nam si tangunt se in duobus punctis; tangant se in B & D; ita vt hæc duo puncta sint in vtriusque peripheria, tum maioris, tum minoris circuli. Certum est quod in omni triangulo duo latera simul sunt tertio maiora ex propos. 20. lib. 1. Element. At si B punctum in circumferentia vtriusque circuli est; trianguli M B C duo latera B C, & C M essent tertio æqualia; quod est absurdum, & contra propos. 20. Id autem patet; nam B M, vtpote radius maioris circuli æquatur lineæ M D; cui etiam æquantur duo crura M C, & C B: Quoniam M C est eius pars, reliquæ verò parti C D crus B C est æquale, vtpote radius minoris à centro C ad eius peripheriam pertingens.

* Hæc est demonstratio euidens illa quidem, si agamus de duobus punctis distantibus: non tamen immediatis. Nam primò, vel agimus de lineis, quæ sint indiuisibiles, vel quæ sint diuisibiles. Si sint indiuisibiles. Certum est, quòd maior est latitudo B D, quam O C? Si ergo B D sint duo puncta immediatè se tangentia, multò magis se tangent duo puncta C, & O; vel, ergo etiam ipsa erunt duo puncta immediata, & sic maius spatium non erit B D, quam O C; vel erunt minùs immediata, & se penetrabunt puncta, & C: quapropter B M C non erit triangulum; quia nulla distantia intericietur inter C, & O puncta inuicem penetrata. Si verò lineæ sint diuisibiles; iam latitudo vnius occupabit aliam in B, & C, licet in B, & D differant spatio: Vnde rursùs B M C non erit triangulum.

* 2 Certum est. Lineolam O C esse maiorem illa portione, qua excrescunt latera B C, & M C supra tertium crus B M. Quoniam, vt potes videre in triangulo Q R X linea X V, & V T, qua excrescunt latera Q X, & R X super basim Q R; vt vna est minor perpendiculari V X; quia sunt duo sinus versi, qui nunquam in triangulis obtusangulis, quorum reliqui anguli sint minores G. 45. sinus recti medietatē æquare possunt. Quia, vt Th. 2. exp. 2. de sin. Quadratũ sinus recti est quadruplũ rectãguli ex semiradio, & sinu verso: Sed in 3. fig. semiradius superat dimidiũ sinus recti G. 45. X u. Quòd eius quadratũ sit quadrato sui dimidij quadruplũ ex p. 6. l. 2. semiradij verò duplũ; cùm ex pr. 11. l. 2. sit subduplũ quadrato radij R F, cui semiradij est subquadruplũ ex 6. l. 2. Ergo sinus versus E R minor erit dimidio sinus recti X V. Alioquin cum semiradio maiori faceret quadratum maius, quam subquadruplum quadrato sinus recti, cui quadratum sui dimidij subquadruplum est; Cum ergo sinus versi angulorum minorum, quam Gr. 45. vt sunt anguli Q. R nõ æquent semiradium erunt minores; qua V X. Quod licet ex defectu principiorum modò sit obscurum, & incompertum; præsuponendum tamen est, vt certissimum, & euidens apud eos, qui Mathesi instructi sunt.

Quamobrem O C in Fig. I. maior erit ea portione, quâ excrescunt latera B C, & C M super basim; cum anguli ad M, & B sint acutissimi; eo quod angulus apud C semicirculo (excepto vnico puncto inter B D) mensuretur. Ponamus itaque illam perpendicularem C O lineam esse vnius puncti: Ergo latera, nec quidem vnico puncto super basim excrescent: Quare basi eo in casu, nec puncto quidem indiuisibili erunt maiora. Sed minor est O C, quam D B: Ergo non excrescentibus lateribus, nec quidem vnico puncto indiuisibili super basim, & ideo æqualibus ipsi basi; erunt tamen latera apud verticem C distantia, a basi in C, & distabunt saltem puncto, & tantò magis distabunt in B, & D; quare D, & B erunt duo puncta, & B M C triangulum, & latera B C, & C M basi B M maiora non erunt.

* 3 Sint duo circuli E D, & D L, eorumque centra non magis, quàm puncto distent in C, & M; illique sint perfecti, vt ab aduersarijs conceduntur. Ambitus itaque eorum in E, & L non distabunt magis, quàm duobus punctis: In G H vnico puncto: Ergo in reliquo spatio vsque ad D minus, quàm puncto distarent; sic quę punctum in multas, multasque partes diuideretur.

* 4 Aut contactus est physicus, & realis; aut non. Si physicus: certum est, quòd quilibet circulus in duo potest secari per imaginationem saltem; ita vt nihil integritati semicirculi deficiat. Diuidatur itaque, & diuisio in punctum contactus cadat; vel punctum illud absumet, & tunc aliquid, semicirculi partibus, vel vtrique, vel alteri deficiet: vel non; & sic in duo secabit illud punctum.

Respondere verò (vt respondet quidam) circulum in duas æquales partes nequaquam posse secari, aut quòd non possit diuidi mente: nisi aliquod ex eo deperditum imaginemur, est contra mathematicos, pugnare, qui id euidenter probant, & euidens probatio fortiùs conuincit de diuisione mente conceptâ, quàm de diuisione applicata materiæ.

Obijces 2. ex Pelletario apud Clauium. Omnis quantitas si augeatur in infinitũ potest quãcumque datam superare, sed angulus contactus circuli cum plano: licet auctus in infinitum, nunquam potest angulum rectilineum K L N, etsi minimum superare; Ergo angulus acutus contactus K L G quantitas non est, & sic multò minùs ipse contactus quantitas erit.

Huic argum. Fusè respondet Clauius. Nos illi respondemus, quatenus nititur probare punctũ contactus indiuisibile esse. Rep. itaque. Quòd, vel angulus contactus sumitur, vt inclinatio duarum linearum, prout Eucl. defin. 8. lib. 1. vel pro spatio inter lineas inclinatas cõtento. Si primo modo accipiatur verum est, quòd angulus contactus non est quantitas: sed nec angulus re-

ctus. Verùm potiùs quidam modus quantitatis; vnde in genere quantitatis non est facienda comparatio, sed inclinationis. Cum autem lineæ rectæ à curua differant genere, hinc est, quod inclinatio curuæ ad rectam inclinatione rectę semper euadat maior, & curua magis inclinet ad planum, quàm recta. Licet deinde factâ comparatione inter lineas inclinatas eiusdem generis, puta peripheriarum possit dari minor, minorque in infinitum, prout se circuli augebunt. Si verò Angulus accipiatur prout dicit spatium comprehensum inter lineas, tunc quidem quantitas est; sed cuius ignota mensura sit. Nam angulus quidem rectus arcu circulari mensuratur inter crura comprehensi: sed, quæ nam sit mensura anguli curuilinei, incompertum est; quare omni acuto rectilineo minor quidem est in principio sui, ex demonstratione Euclidis. Sed cùm non seruet semper eandem inclinationem, &cũ accedens ad quadrantem versus c maior fiat; an absolutè dicendus sit minor; res in dubio est, & quo sensu minor dicendus sit, magis anceps.

* Et hæc quidem de angulo. Verùm vltima consequentia nullo pacto colligitur; nempe quòd contactus ipse non sit quantitas quia angulus contingentiæ omni acuto rectilineo maior sit; imò è contra potiùs videtur deduci: Quia cùm curua omni rectâ inclinante alteri rectæ magis incliuet, magis etiam se illi adaptat: Vnde contactus ipse lineæ rectæ cum curuâ maior erit, cùm maior sit inclinatio, quàm rectæ cum rectâ. Datis enim duabus lineis materialibus, & aliquali latitudine pollentibus, contactus earum maior est, si inclinatio maior sit; & ideo etiam curua, & recta sensibilia se inuicem tangent magis, quàm quælibet recta tangat rectam omnimodâ inclinatione datâ; sed puncta licet indiuisibilia in contingendo, partes habent etiam iuxta aduersarios (siquidem tangitur vnicum punctum à pluribus punctis) Quare punctum contactus poterit esse secundum plures partes, & pauciores, & contactus poterit esse maior, aut minor. Quamobrem, cùm non sit indiuisibilis nullus, licet punctorum indiuisibilium, contactus, ex eo non poterit deduci quantitatis ipsius indiuisibilitas. Quandoquidem dato etiam; quòd punctum plani à circulo tangeretur; nihilominus secundum plura puncta peripheriæ illud punctum plani posset contingere.

EXPENSIO III.

An aliquod argumentum mathematicũ ostẽdat quantitatem ex punctis non constare.

VIdimus puncta indiuisibilia in quantitate nullâ efficaci ratione mathematicâ constare: Modò videndum est; an sit aliqua ratio mathematica, quæ illa explodat.

CONCLVS. I. PROPOS. IV.

Argumenta plurima mathematica ostendunt puncta indiuisibilia in quantitate non reperiri.

ARgumentum est vsitatum, quòd non posset secari linea nouem punctorum in duas partes æquales; quia scilicet punctum medium in duo esset secandum.

2 Quòd datis duobus punctis concentricis tot reperirentur puncta in maiori, quot in minori; cùm ductis à centro lineis ad omnia puncta circonferentiæ circuli maioris, illæ necessariò transirent per tot alia puncta circuli minoris: Quare in vtroque par numerus punctorum lateret.

3 Quod Diagonalis in quadrato esset tot punctorum quot latus; cùm ductis à punctis omnibus laterum parallelis, per omnia diagonalis puncta transirent.

Quibus argumentis geminam opponunt aduersarij responsionem. Prima est negando lineam illam in duo secari, vel duci lineas per omnia puncta, vel laterum, vel circulorum. Sed hoc gratis negatur, cum inter concessiones de puncto ad punctum lineam posse duci, vt omnino concedibile exposcat Euclides, & sine, quo Mathematica non constaret. Et quoad sectionem lineæ bifariam, demonstratio Eucl. propos. 10. conuincit saltem de sectione mentali, & Metaphysicâ, vt euidens est, nec valet cuiusdam resp. omnino futilis, quod lineam demonstrauerit Euclides omnino in duo partibilem, ex suppositione Aristotelicæ sententiæ. Quasi quòd demonstrationes mathematicæ solam probabilitatem consequerentur, & præcipuè illa ex suppositione probabili procederet, quæ toti Mathematicæ euidentia fundamenta præbet.

Secunda est Galilęi dialog. p. 21.; qui existimat puncta indiuisibilia in quantitate esse infinita; & ideo non posse punctum in duo secari, vel de puncto ad punctum, per alia puncta certa, & determinata, linea duci: Cùm nec duo, nec decem, nec aliquis numerus determinatus punctorum in quantitate reperiatur; sed indeterminatus. At huic sua erit responsio; cùm ostendemus non posse infinita puncta, seu indeterminata in quantitate reperiri.

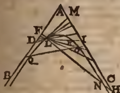
* 2 Sic probo specialiùs positam sententiam. Sit Cylindrus A B C D excauatus concauitate sphęrica A B F Sitque in illo descriptus conus O C D. Dico; quòd si punctum illud extremum o indiuisibile est, Quod etiam tota circumferentia A B indiuisibilis est.

Et si illa circumferentia diuisibilis est; quòd etiam punctum o extremum, quodcũque illud sit, diuisibile est. Id verò constabit, quia circumferentia A B punctata, & punctum o probabuntur æqualia ex *Luca Vallerio* lib. 2. propos. 12. de cent. granit. Quadratum H I ob angulum rectum E ex 47. elemen. Et nobis p.11. lib. 2. est æquale duobus quadratis ex linea O E, & ex linea I E Lineæ verò H I, est æqualis linea E P, & O E linea E H: Quare quadratum, ex lineæ P E est æquale duobus quadratis ex I E, & E H lineis, & quadruuium eius quadruplo. Quadratum verò ex P Q est quadruplum quadrato ex P E, & I V quadruplum quadrati I E; Et H L quadruplum quadrati H E, & ita etiam erunt circuli quadratis inscripti. Quare circulus, cuius diameter P Q est æqualis duobus circulis I V, & H L; Ablato itaque è circulo P Q, circulo I V, residuus annulus, cuius latitudo P I, & V Q, erit æqualis circulo H L. Et si lineam P Q eleues vsque ad vltimum punctum O, semper valebit

idem

idem argumentum. Quare punctum o erit æquale circulo A B: Sed circulus A B diuiſibilis eſt; Ergo etiam punctum o, quodcumque minimum accipiatur. Hæc autem demonſtratio deſeruiat pro ijs; qui iam Mathematica ſunt inſtructi, ſicut & ſequentes.

* 3 Sic oſtenditur ex propoſ. 2. Expenſ. 4. Conic. Agentes de Aſymptoto demonſtrabimus, Quòd hyperbole ſemper ad aſymptotos accedit, & numquam illos tangit, vel ſecat, & ſi ponatur quælibet minima quantitas inter ipſos, & hyperbolem, diſtantia tandem etiam illâ minimâ quantitate datâ minor euadet. Sint Aſymptoti B A & A C, ſectio hyperbola Q E N, Oſtenſum eſt, hanc ſemper, quouſque prolongantur latera Q L, & N H, accedere propiùs ad Aſymptotos A B & A C; ſed numquam illos tangere. Detur itaque punctum aliquod.



Cum omni data quantitate tandem ſpatium interceptum inter Aſymptotos A C & hyperbolam Q E N. euaſurum ſit minus; euadet minus dato puncto; cùm tamen aduerſarij nolint minus puncto in quantitate poſſe dari.

* Et idem erit argumentũ ex inſcriptione Hyperbolarum deductũ: Nam oſtendit Vincen. Vinianus inſignis Geometra de maxim. & minim. lib. 1. pag. 45. Hyperbolas per diuerſos vertices ſimul deſcriptas, verùm, quarum eadem ſit regula, ſemper inuicem accedere, nunquam tangere. Quare idem quoque argumentum adornari poterit.

* 4 Prob. Quoniam omnia rectangula, vt docuimus de ſuperficie conicâ agentes inter Aſymptotos, & Hyperbolem facta, inter ſe ſunt æqualia; Sic rectangulum factum ex lineis L F & M L, eſt æquale parallelogrammis interceptis, & quibuſcumque alijs quorum vnum latus L M ſit vni Aſymptoto parallelũ, alterum F L ad idem pũctum Hyperbolæ incipiens ſit alteri Aſymptoto parallelum, & in primum aſymptotorum A C deſinat. Sit ergo punctum quantitas aliqua propoſita, ad quam hyperbola ſemper accedendo ad alteram aſymptotos, iam peruenerit. Quare rectanguli huius pũcti interpoſiti inter hyperbolam, & aſymptotos latitudo erit linea, vtpote ab eo puncto deducta, quo diſtat hiperbola ab aſymptoto; quod eſt abſurdum, & linea æquabitur parallelogrammis omnibus alijs interpoſitis V.g. parallelogrammo F L M A, quod item abſurdum eſt, cùm linea ſolùm longitudine ſit diuiſibilis, & parallelogrammum etiam latitudine.

Contra verò hoc argumentũ ea reſponſio valeret, quòd puncta ſunt infinita, & ideo, quòd nec in cono vltimum punctum aſſignari poteſt, nec in hyperbolâ ea diſtantia, quæ punctum æquare queat. Quamobrem vt euidentiam hæc argumenta ſortiantur, hæc quæſtio eſt reſoluenda.

EXPENSIO IV.

Puncta infinita in quantitate, an admitti debeant.

POſſet hæc quæſtio agitari de punctis, quæ actu ſint in quantitate diſtinctis ſecundùm ſuum eſſe, atque numerabilibus. Poſſet etiam intelligi de punctis, quæ in quantitate actu non diſtinguantur; ſed mentaliter, vel per diuiſionem ſucceſſiuam ſeparabilia. Si hoc ſecundo modo intelligatur, coincidit cùm opinione Ariſtotelicâ, quod partes ſint in infinitum multiplicabiles abſque eo, quòd earum vltima poſſit attingi. Nam, neque hoc pacto punctum vltimum, nec quidem intellectu aſſequi poſſemus; cùm infinitum exhauribile non ſit, & ſi vltimum aſſignaretur, iam infinitum eſſet exauſtum. De punctis itaque actu diſtinctis, & actu numerabilibus ſermo eſt: de quibus ſic aſſero.

CONCLVS. I. PROPOS. V.

Puncta infinita in quantitate actu diſtincta nequeunt admitti.

1 PRob. Quoniam numerus infinitus dari nequit, ergo neque in quantitate puncta infinita. Nam numerus numeratus, ſubiectumque numeri eſt multitudo ipſa. Quare ſi multitudo infinita punctorum daretur, etiam infinitus numerus daretur. Infinitus autem numerus dari nequit; quia innumerabilis eſſet. Quare infinitus numericus per excluſionem eſſentiæ numeri conſtitueretur.

2 Vel puncta illa ſimul addita conſtituunt maius, vel non, ſi non; ergo quantitatem non extendunt, vel maius conſtituunt, & ſic cùm eorum multitudo ſit infinita, & eorum quodlibet maius quid addat, magnitudinem infinitam conſtituent. Sunt enim infinita ſimul addita, quorum quodlibet extenſionis aliquid facit: Ergo iſtud quid extenſionis multiplicatur in infinitum; Ergo extenſio erit infinita.

* 3 Omne infinitum æquale eſt; alioquin vbi conciperetur alterum maius, ibi minus eſſet exhauſtum, & finitum. Ergo, cùm in qualibet quantitate puncta ſint infinita, quælibet quantitas aſſignata maior A, minor B puncta infinita in ſe concludet, & ideo æqualia multitudine. Sed indiuiſibilia magnitudine ſunt etiã omnia æqualia; quia indiuiſibilia ſunt: Ergo exhibebunt extenſionem æqualem. Propterea quantitas maior A extenſione æquali pateret, ac quantitas minor B; quod eſſe nequit, & omnes quantitates eſſent æquales, quod item abſurdum eſt.

Dices ex Galilæo Dialog. pag. 23. Quòd neque ſint infinita, nec finita; ſed tot, vt cuilibet aſſignato numero reſpondeant.

Nam, vel hæc aſſignatio poteſt fieri finita in infinitum, & ſic idem eſt, ac admittere puncta finita in infinitum in quantitate; quod ipſe non vult, vel finita tantùm, & ſic iam, nec puncta in quantitate ſunt infinita, vtpote correſpondentia finitis numeris. Deinde quæro de omnibus punctis. An omnia finito alicui numero correſpondeant; & hoc negat. Igitur alicui infinito; ſed hoc non datur; Ergo alicui incerto, & in determi-

determinatò: Quare collectio punctorum incerta est, & indeterminata; & ideo actu non erit distincta: Siquidem omne, quod est actû, determinatum etiam est, & certum; vnitateque gaudet, & singularitate; quâ possit vnitatibus numericis correspondere.

4 De omni, quod assignatur quantitatis, illud licet minimum, quæritur an correspondeat cuicumque numero assignato, sine non: si correspondet, cùm omnis quantitas maior aliquatenùs illâ, eandem prorsus correspondentiam consequatur, erit æqualis minori. Et si dicas correspondere quidem in multitudine punctorum non autem in extensione.

Contra est. Nam omne punctum, cùm non sit cùm alio penetratum, & per aduersarios omnis sint eiusdem rationis, & substantiæ omnia æquo modo substantiam extendunt. Ergo cùm, & quantitatis magnæ puncta, & quantitatis paruæ omni assignato numero correspondeant; æqualiter extensionem præstabunt.

5 Cùm omni numero indeterminato correspondeant, iam, & ipsa puncta erunt multitudine indeterminata: Sed multitudo eorum extensionem dat: Ergo est etiam indeterminata extensio; quod est absurdum.

6 Deus videt omnia illa puncta; imò & secernere, & separe potest. Separet itaque, vel re, vel cognitione. Tunc, aut illa pũcta sunt infinite vel finita. Si infinita; nulli numero correspondent: cùm numerus infinitus dari nequeat. Si finita; ergo non omni assignato numero; sed alicui finito correspondere debent.

EXPENSIO V.

In quantitate partes infinitæ capacitatis spiritualis, seu mentalis capaces sunt.

LIcet excluserimus puncta infinita in quantitate, & indeterminata, quæ actu sint; non tamen quandam infinitam capacitatem partium exclusimus, quam hac, & sequenti expensione in animo est declarare.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

In quantitate partes in infinitum concipi possunt, dummodo quantitas concipiatur.

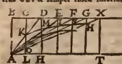
PRobatur. Nam essentia quantitatis in partium capacitate consistit: Ergo si quantitas concipiatur, capacitas partium concipienda est.

* 1 Mathematicè. Docet Euclides lib. 10. elemen propos. 12. reperire lineas longitudine alteri lineæ incommensurabiles, quarum natura talis est; vt facta qualibet in eis diuisione, quamuis minimâ, & quacunque adhibitâ partium multiplicatione, nulla tamen pars possit deserniſe pro communi mensurâ illarum; sed semper inuicem pars vnius, parti alterius comparata inæqualis inueniatur. V.g. hæc diuidatur in 10, vel 100, vel 200, partes, illa in 7, aut 25, aut 138, aut quoquo modo in partes aliquotas: numquam tamen vna, alteri commensurabitur; semperque partes dissidebunt, quousque erunt partes. Hinc autem deducitur, quòd erunt in infinitum diuisibiles. Alioquin, si tandem ad minimas deuentum esset; iam, cùm omnia minima sint æqualia, partes factæ æquarentur, contra euidentiam demonstrationis.

* 2 Docet Euclides propos. 49. lib. 10 elem. à mediâ, quæ est irrationalis linea, infinitas irrationales facere; quæ nulli antecedentium irrationalium parti sint in aliqua sui parte æquales, idest omnibus irrationales; Ergo eadem quantitas poterit habere partes infinitas saltem conceptas intellectu; cùm nequeat inueniri pars adeo minima, quæ alteram exæquet. Alioquin tandem aliqua reperiretur eadem cum aliqua ex antecedentibus, vel tota, vel in aliqua sui parte; Si enim punctis constaret, in numeris ea puncta numerantibus proportiones illarum exprimi possent: & ita sicut omnis numerus alicui numero est proportionatus; sic reperiretur irrationalis alicui irrationali consentiens, cuius proportio in numeris exprimi posset. Quare irrationalis non esset: Ea enim est irrationalium incommensurabilitas; quæ nullis numeris effari possit.

* 3 Probatur. Ductis parallelis A H, & B C, & perpendicularibus B A, & C L, &c. Ducantur ab A puncto rectæ A D, & A E, & A F, & A G, &c. in infinitum. Dico quod C L diuiditur in partes minores, & minores in infinitum: & tamen numquam finiri potest.

Nam primo in K bifariam; deinde per E in tres partes: deinde per A F in quatuor, in quinque per A G, in sex per A O X, ita vt O L sit sexta pars totius C L: & semper lineæ inferiùs, & inferiùs

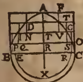


diuident in partem minorem, iterumque minorem, & nũquam ad punctum L peruenient, quia A X, aut quælibet alia longiùs in infinitum ducta, semper magis distabit in O; quam in A à linea A H; cùm faciat angulum A O L. Alioquin si conueniret in O, non esset recta; vt præsuponitur. Sic lineæ C K, & M D, & I E semper breuiores erunt in infinitum: Quia M D minor erit K C, & I E minor, quàm M D, & V F, quàm E I, vt ostendemus dante Deo in tractatu perspec. & quilibet ex se potest concipere. Quapropter illæ lineæ poterunt diminui in infinitum; & semper supererit, quid auferatur.

Probatur 4. Trac. de annulis solidis demonstramus. Annulos solidos, per quorum soliditatem conoidis parabolici superficies transit, esse inter se æquales; & eorum superficies horizontales inuicem quoque æquales. Sic crassitudo P B in annulum B X R solidum circa conoidem B A C flexa, & per cuius soliditatem per B, & P conoidis superficies transit; iste inquam annulus est æqualis annulo P I grassitiei maioris; sed minoris ambitus, & etiam annulo I D, & tandem D F Cylindro. Hi verò annuli, & superficies eorum orizontales; dum dilatantur gyro, restringuntur soliditate, superficieque in infinitum. Vel ergo semper reperitur soliditas, & soliditas: superficies, & superficies; quæ minor sit in infinitum, & in infinitum, vel non? Si non; ergo deueniemus ad vltimum indiuisibile in superficie annulari; quæ erit circumferentia, & in annulo solido ad vltimum indiuisibile soliditatis, quod erit superficies vltima, in quam desijt soliditas, quæ soliditati Cylindricæ D F æqualis

erit;

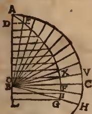
erit; quod eſt abſurdum, cùm ſuperficiei ad corpus, & lineæ ad ſuperficiem nulla ſit proportio; quia ſunt in diuerſo genere, & primo quãtitatis. Deinde tunc parabola A P B de P angulo ad alterum angulum B more diagonalis non tranſiret; cum nulla eſſet graſſities: ſed parallelæ P V congrueret; quod contra naturam parabolę eſt: cum nunquam parallela diametro linea parabolica eſſe poſſit. Quod ſi graſſities P B nunquam ad vltimum ſui eſſe perueniet. Ergo ſoliditas eſt diuiſibilis in infinitum. Eademque ratione ſi ſuperficies S B nunquam ad vltimum ſui eſſe peruenit. Ergo diuiditur in infinitum.



* 5 Docet Archimedes, & nos de ſolidis, & de ſphæra, & ſphæræ ſuperficie. Corpus ſegmentis conorum ſphæræ inſcriptum eſſe ſua ſoliditate minus, quam quadruplum ſuperficiei circuli maximi ſphæra inſcripti. Et ſemper creſcentibus, & multiplicatis lateribus quocumque numero quadruplo, accedere quidem ſemper magis ad æqualitatem, tum ſoliditate quadrupli coni inſcripti, tum ſuperficie quadrupli circuli maximi: ſed nũquam ad eam peruenire creſſente ſemper figurâ conica in ſoliditate, & ſuperficie; ſed ſemper minoribus, minoribuſque incrementis in infinitum. Ergo quantitas illa, quâ deficit figura conicis ſegmentis conſtans ſphæræ inſcripta, tum ſuperficie accedendo ad quadruplum maximi circuli, tum ſoliditate ad quadruplum coni inſcripti, recipiet infinita augmenta in infinitum abſque eo, quod æquet ipſum quadruplum: quare quantitas illa per quam fit acceſſus ad quadruplũ circuli, vel coni erit diuiſibilis in infinitum; cùm additione minoris, & minoris, quanti, numquam ad quadruplum deuenire poſſit.

6 Probatur. Nam licet angulus contactus ſit minor omni acuto angulo. Iſte tamen angulus poteſt diuidi in finitas quidem partes; ſed in infinitum. Poſſunt enim fieri circuli centris à linea, quam tangit, perpetuò remotioribus: Sic poterit fieri circulus ſemidiametro digiti vnius, ſemidigiti, & ſic in infinitum. Sed illi circuli ſemper faciunt angulum contactus in infinitum minorem. Ergo angulus ille in infinitum diuidi poteſt.

* Probatur vltimò ex linea quadratrice G A. Equidem; etiã ſi vltima pars quadrantis C V diuidatur, & ſubdiuidatur in infinitum; ſicut, & vltima pars proportionalis ſemidiametri O B; & à partibus ſubdiuiſis circumferentiæ, ad centrum rectæ, vt B V ducantur. Sicut & à partibus eiuſdem rationis ſemidiametri, perpendiculares, vt O X; In mutuis occurſibus, & interſectionibus X puncta quadratricis ſemper, ſemperque approximantia magis ipſius baſi exhibebunt; ſed numquam ad ipſam baſim B F peruenientia. Quare Quadratrix per ea puncta continuata, numquam conſequetur ſuam baſim, aut ad eam coniungetur, vt oſtendemus coroll. 2. expen. 3. trac. de lineis flexis in fine. Vnde partes, quæ inter baſim, & datam partem vltimã quadratricis reperiuntur, vt F X, erunt in infinitum diuiſibiles. Multa ſunt in idem conſpirantia argumenta philoſophica, ſed, quæ, vt extera conſultò relinquimus, cum ſatis ſuperque hæc conuincere videantur.



EXPENSIO VI.

An partes quantitatis phiſicam diuiſionem in infinitum ſubire poſſint.

HÆc quæſtio philoſophicè ſoluenda eſt, cùm hoc, non ab ipſa quantitate dependeat; ſed à rerum natura: Licet enim res donec concipiantur quantę ſemper vlteriùs diuiſibiles concipi debeant. Nihilominus poteſt eſſe; quod res determinatam quantitatem ad ſui exiſtentiam repoſcant, ſic ipsâ earum naturâ poſcente: & ideo quòd licet vlteriùs, vt quantæ diuiſibiles ſint, ſi tamen diuidantur, pereant, cùm iam eâ quantitate non potiantur, quæ ad ipſarum conſtitutionem requiritur.

CONCLVS. I. PROPOS. VII.

Probabile eſt in diuiſione quanti tandem eſſe neceſſariò quieſcendum.

1 PRobatur. Qualitatis per gradus augmentabilis primus gradus à Deo, vel produci poteſt; vel non. Si poteſt: Ergo ille eſt indiuiſibilis: Neque enim ſub minori quantitate intenſionis, qualitas illa producibilis eſt ex ſuppoſito, alioquin aſſignatus ille gradus primus non eſſet. Si verò dicas. Nequaquam id poſſe facere Deum. Illa igitur qualitas primum gradum non habet, à quo produci incipiat, & quomodo habebit ſecundum, & tertium?

2 Efficiat Deus primam partem rei, quam poteſt facere. Sed non repugnat, quod faciat Deus id, quod poteſt. Et ideo non repugnabit conſequenter, quod primam partem rei producat. Quare neque repugnabit, quod vltimam relinquat.

3 Multa ſunt, quæ videntur per ſolam diuiſionem proprias formas deperdere, & alias conſequi. Ergo etiam erunt aliqua, quæ diuiſa ſe ſubducent, & in nihilum abibunt. Nam difficulter poteſt oſtendi in aduſtione ligni, quòd forma noua cinerum ab igne introducatur. Cùm ignis formam cinerum, vaporum, carbonum, ſpumarum, ſcoriarum, & tam diuerſarum rerum, in quæ lignum, & alia ſimilia in ſe adurendo conuertuntur, non contineat. Quod ſi noua forma non eſt ab igne; à quo erit? niſi à ſolâ ſegregatione, quam præſtat ignis, tanquam à cauſa deſtruente coniunctionem ſub quâ in eſſe perfectiori, & ſub forma altioris ordinis detinebantur. Quâ deſtructâ ſubiectum ad aliud, ad quod erat in potentia, receſſit. Si ergo res per ſolam diuiſio-

uisione possunt mutari; ergo etiã in nihilũ redigi.

4 Viuentia determinatos limites paruitatis, & magnitudinis recognoscunt ita, vt datâ vniuscuiusque specie, sub minore quantitate produci nequeant. Ita ergo non improbabiliter poterit de quacumque re inanimatâ concludi, licet tamen repugnantiam; cur sub minori quantitate esse nequeant, euidenter non cognoscamus.

5 Deus videt omnes partes factibiles in quanto, & quæ simul, & quæ successiuè fieri queunt. Ergo præter illas diuisiones, quas videt, Deus nullas alias agnoscit. Ergo partes sunt ad vltimum sui esse redactæ: Alioquin, si adhuc esset capacitas partium, non essent omnes partes acceptæ; quas videret Deus.

6 Deus quoque agnoscit extremo signato A, quæ pars immediata succedat; Quæ erit indiuisibilis; Siquidem, si multas partes concluderet, iam non esset pars immediata.

Objicies si in quanto partes in infinitum concipi possunt. Ergo etiam fieri.

Respondetur diuersam esse rationem. Nam concipi quidem possunt; quia supponitur id quod partes essentialiter recipit: At si per ablationem subiecti tollatur, & quantitas; tunc sicut quantitas non est, sic nec diuisibilitas ampliùs concipi potest. Nos autem dicimus, quòd substantia determinatos limites paruitatis obtineat, ita quòd, cùm ad illud vltimum deuentum fuerit, pereat, & deficiat. Vnde neque per diuinam potentiam possit in minutiores partes discindi: nisi pereat: Eo quòd essentialiter ita poscat esse, nec sub minori paruitate coarctari possit.

Dices nulla est ratio assignabilis; cur dato quolibet minimo quanto, minus etiam dari non possit; Ergo quantum est diuisibile in infinitum.

Respondetur eandem rationem esse de multis alijs in natura existentibus, in quibus, licet nullam possimus reddere rationem; cur non potuerint aliter esse; adhuc tamen ita necessariò sunt. Scimus enim repugnare mundum non existere in aliqua capedine; & scimus item in spatijs imaginarijs infinitas capedines reperiri. Sed non possumus cognoscere. Quare Deus potiùs elegerit hanc capedinem, quàm illam. Sic non est maior ratio, quod motus diurnus tendat in Occidentem potiùs, quàm in Orientem; & tamen illa tendentia, siue in hanc, siue in aliam partem necessaria est. Itaque sic philosophandum de quanto: Quamuis enim non repugnet vlteriùs diuidi; non tamen inde asserendum; quòd possit semper diuidi. Licet enim repugnantia ex parte quantitatis non esset: posset tamen à substantia, seu qualibet rerum corporearum specie, repugnantia suboriri.

Dices inter ens, & nihil est infinita distantia: Ergo, antequam deueniatur ad nihil, infinita diminutio fieri poterit.

Respon. Semper facta qualibet diuisione, esse eamdem distantiam rei à nihilo. Vnde, cùm per diuisionem non procedamus ad nihil, distantia infinita non erit in causa; cur infinitus processus in diuidendo fieri queat. Quare concludimus generaliter non esse partes in infinitum factibiles in re quanta; nec quidem in ipsa quantitate; nisi ex suppositione, quòd maneat quantitas: Sed quia diuidendo in infinitum perit omne subiectum corporeum; perit etiam quantitas ipsa. Vnde infinitæ diuisibilitatis, seu in infinitum tendentis capax non est.

7 Probatur etiam conclusio. Agens naturale V. g. Ignis attingit omnes partes subiecti disgregando, cùm in omnibus sit calor. Vel ergo omnes partes factibiles disgregat, & iam partes in infinitum distinguibiles non habemus; sed quæ, omnes tandem disgregari, & seiungi possint. Quod si aliquas. Tunc non est maior ratio de vna, quam de alia: cùm calor sit in quacumque parte subiecti, æqualiter intensus; & sic subiectum secundùm omnes suas partes adustum, non esset dilatatum, cùm aliquæ transirent immunes ab efficacia caloris.

EXPENSIO VII.

Quid sit punctum phisicum, & reale.

CONCLVS. I. PROPOS. VIII.

Punctum phisicum partes habet non possibiles, vel factibiles, sed dessignabiles tantùm; dessignabiles quidem essentiâ suâ sic poscente; non factibiles autem per accidens.

Ex dictis hæc conclusio, quæ puncti phisici essentiam explicat eruta est. Si quidem, cùm probauerimus puncta per se indiuisibilia nõ reperiri in quantitate; restat, dùm etiam excludimus progressum in infinitum; quòd tandem ad aliquod punctum per accidens saltem indiuisibile deueniendum sit; quod quidem partes consequatur, quæ tamen diuidi nequeant; non quia illa entitas ratione quantitatis capax non sit maioris, & vlterioris diuisionis: Sed quia non est capax ratione substantiæ, & speciei; quæ sub minori quantitate conseruari nequit.

Dices. Si ergo partes in puncto conceptibiles sunt; ergo etiam; cùm subsit quantitas ipsa huius dessignabilitatis capax; in illa, vt correspondeat nostris conceptibus in infinitum progredientibus, partes minores, & minores in infinitum inuenientur.

Respondetur. Non consequi partes dessignabiles: nisi ex suppositione, quòd sit quantitas. Et facta hac suppositione posse intellectum in infinitum procedere in subdiuidendo: quia scilicet rationem formalem intuetur; ob quam vlteriorem diuisionem concipere potest. Verùm absolutè nequaquam; neque enim in illo puncto talis subest quantitas, quæ illarum diuisionum sit capax. Quoniam illa quantitas est quantitas subiecti; quod respuit vlteriorem diuisionem, & si fiat perit subiectum. Reperitur itaque in puncto ratio formalis vlterioris diuisionis; non verò entitas illi correspondens. Sicut in homine reperitur ratio formalis vniuersalis: non ipsum vniuersale, scilicet vnum quoddam in multis; Et cùm concipimus animalitatem, concipimus vnum quoddam in multis commune Homini, & Leoni: nec inde, si quando dicatur de Homine, est etiam Leonis; verùm fit Ipsius Hominis, & propter suam ipsam animalitatem dicitur Homo, animal. Si ergo in puncto quantitas concipiatur, vt quantitas partes obtinet; at si consideretur, vt coarctata puncto; & in substantia tali, partes habere nequit. Sic pietas in Deo, vt pietas, est distincta à Iustitia: cum tamen in ipso Deo sit vnum quid, & idem attributum.

Dices

Dices secundò idem punctum habet partes Orientales, Occidentales. &c. cùm vndique à similibus punctis tangi possit, & cum eis vniri: ergo plures in illo partes reperiri possunt.

Respondetur. Quantum aliquod posse plura sibi æqualia coniungere, quam plura se minora respectu suę soliditatis: ita vt minor sit proportio rerum æqualis soliditatis se alteri quanto A coniungentium ad quanti A soliditatem; quàm minoris ad ipsam soliditatem. Sic Cubus sex sibi cubos æquales coniungere potest ob sex æquales superficies, quibus circundatur.

Ita vt proportio cuborum æqualium, se alteri sibi æquali coniungentium sit vt 6. ad 1. At si cubi minores accipiantur, V.g. quorum 27. æquēt cubum A; tunc quælibet superficies sibi coniunget 9. cubos minores eo quòd comprehendat 9. quadratas superficies æquales basibus eorum, & ideo erunt cubi ambientes, & tangentes cubum maiorem 54.; & hinc cum cubus maior sit positus 27. cuborum cubis tangentibus æqualium erunt, vt 54. ad 27. nempe vt 2. ad 1. Et si cubi tangentes diminuantur respectu cubi A, & 64. minores integrent illud maius in sua soliditate; tunc quælibet superficies cum sit 16. quadratulorum æqualium basibus cuborum paruorum tangentium, erunt tangentes cubi 96. nempe vt 96. ad 64. nempe vt 2. ad 3. & sic consequenter. Vbi vides æqualia habere maiorem capacitatem ad sibi coniungendum æqualia: quàm minora. Superficies ergo externa quanti, quę tangit aliud æquale, se exhibet à pluribus tangendam æqualibus, quàm inæqualibus: Quare etiam punctum licet in se non habeat partes solidas, quæ omnibus punctis æqualibus tangentibus correspondeant: Poterit tamen consequi superficies tactiles plures: quàm quòd ipsum sit in sua soliditate, in quibus tangatur. Cùm sit hæc omnis quantitatis proprietas; Cùmque punctum à ratione, & essentia quantitatis non excludamus hinc est. Quòd & eius terminationes, vt possit esse quantitatis, ei concedamus.

Dices hoc punctum tangeret aliud secundùm superficiem exteriorem, & non secundùm interiorem: Ergo partes complecteretur exteriores, & interiores. Respondetur negando consequentiam. Nam superficies quanti, non est pars quanti; sed eius terminus exterior, si præcisè sumatur, & extrinsecè tantùm, vt infra ostendemus. Tactus verò extrinsecus est; quare ab illo tactu, qui non est secundùm soliditatem, ad partes solidas non est arguendum. Nam tunc argumentum valeret: si partes solidæ ex superficiebus, prout tanguntur, & quatenùs tanguntur, constarent: prout verò sunt tales, nulla profunditate gaudēt, & ideò nec soliditatem adipiscuntur. Cum tactus non sit, nec in minima quidem parte penetratio. Quare superficies tactæ partes solidas integrare, & constituere nequeunt, vtpote indiuisibiles. Vt verò hæc indiuisibilitas superficierum intelligenda sit infra dicemus.

Dices 4. Si sint duo circuli concentrici, qui super duas lineas simul se voluant peruenientes ad eundem terminum, æqualem lineam percurrent: Ergo duo puncta à circulo minori in motu simul occupantur; ergo punctum circuli partes habet, quod pluribus punctis in linea, quam percurrit, correspondeat.

Respondetur moueri circulum minorem velociùs, quàm maior circulus. Velocitas autem motus est causa, quòd simul occupet duas partes velocior, & minor circulus; dum maior vnum physicum indiuisibile pertransit tardiori motu. Nam illa correspondentia motus ad duas partes non est simul; sed successiua. Quare alicui superficiei etiam indiuisibili plures æquales partes correspōdere possunt successiuè; imò simul, quod contactus indiuisibilium sit diuisibilis. Velociùs itaq; moueri est acquirere plures partes; dū aliud tardius acquirit partem aliquam indiuisibilem, & sicuti datur indiuisibile physicum; sic datur motus tardissimum, quò tardius dari nequit: quia scilicet virtus motiua sub minori intensionis gradu nequeat produci, quæ est ad vnum indiuisibile physicum quantitatis.

EXPENSIO VIII.

Quid sint Mathematica indiuisibilia.

TRia sunt Mathematica indiuisibilia. *Punctum*, cuius pars nulla. *Linea*, quæ partes habet secundùm longitudinem tantùm. *Superficies*, quæ partes obtinet secundùm longitudinem, & latitudinem, non secundùm profunditatem, de quibus acturi sumus.

PRÆASSVMPTVM.

OBseruandum est autem. Quòd etiam priuatio corporis easdem commensurationes; & figuras, quas corpus obtinet, consequi potest relatiuè ad corpus, & abusiuè. Sic capedo corporis cubi cuba est, & cubi palmaris, cuba est, & palmaris. Sicut etiam priuatio lucis, nempe vmbra, longa, lata est, & vt lux mouetur, vt lux, figuram habet, quam à corpore illuminato consequitur.

CONCL. I. PROPOS. IX.

Superficies, linea, punctum sunt quid reale indiuisibile, iuxta illud esse secundùm quod accipiuntur: non absolutè.

PRobatur. Nam priuationes quantitatis esse nequeunt, & accipi, vt vltimum non esse quantitatis. Nam non datur priuatio priuationis: At verò linea, cùm sit terminus superficiei, esset priuatio superficiei; sed ipsa superficies esset quoque priuatio, cùm esset vltimus terminus corporis; Ergo esset priuatio priuationis, quod esse nequit.

2 Corpora se tangunt in superficie; Sed non se tangunt in nihilo, seu priuatione; quia contactus nihili, nullus est: Ergo superficies est aliquid rei. Sed illud rei non habet profunditatem aliquam, cùm corpora se tangentia non se penetrent: Ergo est aliquid rei indiuisibile.

3 Superficies, & lineæ figuram constituunt, vel planam, vel corporis solidi. Ergo non sunt nihil; sed aliquid rei. At figura partium interiorum non est Ergo exteriorum. Verùm id, quod est purè exteriùs nulla profunditate grassescit, si sit corpus; nulla latitudine dilatatur; si sit superficies. Ergo superficies, lineaque indiuisibilis est. Et idem dicas de puncto; cùm lineæ extremum sit. Neque valet recurrere ad intellectūs

quia contactus; figuræque sunt quid à parte rei. Dices. Si superficies, linea, punctum sunt quantitates, & sunt indiuisibiles. Ergo quantum ex indiuisibilibus componitur.

Respondetur id non sequi. Nam non sunt indiuisibiles absolutè; sed indiuisibiles, vt vltimę & contingentes aliud secundùm sui vltimum esse: Si autem est vltimum esse quanti, non potest consequi secundùm illud, in quo est vltimum, & secundùm illud, in quo tangitur, partes. Nam, si superficies v. g. partes enumeraret, illa non esset vltimum molis; nec propriè tangeretur; sed penetraretur: cum illud, quod tangeretur, non esset exterius; sed quid internum. Cùm igitur sint indiuisibiles, vt vltimæ sunt, & quatenus tactæ; illis tamen quantitas, vt tacta; & vltima non subsistit, nec esse potest sine partibus intrinsecis, ob quas vltima dicitur; si enim partes internæ non essent, hæc non esset vltima, nec exterior. Quare licet, vt vltima, partes non amplectatur profundas, & vt tacta; quia tamen se solâ non est, nec esse potest; hinc emergit, quòd non sit absolutè indiuisibilis; Sed diuisibilitatem, vt composita ex alijs nanciscatur.

CONCL. II. PROPOS. X.

Pars vltima indiuisibilis, nec est, nec esse, aut concipi potest sine alijs compartibus.

PRobatur. Quod esse nequeat sine suis compartibus: tum ex dictis. Quia illa se solâ, aut esset quantitas molis, aut diuersæ speciei, non molis; quia trinam dimensionem non consequeretur, non alterius speciei: Quia aliam entitatem; quam quantitatis molis non obtineret, cùm sit terminus corporis solidi.

Quod verò nequeat concipi sine suis compartibus perfecto conceptu, probatur. Quia superficies, linea, punctum sunt vltimum esse rei: Quod autem vltimum refertur ad primum. Quare est quid relatiuum: Relatiua autem sunt simul cognitione, nec vnum sine altero perfectè concipi potest. Quare, nec superficies poterit concipi sine alijs compartibus.

2 Si punctum posset concipi sine alijs partibus v. g. sine linea deberet concipi prout definit Euclides. *Cuius pars nulla*: sed id, quod nullam habet partem, quantitatis nihil est, ergo deberet concipi, vt priuatio quantitatis, & vt nihil, & idem dicas de lineâ, & superficie secundùm eam rationem, secundùm quam indiuisibiles sunt.

Dices. Tactus non præscindit: & tamen tangit solam superficiem; Ergo superficies, si se solâ tangi potest; etiam se solâ, & esse, & concipi potest.

Respondetur. Tactum esse modum quendam. Modus autem non est aliquid superadditum rei, cuius est modus. Quare, cum sit idem, ac ipsa superficies modificata, sicut ipse l. realiter rebus superueniat, nec esse, nec concipi sine illis valet, quæ modificat. Sic nec ipsius rei modificatæ ab alijs, quibus essentialiter annectitur, conceptus distinguere potest; si de perfectis cóceptibus sermo sit, sicut nec modus actionis, quòd sit facta hoc, vel alio modo vim habet seiungendi, nec realiter, nec per intellectum ipsam actionem à motu, & passione licet modus actionis passionem nullo modo afficiat. Sic situs non efficit, figuram sine re figurata posse subsistere, licet figuram ipsam afficiat, & eam mutet.

3 Probatur vtraque pars. Quantitas molis non datur; nec concipi potest sine superficie, sicut nec superficies sine linea, nec linea sine puncto. Alioquin esset quid infinitum. Ergo neque superficies, linea, punctum sine quantitate molis, cùm quantitas molis non sit aliquid latiùs patens, quàm ipsius terminationes.

COROLLARIVM.

CVm ergo superficies, linea punctum non sit, nec esse possit sine corpore: hinc est, quod non sint; nisi vt tales, indiuisibiles; non autem absolutè, & conceptu adæquato concepte, & quòd, nec conceptus superficiei, nec lineæ, nec puncti perfectus, & adæquatus hauriri queat; & ideo, quòd in superficie, lineâ puncto semper partes cócipiendæ sint, si sit adæquatus cóceptus. Quare à Mathematicis definitur, nec superficies, nec linea, nec punctum, secundùm suum adæquatum conceptum. Verùm secundùm id; quod pręcisè dicunt, & explicitè. Sicut definitur à Theologia pietas Dei, licet idem sit cum iustitia, non quidem, vt idem est cum ipsa, & prout in suo conceptu eam implicat; sed explicitè prout ab illa conceptu inadæquato præcisa concipitur.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Superficies, linea, & punctum secundùm suum esse inadæquatum à Mathematicis accipiuntur.

PAtet. Quia definiunt ea esse quædam indiuisibilia, aut omnino, aut secundùm quid. Sed etiam definiunt illa, vt quantitates. Ergo considerant inadæquatè. Cum quantitas adæquatè concepta nullis indiuisibilibus integretur.

CONCL. IV. PROPOS. XII.

Superficies, linea, punctum, accipiuntur quoque, vt negationes vlterioris extensionis.

PRobat. Quia superficies non semel accipitur in aliquo corpore solido pro eo, quod mediat inter vnam partem, & aliam non realiter factam; sed tantùm conceptam. At id, quod inter vnam, & aliam immediatam interijcitur, nihil est, & solùm negatio vlterioris extensionis, prout taliter limitatur, aut limitata fuit ab intellectu: Ergo superficies etiam pro negatione extensionis vlterioris accipitur. Idem de linea, & puncto intelligi debet. Nam linea distinguens superficiem in multas partes, est inceptio huius partis, & desitio alterius in eâdem superficie cócepta. Dices. Non potest concipi negatio negationis. Respondetur concipi superficies, non vt negatio; sed vt, quid positiuum inadæquatè conceptum, in quo, & cuius potest negatio concipi,

EXPENSIO IX.

An datis indiuisibilibus, illa possint esse obiectum Mathematicæ.

BOnauentura Cauallerius per indiuisibilia, libro ad id conscripto, non sine ingenio, & subtilitate Mathematicam se promouere profitetur; Et ex contemplatione punctorum indiuisibilium in quantis existentium æqualitates, & proportiones Mathematicorum corporum inuenire.

Vnde rectè hic quærimus; an indiuisibilia, ex suppositione, quòd darentur, possint deseruire pro obiecto, quod speculationis Mathematicæ capax existat.

CONCL. I. PROPOS. XIII.

Indiuisibilia simpliciter non sunt obiectum Mathematicæ.

EST contra prædictum, Verùm communis inter Neotericos Bettinum par. 2. Epilog. Planim. Bullialdi de lineis spiralibus propos. 42. Not. 2. Vincentij Mutij de Maximis, & Minimis lib. 1. propos. 17. Primus quidem directè impugnat; Alij verò amicissimi sui laudant ingenium; cautè tamen vsurpandam doctrinam censent. Et tandem Goldinus de centro grauitatis hanc doctrinam diuersimodè carpit.

1 Probatur. Licet enim indiuisibilia in quantitate laterent; non tamen constat; An sint finita, vel infinita. Ergo non possunt præstare fundamentum euidens demonstrationi.

2 Suppositis punctis finitis. Dantur lineæ irrationales, superficiesque, & corpora. Si verò punctis finitis hæc constant, irrationales nullo modo esse queunt, cùm puncta finita aliquo numero exprimi possint: Partes verò linearum incommensurabilium nullo numero effari possunt, vt suo loco dicemus.

Dices indiuisibilia quidem proportione rationali potiri, seorsim, & distributiuè sumpta; non autem collectiuè.

Sed frustra. Nam collectio finitorum nihil aliud est; quam ipsa distributiuè sumptorum multitudo. Vndè si distributiuè dicunt omnia proportionem, & numeris indicari possunt. Ergo etiam omnium collectio numero aliquo exprimibilis est.

Deinde licet finita: non tamen omnia accipi possunt: sed aliqua; à quibus paritas ad alia acceptibilia deducatur. Sed illa aliqua rationalia sunt. Ergo etiam rationalis erit aliorum proportio.

3 Suppositis item punctis finitis. Destruit hæc opinio lineas; superficiesque potentiâ tantum commensurabiles. V.g. Latus quadrati incommensurabile est diagonali; licet eorum quadrata commensurabilia sint, nempe vt 1. ad 2.; Sed omnes lineæ æquales lateri, ex quibus constat quadratum ex latere effectum sunt incommensurabiles diagonali, & omnibus illi æqualibus, ex quibus constat quadratum diagonalis. Ergo totum quadratum lateris incommensurabile esset quadrato diagonalis. Cùm lineæ omnes, ex quibus vtrumque quadratum conficitur, sint inuicem incommensurabiles.

4 Datis punctis infinitis. Ea ex Euclide proportionem dicunt; quæ multiplicata possunt se inuicem superare. Sed infinitum multiplicari nequit; neque aliud superare. Ergo datis punctis infinita, quantitates, vt ex ipsis constantes, considerata nullam inuicem dicent proportionem. Quod autem infinitum multiplicari nequeat; patet. Quia daretur infinitum triplum, quadruplum, centuplum: Ergo daretur infinitum alio maius: Si autem vnum infinitum concedatur maius alio; iam ratio infiniti cessat in minori; Cùm ibi finiatur, vbi incipit aliud augescere.

5 Probatur. Quoniam de finito ad infinitum arguere non licet, cùm infiniti, & finiti nulla sit proportio. Sed in argumentis omnia quantitatiua accipi nequeunt, quia infinita sunt: Ergo aliqua V.g. 10. aut 20. lineas ex quarum æqualitate; vel proportione ad alias, arguitur totam planitiem alteri, vel æqualem esse, vel proportionalem. Ergo argumentum procedit ab aliquibus lineis ad omnes, Sed aliquæ finitæ sunt, omnes infinitæ. Itaque argumentum arguit à finito ad infinitum; siquidem superficies totæ infinitis lineis constant.

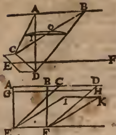
Dices omnia aliarum, etiā si sint infinitæ similis ratio demonstratur, & ideo aliarum quamuis infinitatum idem argumentum vrget.

Respondetur nullam rationem æqualitatis, vel inæqualitatis in indiuisibilibus reperiri; quæ authos admittit; cùm punctum sit, cuius pars nulla: Vnde tota inæqualitas rejicitur in numerum punctorum; quibus lineæ constant; qui numerus cum sit infinitus omnem quoque proportionem obliterat. Deindè cum nesciamus an in quantitate sit maius, aut minus infinitum alio, vel æquale. Si omne infinitum est æquale, destruit omnem proportionem maioris, aut minoris inæqualitatis. Si admittuntur infinita inæqualia non possumus scire; an sint plura, vel pauciora; quàm oportet; & sic proportio, quæ secundùm alteram rationem militat; à numero incerto indiuisibilium destruatur.

6 Probatur vniuersaliter. Nam ex hoc sequeretur; quod minus esset æquale maiori. Dicunt enim aduersarij: Rectangulum A B E F, in schemate inferiori, esse æquale rectangulo X C D F, vt verè est, & ostendit Euclides lib. 1. propos. 36. Sed non ex demonstratione Euclidis. Verùm, quia inter lineas A D, E F non possit intercipi; nisi æqualis multitudo linearum parallelarum, qualis vna ex ipsis est C H. Quòd si ita est. Ergo E C esset æqualis lineæ E A, nam lineæ omnes, quæ duci possunt inter parallelas F F, & A D occupāt omnia puncta linearum E A, & E C; Ergo F A, & E C æquali multitudine punctorum constabunt. Quare E C erit æqualis lineæ E A maior minori, quòd esse nequit: At si maior multitudo punctorum est in E C: Ergo non tota E C lineis productis occupata est; cùm tamen totam superficiem A D E F integrent, & extendant.

Deinde, si maior multitudo punctorum est in E C; quàm E A: Plures ergo lineæ duci poterunt; cùm ex omnibus punctis lateris E C parallelæ duci queant: Ergo maius planum erit A C D F; quā E A B F contra Euclidis demonstrationem.

* 7 Probat. Nam sint duo plana in figura altiori parallela A B, E F, & sectio C D existat ad angulos rectos ad E F; sintque trianguli C A D, & C D B æquicrura; Erunt ergo inter parallelas E F, & A B.



Illę ergo superficies, quæ inter hæc plana A B, & E F. interponuntur, & secant triangulum C A D, tot erunt, quot illa, quæ secant triãgulum C D B: Ergo erit ęqualis superficies C A D, superficiei C D B, cùm tot lineas sectionibus planorum impressas recipiant ambæ, vel eamdem multitudinem planorum secantium continuorum, vt est I n terminent. Sed verè sunt inæquales: maiorque est C D B, quam C A D, ergo superficies earumdem linearum capax maior esse poterit; quã alia; Quod sint inæquales, patebit ex dicendis Propos. 1. lib. 6. Ele. quòd eadem basis existat, & inæqualis eorum altitudo.

Dices. Lineas considerandas secundùm eumdem situm, nimirùm parallelum. Sed huic objectioni vtraque adductarum proximè probationum satisfacit: Nam in primâ accipiuntur secundùm eundem situm, vel ductum parallelum, & tamen plura puncta reperiuntur in latere B C; quàm B A: cùm tamen planities sint ęquales. Quòd si secundùm eundem situm lineæ G H non sunt plura puncta in E C, quàm H A; Ergo neque in secundo schemate altiori plura puncta erunt in C B, quàm C A, & ideo C A D, & C B D erunt æquales superficies. Quod verum non est ex cit. Eucl. 1. propos. lib. 6.

Deinde sequeretur, quod lineæ C B essent æquales lineę C A, saltem secundùm illum situm acceptæ, cùm eadem multitudo punctorum in C A reperiatur, quæ in C B, quòd tamen falsum euidenter est.

8 Probatur. Quia dantur figuræ Isoperimetræ, quæ scilicet sub eodem ambitu, linearum, & laterum superficies continent inæquales. Quę tamen non essent: Cum eadem multitudo punctorum in lateribus æquales in multitudine duci lineas superficiem secantes exposceret, cumque multitudo linearum, tùm huius, tùm alterius superficies esset æqualis; superficies quoque essent æquales contra præsupositum.

Dices. Ex æqualitate omnium linearum, quæ duci possunt in circulo à centro ad circumferentiam, arguitur æquidistantia circumferentiæ à centro. Sic ex omnibus angulis rectis, quos facit linea erecta, & insistens cum omnibus lineis, quæ sunt in plano, arguitur, quòd illa linea sit perpendicularis lib. 11. propos. 3. Eucl.

Respondetur. Hic neque æqualitatem, neque proportionem argui: sed solùm situm. Vnde est dispar ratio. Deinde à multitudine linearum æquali, non arguit vllam æqualitatem: Sed ab ipsis lineis æqualibus, siue, quot quot sunt, æquidistantiam definit. Ita vt argumentum in numero linearum non fundetur: sed vel in situ, vel in æqualitate earum: Vnde patet, quòd ab infinitate, multitudineque earum omninò præscindit. Tandem non arguit à lineis, vt indiuisibilibus ad planitiem, sed à lineis sumptis prout sunt diuisibiles, & secundùm longitudinem: Vnde non transit de genere ad aliud genus quantitatis. Hinc autem eruitur.

9 Argumentum. In Mathematicis non est bona illatio, cùm fit transitus de genere ad aliud genus quantitatis, V. g. à linea ad superficiem, cum inter prima genera non sit proportio: Sed Cauallerius argumentatur ab indiuisibilibus ad planities, & à planis ad corpora. Ergo eius argumenta verâ, & euidenti illatione non concludunt.



TRA-

TRACTATVS II. PRÆLIMINARIS.

De eſſentia quantitatis diſcretæ.

CVM multa, quæ de quantitatis numericæ eſſentia dicturi ſumus, & etiam ex parte ea, quæ diximus, dependeant à quantitatis diſcretæ cognitione. Hinc eſt, quòd antequàm ipſas Mathematicás propoſitiones attingamus, aliquam de quantitatis diſcretæ eſſentia haurire cognitionem ſit omninò opportunum; nam planiori, liberiorique pede, tùm diſcretæ, tùm continuæ quantitatis relationes, & reſpectus percipiendi facultas erit.

EXPENSIO I.

Quid ſit vnitas numerica.

VNitas, quantò magis ſimplex eſt, tantò laborioſiùs penetratur, vt, velut indiuiſa, ab intellectu non poſſe ſecerni, & in ſua prædicata ſeiungi, videatur. Vnde apud Methaphiſicos mirum eſt, quot quantæque opiniones de *vnius* eſſentia ventilentur. Sed nos, quæ certiora ſunt, & euidentiora ex noſtris Placitis philoſofiels hic deducemus.

CONCL. I. PROPOS. I.

Vnitas numeralis eſt eadem, ac indiuidualis tùm re, tùm ratione.

1 PRob. ex Ariſt. 3. Methaph. tex. 14. *Numero enim vnum dicere, aut ſingulare nihil differt; ita enim ſingulare dicimus, quod numero vnum eſt.*

2 Ratione prima pars oſtenditur. Si vnitas indiuiduationis non eſſet eadem cum vnitate numeri: multitudo quæ opponitur vnitati numeri; non opponeretur indiuiduationi, ſed eſſet quid diſparatum; vt humiditas, quia non eſt contraria frigori, eſt quid diſparatum reſpectu caloris. Vnde cum calore morari poteſt; Sed quælibet multitudo deſtruit, tùm vnitatem numericam, tùm indiuidualem; eſtq; contraris, tùm vni, tùm alteri: Ergo idē eſt vnitas indiuidualis, & numeri.

3 Eatenùs entia ſunt multiplicata, quia numerabilia, & è contra. Multiplicata verò ſunt, quia diuiſa ſunt in ſe, & diuiſa à quacumque alio; Sed eſſe diuiſum in ſe, & diuiſum à quocumque alio eſt vnitas indiuidualis: Ergo hæc ipſa eſt etiam numeralis.

4 Si tollatur per intellectum omnis vnitas numeralis, relinquendo in ſubiecto vnitatem indiuiduationis: Ita vel erunt numerabilia, vel non. Si poterunt numerari; Ergo contra hypoteſim vnitas numeralis adhuc in ſubiecto latet, cùm quantum numerabile efficiat: Si verò non ſunt numerabilis; Ergo contra præſupoſitum vnum erient; Siquidem illud vnum eſt; quod numerali pluritati non correſpondet.

5 Entia numerata conſtituunt numerum. Quia reperit intellectus multitudinem, atque multiplicationem: Sed nulla aliā entia à parte rei multiplicationem adipiſcuntur, niſi indiuidualem: Ergo vnitas indiuidualis, etiam numeralis fatēda.

Prob. 2. pars. Tunc aliquid cum fundamento diſtinguit potentia intellectiua: quando reperit, vel capacitatem in re, vel æquiualentiam ad plura actu diſtincta: ſed hæ duæ vnitates numerica, & indiuidualis diuerſitatem inter ſe non habent, nec pluribus ſeparatis æquiualent. Ergo intellectus illas diſtinguere nequit. Quod diuerſitatem inuicem non ſeruent; quia indiuidua etiam, vt indiuidua, numerabilia ſunt; Et quia numerabilitas, & indiuiduatio vnitatem non variant, nec vnum numerale alio pacto ſe gerit, ac indiuiduale. Quòd verò in ordine ad aliud non diſtinguātur, id facit. Quoniam vnitas numeralis, & indiuidualis non æquiualent diuerſis, cum vnitas numeralis illis omnibus æquiualeat, cui æquiualet indiuidualis. Cui enim iſtę vnitates æquiualere poſſunt? niſi alicui vnitati? Pluribus enim vnitatem habentibus ſubiectum habens vnitatem numericam ſimul, & indiuidualem correſpondere nequit. Illa enim vnitatem duplicem habentia vnumquodque, & vnitatem numeralem, & vnitatem indiuidualem poſſideret. Quare tùm vnum, tùm aliud vtriſque vnitatibus numerali, & indiuiduali correſponderet.

Dices 1. Subſtantię ſpirituales ſunt numerabiles, licet non ſint indiuiduę. 2. Multitudo ipſa eſt quoque numerabilis: Nam exercitus, congregationes, acerui numero ſubeſſe poſſunt. 3. Gradus Methaphiſici etiam in eodem ſubiecto, & modi numerabiles ſunt, & tamen indiuidua nō ſunt: Ergo vnitas indiuidualis numerica non eſt.

Reſpondetur hęc omnia eſſe numerabilia, quo pacto ſunt diuiſa, & vna. Nam quoad ſubſtantias ſpirituales diuiſę verè ſunt ab inuicem, & rationem indiuiduam veram habent ſecundùm Theologos numeroſiores. Quoad verò ea, quę ſunt vnum per accidens: iam ſicut ſunt vnum per accidens, ita numerantur per accidens, & ſic ſtè vnum dicuntur, tùm numericè, tùm indiuiduè. Tandem de gradibus methaphiſicis non alio pacto ſentiendum, qui, cùm ſint quid pluribus commune veram vnitatem nō participant:

& sic nec veram numerabilitatem. Sed eam, quã mens nostra prescindendo illis tradit. Quare sicut verè sunt vnum in intellectu predicata essentialia, vt vnũ cogitata verè numerabilia sunt; & vt in mente, numerabilitatem consequuntur propriam; vt propria vnitate gaudent; nempe intellectuali ad imitationem numerabilitatis à parte rei. Sed tolle, quod apposuit humana mens vnitatis, aut diuisionis, & numerabilis non erũt. Modi verò multiplicantur ad subeundam numerabilitatem per solam fictionem nostri intellectus, qui assumit idem subiectum multoties, & vt subiectum diuersorum modorum plurificat. Non enim potest concipi modus sine re cuius est modus; & ideo, cùm concipit duos modos implicitè, cõcipit gemina vice subiectum, in quo sunt, & sic idem subiectum multiplicat tanquam sibi notum ex gemina varietate. Verùm modus absolutè numerabilis non est. Cùm verò plures modi, vt modi sunt, non sint, nec plures entitatea, nec quid plurificatum, imò ab eodem subiecto, in quo inex stunt, nec re, nec ratione distinguantur, & modus, nec quidem possit concipi sine re, cuius est modus. Ergo tantò minùs numerari.

Dices contra 2. partem. Potest intellectus concipere vnitatem indiuidualem in ordine ad aliud indiuiduum. Numericam in ordine ad se, qui numerare potest: Ergo potest per diuersos respectus istas duas vnitates distinguere.

Respond. Posse quidem intellectum considerare diuersos respectus: sed hoc non est multiplicare conceptus ipsius rei. At relationes diuersas in ipsa re considerare. Quòd maximè asseras de predicamentalibus, vt sunt iste. Nam etiam per aliquos, nec quidem transcendentales relationes suum multiplicant conceptum. Cùm per multos actio, passio, & motus, nec quidem ratione distinguantur, & tamen sunt respectus transcendentales operationis ad agens, & passũ. Sic animal, licet, vt genus, dicat ordinem ad intellectum, & vt animal, ad naturas, in quibus est; non tamen genus, & animal duo conceptus sunt in ipso animali, sed illud ipsum animal genericum est, & prout substat nostris conceptibus.

CONCL. II. PROPOS. II.

Vnitas numeralis est indiuisio in se, & diuisio à quocunque alio.

PRob. ex prefata concl. Quoniam vnitas numeralis est idem re, ac ratione, quod vnitas indiuidualis. Sed vnum indiuiduale definitur; Quòd sit in se vnum, at diuisum à quocumque alio. Igitur tale erit quoque vnum numericum: Vnde eius vnitas erit indiuisio in se, & diuisio à quocumque alio.

CONCL. III. PROPOS. III.

Quantitas continua est fundamentum vnitatis possibilis numeralis in quocumque subiecto.

PRobat. Nam omne continuum diuidi potest: quę verò diuisa sunt indiuidua sunt. Vnde & numerabilia.

COROLLARIVM.

HInc eruitur. Intellectum in re quanta sufficiens fundamentum nancisci numerandi partes. Quia adest earum possibilitas, ob quam saltem potentiâ numerabiles sunt, sicut & sunt potentiâ multiplicabiles. Vnde bene Arist. 2. Methaphis. tex. 2. inquit. *cognoscitur quantum, vt quantum, aut vno, aut numero; omnis autem numerus vno: Quare omne quantum, prout quantum, vno cognoscitur; Et quo primo hoc cognoscitur ipsum vnum, propter, quod vnum, prout vnum, principium est numeri, prout numerus est.*

CONCLVS. IV. PROPOS. IV.

Quantitas intensionis quoque est fundamentum vnitatis numeralis possibilis.

PRob. ex nostris placitis Philosophicis. Quoniam accidens separatum à subiecto, vel saltem diuinâ omnipotentiâ, indiuiduum constituere potest. Quare si tres, & tres gradus accipiantur caloris, & sine subiecto contineantur, efficient duo indiuidua. Ergo etiam qualitas; cùm consequatur indiuidua possibilia, erit fundamentũ multiplicationis, & vnitatis numeralis.

CONCLVS. V. PROPOS. V.

Quantitas successiua, prout dicit res pertranseuntes, est numerabilis, aut actu, aut potentiâ.

PRob. Quia omne, quòd mouetur successiuè, aut extensum, aut intensum, aut discretum est, sed hec propriè numerabilia sunt. Ergo etiam quantitas successiua, quę consistit in motu istarum quantitatum, numerabilis est, quoad partes vi motus pertranseuntes, in quibus ratio temporis consistit.

COROLLARIVM.

ET hinc emergit. Quòd tempus quoque numerabile sit; Quia scilicet numerantur partes equali duratione pertranseuntes, aut saltem proportionali.

EXPENSIO II.

An vnitas, numerusque distinguantur realiter à re, in qua sunt.

CVM dicimus vnum, aut numerabile operę pretium est scire; an intelligamus de subiecto, aut in subiecto sit aliquid aliud, quòd numerabile, & vnum appellatur.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

Vnitas, quæ est principium quantitatis discretæ, non distinguitur realiter à re vnitatem habente.

ESt conclusio nost. Pasq. disput. 45. par. 2. sec. 3.

Probat. Nam si vnitas esset accidens aliquod, suam vnitatem indiuidualem possideret. Hęc vnitas itaque; aut est vna aliâ quadam superadditâ vnitate, aut est vna ex se, si ex se vnitate fruitur: Ergo etiam subiectum vnum esse poterit absque hac superadditâ vnitate. Si verò requiritur alia vnitas, quę sit accidens superadditũ;

iam

iam ad hanc vnitatem alia requireretur, & sic in infinitum, quod repugnat.

2 Per hoc constituitur aliquid indiuiduum numero; *Quod sit vnum in se, & diuisum à quocumque alio*, sed per aliquid extra se non potest quidquam esse indiuisum in se, & diuisum à quocumq; alio, ergo nec vnitatem numericam consequi potest: Minor propos. exponitur. Nam per hoc, quòd substantia sit alba, non est alba in se propriè: quia de se etiam nigredinis capax est. Vnde de se, neque alba est, neque non alba. Ita, si aliquid esset vnum in se per aliquid superadditum, deberet esse indifferens ad diuisionem, & indiuisionem; nempe, neque esse diuisum, neque non diuisum; quod est impossibile.

3 Si indiuiduatio est forma superadiuncta; poterit destrui à Deo. Destruatur. Itaque illa natura iam indiuiduatione expoliata; vel erit à quocumque alio diuisa, vel non? Si non erit diuisa: Ergo erit idem cum aliqua alia natura singulari, & sic esset singularis, ex alterius, cum qua vnum est, singularitate. Quod si, nec quidem ipsa singularis est, eum alia idem sequeretur, & sic de alijs, donec ad naturam singularem aliquam deueniremus, & vltimam, quæ vtique datur, & tunc illa esset vna, cùm sit vltima; quod est absurdum cum dentur multæ naturæ singulares. Vel esset diuisa à quocumque alio illa natura singularitate priuata à Deo. Et iam singularis esset.

Deinde 4. A parte rei vnum in multis non admittitur: ergo quælibet natura in se est diuisa in plura supposita. Alioquin si in se esset indiuisa, & per multas superadditas vnitates diuisa, esset vniuersale à parte rei.

5 Natura non est possibilis sine indiuiduis: Ergo inter eius prædicata essentialia inuoluitur indiuiduatio, & vnitas.

6 Agens terminat ad singulare: Ergo natura de se est singularis. Quòd ad eam terminet agens.

7 Tandem; Si hęc vnitas est superaddita separetur intellectu. Et quęro de entitate illa suâ vnitate expoliata: estne vna, aut multiplex? Si est vna: Ergo sine superadditione alicuius entis, quòd vnitatem prębeat vna est, & singularis: Si multiplex. Ergo sine diuisione aliquid potest fieri multiplex. Deinde adhuc vnum erit, cùm pluritas ex vnitatibus constet: Vnde per ablationem vnius plures consequeretur vnitates. Si quid medium statim apparet absurdum; quoniam vnum, & multiplex negatiuè opponuntur.

CONCL. II. PROPOS. VII.

Numerus, vt numerus est, non est ens distinctum à re numeratâ.

CONtra Auicenam 3. Methaph. Caietanum, nostrum Morandum, & alios.

Probatur. Quia numerus componitur ex vnitatibus. Sed vnitates non sunt, quid distinctum à re vnâ: Ergo neque numerus.

2 Si esset aliquod accidens à subiecto separabile numerari posset. Ergo numerabilitas numeraretur. Quòd est inconueniens.

3 Numerabilitas dicit posse numerari; nempe quandam potentiam ad actualem numerationem. Sed actualis numeratio nihil superaddit aliud: nisi opus intellectus numerantis: Ergo nec numerabilitas aliud superaddet: nisi possibilitas operis intellectus numerantis. Quòd res in esse suo possibili tales sint, quales in esse actuali quoad essentialia inueniantur.

4 Si numerus est accidens; in quo inhæret? Non in omnibus numeratis; alioquin daretur vniuersale à parte rei; nempe aliquod vnum in multis diuisis. Si autem in aliquo tantùm, aut est vnum, aut duo, aut tria. Quare, cùm formæ expositæ suos effectus formales non possint suspendere, trias in subiecto semper trinum denominaret subiectum, & dualitas duo. Quare nunquam posset fieri, aut quatuor, aut quinque. Deinde vnicum posset denominari, trinum, & duo ob formam triadis, vel dualitatis subiecto inhærentem.

5 Si numerus V. g. quinque est ens sine subiecto erit etiam vnũ sine subiecto; quia vnum, & ens conuertuntur. Quod si non obtinet vnitatem sine subiecto; vt patet; neque erit ens sine subiecto. Quod verò numerus, vt numerus vnitatem nõ cõsequatur, patet; quia numerus, vt numerus est formaliter, in multiplicatione cõsistit.

6 Non potest separari ratio ternarij à tribus subiectis. Ergo non est accidens; nam si tale esset, posset auferri, & sic tria indiuidua essent, & non essent tria. Essent enim tria: Quia adhuc manerẽt indiuidua tot, vt erant priùs; cùm nullum destructum fuerit, non essent autem tria; Quia ab eis ablata est ratio ternarij.

Dices, Si ergo numerus accidens non est; nec aliquid reale: Ergo Musica, & Arithmetica agens de numeris erit scientia fictitia.

Respond. Agere de numeratis ipsis rebus, prout obijciuntur nostris conceptibus, eisque subsunt. Ideoque esse scientias reales.

CONCL. III. PROPOS. VIII.

Vnitas, & numerus metaphisicè consideratus dicit aliquid præter naturam, & superadiungit aliquam rationem formalem.

1 PRob. Tunc est diuersa formalitas. Quando conceptu affirmatiuo potest concipi vnum sine alio. Sed natura potest concipi sine indiuiduatione, & numero, & dicere. Natura non est vnitas indiuiduationis, aut numerus. Ergo super naturam addit numerus, & vnitas aliquam formalitatem.

2 Omnes naturæ conueniunt in indiuiduatione; sed non omnes conueniunt in naturâ. Diuersificatur quoque numerus multoties, & non natura: Ergo vnitas, numerusque dicit aliquid pręter naturam, scilicet vnitas, indiuisionem in se, & diuisionem à quocumque alio: Numerus verò huius rationis multiplicationem in pluribus subiectis.

EXPENSIO III.

An ratio Indiuiduationis consistat in differentia aliqua, ob quam plurificetur ab alijs.

CVm aliqui ex Philosophis diuisionem, quam aliquod vnum habet ab alijs, dubitent, an sit diuisio

diuiſio diſſimilitudinis, ideſt diſtinctio; an verò diuiſio realis per ſeparationem ſubſtantię effecta. Hinc eſt, quòd, vt penitùs eſſentiā vnitatis peruestigemus, ſit quoque videndum, an aliqua differentia adſerat hanc vnitatem ſingularitatis ſubiecto, vel per ſolam diuiſionem obtineatur.

CONCLVS. I. PROPOS. IX.

Vnitas nullam importat differentiam in ſua formalitate; neque vlla diſtinctione conſtituitur ab alijs plurificata.

Contra multos Philoſophos, qui id aſſerunt de vnitate Indiuiduationis, præcipuè Fonſecam in Methaph. cap. 10. quęſt. 7. ſec. 3. Suarez in Meth. diſp. 5. ſec. 8. Zachar. Paſqual. noſtr. Tom. 2. Meth. diſp. 44. ſec. 2. num. 10.

1 Probatur. Diuiſio non ingerit differentiam inter ſubſtantias, cùm nihil producat, nullamque formam nouam ſubiecto aduehat; ſed per ſolam diuiſionem Indiuidua multiplicantur; & in vnitates plures tranſeunt; Sicut per coniunctionem duarum partium integralium in vnum coaleſcunt: Ergo vnitas nullam differentiam ſecum uduebit ex ſuo formali.

* 2 Prob. Huic aſſignato vni, V.g. huic indiuiduo non repugnat creari Indiuiduum omninò ſimile, ne dum ſubſtantiā; ſed etiam in omnibus ſuis accidentibus, vſque ad poſitionem in eodem loco, & ſituationem. Et tunc expoſtulo. An hęc ſint duo Indiuidua. Quod ſi ſunt; hoc eſt quod volumus, duas vnitates reperiri, quæ tamen nullā differentiā diſſentiant. Quod ſi duo non ſunt; hoc eſt contra diuinam potentiam pugnare, cui ſimilis Indiuidui creatio denegatur.

* 3 Prob. Similitudo eſt relatio, quæ fundamenta ſupponit proxima ad relationem fundandam. Sed fundamenta relationis non poſſunt eſſe minùs, quam duo. Quod ſi fundamenta omnimodæ ſimilitudinis duo ſunt: Ergo abſque aliqua diſſimilitudine duas vnitates habemus.

4 Prob. Diſſimilitudo eſt relatio; ſed relatio præſuponit pro fundamento plura; Ergo ipſa non facit pluralitatem.

* 5 Sunt multa vnitate pollentia; Ergo in genere vnitatis conueniunt: Sed nec diſcrepant in ratione talis vnitatis; Quia, cùm vnitas poneret genus, tunc ratio talis vnitatis aduceheret differentiam: Ergo tunc conſtitueret ſpeciem, ſcilicet aliquod vnum in multis, ideſt, non omninò vnum contra præſupoſitum.

6 Si quæ ſunt vnum repoſcerent ad ſui pluritatem differentiam; Illa, vel eſſet accidentalis, vel eſſentialis ipſi vnitati. Si dicas accidentalem; vim plurificandi non conſequitur, cùm accidens eſſe rei non conſtituat: Plurificatio autem entitatum ab intrinſeco, & in rei entitate conſiſtit. Si dicas eſſentialem, iam res different ſpecie, non numero; cùm poſſibilia eſſent alia indiuidua eamdem rationem participantia. Quare iam illa differentia eſſentialis, & participata à pluribus Indiuiduis ſpecies eſſet.

7 Quin multa indiuidua dantur inter quæ nulla poteſt reperiri diuerſitas, vt duæ gemmæ omninò ſimiles. Sic multa dantur, quæ diſſimilia ſunt, & tamen vnum conſtituunt, vt partes diſſimilares in homine; quæ corpus humanum integrant: Ergo differentia, nec multiplicat vnitates, nec ſimilitudo vnitatem conſtituit.

CONCLVS. II. PROPOS. X.

Tota ratio multiplicationis indiuiduorum eſt ſola diuiſio.

Probatur. Diuiſio formaliter importat negationem, & deſtructionem vnionis. Verùm, quę vnione non copulantur, vnum non ſunt. Ergo multiplicata ſunt. Sed nec genere, nec ſpecie; Quoniam nulla innecta eſt differentia: Ergo ſunt multiplicata indiuiduatione, & vnitate numericā.

Dices. Multa indiuidua, quæ nullo modo à ſubiecto diuiſa ſunt. Vt Accidentia materiæ, Anima corpori, Actus mentis ipſi intellectui, & inter ſe, Ens ſucceſſiuum ſubiecto, & Modi. Quapropter, cùm hæc ſint indiuidua, numeroque multiplicata, & tamen indiuiſa, diuiſio vnitatem numericam non conſtituet.

Reſp. Hæc omnia, demptis modis eſſe diuerſa numero à ſubiecto, in quo inexiſtunt, nō actū; ſed potentiā; quia entitatem poſſident, vt ſaltem diuina operante potentia ſine ſubiecto commorari poſſint. Ad id verò de modis reſpondetur non conſtituere; neque in ſubiecto, neque inter ſe pluritatem numericam, ſed ſolùm ſpecificam; cùm nec ſine ſubiecto concipi poſſint.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Vnitas numerica, ſeu realis, ſeu potentialis per aliquam differentiam dignoſcitur.

Prob. Quæ differentia non ſunt ab intellectu diſtingui nequeunt: Ergo ea omnia, quæ diſtincta cognoſcuntur, aliquam differentiam ſecum ferunt, ob quam dignoſcantur. At ſi ab intellectu res non diſtinguantur, vt vnum concipiuntur: Ergo ad hoc, vt intellectus plures vnitates concipiat, debet recognoſcere aliquam differentiam, ob quam diſtinguit. Quod verò, quæ diſtincta non cognoſcuntur, vt vnum aprehendantur, patet experimento. Nam pone mihi aliquod corpus omninò alteri ſimile eodem loco, ac aliud, & deinde dico; an ſit aliquis intellectus humanus, qui poſſit illa duo corpora, vt duo recognoſcere. Et ſi aliquando oculus iudicat continuum gyrum eſſe Titionem pluribus locis celerrimo, & circulari motu deuectum; quia ob celeritatem loca non diſtinguit; Tantò magis id aſſerendum ſi duorum eſſet omninò idem locus.

2 Prob. Ratio indiuiſionis in ſe, & diuiſionis à quacunque alio eſt eadem in omni indiuiduo: Ergo hæc non poteſt penes intellectum rem à re diuerſam demonſtrare. Igitur aliæ differentiæ deſiderantur, ob quas rerum diſtinctio manifeſta euadat.

COROLLARIVM.

Hinc autem deduces; quòd licet differentiæ non conſtituant indiuidua: ea tamen oſtendunt; & quædam notæ ſunt, & characteres, ob quę vnitates dignoſcuntur. Vnde non eſt mirum; quòd intellectus allucinetur quandoque, & concipiat indiuiduum, vbi eſt ſolùm poſſibile, vel vbi nullo modo reperiri poteſt. Quia ſcilicet intuetur aliquam differentiam; ob quā ſolet indiuidua diſtin-

distinguere. Vnde primò ob differentias, vel accidentales, vel substantiales concipit plura; vt euenit in omnibus heterogeneis. Secundò ob ipsius designationem, vt in omnibus homogeneis, in quibus intellectus designat partes, & de illis agit, tanquam si essent plura actu indiuidua. Tertiò accipere quandoque pro pluribus, quæ nullo modo in plura facessere possunt. Quia differentias percipit, ob quas distinguit ea, quæ vnum sunt, in plura. Quartò & aliquando concipere, vt vnum; quæ verè duo sunt, sic si Luces à diuersis luminibus prodeuntes in eodem foramine decussentur, videntur, vt vna lux, cum tamen duę luces sint, numero distinctæ.

EXPENSIO IV.

An vnitas numerum constituat.

NVmerus ex vnitatibus constare quibusdam dificile visum est; cùm vnitas opposita multitudini videatur. Verùm, vt rem determinemus, sit.

CONCL. I. PROPOS. XII.

Vnitas est idem obiectiuè; ac numerus; non formaliter, & reduplicatiuè.

PRob. Plura sunt numerus obiectiuè: Ea verò sunt ab inuicem diuisa, & in se singula nequaquam pluraficata: Ergo quodlibet vnum est. Ergo numerus ex vnitatibus constat.

Dices. Vnum, & plura opponuntur. Ergo pluritas ex vnitatibus constare nequit.

Respondetur. Vnum, & plura opponi disparatè, non negatiuè; neque contrariè. Nimirum ex suppositione quòd intellectus conceperit vnū, non potest cognouisse quinque. Hoc autem ne dum vnitas habet; sed quilibet alius numerus præter vnitatem. Nam eâdem oppositione, quâ opponuntur vnum, & sex; duo, & sex, vel duo, & septem contradicunt; quia nec duo possunt esse septem, eodem modo, quo nec vnum.

Dices. Quinque, & duo, V.g. conueniunt in ratione plurium. Non vnitas, quæ nulli numero conuenit; nec alicuius communis proprietatis consors est.

Resp. Numerum significare implicitè vnitatem sumptam cum alijs. Quare solâ vnitate non componitur numerus: Sola igitur vnitas, vt sola, contradicit numero, estque ea contrarietas impropria, & per reduplicationem. Quam etiam nos fatemur. Sic etiam decimæ numeris simplicibus opponuntur, & tamen ab eis constituuntur.

2 Prob. Vnitas est quadratus, cubus; par, & multas similes numeri proprietates continet. Ergo est numerus alioquin, si opponeretur speciei ipsi numero, easdem, quas numerus, proprietates non enumeraret.

EXPENSIO V.

An vnitas, numerusque præscindant perfectè à naturis numeratis.

PRæscindere perfectè est concipere aliquid talis naturæ, vt eius conceptus, qui intellectui obijcitur nihil inuoluat eorum; quibus à parte rei adnectitur. Sic conceptus perfectus est animalis, quia iste conceptus, prout in intellectu est rationalitatem, quæ ei à parte rei in homine connexa est, non inuoluit. At si ego concipiam ens. Iste conceptus, prout menti se obijcit, non est perfectus; quia, etiam quatenus in mente est, sine substantia quid chimericum euaderet.

CONCLVS. I. PROPOS. XIII.

Indiuiduatio numerica à rebus indiuiduatis perfectè non præscindit.

PRobat Arist. 8. Metaph. text. 16. *In prædicatione vnus homo non addit aliquid aliud, quam homo, sicut & ipsum esse, præter quid est, aut quale, aut quantum, & vnì esse, est vnicuique esse.* Sic 3. Methaph. tex. 30. *Idem enim vnus homo, & ens homo, & non signa ficat diuersum aliquid secundùm distinctionem repetitam homo, & ens homo, & vnus homo.*

Probaturque ratione. Vnitas numeralis, & Indiuiduatio idem sunt, vt suprà dictum est, Ideoque vnitas est esse indiuisum in se, & diuisum à quocunque alio. Sed nec indiuisio, nec diuisio ab alijs potest concipi sine re indiuisa in se, & ab alijs diuisa. Igitur nec vnitas numeralis, nec numerus vnitatibus constans sine ipsis rebus numeratis perfecto concepta potest intelligi.

CONCL. II. PROPOS. XIV.

Naturâ, neque ipsa, ab vnitate numerali perfectè præscindit.

PRobatur ex Arist. lib. 10. Methaphis. tex. 8. *Quòd autem id est quodammodo significet vnum, & ens, patet, quòd similiter se habet, sicut ens.*

2 Prob. Quidquid est in Petro diuisum est, V.g. à Paulo, & omnibus alijs; Ergo quidquid est in Petro vnum est.

3 Prob. Quoniam conceptus naturæ, si prout est in mente, consideretur non potest saluari sine vnitate, & indiuiduatione: Ergo inuoluit indiuiduationē saltem possibilem. Neque enim potest dici natura hæc, quam concepi, sine indiuiduatione esse potest: sicut potest asseri. Natura animalis sine rationalitate esse potest. Cùm autem natura, vt intellectu cognita non potest seiungi ab aliquo, perfectè non præscindit ab illo. Quamobrem cùm nec sine indiuiduatione naturâ concipi possit affirmatiuè; ideo nec perfectè.

CONCL. III. PROPOS. XV.

Datur conceptus communis vnitatis, non autem pluritatis.

ESt multorum Philosophorum; qui id de indiuiduatione sentiunt.

Pr. Omne indiuiduum conuenit in hoc cum alio; quòd sit vnum in se, & diuisum à quocunque alio: Sed hæc ratio potest concipi ab intellectu alijs non conceptis, & sine hoc, vel altero indiuiduo cogitari. Ergo saltem imperfectè præscindi potest. Maximè quia, sicut indiuiduatio

perfectè à naturâ non præscindit ; sic nec natura ab indiuiduatione. Sed natura potest concipi sine indiuiduatione : Ergo etiam indiuiduatio sine naturâ.

Prob 2. pars. Pluritas nihil addit vnitati ; nisi aliam vnitatem, & vnum vni ; Ergo ab vno, & vno præscindi nequit.

2 Ratio præcisa essentialiter excludit pluritatem : Quia debet esse quid vnum commune multis, atque conueniens. Ergo pluritas, vt pluritas præscindi nequit.

Dices con. 1. partem. Rationes contrahibiles, & contrahentes debent esse diuersæ. Sed indiuiduatio præcisa est eadem, ac illa, de qua dicitur ; cùm sit vnum, & idem : Ergo non datur ratio contrahibilis vnitatis, & per consequens nec præcisa.

Resp. Totum concedendo demptâ vltimâ consequentiâ. Nam res, quæ à parte rei contrahit indiuiduationem, non est ; nisi ipsum indiuiduũ, nempe hoc, & illud. Non requiritur autem ; quòd hoc contrahens, & illud sit aliquid diuersum à conceptu meo mentali ; nisi per accidens. Ratio est : Quia intellectus multiplicat conceptus suos non ratione diuisionis : Sed ratione distinctionis. Cùmque diuisio à parte rei nullam differentiam dicat : Hinc est, quòd per ipsam conceptus suos multiplicare non possit, & in plura secernere, nisi ostensione huius, vel illius ; vel (si adsit) mediante aliqua differentia extrinseca.

Dices con. 2. Mathematica, vtpote scientia, præscindit à rebus materialibus : Sed numerus est obiectum mathematicæ. Ergo ab indiuiduis, in quibus inest potest præscindi.

Resp. Præscindi quidem numerum ab hoc, & alio indiuiduo, sed non per se ipsum, at mediante vnitate, quam essentialiter dicit, & ex quâ metaphysicè componitur. Ideoque, cùm numerus sit idem, ac vnitates, & vnitas præcisa reperiatur, etiam numerus præscindi poterit. Inquiès. Ratio præcisa importat immultiplicationem, vt dictum est : Ergo, neque ratione vnitatis præscindi poterit.

Respond. Posse naturam abstractam in indiuidua abstracta multiplicari : Vt quando concipiuntur plura animalia ; certum est, quòd non concipitur hoc, seu illud animal. Sed concipitur animal abstractum ab hoc indiuiduo, & animal abstractum ab alio. Nam sicut ratio animalis à pluribus abstrahi potest, ita etiam ab vno tantũ. Consideratur ergo animal quodlibet tanquam ab vno præcisum, & cum indiuiduatione abstracta. Quare si species, & genus abstractè, concipitur multiplicatum, tantò magis ipsa Vnitas.

COROLLARIVM.

HInc potest agnosci rationem communem indiuiduationis esse vniuocam. Ratio est, quia tunc tollitur vniuocatio ; quando in ipsa ratione vniuocâ sese ingerit aliqua dissimilitudo ; ita vt ex parte quidem sit similis, ex parte dissimilis. Verùm ratio, per quam dicuntur vnitates, similes, nullam adueheit dissimilitudinem, quare relinquit vniuocationem.

EXPENSIO VI.

An possit dari numerus infinitus.

AD complementum tract. antecedentis hæc Expensio necessaria est ; nam supposito, numerum infinitum dari non posse : Nec ipsa quantitas continua infinitis punctis ; vtpote numerabilibus constare potest : At si numerus infinitus non repugnat, ibi statuta ea parte debilitantur.

CONCL. I. PROPOS. XVI.

Non potest dari infinitum actu in multitudine.

PRob. Multitudo infinita, vt perspicuum est, numeris aliquibus finitis constat. Quare, cùm sint finiti, omnes sumi possunt. Sumantur. Eritque ea, quæ superaddetur, vnitas extra omnem finitatem : Ergo infinita per additionem huius vnitatis ea multitudo efficietur. Rursusque infinita non erit : quia per additionem vnius, numerus finitus, infinitus non euadit, cùm finitum additum finito nõ faciat infinitum.

Neque dicas. Hoc argumentum contra Dei æternitatem militare : hoc enim falsum est, quia æternitas numerabilis non est ; cùm sit tota simul ; nec fluat per partes.

2 Vel in infinito numero adsunt partiales numeri, vel non. Si non : Ergo quantitas discreta summam vnitatem possidet ; cùm numeros partiales non amplectatur. Et sic infinitus numerus vnitas est. Si verò numeros partiales possidet. Illi, vel infiniti sunt, vel finiti. Si infiniti : Ergo totum partibus infinitis constat, cùmque non detur infinitum maius alio, pars erit æqualis toti. Neque dicas, hoc non verificari in infinito, vt aiunt Conimbricentes l. 1. phys. cap. 8. q. 2. ar. 4., & in eo totum suæ parti esse æquale. Nam hæc proprietas est essentialis conceptûs totius, & partis ; nec sine illa concipi potest. Quare si conceduntur partes in infinito : Fatendum quoque est partem in eo totum adæquare non posse.

Neque dicas posse admitti infinita numerorum inæqualia, & maius aliquo infinito concipi posse. Nam si hoc concedatur, etiam multa infinita poterunt reperiri æqualia. Sed numerus infinitus vnicus solum esse potest, cùm omnia per eandem seriem numerorum naturalium augeantur. Ergo cùm multa non dentur infinita æqualia, neque inæqualia admitti poterunt. Quod verò vnicus numerus tantùm sit, patet : quia non loquimur de numero rebus applicato. Sed secundùm se, & abstractè ; qui vnicus est, & immultiplicabilis, sic enim neque plura 4, neque plura 5, dantur ; Sed tantùm ex singulis numeris vnum. Sed iam ad secundam partem Dilēmatis transeamus. Et si admittuntur partes huius infiniti omnes finitæ. Ergo totum infinitum, finitum erit : Cum quidquid in eo partium reperiatur finitum sit, & totum maius suis partibus simul sumptis non sit.

3 Quia Aduersarij contendunt, quemlibet numerum in infinito esse innumerabilem, etiam si sit veluti pars ipsius infiniti. Quæro : an diuidendo in infinitum semper reperiam, quidquid diuisum sit, infinitum, vel non. Si numerum

finitum

finitum nullum inuenio. Ergo infinitus numerus numeris non constat, cùm in numeris, duo, tria, quatuor essentialiter reperiantur; qui certè numeri infiniti non sunt: Si inuenio aliquos finitos, V. g. duo; Ergo infinitum, finitis numeris constat, & per medium diuidi potest; Vnde & duo numerorum infinita darentur vnum maius alio.

* 4 Secetur numerus infinitus proportionaliter; ita vt minus extremum sit ad maius, vt maius ad totum, & de minori, & minori extremo id fiat in infinitum. Certè illud extremum semper hac diuisione minus fiet, & in infinitũ procedẽdo fiet minus omni quantitate propositâ. Sit ergo proposita quantitas 4, Vel ergo hac continua diuisione manet semper infinitum, & sic dabitur aliquis numerus infinitus minor, quam 4, vel fit tandem finitus; cùm ergo ita sit iste numerus finitus vltimo repertus ad maius extremum, vt maius extremum est ad totum; & sic consecutiuè, erit etiam maius extremum finitum; cùm finiti ad infinitum nulla sit proportio. Quare & totum erit finitum, non infinitum, vt à principio supponebatur.

Neque dicas contra hoc, & antecedens argumentum: Dualitates in numero infinito esse infinitas, sicut & triadas, & quatriadas, &c. Resp. enim idẽ sequi incõueniẽs, quod in 3 Argum. Nã omninò vnitates plures erunt dualitatibus, & dualitates minùs erunt numero quaternarijs. Quod si sic. Ergo adhuc vnum infinitum est maius alio, & aliud includit. Quod si non. Iam inter numeros infinitos non datur proportio, quæ consistit. Quòd vna quantitas plures partes de alia consequatur; quam quòd ipsa contineat, vel pauciores, vel æquales. Si verò quantitates infinitæ proportionem excludunt; iam & quantitatis essentiam exuunt; quę inter pędicata essentialia proportionem enumerat.

5 Vel processus finitorum numerorum per finitos numeros, vsque dum perueniss ad infinitum, repugnat, vel non. Si repugnat, cur in infinitis deinde admittitur. Siquidem ternarij in infinito, licet infiniti, poterunt addi infinitis quaternarijs, & hi quinarijs, & sic in infinitum. Vnde infinitus esset numerus in infinitum numerorum, qui facerent infinitum numerum, licet naturali serie per 1, 2, 3, 4, &c. progredientes, & se augentes. Quod si non repugnat. Ergo repugnabit infinitus numerus; cùm admisso perpetuò finito, infinitus numerus excludatur.

* 6 Si datur infinitum maius alio, vt videtur concedendum. Admisso numero infinito quęro, An infinitum minus includat omnem numerum possibilem. Si includit omnem numerum possibilem includit etiam maius se. V. g. infinitum quaternariorum concludet infinitum decimarũ. Si non amplectitur omnem numerum possibilẽ. Ergo nõ totam seriem naturalem numerorum includit. Sed series naturalis numerorum non tota finita est. Ergo etiam illud, quod dicitur infinitum; finitum.

* 7 Dantur numeri quadrati, qui nascuntur ex multiplicatione sui in seipsis, vt 3, multiplicatus per 3, facit 9 Dantur quoque simplices numeri non quadrati; qui omnes quadratorum sunt radices, cùm in seipsis multiplicari possint. Et idem dicas de numeris cubicis: nempe geminũ vice in se multiplicatis, qui, & pro radicibus habent ipsos numeros, qui quadratorum sunt radices. Quare cùm omnes numeri sint radices, suumque quadratum, & cubum obtineant; Tot erunt quadrati, & cubi, quot numeri. Quare si sunt infiniti, etiam quadrati, cubique erunt infiniti. Sed inter quadratum, & radicem; inter cubum, & radicem multi necessariò sunt numeri intermedij, vt inter 3, & 9, sunt 4, 5, & 6, &c. Et quo maiora quadrata, maioresquo cubi, eo plures sunt numeri intermedij. Ergo datis numeris infinitis erunt plures radices; quam quadrata, & cubi. Sed supra ostensum est esse tot, quot numeri. Ergo æquales, & inæquales; quod repugnat.

* 8 Quantò magis procedimus in numeris, eo pauciores numero inueniuntur quadrati numeri, multoque pauciores cubi, & tantò ampliùs pauciores super solidi. Sed numerus infinitus debet consequi tot cubos, tot quadrata, tot supersolida, quàm numeri; Ergo quo magis progredimur in numerũ, eo magis elongamur ab infinito quadratorum, & cuborum, vel supersolidorum: Quia rariores eos inuenimus. Sed non possumus discedere ab infinito quadratorum, & cuborum; quin discedamus ab infinito radicum, qui numeri simplices sunt; Ergo multiplicando numeros ab infinito discedimus.

* 9 Si numerus infinitus totalis infinitos numeros partiales claudit; multiplicetur infinitum partiale per infinitum totale. Vtique producetur numerus planus maior ipso totali; Ergo ipse non erat totalis; cùm maior illo detur. Sed rursus erit totalis, vt præsuponitur, cùm omnem numerum possibilem includat. Ergo totalis, & non totalis.

Quod si dicas. Hanc multiplicationem adhiberi neutiquam posse: Ergo illud, quod dicitur infinitum, numerus non est; cum multiplicationem excludat, qui numero essentialis proprietas est. At si numerus totalis immultiplicabilis est; numeri partiales fortè non erunt. Multiplicentur ergo inuicem duæ medietatęs, vel proximè numeri totalis, & producetur quadratum quadruplo maius, quam duę medietates: Quare totius infiniti totalis, duplo maiùs infinitum erit productum, vt priùs.

EXPENSIO VII.

An numerus essentiam consequ tur.

FRustra Arithmeticus numeros specularetur, si nullam essentiam possiderent. Neque enim, vt volunt Philosophi verissimo decreto, entia per accidens scientijs, quæ sunt æternæ veritatis sufficiens fundamentum præbere possunt; Sed solùm essentiæ rerum; quæ immutabiles sunt, & æternæ. Videtur autem numerus nulla essentia frui, cùm sit vnum per accidens, vt lapidum aceruus, vel vt multitudo. Verum sit.

CONCLVS. I. PROPOS. XVII.

Numerus essentiam non possidet vt numerus est.

PRobatur. Numerus, vt numerus, est quædam multitudo; sed multitudo essentiam non obtinet, cùm sit ens per accidens; Ergo neque numerus essentiã potitur.

2 Multitudo, & numerus excludunt, vt talia, vnitatem: Ergo quid essentiale non sunt: Patet.

Omne essentiale ens est. Omne ens est vnum; cùm vnum & ens conuertantur. Ergo, quòd non sit neque vnum, neque ens numerus essentia non gaudebit.

2 Numerus; seu sumitur in ordine ad intellectum, & sunt plures eius operationes ad placitum factæ, vel in ordine ad res numeratas, & est multitudo ad placitum coadunata: Sed entia ad placitum nullam essentiam adipiscuntur. Ergo numerus essentiâ deficit.

CONCL. II. PROPOS. XVIII.

Numerus, prout dicit partes quantitatis numeratas, essentiam possidet.

PRobat. Quantitas illis prout suis partibus integrata essentia potitur: Ergo etiam numerus, vt eam exprimens suâ gaudet essentiâ. V.g. si 4, assumatur tanquam quatuor partes alicuius planitiei, necessariò multiplicatæ in se producent cubum; Quis cubus, qui superficies suas in quatuor partes diuisas habeat necessariò amplectetur 16, cubos partiales, quorum quilibet superficiem vnam habet vni ex illis 4, æqualem, & sic dicas de alijs.

CONCL. III. PROPOS. XIX.

Numerus quoque possidet essentiam in ordine ad opera nostri intellectus.

PRobatur. Opera nostri intellectus essentialiter connexa sunt, & in arguendo dependentia. Nam priùs oportet cognoscere; deinde iudicare, tandem dicurrere. Sic quod acceptum est, vt priùs: semper acceptum erit, & stante eâ acceptione, posterius esse non poterit quòd ordinatum; ordinatum; Quod simile; simile, &c. Quare intellectus, si accepit duos numeros dicentes relationem æqualitatis; vel proportionis ad alios, necessariò illi numeri tales erunt: quia scilicet intellectus accepit numerum talis respectus participem, & discurrere de alijs.

Dices. Euclides 7. lib 8. & 9 absque vlla dependentia ab operibus intellectus, vel à quantitate continuâ affectiones numerum demonstrat. Ergo numeri secundum se essentiam; quam demonstremus; passionesque possident.

Resp. Euclidem 7. 8. & 9. lib. affectiones numerorum demonstrare per reductionem ad impossibile quoad primas propositiones, quæ in alijs arguendi fundamenta sternunt. Deinde arguere à ratione continentis, & contenti, mensurantis, & mensurati, quę relationes sunt, & applicationes vnius quantitatis ad aliam nostri intellectus; eo quod V. g. si assumatur numerus; qui sit pars alterius A; quòd etiam erit pars maioris; cuius A pars est. Relationes verò licet præbeant fundamentum euidenter arguendi, non tamen entia eam relationem habentia per eam essentialiter constituuntur; cùm per multos Philosophos relationes nihil sint à parte rei, & solùm per opus nostri intellectus comparantis habeantur: Cùm itaque numerorum demonstrantur passiones, operationum nostri intellectus in accipiendis vnitatibus demonstrantur, quæ taliter acceptæ, alio modo accipi nequeunt, alioquin implicantia in ipsis operationibus sequeretur.

Et licet operationes intellectus, vt simpliciter tales, sint ad placitum, vt 2. prob. Concl. 1. diximus: non tamen, vt relatiuæ, & dependentes inuicem: nam positis quibusdam cognitionibus, ad tali modo operandum deinceps in sequentibus mens impellitur ab ipsâmet speculationum naturâ, vt Logici nouerunt.

TRACTATVS III.

De Mathematica eiusque Affectionibus.



QVÆDAM de ipsâ Mathematicâ præcognoſcenda, antequam limina ipſius tentemus,& præcipuè quodnam ſit eius obiectum, qui modus procedendi, & ſimilia; qui animum doceant, quò modo in mathematicis ſe debeat gerere; qui primus & inaſſuetus eas addit. Sic, & in artibus, congruum eſt; vt qui eas callere velit, inſtrumenta priùs, & materiam; quæ ei tractanda ſunt, noſcat, modum quoque, quo ea tenere, & manibus verſare, adiſcat; vt deinde in ipſa arte promptiùs ſe exercere, vt illa potiatur, facultas ſit.

EXPENSIO I.

De obiecto Mathematicæ eiuſq; abſtractione.

PRÆASSVMPTVM.

QVælibet ſcientia, vt Logicus docet, obiectum materiale, & formale conſequitur. Materiale quidem eſt illud, quod ab illa ſcientia conſideratur; Formale verò eſt illa ratio ſub qua conſideratur. Sic Medicus conſiderat corpus animatum; ſed vt ſanabile. Sic Phyſicus conſiderat corpus naturale; ſed vt mutabile. Sic Theologus Deum ſpeculatur; ſed vt cognoſcibilis lumine reuelato medio diſcurſu. Vnde in medicina corpus animatum erit obiectum materiale, ſed eius ſanabilitas obiectum formale.

PRÆASSVMPTVM II.

ITem conſiderandum eſt; quòd nulla ſcientia intuetur ſuum obiectum; vt in ſingularibus; ſed, vt abſtractum ab eis. Neque enim Medicus conſiderat corpus Petri, vt Petri: Sed, vt corpus. Ratio eſt, quia non vt ſingulare rationem formalem participat, ſed vt vniuerſale. Quare ſub ea ratione conſideratum, debet etiam concipi, non vt ſingularizatum. At vt inferioribus, particularibuſque naturis denudatum; cum Petrus, vt Petrus ſanus ſit, non ſanabile corpus. Et tantò magis, quod omnis ſcientia rei ſpeculetur eſſentiam: quæ à particularibus, & indiuiduis præſcindit.

CONCL. I. PROPOS. I.

Obiectum Mathematicæ eſt ens quantum, vt menſurabile.

PRobat. ex Ariſt. lib. 2. poſt. cap. 10. *Quare propter nos non malè Geometræ dicunt, & de entibus diſſerunt, vt entia ſunt.*

Prob. Nam, quòd ſit ens quantum, patet. Conſiderat enim trinam dimenſionem longitudinem, latitudinem, & profunditatem, quę ſunt dimenſiones eos quantum conſtituentes. Conſiderat quoque quantitatem eorum, quæ corpora non ſunt; Ergo eius cognitio latiùs patet, quã corporis, & in ente quanto conſtituenda eſt.

a Agit de Conis, Cylindris, Sphæris. De numeris, de tempore, de luminis intenſione, de quantitate motuum, quæ conueniunt tantùm in ratione entis quantitatiui; Ergo ratio, per quam Mathematica ad illa perſcrutanda fertur, eſt entis quanti; Nam enim de illis ageret omnibus; niſi in aliquâ ratione, conuenirent ob quam in illa ſimul poſſet intendere.

Dices. Agit de Superficiebus Lineis Angulis; quæ entia quanta non ſunt, cùm ſint negationes. Item obiectum, cuiuſcumque ſcientiæ debet eſſe abſtractum; vnde etiam obiectum Mathematicæ. Quapropter, eius obiectum erit potiùs quantitas ipſa; quàm ens quantum.

Reſpondetur ad primum. Superficies, lineas, puncta eſſe corporis extrema, ab illo, nec quidem mente, ſeparabilia, vt diximus. Vnde agendo de illis, implicitè agit de corpore. Deinde multa in ſcientijs conſiderantur; quæ quidem obiectum non ſunt. Sed ſolùm aſſumuntur tanquam neceſſaria ad perfectam cognitionem obiecti. Sic agit medicina de plantis; quòd illa cognitio ad ſanabilitatem corporis indagandam conducat. Sic Theologia de Angelis, Sacramentis, Peccatis. Quæ licet Deus non ſint. Ordinantur tamen ad cognitionem Dei ſub ea formalitate, ſub qua conſideratur à Theologo. Vnde licet ſuperficies, lineæ, puncta entis quanti conceptu non fruerentur; eorum tamen cõmenſurationes deberet Mathematicus conſiderare, vt ad corporis quanti cognitionem, perneceſſarias.

Ad ſecundum reſpond. Obiectum cuiuſcunq; ſcientiæ debere eſſe quid ſubſiſtens, & quod directæ ſit poſitum in prædicamento ſubſtantiæ. Quantitas verò non ponitur in prædicamento ſubſtantiæ; ſed ens.

Prob. quoque ſecunda pars, quòd in ens quantum tendeat; ſed ſub ratione menſurabilis. Nam intendit acquirere cognitionem entis quanti. Quanti verò eſſentia in capacitate partium conſiſtit. Quare ens, vt partibus conſtãs, & in partibus

tibus conueniens ; aut disconueniens cum alio, debet cognosci, quæ est ratio mensuræ. Deinde tota disputatio, quæ inter Mathematicos versatur proportiones corporum rimatur ; proportio verò in commensurabilitate consistit.

Dices agit de lineis, superficiebus, corporibusque irrationalibus; quæ nullam commensurabilitatem possident.

Resp. Primo quantitates incommensurabiles non esse omninò tales. Sed solùm respectiuè ad aliam quantitatem. Vnde de illis simpliciter agere potest. Deinde agit de ipsis, vt ad cognitionem commensurabilitatis conducunt : nisi enim sciret, quęnam lineæ essent incommensurabiles, nec commensurabiles agnosceret, aut distingueret. Sicuti Physicus agit de priuationibus, & negationibus, de vacuo, de spatijs immaginarijs; licet entia non sint naturalia : Quia ad cognitionem corporis naturalis deseruiunt.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Mathematica, quidquid considerat abstractè considerat, & ab ente indiuiduali præscindit.

PRob. 1. ex Arist. l. 2. Methaph. cap. 12. *Materia quædam sensibilis, quædam intelligibilis; sensibilis quidem vt æs, lignum. Intelligibilis verò, quæ in sensibus existit, non prout sensibilia, vtpote Mathematica.*

Probatur verò ratione. Quoniam si hæreret sensibus ; tunc multa falsa mentiretur ; dum lineam alteri æqualem omninò dicit ; cùm tamen linea alteri præcisè æqualis, vel dari nequeat in rebus materialibus, vel dari saltem certum non sit. Sic rectam esse ductam, quæ quidem, an possit rectissimè duci, dubium est. Sic circumferentiam circuli perfectam ; quæ in circumferentijs materialibus non reperitur. Quod etiam aduertit Arist. l. post. cap. 10. *Neque*, inquiens, *Geometra falsum supponit quemadmodum quidam asseruere dicentes; quod non oporteret falso vti; Geometram verò mentiri dicentem pedalem, non pedalem; aut rectam descriptam non rectam existentem. Geometra verò nihil concludit, eo quod hæc est linea, quam ipse loquutus est, sed quæ per hæc ostenduntur.* Sic Proclus lib. 2. cap. 2. *Qui in sensibilibus circulus compositus, magnitudine distans, ac circa ratione diminutus, ac inepriarum plenus ab immaterialium puritate longè deficiens. Geometria verò, cùm de circulo quidquam loquitur ; atque diametro, & de passionibus, & affectionibus, quæ ad circulum spectant, non de sensibilibus docet, aut differit, ab ipsis quidem separare conatur ; & vniuersale ipsum considerat.*

* Prob. 2. Nam ostendimus puncta impertibilia nequaquam dàri posse, à materia seiuncta partesque in infinitum diuisibiles esse prout considerãtur à Mathematicis. Cùm itaque Mathematici præsuponant partes in infinitum diuisibiles, patet sumere ens quantum, vt quantum est ; & ideo, vt semper partium capax. Non autem sumere ens, quod est à parte rei : quod diuisibilitatis infinitæ capax non est, aut saltem incertum. Sic in circulo supponit Mathematicus figuras inscriptibiles in infinitum. Hyperbolem ad Asymptotorum accedere in infinitum, & multa alia, quæ certè de rebus sensibilibus non possunt verificari, sed de ipsis, vt abstractis, & vt tales sunt.

Dices. Mathematica docet operari in problematibus ; Sed operari est circa res sensibiles, & vt sunt à parte rei. Mathematica igitur saltem in problematibus à materiâ non abstrahit.

Resp. Docere quidem operari, sed adhuc illam operationem, vt à materiâ seiunctam, & ei non applicatam considerare. Vnde Proclus lib. 2. com. 5. inquit. *Propriè in Mathematicis disciplinis problema vocatur, quòd ad contemplationem operantem proponitur. Quod namque in his fit, finem, contemplationem habet; & sæpenumero quidem eorum, quæ fieri non possunt, quædam problemata vocant.* Igitur, cum Mathematicus problema proponit, & docet operari, instruit, quid operetur, non circa rem materialem, licet, vt plurimùm etiam id, per doctrinam, quam tradit, præstari queat ; sed circa rem conceptam, & eam operationem, vt versantem circa res abstractas considerat. Quare & aliquando docet problemata, quæ fieri nequeant, prout res ita se habent, non absolutè, V.g. datum pondus datâ quacumque potentiâ mouere. Quasi quod essemus cuiuscumque potentiæ vltimis viribus instructi, Vel cum docet Altitudines stellarũ fixarum, latitudines, lõgitudines mẽsurare, tãquã si essemus in centro, cùm nec ibi esse possimus ; sed in superficie. Sic describere Horologia ; tamquam si planum horizontale subesset centro mundi, & à centro in illud planum vmbra decideret.

EXPENSIO II.

De Mathematica.

DIfficulter potest apprehendere, quia quod proponitur : nisi nec nomen eius quod proponitur nouerit. Quare in primis quærendum quid sit Mathematica.

Mathematicę nomen deriuat à Gręco nomine, quod Latino deptumptũ significat doctrinã : seu disciplinam, eo quia verè doceat ; quòd nihil, nisi per ostensionem, vt plurimùm, affirmet, & nihil, nisi, aut per se euidens, aut probatum ad arguendum pro principijs assumat. Aliæ verò scientiæ pro maxima sui parte potiùs probabiles sunt, quam euidentes, vnde potest deffiniri.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Mathematica est scientia ostensiua, cuius obiectum est omne illud, quòd mensurari potest.

HÆc Conclusio probatur ipso experimento quoad primam partem, cum omnes eius propositiones ostensiuæ sint.

Dices. Sunt aliqui tractatus, vt Optica Astrologia, Sphęra, & multæ aliæ partes, quæ rationibus probabilibus innituntur. *Resp.* id quidem esse verum saltem penes aliquas conclusiones, & tunc non appellatur simpliciter Mathematica ; sed Phisiomathematica ; quòd sic exigente obiecto partim Mathematica sit, quoad mensurationem, partim verò Physica, quò ad eas conclusiones, quæ mensurationi deseruiant, V.g. Sphęra, quòd probet fluiditatem Cœlorum erit Physica ; quatenus verò ex fluiditate motus Planetarũ hypo-

hypoteses, & commensurationes colligit, & ea doctrinâ suppositâ ostendit, erit Mathematica.

CONCLVS. II. PROPOS. IV.

Mathematica in tres partes diuidi potest in Mathematicam, Vniuersalem, Cosmicam, & Microcosmicam.

PRobatur. Quia eius obiectum in tres has species facessit. Nam aut est vniuersalissimum, & à quocumque obiecto speciali præscindit. Et hoc à Mathematica vniuersali considerator; Aut est speciale, & hoc diuiditur in duas amplissimas partes, nempe *mundum, & hominem:* Quæ considerat mundum eiusque proportiones dicitur *Cosmica;* quæ hominem *Microcosmica* appellari potest.

Prima est duplex, nam alia est; quæ agit de quantitate *Discreta*, alia de *Continua*. Secunda quoque duplex est, alia agit de Cœlo, altera agit de Terra, terrenisque omnibus, quæ mensuris subsunt. Tertia quoque duplex est. Alia enim pertinet ad naturam hominis; vt visua circa quę versatur Optica. Alia spectat ad artem, vt Mechanica, & huiusmodi.

Hoc autem libro tradimus Mathematicam Vniuersalem, quæ de omni quantitate in communi peragit, & omnibus alijs Mathematicis partibus aditum aperit. Omnes verò Mathematicæ partes possunt tendere in suum obiectum promiscuè. Modo illud speculando, vt quantitas discreta est, modo, vt quantitas continua. Quia scilicet, & quantitas, vt sic sumpta, & mundus, & homo, in se quantitates discretas, & continuas amplectuntur, in quas potest tendere intellectus; vnde promiscuè secundùm quod res exigit, & dependentiu obiectorum reposcit, modo fit Geometria, modo Arithmetica: Vnde & harum scientiarum naturam exponere oportet.

CONCL. III. PROPOS. V.

Geometria est scientia ostensiua, quæ de quantitate continuâ pertractat: Arithmetica verò est scientia pariter ostensiua, quæ quantitatem discretam intuetur, & ambæ istas quantitates, vt mensurabiles considerant.

PAtet per semet conclusio, si nomen Arithmeticæ, & Geometricæ secundùm suam latam significationem accipiantur. Verùm non semper ita est. Geometria enim vt plurimùm significat eam partem Mathematicæ, quæ agit de planis nomine vniuersali sibi specialiter applicato, quæ propriè Panthometria dicitur. Arithmetica quoque strictiùs accepta illa est, quę dat regulas supputandi nullis adhibitis demonstrationibus. Mathematica, itaque vniuersalis, de qua hoc Libro agimus partim per occasionem Geometriâ, partim Arithmeticâ constans, in duas quoque partes secernitur intuitu modi procedendi: Nam alia est Elementaris; alia verò nequaquam, & licet eadem tractentur, tum in Elementari, tum in altera parte, & circa eadem obiecta speculatio versetur. In Elementis tamen solùm traditur quædam fundamentalis, & prima doctrina, & velut primi aditus ad profundiores speculationes aperiuntur, in alijs verò non elemẽtaribus circa eadem obiecta profundiora quidem cognoscuntur, sed quæ elementares cognitiones nequaquam dici possint, quoniam limen non aperiant, vt Elementa efficiunt, alijs speculationibus.

EXPENSIO III.

De titulis Mathematicis.

COngruum est librorum, & partium, quæ in ipsis reperiuntur titulos quandoque exponere, vt magis, quæ ipsâ continentur oratione, & euidentiùs innotescant: Ideoque cum Mathematica suis præfigat propositionibus titulos; qui non explicati possent, & ipsius rei, de quâ agitur, obnubilare euidentiam: hinc est, quod eos declarandi prouinciam sumpserim.

QVID SINT ELEMENTA.

DE Elementis inquit Proclus. *Totius Geometriæ sunt quædam theoremata principalia, & ad ea, quæ sequuntur, principij rationem habentia, quæ Elementa appellantur. Elementaria vero sunt, quæcumque extensam in multitudinem cognitionem non habent.* Et deinde. *Non omne elementum vocabitur. Verùm ea, quæ principalissimâ sunt eorum, quæ in rei effectæ ratione sunt constituta.*

Itaque Elementa sunt quædam Theoremata, vel etiam problemata; quæ in re, de quâ agitur vniuersalissima sunt, & plurimarum propositionum fons, & origo. Quas visum est Mathematicis, seorsim ab alijs propositionibus à se dependentibus segregare; vtpote illæ, quæ non solùm propositionibus de eâdem materiâ agentibus deseruiant; sed multis alijs possint aditus aperire. Vnde vt magis essent, ad manus, & familiariùs adiscerentur in vnam seriem coordinata fuerũt: Maximè quia, nec cognitio quidem omnigena, quæ extra Elementa erat; licet eamdem materiam, quæ in Elementis versata est, specularetur sæpenumerò poterat perfici: sine Elementis ad illam materiam spectantibus: Vnde, non dum fuit vtile; sed etiam necessarium, Elemẽtares cognitiones ab extraelemẽtaribus seiungere: vt ipsis singulis omnia Elementa, vt res postulabat, possent inseruire.

QVID SINT PRINCIPIA.

QVoniam, vt ait Arist., omnis cognitio fit ex præexistenti cognitione. Etiam Mathematica quædam habet principia adeo clara, vt prorsùs negari nequeant; nisi stultè, & imprudenter. Talia sunt. *Omne totum est maius sua parte.* In quibus ab alijs omnibus scientijs differt. Nam principia aliarum scientiarum multa, aut negari possunt, aut explicari, cùm vera semper non sint principia, sed quædam potiùs persuasiones mente firmiter radicatas, quàm euidentiæ. Mathematica verò, quæ principia ponit, aut omninò innegabilia sunt, aut talia, quæ, si negantur, protinùs per reductionem ad impossibile ostendat.

DE DEFINITIONIBVS.

DEfinitiones apud Mathematicos verè naturam rei non explicant ex eorum intentione; cùm essentiam rei explicare; sed tantùm nomen exponere sit apud ipsos in definitionibus constitutum, vt scribit Clauius in prolog. & Galilæus in dialog. contra Betinum. Id verò patet; quia si naturam rei explicarent; oporteret, quòd eam definitionem ostenderent quidditatiuam esse, & naturam rei exponere; quod nequaquam efficiunt. In concessis tamen est; quòd etiam aliquandò naturam rei exponant. Sed id non curat Mathematicus; siquidem, si curaret, maximè in id incumberet; vt talem esse rei naturam; qualem definitio describit, comprobaret.

DE POSTVLATIS.

POstulata sunt quædam; quæ faciliter conceduntur, vt fiant, & quasi axiomata sunt; sed hæc solùm speculatiua; illa verò operatiua. V. g. vt liceat *lineam tacere*. Vt liceat, *lineas adiungere*. Vt liceat. *Quocumque distantia circulum describere*. Verùm non omnia; quæ clara sunt, & concedibilia postulantur. Cùm etiam. *Producere lineam æqualem alteri*: aut. *Quacumque distantia lineam producere*. potuisset postulari ab Euclide: quod tamen non fecit: Sed ea sine quibus permissis nulla posset inchoari Mathematica operatio: Cùm debeamus posse aliquid efficere, sine probatione, vt opus primâ eâ operatione affectum ostendatur euidenter se bene habere.

QVID SIT THEOREMA.

THeorema est pura speculatio alicuius passionis quantitatiuæ euidens. quæ nullo modo aliter esse potest, vocaturque Theorema; quia in purâ speculatiue sistit, &. nihil efficit.

QVID SIT PROBLEMA.

PRoblema vocatur sic. Quod sit circa operationem, quæ, aut alio modo exequi posset, aut circa illam materiam aliud effici: vt si quando demonstrat. *Triangulum æquilaterum super rectam constituere*, hoc opus, aut alio modo executioni mandari, aut aliquod aliud triangulum super illam rectam constitui posset, & ideo *Problema* vocatur ad similitudinem Problematis dialectici; quod sicut in vtramque contradictoriam affirmari potest; sic & Problema Mathematicum, & hoc modo, & alio effici, & circa eamdem materiam aliud lo opus demandari. Vnde illud, quod alio modo effici nequit; nec de eadem materia aliud fabricari, non vt Problema: sed vt Theorema proponendum est. Sic si quis proponeret in semicirculo angulum rectum efficere: Omninò errorem acciperet; cùm omnis angulus in semicirculo rectus sit: vnde cum alio modo effici nequeat; nec alius angulus in semicirculo constitui possit: Non erit hoc, vt *Problema*; proponendum; sed vt Theorema. At, inquies, sunt quædam, quæ ad modum problematis, & Theorematis proponi possunt. Id enim verum est, & licet aliquod Theorema possit etiam subire rationem problematis, non tamen vice versâ. Vnde attentiùs considerandum est; an ea, quæ problematis speciem ferunt. Verè illius naturam assequantur. Antiquorum verò sententiam Pappus refert de Theoremate, & Problemate. *Dicebant*, inquiens, *Theorema esse, quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem Problema, quod affertur in constructionem propositi*; idest propositionis.

QVID SIT PORISMA.

POrismatis nomen etiam apud antiquos fuit controuersum, & videtur Pappus triplicem afferre Porismatis significationem. Primam explicat, quam antiquioribus tribuit; dum ait. *Horum autem speciei omnet neque Problematum, neque Theorematum: sed mediam quandam inter hæc formam, & naturam habeat; quo factum est, vt ex multis Geometris quidem ex genere esse Problematica, alii verò Theoremata opinati sint.*

Secūdā verò iuniorū affert, inquiēs, *Immutata est autem hæc Porismatis definitio apud iuniores, & definierant; Porisma est, quod hypothesi deficit à locali Theoremate*. Idest, quod nullam consequitur hypothesim, seu suppositionem: Pro quo sciendum, quò Theorema triplici modo potest considerari. Primò quoad modum procedendi in probatione. Secundò quoad ea, quę antecedunt demonstrationem. Tertiò quoad ea, quæ in demonstratione ostenduntur.

Modus procedendi quadruplus est; nam aut diuersas partes enumerat, aut plures casus, aut diuersos progressus probando priùs multa alia, antequam ad vltimam conclusionem deueniat, aut simplex est, nullaque vel partium, vel progressuum, vel casuum multiplicitate discriminatur. Porisma itaque videtur appellatum Theorema multiplex ex aliquorum sententia, aut partibus, aut casibus, aut progressibus. Quare, loquit Pappus *Porisma à multis sic intelligitur, vt artificiosè collectio sit ad Analysim grauiorum, seu difficiliorum problematum, & generum in comprehensibilem multitudinē præbentr ipsorum natura.* Si verò Theorema consideretur quoad antecentia; in triplici quoque differentia versantur. Alia præsupponunt aliquid in gratiam aduersariorum. Alia præsupponunt aliquid factum; quod non est operi demandatum, vt Archimedes præsuponit. V. g. Spheram esse proportionaliter sectam per talem superficiem, & probat deinde, id verè taliter se habere. Alia iubent ad demonstrationem efficiendam, talem. aut tali modo operationem faciendam. V. g. talém lineam ducere. Tandem si consideretur Theorema, quo ad ea, quæ in demonstratione ostenduntur duplex est; nempe locale, & non locale. Locale est illud, quod ostendit locum. V. g. lineas esse parallelas. Extremum alicuius lineæ esse in circumferentia. Tale punctum esse in medio circuli; quæ propriè circa quantitatem non sunt; nisi reductiuè, quatenùs locus est proprietas rei quantitatiuæ, & deseruit ad illius cognitionem.

Dicit itaque Pappus. Quòd secundum Iuniores Porisma non est Theorema locale, eo quia præsuponat Hypothesim, seu aliquam suppositionem, quam deinde non explicat, cuius sit illa suppositio, seu quænam? Insuper illud. verbum *deficit* ambiguum est; nescimus enim: An deficiat ipsa hypothesis ad hoc, vt sit theorema locale: An ipsum Theorema deficiat à locali, idest localis naturā nō assequatur, eo quod Hypothesim obtineat.

Verùm

Verùm Proclus in Euclidem lib. 3. sic Porisma definit. *Porisma etiam de quibusdam problematibus dicitur quasi a sint ab Euclide conscripta porismata. Propriè vero talia dicuntur; quando ex demonstratis aliud aliquod Theorema nobis non proponentibus emergit, & offertur: Quod propterea Porisma appellarunt quasi lucrum ex scientifica demonstratione obiter, & præter expectationem factum.*

Itaque habemus clarum duplicem sensum, penes quem Porisma accipi queat. Primum ex Pappo iuxta antiquos. s. quod sit quid medium inter Problema, & Theorema, quòd & possit, vt Theorema, & vt Problema proponi. Secundum ex Proclo. Quod sit veluti quoddam Corollarium ex demonstratione collectum, & breuiter ex dictis ostensum. Obtinemus quoque alias duas ex Pappo Porismatis acceptiones; sed obscuras, & ancipites: Nempe, quod sit aliquid simile Theoremati locali. Vel quod sit Theorema, vel Problema quoddam multiplex.

QVID SIT ZETEMA.

Zetema est titulus, quem Algebrici suis operationibus præfigunt: cùm enim ea, quæ Algebra docet non demonstrentur; sed in ipsa operatione nota, & euidentia euadant; propter hoc, nec Problema, nec Theorema appellare potuerunt: vnde quam medio nomine Zetema appellauerunt.

QVID SIT LEMMA.

Lemmata sunt propositiones minus principales, & quæ obiectum, de quo agimus, non respiciunt. Sed tamen ad demonstrationes alterius propositionis omninò necessariæ sunt. Lemma itaque est demonstratio, seu constructio, quæ necessariò ad demonstrandam aliam propositionem principalem, & ad rem spectantem præter institutum assumitur.

QVID SIT PROPOSITIO.

Propositio est nomen quoddam genericum; quod tùm Porismati, tùm Problemati, tùm Theoremati conuenit, & nihil aliud significat, nisi quòd proponitur aliquid ostendendum.

QVID SIT ANALYSIS, ET SYNTHESIS.

Analysis nihil aliud est; nisi quædam capicatio rei, quæ proponitur. Synthesis verò accipitur, cùm traditur modus operis, quòd fieri iubetur.

EXPENSIO III.

De Mathematica instructione.

Mathematica institutio, aut potest sumi iuxta subiectum, aut penes modum instruendi.

Si penes modum instruendi. Modus quidem euidens est. Sed Syllogismis non procedit, at Enthimematum continuata serie, quæ breuiùs probant. Ratio huius rei est: Quia, cùm sæpè repetant easdem literas, si tres propositiones efficerent, vt requirit Syllogismus, prorsum in mentem audientium confusionem inducerent. Vnde Entymematibus vtitur, quę cõclusionẽ immediatam habent, & quæ probata Syllogismi demonstratiui efficaciam consequuntur.

2 Quod incipiat à primis principijs, & paulatim deueniat ad conclusiones. Vnde contrario modo, ac Philosophia facit, siquidem hæc conclusionem immediatè à præmissis deducit immediatioribus, & deinde assumptas præmissas probat euidentioribus alijs, donec ad prima principia deuentum sit. At Mathesis à primis principijs incipit, & paulatim per diuersa Euthimemata, diuersasque conclusiones, ad illam vltimam, quam proposuit, tandem accedit, & in illa conquiescit.

3 Mathematici nunquam anticipant, neque vt probata accipiunt, quæ probanda postmodum sunt. Vnde Proclus ad 11. Eucl. propos. ait. *Demonstrationem autem, quæ per semicirculum fit; nec commemorare dignum est: Multa enim præsupponit eorum, quæ posteriùs ostendenda sunt, ab Elementarisque institutionis ordine omninò recedit.* Et propos. 23. reijciendo operationem, quâ fiunt anguli æquales ex peripherijs interceptis æqualibus inquit. *Huiusmodi itaque ostensionem, tanquam posterioribus vtentem, ab elementari institutione alienam esse censemus.*

Aliquando tamen ipse Proclus anticipauit ostendendo ad propos. 24 Eucl. quæ sequentibus indigebant ad sui ostensionem, in hoc verò se gessit tanquam interpres, & non vt absolutè pareret euidentiam; sed potiùs, vt indigitaret fallacias, quæ in ea propositione potuissent accipi. Sic Clauius contra Pelletarium anticipat, & Commandinus, vel qui addiderunt propos. extremas lib. 5. Eucl. supponunt enim propos. 23. lib. 6. Nam verè non potest dici demonstratio, nec intelligi quidem, quæ præsuponit non ostensa, sed potiùs credulitas, & obscuritas: cùm addiscẽtem opporteat credere ea esse demonstrata; vt hæc, quæ ab illis dependent, sibi persuadeat, & capere nequeat illa, quorum, nec quidem figuram aspexit. Vnde valde illi culpandi sunt; qui Euclidis Elementa perperam augentes, ea introducunt, quæ multa cognitione aliarum propositionum indigent, non dum haustam, vt suam euidentiam nanciscantur.

4 Peregrina fugiunt, & quæ ab instituto recedunt. Sic Procl. lib. 2. cap. 10. enumerat conditiones, quæ ad institutionem Mathematicam necessariæ sunt; & ea inter primas est: *quod sicut necessaria non omittat; sic superflua non interserat; perspicuitatem, & breuitatem seruet.* Et ratio est. Quod impertinens sit, scientiam extra suum obiectum vagari, & alia obiecta contemplari; quæ ad ipsam non spectant. Cùmque partes Mathematicæ sint scientiæ maximè subordinatæ; quarũ vna ab alia aliquo semper subalternationis vinculo dependeat; omnes commiscere, est omnes confundere, nihilque certi tradere; dum omnia sine necessariâ dependentiâ traduntur. Vnde in iura Mathematica maximè illi peccant, qui, vt ex vngue adiscamus Leonem, dum vnam propositionem probant, alias, quæ illius loci non sunt, praxes, propositionesque ex alijs non cognitis ostensas, aut tantummodò assertas adferunt, & sic mentes discentium tenebris, offundunt, & in ambages vrgent.

5 Eandem probationem multoties repetunt; dummodo propositioni deseruiat, quam demonstrare satagunt: Sic eandem demonstrationem

9. & 11. propos. primi Euclides replicat, vt passim vbique videre est.

6 Licet nitantur, quæ proponunt, ostendere Mathematici, aliqua tamen sunt; quę nonnisi probabili ratione attingunt: Vnde Mathesis secundum omnes suas partes euidens non est; Nam in multis suis partibus ob defectum principiorum, ab instituto deficit, & probabilitate conquiescit: Sic Astrologia, Optica, Sphera quoque, & Theorica Planetarum, & multi alij tractatus ex parte quidẽ euidentes sunt, ex parte verò probabiles euadunt, vnde & Physiomathematici dicuntur. Omnes autem praxes Mathematicę probabiles sunt. Quis enim credat se diuisisse perfectissimè lineam bifariam? Circulum perfectissimum duxisse? & circinum, aut crure se girante, aut pede immoto parumper non diuaricasse, & sic de alijs. Qua de re Problemata Mathematica, vt monuimus, abstractæ semper sunt intelligenda, vt euidentiam enunciandant.

EXPENSIO IV.

De illis, qui studijs Mathematicis operam nauant.

SCiant illi frustra terere tempus, & in ventum niti: si postpositis Elementis, & prærequisitis tractatibus, velint posteriores Mathematicas demonstrationes haurire. Duplici enim de causa nunquam intelligent. Primò, quòd ea, quæ in demonstratis apud Mathematicos sunt, obscura per se sint, & quæ ænigmatis formam præseferant, vt putes de tripode Apollinem loqui, & absnieta effari. Imò & aliqua à probabilitate remotissima sunt: nisi demonstratione firmentur ita quòd; nec quidẽ probabilem assensum eis Intellectus præbere possit proprio lumine ad id suadente, quod oõ euenit in alijs scientijs. Siquidem, quæ V.g. Philosophi assumunt, vt probata, & demonstrata in antecedentibus talia sunt, vt intellectus propriâ vi impellente non abnuat. Vnde si non euidentem, saltem probabilem cognitionem assequuntur.

2 Termini Mathematici obscuri; neque propriè, quid significent, & quo pacto imaginationi repræsentari queant, nescit ille, qui prima non viderit. Sicut enim propositio sine figurâ licet multis explicata, & clarissimis verbis, argumentisque ostensa percipi nequit. Ita multò minus, quæ præcesserunt intellectui, seu imaginationi succurrere queunt, cùm tum demonstratione, tum figurâ destituantur. Quamobrem patientèr procedendum est, & cùm tractatus primus alteri aditum præbeat, per omnes successiuè transeundum. Verum tamen est, quòd non omnes tractatus æquali nexu se vinciunt, aut adeo necessario, vt quia aliquem intermittere non possit, dum ad alios festinet; sed vt plurimùm se necessario astringunt vinculo, aut certè multò faciliùs erit antecedentia legisse, vt singula postrema omninò percipiantur.

Verum est quoque Mathematicã praxibus vti, quæ independenter ab omni demonstratione possint exerceri, sed nunquam intelligi. Et hinc artifex Mathematicus excellens, & peritus euadera potest spretis demonstrationibus; quę ostendendis, non exercendis praxibus inseruiunt.

Ne tamen aliquis, qui vnam, aut alteram Matheseos partem consequi exoptat, non omnem animo amplecti, mole rerum addiscendarum obrutus, deficiat, & ab incepto se absterreat, singulis tractatibus indicabimus, quænam necessariò præcognoscenda, quænam tantùm vtiliter, vt facilè prætermitti possint; Et per omnes partes expeditè omnibus superfluis amputatis discurremus, vt quantum in nobis est, omnis facessat difficultas, & planum sternatur iter ad omnia intelligenda.

Si quis verò exquirat. Quęnam ingenia ad studia Mathematica apta sint. Illi responsum erit. Pueros omninò ablegandos, si de demonstrationibus agatur, solùmque ad primas definitiones, & praxes admitti poterunt. Demonstrationes enim Mathematicæ arduæ sunt, & intellectum perspicacem & acutum summoperè requirunt, maximè, cùm agitur de proportionibus. Et si quando quærit Aristoteles. *Quid est, quòd puer fieri Mathematicus potest, sapiens autem, aut naturalis non potest.* Non intelligit simpliciter de puero; Sed de iuuene. Sic enim affirmat 6. mor. cap. 8. *iuuenes licet Geometrici, & Mathematici, & in eiusmodi rebus sapientes euadunt; prudentes autem euadere non videatur.* Quod & potest intelligi circa praxes; sicut & prudens speculatiuè iuuenis fieri; sed non practicè potest; iuuentute, & feruore animi, rerumque inexperientiâ prohibente axiomata prudentię ad opus rectè demandari. Sic licet iuuenes exercitatissimi in rebus Mathematicis sint; non tamen in demonstrationibus exhauriendis. Cùm enim Iuuenum animi instabiles, & ad oblectamenta acclines sint, parùm ad Mathematicam habiles videntur, quæ ingenium patiens, stabile, remotum, & solitarium requirit, & maximè quòd hodie Mathesis in tantam molem excreuerit; vt qui omnia probè nouerit, iam ad canos se peruenisse cum ipsa perfectione doctrinæ experiatur.

EXPENSIO V.

De Principijs.

PRincipia, quæ primo Elementorum libro inseruiunt, aa toti Mathematicæ aditum sternunt, sicut & ipse primus liber ianua ipsius est, & limen, quo postbabito, nullum aliunde in eius demonstrationes sese iter aperiat. Sunt autem in duplici differentia; nam quædam sunt, quæ pertinent ad materiam, de qua agitur, vt definitiones; aliæ, quæ ad discursum, & argumentationem inseruiunt: vt sunt prima principia per se nota, & concessiones.

DEFINITIO I.

P*Unctum est, cuius pars nulla.*

DEFINITIO II.

L*inea est longitudo latitudinis expers.*

DEFINITIO III.

S*Vperficies est, quæ longitudinem, & latitudinem tantùm habet.*

Dicitur *punctum* nullam partem habere; quia

acci-

accipitur, vt vltimus terminus lineæ, & linea, vt vltimus terminus superficiei: Superficies autem, vt vltimus terminus corporis conceptu explicito, & inadęquato. Ideoque à superficie excluduntur partes secundùm eam rationem, in qua concipitur terminus: nempe penes profunditatem, non quidem positiuè, & conceptu affirmatiuo, sed negatiuè præscindendo à partibus secundùm profunditatem, & de illo conceptu loquitur Euclides in superficie definienda excludēdo partes, quoad profunditatem à superficie prout inadæquatè concepta, & prout stat in intellectu. Et eodem modo loquitur de lineâ, latitudinem ab ea excludendo; quia pręcisè, vt inadęquatè concepta, prout terminus superficiei, partes penes latitudinem excludit. Et quia puncta sunt quoque termini lineę; hinc est, quòd etiam à puncto debuit excludere partes secundùm longitudinem, & quia erat in linea, & pertinebat ad quid ipsius; cùm esset eius vltimus terminus; hinc, etiam debuere ab eo excludi partes penes latitudinem; & quoniam linea, quid erat superficiei, vtpote terminus ipsius; hinc & à linea, & ideo etiam à puncto debuit excludere partes penes profunditatem. Ideoque punctum præcisè sumptum, vt terminus lineę debuit excludere partes, & penes longitudinem, & latitudinem, & profunditatem. Vnde benè definitum est *cuius pars nulla*; non quidem à parte rei; sed prout substat nostris conceptibus negatiuis explicitis: & inadęquatis: cùm punctum, etiam prout est in intellectu; sed adęquatè conceptum partes obtineat.

DEFINITIO IV.

L*ineæ autem termini sunt puncta.*

Non quod omnis linea terminos consequatur, cum multæ redeant in semetipsas, vt *Circularis*, *Eliptica*, *Orbicularis*. Sed quia omnis linea, quę terminos consequitur puncta viee terminorum recognoscat; & quod omne punctum, vt terminus alicuius lineę concipiēdum sit; cùm se solùm, vt quantitas concipi nequeat ea ratione, quòd nullam sine linea partem obtineat: Ex partibus autem, vt dictum est, quantitas essentialiter constat.

DEFINITIO V.

R*ecta linea est, quæ ex æquo suis interiacet punctis.*

Idest, vt exponit Proclus, *quod quanta sit punctorum alterius ab altero distantia, tanta sit recta linea, quæ ab ipsis terminatur magnitudo; atque hoc est ex æquo inter sua puncta collocari.* Quare linea recta est breuissima, quę de puncto ad punctum duci queat, vt patet in 1. figura. Siquidem punctata est maior, quàm continuata linea, quæ inter A, & C, puncta mediant.

Regulæ verò alicuius, aut cupreę, aut ligneæ; quę defectum ad ducendas rectas lineas examen est. Si eâ adhibitâ ducatur linea A B ab A in B punctum. Deinde inuertatur, vt regulę superior superficies fit inferior relinquendo extrema ipsius ad eas partes, ad quas erant, dextrum ad dextram, sinistrum ad sinistram, & ducatur alia linea, de puncto A ad punctum B, nam si per primam incedit optima est, si verò non incedit falsa. Ratio est; quia linea recta eadem extrema consequens, spatium non occupat, vt infrà in

DEFINITIO VI.

T*ermini superficierum sunt lineæ.*

Superficierum, & linearum terminantium exempla Proclus assignat, *vmbras*, quę cùm priuationes sint, & nihil consequenter altitudinis habeant, latitudinem tamen, & longitudinem possideāt lineisque terminantibus circumscribātur. Illud namque, in quo vmbra finit, lux incipit, quod equidem indiuisibile est: nisi, penumbra obliteretur, linea est, vmbrosam superficiem terminis definiens.

DEFINITIO VII.

S*uperficies plana est ea, quæ ex æquo suas interiacet lineas.*

Scilicet, quæ ad instar alicuius speculi, nihil anfractuosum, impolitum, aut montuosum, rugosumue continet. Estque superficies breuissima; quæ de linea ad aliam lineam, duci queat. Et si super eam ducantur rectę, omnes secundùm omnem suam superficiem, subiectum tangent; Vnde modus experiundi superficiem, est regulam exactissimam illi multimodè, & penes diuersos situs applicare.

DEFINITIO VIII.

P*lanus angulus est duarum linearum in plano se mutuò tangentium alterius ad alteram inclinatio.*

Angulus planus, qui fit à lineis rectis hic specialiter definit ab Euclides: Quamuis, & angulos curuilineos comprehendat, qui eodem plano iacent. Licet enim multæ lineę curuę ad sese perpetuo fluxu inclinent, vt circularis, Elliptica, Spiralis, & tamen angulum non constituant. Nihilominus, & ipsę angulum efficient, vel ad aliam curuam, vel ad rectam inclinatę, quę sequelam suę inclinationis, & normam non imitetur, vt vides figura 3. & 4. & 5. At duę circulorum portiones A D, & E C ductę duobus centris E, & D angulum non constituunt, quia licet diuerso centro ducantur, altera tamen alterius ductum suauiter sequitur, & inclinationem emollit. Sicut enim rectę à rectitudine deflectentes angulum constituunt: Sic quoque curuę suam inclinationem, & ductum non continuantes angulum constituent.

Nota verò; quòd in angulo duo possunt considerari, & ipsa linearum inclinatio, & spatium, quod inter lineas rectas ab illâ inclinatione relinquitur. Euclides verò non loquitur de spatio; sed de ipsa inclinatione. Vnde frigidum est illud aliquorum paradoxum; Lineas mutuò inclinatas duos angulos constituere, licet enim duo spatia relinquant, nempe A B E C extimum, & A E C intimum; adhuc tamen vna est inclinatio. Quare & vnus angulus, qui relinquit spatium externùs A B C E vtcumque terminandum, & non vnicâ rectâ, & internum A E C, quod ductâ lineâ rectâ à puncto A ad C terminari potest, & hoc spatium est propriè anguli, qui circumferentiâ A C metitur facto centro in E vertice inclinationis: Itaut maior ille angulus dicatur, qui habente potest æqualis circuli interpositam maiorem circumferentiam inter crura A E, & E C; minor verò; qui minorem inter sua crura complectitur Peripheriam.

DEFINITIO IX.

C*Vm autem, quæ angulum constituunt lineæ rectæ, fuerint; rectilineus ille angulus apellatur.*

Patet definitionem octauam de angulis rectilineis præcipuè loqui: quia tantùm hanc rectilineorum ponit definitionem. Sunt autem plures formæ angulorum rectilineorum. & mixtorum, de quibus hic superfluè loqueremur. Tantummodò genericè aduerte. Mixtos eos esse, qui curuâ, & rectâ continentur, vt in figura 4. Curuilineos autem duobus curuis, vt in 5. figura videre est.

DEFINITIO X.

C*Vm autem recta linea super rectam insistens lineam angulos facit deinceps æquales, rectus est vterque æqualium angulorum; & , quæ insistit, recta linea perpendicularis vocatur ei, cui insistit.*

Anguli deinceps sunt illi, qui ab eadem linea vltra contactum productâ, & ab altera inclinatâ fiunt ad idem punctum: Sic apud 6. figuram angulus B A D, & angulus D A C ad idem punctum A effecti, anguli deinceps vocitantur. Si ergo, in ipsa 6. figura, in puncto 6. recta A 6. cadat, & angulum A 6 B, & alterum B 6 A, qui sunt anguli deinceps, æquales fecerit; itant 6 A non magis inclinet in hanc, aut alteram partem, anguli illi recti dicuntur.

DEFINITIO XI.

O*Btusus angulus est, qui recto maior est.*

DEFINITIO XII.

A*Cutus verò, qui minor est recto.*

Acutus itaque angulus erit E 6 B; quia minor recto est B 6 A. At verò C 6 E recto maior erit. Anguli autem apud Mathematicos tribus literis designantur, & media litera semper significat illud punctum, ad quod fit inclinatio, & ipsum angulum denotat.

DEFINITIO XIII.

T*Erminus est alicuius rei extremum.*

Vnde sunt tres termini quantitatis, Punctum, Linea, Superficies; quia eam secundùm tres rationes terminant.

DEFINITIO XIV.

F*Igura est, quæ sub vno, vel pluribus terminis comprehenditur.*

Igitur, nec punctum, nec angulus figura est; quia terminata non sunt suis terminis. Angulus enim licet si clausus duobus terminis; non tamen vndique: Cùm ab ea parte, quâ lineæ patent, licet possit terminari, vel rectâ, vel curuâ, & fieri triangulum; non tamen de sua essentia, & secundùm esse præcisum angulus id consequitur. Punctum verò secundum rationem puncti terminus omnigener est, cum nullam partem amplectatur: Quarerè, nec plures terminos, aut ambitum consequi poterit hinc, & inde claudentem: alioquin in partes distingueretur. Sic nec quantitas infinita; etiam si aliquibus terminis clauderetur; si tamen ab aliquâ parte in infinitum pateret, figuræ appellationem mereretur; quia terminis vndiquè non comprehenderetur.

DEFINITIO XV.

C*Irculus est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ* Peripheria *appellatur; ad quam, ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ terminantes æquales sunt.*

Si in figura 7. omnes rectæ à puncto A in peripheriam terminantes, vt A B, & A C, A E, & A I sint æquales, ille vocatur *Circulus*. Potest etiam hoc pacto definiri. *Circulus est figura plana, quæ describitur à linea finita altero manente extremorum, alio se mouente; donec perueniet, ad idem punctum, à quo discessit motus*. Sic si linea A B manente A moueatur, donec alterum extremum a se mouens perueniat ad punctum idem B, à quo incepit motus, circulum describet. Differunt autem istæ definitiones, quòd hæc causam efficientem explicet, illa formalem. Geminus apud Proclum vocat lineam circularem compositam; nempe refractam, & in sese inclinatam, & angulatam, & Arist. 1. de Cœlo inquit. Circulum infinitis angulis constare, quod intelligendum est, non à parte rei; quasi quod circulus materialis infinitis angulis plicaretur, cùm, nec quidem infinitas partes consequatur: Sed quod ex suo conceptu debeat vna pars concipi inclinata ad aliã. Cùmque in quantitate partes quidem in infinitum conceptibiles sint; licet non factibiles; hinc est, quòd infiniti anguli in circulo concipiendi sint; nempe quælibet pars, quæ concipiatur, si vt circuli concipiatur, oportet concipi, ad aliam inclinata, interiùs minor, exteriùs maior.

DEFINITIO XVI.

H*Oc verò punctum* Centrum *circuli appellatur.*

Itaque nullum aliud punctum *Centrum*; nisi circuli dici potest, eo quod debeat esse in circuli plani medio. Benè autem *Centrum* circuli dicitur punctum, licet enim nullas concludat partes; omnes tamen lineas, quæ à circumferentia ducuntur terminat. Quod nec lineæ secondùm, id iuxtà quod in punctum feruntur, partes obtineant; nimirum latitudinem, & hoc Methaphysicè, & abstractè, cum fundamento tamen in re, scilicet in ipsa diuisione circuli in sectores, vt est sector I A B, cùm enim diuisiones spatium non occupent in latitudinem, mente conceptæ; nec illud, quod terminat istas diuisiones, partes habebit in latitudinem. Sed neque in longitudinem: cùm lineæ terminus sit. Verùm materialiter, & in ipsa quantitate punctum propriè non est, nec indiuisibile, cùm nulla pars in quantitate ipsa indiuisibilis sit; vt supra dictum est.

DEFINITIO XVII.

D*Iameter autem Circuli est recta quadam linea per centrum ducta, & suis extremis in peripheriam terminans; quæ circulum bifariã secat.*

Tales sunt in fig. 7. lineæ I C, & E V; Transeunt enim per centrũ A, & in peripheriã finiunt suis extremis I, & C, sicut etiam E, & V; circulumque bifariam secant; quia per punctum medium transeunt, nempe per centrum. Quamobrem, si superficies circuli plicaretur, in punctis,

E V,

EV, congrueret pars circuli EBV parti EDV; cùm AB sit æqualis lineæ AD.

DEFINITIO XVIII.

Semicirculus est figura, quæ continetur sub diametro, & sub dimidia peripheria.

Talis est *semicirculus* EDV, qui continetur sub peripheria ADV, & sub diametro EV.

Porrò segmentum circuli erit illud, quod sub peripheriæ portione, & linea, quæ diameter non sit, continetur. Sunt autem compositæ figuræ, & mixtæ ex curua, & recta linea; anguliusque tũ segmenti, tum semicirculi mixtus est, curua, rectaque comprehensus, vt AED.

DEFINITIO XIX.

Rectilineæ figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

Genus explicat Rectilinearum figurarum. Non autem earum, quæ vnica linea continentur. Quod in istis libris agat quidem de pluribus figuris rectilineis; de solo autem circulo sermonem fit facturus. Quapropter non fuit necessè explicare genus figurarum vnico ambitu comprehensarum. Verùm possent sic definiri *figuræ orbiculares vnica linea clausa, quæ in sese redditur*. Figuræ verò plurium laterum; sed curuorum definirentur, *quæ flexis lineis continentur*. Mixtæ autem, *quæ sub curuis, & rectis clauduntur*.

DEFINITIO XX.

Trilateræ figuræ sunt, quæ sub tribus lineis continentur.

DEFINITIO XXI.

Quadrilateræ, quæ sub quatuor.

DEFINITIO XXII.

Multilateræ, quæ sub pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

Quoniam species figurarum rectilinearum desumptę à multitudine laterum in infinitũ progrediuntur. Ideo omnes alias generali definitione complectitur. Attamen explicauit trilateras, & quadrilateras; quòd de istis hoc primo libro tractet, quę & omnibus alijs fundamenta præbent, & propriè ad Elementa pertinent; cùm omnis figura rectilinea plana, vt videbimus, in triangula resoluatur.

DEFINITIO XXIII.

Trilaterarum autem figurarum, Æquilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DEFINITIO XXIV.

Isosceles autem, quod duo latera æqualia tantummodò tenet.

DEFINITIO XXV.

Scalenum autem, quod tria inæqualia habet latera.

Nam, cùm triangulum tribus lateribus clauditur; in tres etiam species diuiditur. Si etenim omnia latera sint æqualia, constituitur *Æquilaterum*, vt fig. 8. Si duo tantùm *Isosceles*, vt 10. fig. & 11. Si omnia inæqualia, vt fig. 9. *Scalenum* constituitur.

DEFINITIO XXVI.

Ad hæc etiam trilaterarum figurarum, rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

Vt fig. 10. vel 11. Hęc autem secundi trianguloram diuisio non est subordinata primæ; sed æquã vniuersalitate patet, nec ei vllo pacto adnexa. Nam vt benè aduertit Proclus ad hanc definitionem possunt pertinere figuræ laterum quatuor, quæ tamen tres angulos solùm obtinent, vt triangula Cilogonia, & Accidoides cuspidi sagittę similia, vt fig. 12. quæ tamen tres tantùm angulos obtinent. Deinde triangulum rectum angulum habens potest esse, & Isosceles, & Scalenum, non autem æquilaterum. Vnde patet hanc triangulorum distinctionem à primã non pendere. Licet magnitudo angulorum à lateribus quasdam insignes obtineat dependentias; vt videbimus.

DEFINITIO XXVII.

Amblygonium autem, quod obtusum angulum habet.

Veluti fig. 12. apud circulum. Quod etiam potest esse Scalenum, & Isoscelum.

DEFINITIO XXVIII.

Oxigonium autem, quod tres habet acutos angulos.

Velut fig. 8. Quod etiam potest esse Scalenum, Isosceles, & Æquilaterum. Eo quod in omni triangulo tres quidem possint esse acuti anguli; sed rectus, & obtusus solùm vnus esse potest. Quamobrem reliqui duo necessariò acuti erũt. Qui si erunt æquales, triangula quoque, duo latera æqualia obtinebunt: si inæquales inuicem, duo latera quoque subtensa erunt inæqualia, & semper latus tertium angulo obtuso, vel recto subtensum maius, ob angulum maiorẽ reliquis, quem subtendit.

Oxigonium, cum tribus acutis angulis potiatur latera potest consequi omnia inæqualia, vel duo, vel tria æqualia, & sic esse Æquilaterum, Isoscelum, & Scalenum. Nam dari potest triangulum, vt cum Barocio aduertit Clauius ad propos. 15. lib. 4. Elemen. Oxigonium, quod latus habeat, tum hoc, tum altero crure seorsim sumpto malus; etiam si crura reliqua inuicem sint æqualia.

DEFINITIO XXIX.

Quadrilaterarum figurarum quadratum est, quod æquilaterum, & rectangulum est.

DEFINITIO XXX.

Altera parte longior figura est, quæ æquiangula quidem est, & non æquilatera.

DE-

DEFINITIO XXXI.

RHombus, *quæ æquilatera, at æquiangula non est.*

DEFINITIO XXXII.

RHomboides, *quæ opposita, & latera, & angulos æqualia tantùm habet. Non omnia.*

DEFINITIO XXXIII.

R*Eliqua verò ab his quadrilatera* Trapezia *vocentur.*

In istis Definitionibus illud aduerte. Quòd ab altera parte longiori, qualis est fig. 13. differt quadrata 2. non in angulis: sed in lateribus tantùm: Rhombo verò fig. 14. expresso in angulis; at non in lateribus: A Rhomboide fig. 16 signato in angulis simul, & in lateribus; sicut & à Trapezio, fig. 15. designato.

DEFINITIO XXXIV.

P*Arallelæ rectæ lineæ sunt, quæ, cum in eodem sint plano, ab vtraque parte, etiam si in infinitum producantur, in neutram partem sibi mutuò incidũt.*

Tales sunt in fig. 17. Parallelæ A B, & C D. Quare duas conditiones essentiales requirit Euclides, vt lineæ parallelæ, idest æquidistantes sint; Prima, quòd sint in eodem plano, alioquin in diuersis certum est non conuenire. Secunda quòd numquam coeant, licet in infinitum producerentur. Quod licet nequeat cognosci experimento, cognoscitur tamen animo, & ratione. Quòd, cùm distantia inuicem non sit imminuta, dùm procedunt vsque ad certum spatiũ atque terminum; nec vnquam imminuetur, cum par sit ratio de illo processu ad quamcumque distantiam: neque dicas, posse illam quidem distantiam esse imminutam; sed non sensibiliter: nam non loquimur de lineis sensibilibus; sed abstractis, & animo conceptis, in quas, vt supra diximus Mathematica, velut in suum obiectum fertur.

Definitiones, quę sequuntur Euclidis non sunt. Ab authoribus tamen adduntur, vt necessariæ ad ea, quę primo libro traduntur, percipienda.

DEFINITIO XXXV.

PArallelogrammum *est figura quadrilatera parallelis oppositis lateribus.*

Sic fig. 13. 14. 16. 2. Parallelogramma sunt, estque nomen genericum conueniens quadrato, Rhomboidi Rhombo, & altera parte longiori, sed non Trapezio.

DEFINITIO XXXVI.

D*Iameter in parallelogrammo est linea; quæ diuidit angulos oppositos, & latera bifariam.*

Hoc aduertit Arist. lib. 15. Probl. 1. & 2. Cur diameter appelletur, quę de angulo ad angulum ducta sit, vt A 2, & non quęlibet alia bifariam figuram diuidens, & reddit rationem, quia diuidit bifariam non solùm latera, ita vt duo remaneant hinc, duo indè; sed etiam angulos, quod nullę alię rectę in parallelogrammis ductę efficiunt.

DEFINITIO XXXVII.

S*I parallelæ in parallelogrammo ducantur per idē diametri punctum, partes, per quas transit diameter,* circa diametrum; *per quas verò non transit,* complementa *dicuntur.*

Sic ductis parallelis A B, & C D per idem punctum 1, nigra, per quę diameter non transit, Parallelogramma *Complementa*; & alba, per quę transit, vocantur, *circa diametrum*, consistentia.

POSTVLATA.

1 POstuletur. *Vt à quouis puncto ad quoduis punctum linea recta duci concedatur.*

2 *Lineam rectam terminatam in continuum rectā producere.*

3 *Quouis centro, & interuallo circulum describere.*

4 *Omni magnitudine data posse sumi maiorem.*

PRIMA PRINCIPIA.

QVæ etiam solent dici *Dignitates, Axiomata, Pronunciata, Effata, communes Notiones*; Alia omninò prima, quę adeo sunt clara, vt primo conceptu indubitata euadant; Alia non item; sed quasi immediatæ primorum principiorum conclusiones. Primi generis sunt.

PRINCIPIVM I.

Q*Væ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, & quod vni æqualium maius est; maius etiam alio necessè est esse, & si minus vno similiter minus altero. Et si vnum æqualium est maius magnitudine quapiam, aut minus alterum quoq; æqualium ea magnitudine maius est, aut minus.*

PRINCIPIVM II.

E*T si æqualibus æqualia adiecta fuerint, tota erunt æqualia; Et, si ab æqualibus æqualia ablata fuerint, tota erunt æqualia.*

PRINCIPIVM III.

E*T si inæqualibus æqualia adiecta fuerint remanent, vt prius inæqualia, & si iisdem inæqualia inæqualia quoq; addantur; sed maius maiori, minus minori, adhuc sũt inæqualia; Et si ab inæqualibus æqualia ablata fuerint manent, vt prius inæqualia. Quòd si ab iisdem inæqualia ablata sint maius minori, minus maiori remanent inæqualia.*

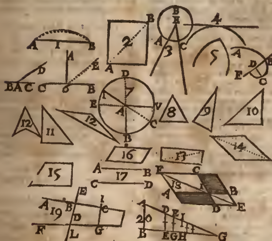
PRINCIPIVM IV.

E*T quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia, & quòd vni æqualium duplum est, duplum etiam est alteri. Et, quæ eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia; Et, quæ sunt æqualia, eiusdem dupli, sunt dimidia.*

PRINCIPIVM V.

E*T, quæ mutuò sibi congruunt, inter se sunt æqualia: Nimirum quando vnum alterum nulla parte excedit.*

PRIN-



PRINCIPIVM VI.

Totum sua parte maius est.
Quibus auctores addidere sequentia:

PRINCIPIVM VII.

Omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.

Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis; & si iisdem inæqualibus æqualia addantur erunt adhuc excessus totorum, & adiunctorum æquales. Sic si è conuerso æqualibus inæqualia demantur, aut inæqualibus æqualia essent totorum excessus, & adiunctorum æquales.

V. G. si duobus palmis addantur, hinc tres quartæ palmi, inde palmus, differentia erit horum compositorum vnius quartæ palmi, vt differebant priùs tres quartæ palmi à palmo, antequam adderentur. Et si tribus quartis palmi palmus, & palmo palmus addatur quantitates additæ different vna quarta palmi; vt differebant priùs tres quartæ, & palmus antequam vnus palmus singulis adderetur: quod est dicendum pariter de ablatione.

Principia, quę minus clara sunt, & ideo ostendi possunt.

PRINCIPIVM VIII.

Dva linea recta non habent vnum & idem segmentum commune.

Idest. Nequeunt reperiri duæ lineę quarum vna pars sit eadem cum altera, ita vt eandem lineam integret: Reliqua verò sit ab illa remota, V. g. in fig. 7. Quod I A V sit vna recta, I A C sit altera recta, quę consequantur eamdem partem I A, & in ipsa idem sint: Reliqua verò in duas partes abeat. Si enim hoc esse posset, vt ostendit Proclus, I D V esset semicirculus; quia linea, quę supponitur recta I A V, transiret per centrũ; vnde pars circuli I A D V ab ipsa, & à peripheria conclusa esset semicirculus, & ideo æqualis I A C D V semicirculo, quod esse nequit.

PRINCIPIVM IX.

Dva lineæ ad idem punctum concurrentes, si producantur, se mutuò secant.

Sic A C, & A V in fig. 7. quæ ad idem punctum A concurrunt productę in D, & I se mutuò secant. Id autem potest ostendi. Nam si se non secant, congruunt (Si enim producantur vtique retrò non redibunt) & I A erit idem segmentum, ac A D, & idem erit cum ipsa, quod est contra præcedens pronunciatum.

PRINCIPIVM X.

Dva lineæ rectæ in eadem puncta concurrentes spatium non comprehendunt.

Sic in prima figura. Si à puncto A, in B alia linea recta ducatur, cadet in lineam primo factam, & per eam ductus ipsius lineę incedet, nec inter eas spatium mediabit, vt mediat inter punctatam, & rectam A B.

PRINCIPIVM XI.

Omnes anguli recti sunt æquales.

Quoniam, si essent inæquales alter esset maior recto, vel minor, & sic esset acutus, vel obtusus; quod esse nequit, cùm esset rectus, vt supponitur; non rectus autem, quia minor altero recto. Et sic rectus, & non rectus.

PRINCIPIVM XII.

Si duas alias lineas alia secans, angulos intra ipsas, & versus eandem partem, minores duobus rectis

vel::s fatiant; illa linea t:ndem concurrent.

Quia est altera, ad alteram inclinata; vnde cùm non sint æquidistantes, necessariò tandem conuenięt: Sic quia angoli in fig. 9. ad CBD, & DBE ad easdem partes, quas facit linea EL incidés, vel secans duas AC, & EF sunt minores duobus rectis; necessariò tandem concurrent, dummodo ducantur per partes semper æquales.

Ratio est Quia si B C procedendo à B in C absumat aliquam partem distantię, V. g. sextam C I, quę est eadem, ac illa, quę est inter B, & D. Si producatur etiam pee aliam partem æqualem absumet rursus aliam partem æqualem sextam; Cumque partes æquales inter B, & D infinitę non sint. Ideo tandem omnes absumet, & sic perueniet ad aliam lineam F G. Dices; Dantur lineę asymptotales, quę ad rectam accedunt semper; nec vnquam eam assequuntur. Respondetur eas aut esse flexas, & de istis non loqu mur; aut esse rectas, & istę non ducuntur per partes æquales, sed sempee minores, & minores; Vnde est dispar ratio.

Nam Sint duę rectę, vt in fig. 10. AC, & BC, sed tali modo ducantur; Producatur AD vsque ad D, & BE vsque ad E, & ducatur ED. Deinde medietas ED assumatur, & ad eam distantiam ducatur parallela GF, & postea producatur AD in F, & BE in G. Assumptaque rursus medietate GF, quę est minor: quam ED ducatur alia parallele HI, & ad eam ducatur AO in I, & BE in H. Itaque Mathematici ostendunt, quòd lineę de parallelis in parallelam viciniorem ductę, & semper in minores, minoresque distantias continuatę quales sunt AD, DF, & FI; numquam esse peruenturas ad punctum C, in quo se coniungant. Eo quod spatium AC sit diuisibile in infinitum. Sed hoc est ducere lineas inuicem inclinatas pee partes semper minores, & consequenter minori, minorique augmento eas prolungare, at non per partes æquales, & æquali edditione eas continuare. Partes verò seipsis perpetuò minores saltem Methaphisicè Exp. 1. tract. 1. admisimus. Non autem æquales; quę ipso sensu iudice infinitę in quantitate non reperiuntur.

EXPENSIO VII.

De Elementis in genere.

SVpra nomen Elementi, vimque explicauimus; modo de eius differentia, atque diuisione peragendum.

Elementares institutiones à vaeijs olim inuentas collegerunt antiquitùs aliqui Hypocrates, Chius. Leo discipulus Neoclidis, Theudius Magnes, Hermotinus Colophonius. Omnium autem Euclides prestātissimus, qui, cùm longo tépore Alexandrię docuisset, vt testatur Procl. l. 2. c. 4. *Multa construxit eorum, qua ab Eudoxo multa verò perfecit eorum, qua à Theateto reperta fuerant, & ea praterea, qua à prioribus molliore brachio ostensa fuerant, ad eas redegit demonstrationes; qua nec redargui, nec conuinci possunt.* Vnde etiam Ramus lib. 3. Scho. Math. testatur. *Nullus paralogismus nulli Spendographia in totis Elementis Euclidis nobis, quamquam seuerè inquirentibus animaduerti potuit.* Nec solùm Elementa, sed multas alias insignes lucubrationes edidit quarum, quę ad nos peruenerunt, sunt Optica, Catoptrice, Musicæ elementares institutiones, Phęnomena Datorum liber, & Insupee, quas, non habemus, operas liber de diuisionibus, & Conicis t vnde insignem in Geometricis consecutus est, & palmam laudē.

CONCL. I. PROPOS. VI.

Elementa in duplici ordine sunt, alia subalternata, alia subalternantia.

PAtet, quia aliqua dependent à primis, & suppositis illis probantur; Ergo aliqua sunt subalternantia, idest, quę alijs prima principia prębent, alis dependentia. ab illisque principia mutuant, & ex eis euidentiam adipiscuntur. Vnde propriè, & verè Elementa non sunt. Hæc verò sunt, quę II, & sequentibus libris explicantur; maximè quia non adeò vniuersalia sunt; sed ad certas figuras, nempe solidas tales, ent tales restringuntur.

CONCLVS. II. PROPOS. VII.

Ordo Elementorum decem libris comprehensorum talis est; Primò agitur de proportione; Secundò de proportionum similitudine; Tertiò de quantitatis Discretæ, & Continuæ comparatione.

PRob. Quia primis 4. libris ostendit figurarum, aut partium in ipsis factarum proportionem, & ent æqoeles, aut maiores, aut minores probat, Primo quidem lineas triangula parallelogrāma quoad se, Secundo lineas quoad earum potentiam, Tertio circulos, Quarto alias figuras planas explicans. Libro verò 5. agit de proportionum similitudine in genere, Sexto de proportionum similitudine in quantitate continoa, Septimo, Octauo, & Nono de proportionum similitudine in numeris. Decimò comparat quantitatem Discretam, & Continuam, & eerum proportiones componit, aliasq; conuenire eum proportionibus numerorum. alias non conuenire affirmat, & ideò numeris inexprimibiles, & irrationales asserit, & quamuis passim agat de effectione figurarum, vt cū agit de constituendo triāgulo æquilatero, & quadrato, &c. Attamen in ipsa probatione ostenditur, earum partium adinuicem æqualitas, vel quod vna alterà sit, vel maior, vel minor. Vnde semper agit de proportione corpoeum, vel eorum partium adinuicem. Non agit verò de proportione numeroeum, quia in ipsa prolatione numeri statim cognoscitue, an numerus sit maioe, aut minor, aut æqualis. Vnde superfluum erat de hac re demonstrationem extruere. Agit itaque de proportione in genere, 1. 2. 3. & 4. libro. De proportione verò in specie, eam comparando alteri proportioni, ideoq; de proportionum similitudine 5. 6. 7. 8. & 9. libro, & tandem 10. de quantitatis Continuæ, & Discretæ comparatione,

TRACTATVS IV.

In primum Librum Elementorum.


IBER primus Elementorum agit præcipuè de lineis inter se comparatis, quoad situm, æqualitatemque, & de triangulis duplici modo, primò item in se, comparando latera angulis, quibus subsunt. Secundò etiam respectu aliorum triangulorum, ostendendo quænam sint æqualia, quæ verò non. Tandem agit de quadratis,& parallelogrammis versus finem. Agit autem duplici modo quædam speculatiuè tantùm, & Theoricè, quædam verò Problematicè, & in ordine ad operationem. Ordo verò confusus est; non quidem, quoad rerum dependentiam, cùm aptissimè in hoc procedat; sed quoad materiarum diuersitatem. Siquidem primo agit de triangulo, inde de lineis, rursus reddit ad triangula, &c. Nos verò hunc ordinem ausi sumus paululùm immutare; vt etiam secundus ordo seruaretur in ipsis rebus tractandis. Et quia modo nominantur latera, modo anguli, angulos nigro, alboque, vel sub nigro distinximus; at lineas literis notauimus, vt magis perspicua esset demonstratio, & literarum ferè eadem repetitio intellectum legentium non confunderet. Sicca verò, & nuda ponimus Elementa, quòd & ipse Euclides ita faciendum duxit, vt testatur Proclus lib. 2. cap. 5. *Præcipuè verò circa Geometricam Elementorum institutionem eum*, nempe Euclidem, *quispiam admirabitur, propter ordinem, & electionē eorū, quæ per Elementa distribuit; etenim non ea assumpsit omnia, quæ poterat dicere;* sed ea dumtaxat, *quæ Elementi potuit ordine tradere*. Vnde puto grauia per se, & difficilia primo ingressu esse Elementa; vt contra ius faciat, & æquitatem, illum, qui insuper ad augendam fascem, aliena vocet in Elementa, & ex alijs principijs dependentia, & ideò obscurissima, & altioris ordinis, vt tenebras offundat clarissimis, proponat. Satiùsque existimaui sobriè me agere, & necessaria solùm proponere consulens simul, & breuitati, & claritati.

EXPENSIO I.

De Triangulis constituendis.

CVm Triangulum prima figurarum sit, & quædam etiam inter lineas exerceri nequeāt siue earum consideratione, & effectione, ideò primus limes in triangula ingreditur.

PROB. I. PROPOS. I.

Super data linea terminata Triangulum æquilaterum constituere.

SIt linea B A finita, super quam triangulum æquilaterum sit constituendum.

Centro B trahatur circulus interuallo A B vt in postulatis concessum. Iterumque centro A eodem interuallo A B alius circulus describatur.

Se intersecabunt in C; Trahatur igitur ad illud punctum intersectionis C à puncto B linea recta C B, & item à puncto A alia recta A C ducatur ad idem punctum C: eritque factum triangulum A C B rectilineum, *quod dico esse æquilaterum.*

PRÆASSVMPTVM.

PRimò supponendum lineas tractas à circumferentia ad cētrum esse æquales ex dictis. Secundò quod, quæ sunt æqualia alicui tertiæ rectę, esse lineas æquales inuicem ex 1. pronunc.

Prob. Linea C B est æqualis lineæ B A; vt ductę à centro B ad punctum circumferentiæ A, & C.

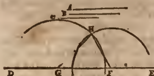


Linea quoq; altera A C est æqualis eidem A B, ob eandem rationem, quod ductæ sint à centro A ad puncta circūferentię C, & B; Ergo cùm lineæ tertiæ A B, duo recta A C, & C B sint æqualia, erunt & inuicem æqualia.

PROB. II. PROPOS. II. Euc. 22.

Datis tribus partibus in vna recta, quarum duæ simul sumptæ reliquâ mediâ sint maiores, constituere triangulum habens crura illis æqualia.

SVnt datæ in recta D E partes D G, & G F, & E F æquales, si ita placuerit, singulæ singulis A, C, B. Debeatque triangulum constitui, cuius crura dictis partibus sint æqualia.



Facto centro in F circulus ducatur interuallo F E. Iterumque facto centro in G interuallo D G circulus ducatur, qui se intersecabunt in H. Ductis igitur ad H rectis G H, & F H *erit factum triangulum* G H F. *Cuius basis est* G F *vna pars, linea* G H *æqualis* G D *alteri parti, & F H tertia parti* F E.

Probatur; quia sunt duæ D G, & G H æquales, vtpote radij eiusdem circuli ducti centro G. Sic quoque duæ F H, & F E sunt æquales, vtpote radij eiusdem circuli ducti centro F; Tertia autem G F eadem, quæ priùs. Ergo crura huius trianguli G F H, tribus partibus lineæ D G, & G F, & F E sunt æquales.

Quòd autem circuli se debeant intersecare; patet ex conditione, quam posuimus in propositione; quòd duæ D G, & F E reliquâ mediâ sint maiores simul sumptæ; quia sic circulus F H, & G H in linea G F vnus, vbi alter est, secundùm aliquam sui partem cadet: Vnde necessariò deuenti ad H, dum alter exit ab altero, se intersecabit.

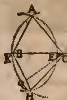
PROB. III. PROPOS. III.

* *Dato triangulo, ei triangulum æquale ad aliam partem constituere.*

AB antecedenti Propos. emergit, quod dato triangulo A B C possit fieri aliud triangulũ B H C super eãdem basim B C alteri æquale. Interuallo B A describatur circulus, & interuallo C A describatur rursùs circulus; vbi ergo se intersecant in H à punctis B, & C ducantur rectæ B H, & H C, *Et erit factum triangulum* B H A *æquale triangulo* B A C.

Probatur latera enim sunt æqualia; Nam B A crus, & B H crus sunt eiusdem A B H radij; Ergo æqualia: Sic & A C, & C H crura sunt eiusdem circuli A K H radij; Ergo æqualia, Crus verò B C commune.

Anguli autem singuli, angulis erunt æquales; Nam si aliquis est inæqualis; Sit V.g. E C H, qui sit maior: Ita vt B C Q niger dicatur angulo B C A æqualis. Et tamen latera sint lateribus, singula singulis trianguli B A C æqualia; Ergo B Q crus erit æquale B A: sed B A est æquale cruri B H; Ergo etiam B Q crus esset inæquale cruri B H, minus maiori; quod esse nequit. Ergo omnes quoque anguli erunt æquales: Cùm idem argumentum sit de reliquis, quòd verò possimus ducere circulũ interuallo dato, & centro V.g. C: hoc postulauit Eucl. & fecit in prima Propos. Nã in ducendo posteriori crure æquilateri trianguli interuallum assumpsit idem, quòd priùs facto alibi centro.



COROLLARIVM.

HInc est vniuersaliter, quòd si detur triangulum habens duo crura iuncta eidem basi, V.g. B C vel æquali, & crus vnum vni, alterum alteri sit æquale, quòd & triangula singulis angulis insistentibus, iisdem lateribus æqualibus erunt æqualia: Sic anguli ad C erunt æquales; quia æqualibus B H, & B A cruribus insunt, vel insistũt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Datum angulum, & basim, æquicrurumque triangulum bifariam secare.

* SIt datus angulus I A C, qui in duo secãdus sit centro A interuallo ad libitum A B ducatur circulus B V D, & secet crus A C in D, & recta ducatur B D. Facto deinde centro in D interuallo D A ducatur circulus, & idẽ fiat in B interuallo B A. Et à puncto, in quo se intersecãt in E, ducantur rectæ B E, & D E. A puncto deinde A, ad E ex post. 1. ducatur A E. Dico *angulum apud* A *esse medium sectum, in dextrumque nigrum alba esse æqualem.*

Probatur. Quia A D, & B A, vtpote eiusdem circuli radij sunt æquales; & B E est linea æqualis lineæ E A ob eandem rationem; nec non B D, ipsi A D. Ergo etiã erunt, vt illa A D, & B A, inter se æqualia hæc postrema crura B E, & E D. Ergo triãgulum A D E super eandem basim A E, ex præced. erit æquale triangulo E B A. Et sicut singula latera, singulis lateribus, sic & anguli singuli, singulis angulis; Quare angulus niger erit æqualis albo, apud A.

Dico secundo basim B D in duo sectam.

* Prob. Nam; si non est secta bifariam, erit pars altera, vel maior, vel minor. Sit, V.g maior H B, quæ, vt esset æqualis, deberet esse H V, & ducatur ab V linea V A.

Quæro, an V A sit æqualis A D, vel non? Si nõ. Iam sumus extra præsuppositionem: Nam A D, & A B præsuponimus æqualia crura: Vtpote Isocelis. Si verò æquat V A crus A D. Iam habemus V A H triangulum æquis cruribus, singula singulis correspondentibus trianguli A H D, & basis communis: Ergo etiam anguli ex præced. erunt æquales. Quare angulus apud A inter V A, & A H erit æqualis angulo maiori H A D nigro, & consequenter albo sibi æquali B A H; pars toti, quòd esse nequit. *Quare basis* B H *non erit maior basi* H D, *sed æqualis*.

*Pro.

* Prob. 5. pars: Quòd etiam triangulum B A D nuper factum sit bifariam sectum. Nam cum omnia duo crura trianguli B A H, & H A D, vnum B A, vni A H, & aliud B H. alteri H D correspondenti sint æqualia, & basis H A cōmunis, erūt triāgula ipsa inter se æqualia, ex præced. BAH, & HAD.

EXPENSIO II.

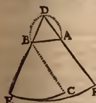
De lineis secandis.

Licet lineæ circinu secari possint, & æquales assumi, & inter postulata id potuisset connumerari; vt liceret lineam, ad placitam distantiam ducere. Id tamen noluit Euclides: Quia, vt aduertit Tartalea, poterat ostendi; & ipse voluit ostendere, quidquid ostendibile fuit.

PROB. I. PROP. V. Euc. 2.

A dato puncto datæ rectæ æqualem rectam ducere.

Sit linea data punctata B C, & datum punctum A. Oporteatque ab illo puncto A ducere rectam, quę sit æqualis datę punctatæ B C.



Coniungatur punctum extremum illius lineæ punctatæ, quę datur, cum puncto A dato, & sit linea coniungens A B. Superque eam constituatur triangulum ęquilaterum B D A. Deinde pūcto B, quod coniūctum est ad A, interuallo B C fiat circulus, & secet B D productum latus trianguli in E. Centro postea D vertice trianguli, interuallo prolungati lateris E D circulus describatur. Postea latus alterum D A prolungetur vsque ad hanc secundi circuli peripheriam E C F, nempe vsque ad F. *Et erit A F ea linea, quæ quæritur æqualis lineæ punctatæ B C.*

Probatur lineę D F, & D E sunt æquales, vtpote radij maioris circuli. Vnde demptis cruribus æquicruris trianguli D A, & D B, residuę portiones remanebunt æquales E B, & A F ex pronunc. 3. Sed etiam B E, & punctata B C; vtpote radij minoris circuli; sunt æquales. Ergo duę A F, & A C æquales tertię B E, inter se erunt æquales.

PROB. II. PROP. VI. Euc. 3.

Duabus datis lineis inæqualibus de maiori æqualem minori rectam lineam detrahere.

Dentur duæ rectæ A B minor, C D maior; Et luata præcedens Problema, vt punctatę lineæ, & circuli ostendunt à puncto D ducatur æqualis minori A B linea D E: Et ducatur cētro D interuallo D E circulus; qui secet D B in F. *Dico segmentum D F æqualę esse lineę A B.*



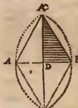
Probat. Quoniam sunt æquales vni tertiæ D E, linea A B ex effectione luata præcedens Problema, & F D segmentum, vtpote radius eiusdem circuli centro D descripti. Ergo etiam sunt inuicem æquales A B, & D E.

Patet itaque quod lineæ rectæ in tantum assumuntur æquales; quia sunt eiusdem circuli diametri, quod fortè intendit Euclides. Et ideò noluit id inter postulata exquirere, tanquam concedibile; cùm hāc proprietatem æqualium voluerit demonstrare; Quod scilicet potentiâ sint eiusdem circuli semidiametri.

PROB. III. PROP. VII. Euc. 10.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

Sit linea recta data A B; quæ non in infinitum extendatur; & quæ in duas partes æquales sit diuidenda. Super eam fiat triangulum æquilaterum. Ex prop. 1. A B C. Cuius angulus C bifariam ex prop. 4. diuidatur. *Dico lineam A B in duas partes æquales esse sectam.*



Probat. Quia in proposi. illa 4. ostensum est segmentum D B basis A B æquale segmento A D eiusdem: Ergo in duas partes æquales secta est.

EXPENSIO III.

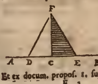
De linearum se tangentium situ.

Qvo ad situm lineę considerate secūdùm se à non prout figuræ alicuius latera, inuicem referri possunt; quæ sunt in duplici differentia; aliæ paralellæ, quæ nunquam se tangunt, etiam in infinitum productæ; aliæ verò se tangunt, vel saltem productæ se tangunt, & de istis sermo in præsenti est.

PROB. I. PROP. VIII. Euc. 11.

Datâ rectâ lineâ à puncto in illa dato lineam rectam ad angulos rectos excitare.

Recta linea detur, quæ sit A B: & in ea punctum C, à quo linea perpendicularis, quæ def. 10. descripta est, sit educenda.



Electo puncto altero in ea, V. g. in E. Ex prop. 6. Portioni C E auferatur ęqualis ad alteram partem C D; ita vt C sit pūctum medium. Et ex docum. propos. 1. super E D triangulum æqui-

æquilaterum constituatur D E F. Et à puncto C ad F recta ducatur: *Hac enim insistet super rectam datam A B perpendiculariter.*

Probatur crus C E, & D C sunt æqualia, & E F crus alteri F D; basis verò C F communis. Ergo totum triangulum nigrum toti albo triangulo erit æquale, etiam quoad angulos ex Coroll. prop. 3. Angulus itaque niger, est æqualis albo apud C existenti; Ideoque F C erit perpendicularis, ex defin. 10.

PROB. II. PROP. IX. Euc.12.

Super datam rectam infinitam à dato puncto, quod in ea non sit, perpendicularem rectam ducere.

HAnc lineam indefinitam vult esse Eucl. quia, si esset nimis breuis posset euenire, circulum ad operationem necessarium ipsam non secare; vel quòd punctum, ita extra eam esset positum, vt ipsa prolungata in illud incideret, & sic circulus necessarius ad operationem, vt oporteret, duobus punctis nó secaret, vt si esset linea P Q, & punctum H: itaque.

In puncto dato C; quod in linea non est, fiat centrum electo radio, & interuallo tali, vt rectam datam A H secet in duobus punctis A, & B. Et ab illis ducantur ad punctum C duæ rectæ A C, & C B. Deinde ex propos. 8. ea diuidatur in duas partes æquales in D, & ducta C D. *Erit, qua in propos. promittitur, ipsi A B perpendicularis.*

Probat. Nam trianguli nigri crus D B alterius triãguli albi cruri A D ex cõstructione est æquale, & item crus C B, cruri A C vtpote radij: Basis verò D C communis; Ergo totum triãgulũ nigrũ etiam quoad angulos toti albo est æquale. Vnde angulus niger ad D correspondẽti albo ad D erit æqualis, & ideò ex defin. 10. *D C erit perpendicularis.*

THEOR. I. PROP. X. Euc.13.

Cùm recta linea super rectam consistens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

INcipit hic sola speculatio, & primam proprietatem linearum se tangentium demonstrat.

Sit itaque recta A B, super quam consistat C D, & si quidem anguli hinc, inde sunt æquales, sumus extra quæstionem: Nam ex 10. defin. illi anguli recti sunt. Quòd si anguli illi sint inæquales: Dicit tamen Eucl. duobus rectis, simul sumptos esse æquales. Quod vt ostendat, imperat ex propos. 9. à puncto C dato erigi perpendicularem C I.

Probatur. Quoniam ex 7. pronunc. omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis; rectus angulus I C B erit æqualis nigro, & albo, vtpote suis partibus: Si verò addas, tum recto angulo I C B, tum albo, & nigro, nigerrimum A C I rectum, efficietur, vt albus niger, & nigerrimus additus, sint æquales duobus recto I C B, & item eidem nigerrimo ei addito, ex 2. pronunt. quòd memoriã tenendum.

Progres. 2. Rursus Angulus A C D ex eodem pronunt. 7. est æqualis, vtpote suis partibus angulo nigro I C D, & nigerrimo A C I: quare, si addas vtrisque angulis album, efficietur, vt angulus A C D, & angulus albus ad C sint æquales tribus albo, nigro, & nigerrimo ad C. Iam itaque vides angulum I C B rectum, & nigerrimum item rectum, vt priùs probatum est, tribus albo, nigro, & nigerrimo esse æquales: Rursusque, vt modo dixi, A C D obtusum, & album acutum factos à lineã D C, tribus albo, nigro, & nigerrimo item esse æquales, vt modò demonstraui: sed quę eisdem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia ex 1. pronun. Ergo *angulus A C D, & albus ad C sunt æquales angulis duobus I C B recto, & recto nigerrimo A C I.*

COROLLARIVM.

COllige quoscumque angulos super rectam à pluribus lineis insistentibus effectos esse duobus rectis æquales, sicuti hi tres albus, niger, & nigerrimus duobus rectis ostensi sunt æquales.

THEOR. II. PROP. XI. Euc.14.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, eos, qui sunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se illæ lineæ rectæ.

ELigendum est punctum C in linea A B, & ab eo duæ lineæ trahendæ sunt in diuersas partes, idest ad oppositas, vt sunt C D, & C E. Modò inquit. *Si hæ lineæ angulos, qui ex earum tractione nascuntur, æquales duobus rectis fuerint, necessariò erunt in directum, & vnicam lineam rectam continuabunt.* Hęc verò propositio conuertit superiorem, ibi enim probatum est ex rectis lineis nascentes angulos debere esse æquales duobus rectis, hic probatur *lineas rectas, & in directum positas* fore si angulos, quos hinc, inde faciunt, cum lineã, super quam cadunt, duobus rectis æquales fecerint.

Probatur. Nam si anguli, quos super lineas C E, & C D facit C A duobus rectis sunt æquales; sicut & illi, quos B C efficit; & tamen D C, & C E in directum nõ sunt, Linea D C prolungata non coincidet, nec super lineam C E incedet: Sed vel suprà, vel infrà. Cadat V. g. suprà, & sit D C I recta, prout loquuntur aduersarij. Itaque C A suprà D C I cadens, vtpote super rectam, angulos nigerrimum D C A, & album A C I duobus rectis æquales efficiet ex precedẽti Prop.

Verùm

Verùm id præsuponimus, & facere AC insistens super DC, & CE. Quamobrem, cùm, ex 12. pronun. omnes recti sint æquales, emergit; vt tum anguli facti ab AC insistente super lineam ACE, quam volunt aduer. etiam rectam, quales sunt nigerrimus, & albus; quàm anguli effecti ab eadem AC cadente, & insistente super DC, & CE, quales sunt niger cum albo, & nigerrimus, inuicem esse æquales; vtpote omnes duobus rectis æquales; Si itaque auferas DCA nigerrimum ab vtrisque, remanerent æquales albus tantùm, cum albo, & nigro simul sumptis, nempe pars toti, quod esse non potest. Ast si dicas infra cadere lineam prolongatam DC, eodem argumento perurgeris: vnde oportebit confiteri; quòd *cadet in directum DC ipsi CE, & quòd eadem in vnam lineam dirigantur.*

THEOR. III. PROP. XII. Euc. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

PRo angulis ad verticem intelligit eos, qui iuxta intersectionem sibi oppositi sunt; vt est in duobus lineis se intersecantibus AC, & BD, angulus nigerrimus, & albus E.

Prob. de angulis obtusis primò ex Propos. 10. Cùm linea BE insistat super lineam AC, faciet angulos suos, nempe album E, & nigrum duobus rectis æquales: Rursus; quia recta CE insistit super rectam ED faciet item ex eadem 10. Propositione angulum nigrum, atque nigerrimum æquales duobus rectis: Omnes verò recti sunt inuicem æquales, ex 12. pronunc. Vnde, & duo albus E, & niger angulus, duobus nigro eidem, & nigerrimo æqualitate commensurabuntur. Aufer itaque angulum nigrum vtrisque coniunctum, & nunc eum, quia idem ab vtrisque abstulisti; ex 3. pronunc. *Angulus albus apud E, & nigerrimus, æquales remanebũt.*

Simili argumento in specie de angulis acutis vteris, qui sunt niger, & albus oppositus, cum etenim AE recta insistat rectæ BD; faciet ex propos. 10. cit. angulos duobus rectis æquales; nempe obtusum album E, & acutum album: Quòd & præstabit BE cadens super AC: Quapropter angulus niger acutus cum albo obtuso E, sicut & angulus albus acutus cum albo obtuso E, erunt æquales, vtpote duobus rectis æquales. Auferatur communis obtusus albus E; remanebuntque albus, & niger acuti æquales.

COROLLARIVM I.

EX sententia Procli colligit primo Euclides: *Lineas se secantes facere quatuor angulos, quatuor rectis æquales;* nam in demonstratione ostensum est, nigrum, & album E esse duobus rectis æquales; sicut & nigerrimum cum albo acuto.

COROLLARIVM II.

ET hinc colligitur secundo, *Omnes quotcumque angulos, qui circa aliquod punctum fiunt possunt tantùm esse quatuor rectis æquales.* Namque si multiplicas rectas ad punctum E terminantes, nihil aliud efficies, quàm diuidere in multas partes quatuor angulos dictos ad E constitutos, quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur; Cùmque illi anguli quatuor rectis sint æquales; hinc est, vt omnes quotcunque anguli circa aliquod punctum consistentes quatuor solùm rectis sint æquales. Quare & omne spatium circa aliquod punctum consistens non, nisi quatuor rectis angulis, poterit æquiualere.

EXPENSIO IV.

De proprietatibus Triangulorum.

TRiangula possunt, aut considerari in se, aut considerari quatenus comparantur cum aliis. Primò agemus de triangulis in semet considerates.

THEOR. I. PROP. XIII.

Si sit triangulum ita dissectum; vt crus, cruri, & alterum crus, alteri sit æquale; angulus quoque ab illis cruribus clausus angulo sit æqualis. Basis quoque erit basi æqualis, & totum triangulum toti.

SIt triangulum EAD lineis sectum; ita quòd crus EA sit æquale cruri AI, & crus EC cruri FI, anguli verò ad E, & I æquales. *Dico Basim AF basi AC, & triangula per sectionem facta inuicem esse æqualia.*

Probatur. Nam, si basis basi non est æqualis, sit maior AF, quę, vt esset æquales, deberet esse V. g. VA: Tunc quæro dicta recta VI; an hęc sit æqualis cruri EC; Si non est æqualis, est contra hypothesim. Si verò est æqualis VI crus cruri EC, iam habemus triangulũ VAI, quod habet vnum crus VI, cruri EC æquale, & alterum EA alteri AI, basimque VA basi AC æqualem. Quare ex Coroll. Propos. 3. totum triangulum toti erit æquale, & angulus ad I niger erit æqualis angulo apud E; Et ideò angulo sibi æquali AIF semi-nigro, quod esse nequit; Cùm niger sit eius pars, & ille IAF totum, si crus AF sit malus; Nam AC erit minus, & eadem operatio, & demonstratio valebit.

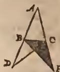
THEOR. II. PROP. XIV. Euc. 5.

Anguli Isoscelium triangulorum, qui sunt super basim, sunt inuicem æquales, & productis cruribus, anguli infra basim sunt etiam inuicem æquales.

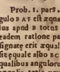
SIt Triangulum duorum æqualium crurum ABC, & ea duo crura producatur A in D, & AC in F, & ex Propos. 5. BD, & CF portiones adiunctę sint inuicem ęquales; & rectis EF coniungantur puncta E, & F, sicut linea DC puncta D, &c.

D, & C. *Dices angulos super basim* B C *apud* B, *& C esse inuicem æquales; & angulos infra basim, vt seminiger ad* B, *& niger ad* C *esse quoq; inuicē æquales.*

Probat. secunda pars. & considerentur D A C, & D C A; tanquam duo triangula; quæ vt tali ratione cogitarentur fecimus separata, replicando in ipsis triangulum idem Isosceleum B A C. Quoniam itaq; anguli ad A in triangulo seminigro, & albo sunt æqualis, & crus vnum B A vni A C ex hypothesi alterum A F ex effectione alteri A D est æquale; Ergo ex preced. A F basis basi D C erit æqualis; & totum triangulum seminigrum toti albo erit æquale.



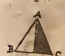
Progr. 2. Deme. B A C triangulum ab vtrisq; & quod residuum est æqualium, triãgulorum nigrum albo B D C erit æquale: *Quare, & angulus niger ad* C, *& semialbus* D B C *erunt æquales, qui sunt infra basim anguli.*



Prob. 1. pars. Quia triangulum A C D triangulo B A F est æquale ex 1. parte probat. erit angulus apud B totus angulo apud C toti æquale. Et eadem ratione pars nigra apud B parti C cruce signatæ erit æqualis; quòd triangulum nigrum sit æquale albo B C D. Ablatis ergo partibus æqualibus angulorum nigra, & C cruce signatâ ab angulis totis æqualibus; *ex post. 1. remanebunt æquales anguli supra basim* residui apud B, & C; nimirum C B A, & A C B, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc emergit triangulum æquilaterum habēte omnes angulos æquales. Prob. Nam cū duo crura A B, & A C sint æqualia, anguli supra basim C niger, B albus erunt æquales ex preced. Sic quia duo crura A C, & C B sunt æqualia angulus seminiger apud A, & albus B erunt æquales. Duo itaque anguli seminiger A, & niger C vni tertio B sunt æquales; Ergo ex Pron. 1. sūt æquales inuicem.



THEOR. III. PROP. XV. Euc.6.

Si in triangulo duo anguli æquales inter se fuerint; & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

Licet hoc Theorema faciliter possit colligi ab antecedenti; cùm sit conuersa eiusdem propositio nihilominus, quia aliquę sunt propositiones, quę conuerti nequeunt, ex logicis: Ponendo prędicatum loco subiecti; eo quòd prędicatum sit minus vniuersale subiecto; vt hęc *omnis homo est animal*, conuerti nequit, & dici, *omne animal est homo.* Cùm animal magis pateat, quam prędicatum hominis; sed dici debet, *aliquod animal est homo*. Ideò consueuere Mathematici etiam conuersas propositiones ostendere, vt demonstrent illas propositiones conuerti seruata quantitate, & qualitate earum; nimirum esse affirmatiuas, & eodem pacto vniuersales, cōuersęq; vt priùs erant; quòd euenit in ista propositione.

Dicit itaque Euclides, quod si sit triangulum B A C, cuius duo anguli sint ęquales B niger, & C semialbus; *quod latera subtensa* A B *seminigro, &* A C *nigro æqualia inter se erunt.*

Quod si aliquis neget; Ponatur; quod B A sit crus maius, quam A C, & ideò quod ad hoc, vt sit ęquale debeat esse B D.

Probatur itaque, quia B D est ęquale cruri A C ex aduersarijs: Crus verò B C est commune, & angulus B niger, communis quoque, tàm triangulo nigro minori, quàm seminigro maiori: Ex prop. 13. erunt triāgulū nigrū B C D, & seminiger B C A æqualia; pars nigra toti B C A, quod esse nequit.

COROLLARIVM.

Sequitur ex hac propositione omne triāgulum æquiangulum esse quoq; æquilaterum; quòd est conuersum prȩcedentis Corollarij, cùm enim anguli B albus in fig. prȩced. Coroll. & C niger sint æquales, latera A B, & A C erunt æqualia: Item, cùm angulus A seminiger, & angulus B albus sint æquales, etiam latera A B, & B C erunt æqualia: Quare omnia latera erunt æqualia.

THEOR. IV. PROP. XVI. Euc.7.

A basis alicuius trianguli termino cruri distedenti æqualis linea, & ab altero extremo alteri cruri alia linea æqualis non discedet, quæ terminet ad aliud punctum; quàm ad verticem prioris trianguli: dummodo versus eandem partem lineæ ducantur, in quam crura conueniunt.

Multę requiruntur conditiones ad hoc, vt Theorema verificetur; Primò, quod linea æqualis cruri exeat ab eodem extremo basis; Ideoque C A, & B D sunt æquales; Sed non exeunt ab eodem puncto C, quod requirit propositio, & ideò de eis non loquitur.

Secundò, quòd, tum hæc linea sit ęqualis vni cruri, tum altera æqualis alteri; nec sufficit æqualitas vnius cruris cum vna linea, & vt E O, & E N sint æquales, & F O, & F N inęquales, & ideò de istis non est sermo.

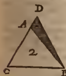
Tertiò requirit, quòd ducantur versus easdem partes: Et ideò licet I M, & I L sint æquales, & H M, & H L; quia tamen ducuntur ad duas partes oppositas M, & L. Ideò nec de istis loquitur propositio.

Multos verò habet casus, hæc propositio secundùm quòd punctum hoc prope verticem trianguli, in quod conueniunt collocatur.

Casus

Casus 1. Si ergo duę lineę dicantur conuenire, & ooñ in verticem trianguli; quarum queque suo cruri, à cuius extremo discedit, ęquetur. Sit illud punctum assignatum o, pro primo casu ita vt linea DC à puncto C discedens super crus CA ducatur, & perueniat ad D cũ alterã BD æqualis alteri cruri BA. extra triangulum CAB. Sed hoc euidenter implicantiam inuoluit, & falsum est. Nam linea CD esset maior, quàm crus CA contra hypothesim.

Casus 2. Idem erit. Si punctum cadat in latere aliquo, V.g. CD in fig. 2. Nempe, quòd linea BA ęqualis cruri BD, & linea CA discedens ab C, & super eius CD ducta conueniant in A infra verticem trianguli D; Et hoc etiã extra hypothesim; quia linea CA ęsset minor; quàm CD.



Casus 3. Si punctum hoc concursus ponatur intra triangulum in A; vt in 3. fig. Et tunc ostendetur propositio, ex propos. 14. Productâ enim linea AC, & crure CF ducatur recta AF; Et habebimus duo triangula; ex aduersarijs æquicrura CAF, & BAF.

Quia ergo BA linea cruri BF ex aduersarijs æquatur; erunt anguli super basim AF; nempe A seminiger, & niger F æquales in triangulo BFA. Angulus verò F est pars anguli IFA infra basim AF trianguli alterius AFC, & AFI totum. Ideoque angulus seminiger A, toto illo IFA minor erit, & pars ipsius nigra ad A multò minor angulo eodem IFA infra basim trianguli ACF existenti.

Pars verò ista nigra anguli ad A est infra basim AF trianguli ACF. Sunt ergo duo anguli infra basim apud A, niger A, & IFA inæquales. Sed rursum sunt æquales ex propos. 14. quia linea AC ex aduersarijs est ęqualis cruri CF. Ergo essent æquales, & inęquales anguli infra basim, quòd esse nequit.

Casus 4. Quod si punctum concursus ponatur extra triangulum sit illud in F. Et productis cruribus trianguli BAC, & ducta AF, & producta CI idem contexes argumentum.

Casus 5. Est. Si punctum concursus cadat extra triangulum in I assignatum ab aduersarijs tali modo; vt altera linearum posteriùs ductarum secet aliquam ex primo ductis; V. g. secet lineam BF, & excurrat in punctum I.

Coniungatur recta FI, eritque factum triangulum CIF; c[illegible]a duo anguli supra basim debebunt esse æquales; nempe angulus I niger, & angulus F seminiger ex propos. 14. quòd linea CI ab aduersarijs dicatur æqualis cruri CF. Quare pars nigra anguli seminigri apud F erit minor angulo nigro CIF, & multò minor addita ei parte nigerrima, vt fiat angulus BIF: Sed angulus niger F, & totus BIF niger sunt quoque æquales; quòd sint anguli ad basim in altero triangulo BIF, cuius linea BI ex aduersarijs æquatur cruri BF; & ideò ex pr. 14 sint æquales. Ergo æquales, & inæquales, quod esse nequit. Quare nullibi punctum concursus linearum postremò ductarum potest cadere; nisi in verticem trianguli, igitur vera propositio.

THEOR. IV. PROP. XVII. Euc. 32.

Cuiuscumque trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

Et vno crure producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis.

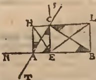
SI triangulum ABC. Volo primum ostendere angulum ad A album, C seminigrum, & B nigrum omnes internos esse æquales duobus rectis; Quòd vt ostendatur.

Progressus 1. Ducatur perpendicularis à puncto C ad basim AB ex propos. 10. & sit EC. Producto deinde AC in T, & S detruncetur ex propos. 5. CS æqualis AE, & AT æqualis EC; Et ex propos. 2. constituatur triangulum AHC; quod erit æquale ex Coroll. prop. 3. triangulo AEC; Ideoq; ad H angulus CH, & HA clausus erit æqualis angulo recto nigro apud E. Ducatur deinde HE; Eritque rursùs triangulum HCE æquale triangulo HAE ex prop 3. quod sit super eandem basim HE, & inter crura vnum HC vni AE, & alterum CE alteri HA æqualia ex effectione; Sed hæc duo component totum AHCE. Quòd prius erat. Ergo ambo simul æqualia triangulis ACE, & AHC; quæ priùs erant; Sed illa erant æqualia inter se, & ideò dimidia eiusdem totius; Sed hęc etiam sunt æqualia inter se, & dimidia eiusdem totius; Ergo æqualia cum primis. Vnde HCE erit ęquale triangulo AEC, & angulus C in ipso seminiger, angulo E nigro, & recto. Sic dicas de angulo seminigro apud A, quòd erit æqualis angulo H albo, vel E nigro rectis. Vnde recti erunt angulus HAE, & HCE.

Eodem modo procedemus in constituendo triangulo CLB; & eodem pacto argumentabimur, ostendendo angulum C, & B semialbos in triangulo BCL, & EBL esse rectos angulos.

Prog. 2. Quò posito. Sic prima pars propositionis prob. In parte ACE; quę prima consideratur. Angulus apud A niger est æqualis angulo apud C nigro, & albus apud C albo apud A ex propos. 3. Coroll. eo quod æquis cruribus insistant. Quare interni trianguli niger apud C, simul cum albo apud A, sunt æquales toti semialbo BAH, nempe angulo recto.

Prog. 2. Iterum in spatio BCS angulus niger apud B, & niger apud C; vtpote æqualibus cruribus insistentes BC, & BL ęquales sunt. Item albus B, & albus apud C æquales; Ergo albus apud C, & niger apud B angulo recto EBL, vel BCL erunt ęquales. Cum ergo in triangulo ACB anguli ACB nigra pars, cum angulo A sit recto æqualis ex primo prog. & in angulo item C pars alba, cum nigra apud B sit recto æqualis, qui in triangulo ACB sunt interni anguli. Patet, quod omnes anguli interni trianguli ACB duobus rectis erunt æquales.



Prob. pars 2. Et producatur latus aliquod, V.g. NA. Quia angulus BAN semialbus rectus est,

erit

erit quoque angulus NAB rectus; & ideò angulus externus NAC, & internus CAB erūt æquales duobus rectis ex propos. 10. & propterea tribus internis angulis trianguli CAB. Tolle internum communem album apud A: remanebit itaque solus angulus externus NAC æqualis duobus internis, & oppositis semiuigro apud C, & nigro apud B.

Hincque est quadrangulum quodlibet habere angulos quatuor suos quatuor rectis æquales: Cum enim CHAB in duo triangula diuidatur, & quodlibet triangulum suis angulis duos rectos angulos æquet; patet omnibus angulis suis quadrangulum quatuor rectos æquare.

COROLLARIVM I.

Hinc est primo, quod angulus externus maior sit: quàm quilibet oppositus, & internus seorsim sumptus; quia duobus internis, & oppositis est æqualis; quod ostendit Eucl. propos. 16. primi, alia ratione satis difficili.

COROLLARIVM II.

Secundò deducitur cuiuscumq; trianguli tres angulos simul sumptos æquales esse tribus angulis simul sumptis alterius: Quia tum hi, tum illi sunt æquales duobus rectis. Deducitur quo etiam, quòd, si duo anguli vnius erunt æquales duobus angulis alterius trianguli; quòd reliquus angulus reliquo erit æqualis, & æquiangulum erit triangulum alteri quoad omnes angulos.

COROLLARIVM III.

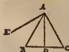
Constat etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus, fuerit rectus, quemlibet reliquorum esse semirectum; cùm omnes tres sint æquales duobus rectis, & tertius ex ipsis ponatur rectus. Quare, cùm duo reliqui inter se sint æquales, ex prop. 14. erit quilibet eorum semirectus. At si angulus cruribus comprehensus fuerit maior recto, nempe obtusus, qui ad basim sunt, erunt minus, quam semirecti; Si verò minor recto, idest acutus, reliqui erunt magis, quàm semirecti.

COROLLARIVM IV.

Perspicuum quoque fit. Quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes anguli recti, vel tertiam partem duorum rectorum. Quia omnes tres inter se æquales, exæquant duos rectos.

COROLLARIVM V.

Fit etiam manifestum. Quòd si ab vno angulo A trianguli æquilateri BAC perpendicularis AD ad latus oppositum BC ducatur, constitui duo triangula Scalena ADC, & BDA; quorum cuiuslibet angulus ad D rectus erit duo B, & C quisque duas tertias anguli recti; reliquorum verò ad A; vtpote partes æquales vnius anguli in æquilatero vnam partem tertiam anguli recti quisque continebit. Quamobrem si super latus AC perpendicularis ab A eleuetur EA ex propos. 9. habebis angulum rectum inter eruta EA, & AC diuisum in tres partes æquales, vt sunt BAE, & BAD, & DAC anguli.



COROLLARIVM VI.

Cuiuscumque trianguli duos angulos duobus rectis esse minores omnifariam sumptos; Quia tres duobus rectis sunt æquales. Ergo duo tantùm erunt minores.

COROLLARIVM VII.

Colligitur quoque angulum exteriorem superare bone, siue illum interiorem reliquo angulo opposito. V.g. NAC externum in fig. prop. superare oppositum internum ACB tantùm, quantùm est angulus niger. Et etiam, quod duo anguli interni cuiuscumque trianguli deficiunt à duobus rectis reliquo angulo interno.

COROLLARIVM VIII.

Hinc etiam manifestum est ex Proclo. Ab eodem puncto ad eandem rectam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quā vnam. Quod si fieri posset ducātur ex A puncto ad rectam BC duæ perpendiculares; nempe AB, & AC, facientque triangulum ABC; Io quo, quia AB est perpendicularis faciet angulum B internum nigrum rectum: Rursusque, quia AC perpendicularis præsupponitur, faciet angulum C album internum rectum; quòd militat contra præced. prop. in qua ostensum est, angulos duos internos cuiuscumque trianguli esse duobus rectis minores; cùm tres sint æquales duobus rectis.



COROLLARIVM IX.

Sequitur quoque ex præc. propos. omnia triangula habentia vnum angulum rectum, vel obtusum reliquos obtinere acutos: cùm enim duo anguli interni sint duobus rectis minores, sequitur; vt si vnus sit rectus, aut obtusus, nempe maior recto; quod reliqui sint recto multò minores, nempe acuti; namque si reliqui, vel vnus eorum esset æqualis recto, vel maior, iam haberemus contra præced. propos. duos angulos in triangulo duobus rectis, aut maiores, aut æquales, sequitur quoque, quod vnus sit alterius complementum cum ambo vni recto sint æquales si tertius sit rectus.

COROLLARIVM X.

Sequitur quoque, quod si linea recta cum alia recta angulos faciat hinc, inde, obtusum vnum, alterum acutum, lineam perpendicularem à quouis eius puncto ad aliam rectam demissam, cadere ad partes anguli acuti. Faciat enim linea AB recta cum recta consimili DB angulum, nigrum quidem obtusum, album verò cruce notatum, acutum, & à puncto A demittatur perpendicularis AD. Cadet vtique ad partem anguli acuti albi cruce insigniti; nam si caderet ad aliam partem anguli obtusi nigri, vt facit linea altera AF; iam duo anguli interni essent duobus rectis maiores; nempe,

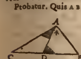
nempe, quia vnus, quem perpendicularis efficeret, esset rectus, alius verò, vt niger esset obtusus ad B contra positam propositionem. Itaque si perpendicularis rectum angulum internum nigerrimum efficit ad D, alius debebit esse acutus, vt est albus cruce notatus A; sic enim positi simul minores fierunt duobus rectis, vt oportet esse duos angulos internos.

THEOR. XI. PROP. XVIII. Euc. 15.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

MVltâ declaratione non indiget propositio, cùm clarum sit, dici illud latus angulum aliquem subtendere, quod è regione illius est, & coniungit duo latera angulum illum comprehendentia: ita C B subtendit angulum A constantẽ medietate nigrâ, & albâ; quia è regione eius est, & copulat duo latera A C, & A B, quę illum angulum nigrum, & album A comprehendunt. Igitur ponatur, triangulum A C B habere latus C B maius alijs, *dicit, & angulum* A *nigrum, albumq; esse eius maiorem*; nempe angulo C, aut angulo B. Et priùs probat de angulo C, & ad id pręstandum ex doctum. 3. propos. detruncetur latus in D tali modo; vt recta B D æqualis sit lateri B A; ducaturque recta A D.

Probatur. Quia A B est æqualis B D, anguli ad basim A D, vt potè trianguli Isoscelis, quales sunt ad D nigerrimus, & ad A albus stellula notatus erunt inuicem æquales ex 14. prop.



Sed angulus nigerrimus ad D ex Coroll. 1. prop. 17. vtpote externus trianguli A D C est maior interno, & opposito C: Quamobrem, & angulus albus A stellula notatus; cùm sit æqualis nigerrimo ad D; erit maior angulo C; Sed iste est pars totius anguli A albo, nigroque constantis; Ergo iste angulus niger, albusque maior est angulo C.

Sed, vt probetur, angulum A esse quoque maiorem angulo B, replicetur idem triangulum, & à C B latere maiori detrũcetur æqualis lateri C A sitque C G, trahaturque A G: eodemq; genere argumenti ostendetur, angulum nigrum, albumque A esse maiorem angulo B.

Probatur itaque. Nam angulus niger A, nigerrimusque G sunt æquales ex propos. 14. eo quod triãgulum A C G Isosceles sit. Vnde & anguli ad basim, quales sunt nigerrimus G, nigerque A, sunt æquales. Sed angulus nigerrimus externus respectu trianguli A G B est maior opposito, & interno B. Quare etiam niger A æqualis nigerrimo G maior erit ipso angulo B: Sed angulus niger A est pars anguli A nigri albique totius trianguli A C B: Ergo erit multò maior angulo B. *Et ecce tibi assertum angulum* A, *album nigrumque esse maiorẽ alijs angulis, cui maius latus* B C *subtensum est.*

COROLLARIVM.

SEquitur hinc omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales. Triangulum enim Scalenum est illud, quod habet tria latera inæqualia, vt est suprapositum A C B. Si autem maius latus maiorem angulum subtendit sequitur, vt angulus A sit maior reliquis C, vel B. Iterumq; quia latus A C est maius, quàm A B, erit quoque maior angulus B angulo C: Vnde omnes erunt inæquales, maximus quidem A, minor verò B, minimus tandem C.

THEOR. XII. PROP. XIX. Euc. 19.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

PRopositio conuertit pręcedentem; Tunc autem angulus maiori lateri subtenditur, cùm è regione illius est, & super eo aperitur; ita vt ei maius latus deseruiat pro basi, eiusque latera nectat. Sit itaque triangulum A B C, cuius angulus maior C subtensus sit lateri A B, *dico latus* A B *necessariò omnibus alijs debere esse maius.*

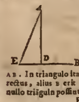
Prob. Nam si A B non est maius, aut latus A C, aut latus C B ei, aut æquales erunt, aut eo maiora: Hoc verò esse non potest; & primò ostendemus id de latere A C, quòd scilicet, nec æquale lateri A B, nec eo maius esse possit. Nam si dicatur æquale etiam angulus B cui subtenditur, erit æqualis angulo C ex demonstratis in pręcedenti propositione, in quâ ostendimus *latus maius, maiorem angulum subtendere*, & per consequens æquale, æqualem. Iam verò in hypothesi, & propos. supposuimus angulum C omnibus alijs esse maiorem. Quòd si dicas latus A C esse maius latere A B; tantò magis vrgebit argumentum. Nam angulus B consequenter erit maior angulo C, ex 18. propos. eo quod pręsumas A C latus subtensum esse maius; & tamen in hypothesi supponimus non angulum B, sed C esse maiorem.

Sed modo probemus latus A C esse quoque maius latere C B, & eodem modo argumentandi vtemur. Nam si C B non est minus, sequetur vel esse maius, vel esse æquale. Sed posito B C latere maiori, vel æquali, angulus A, cui subtenditur, ex propos. antec. erit quoque angulo C, aut maior, aut æqualis contra pręsuppositum, & hypothesim. *Maior itaque angulus in sua apertione maiorem lineam requirit; cui subtendatur, & è regione sit.*

COROLLARIVM.

SEquitur ex hac propositione lineam perpendicularem esse breuissimam inter omnes, quę à dato puncto ad subiectam lineam deducuntur.

Ducatur ex A perpendicularis, quæ vnica, (vt ex Prop. 17. Coroll. 8 cum Proclo deduximus) esse potest; & postmodum alię ab eodem puncto descendant super E B. Breuissima omnium perpendicularis erit A D: Nam si statuatur, aliam esse, V. g. A B. In triangulo itaque A D B, cum angulus D sit rectus, alius B erit acutus, cùm duo anguli in nullo triãgulo possint esse duobus rectis æquales,



ex Coroll. 6. Propos. 17. Quare ex hac Prop. 19. cùm angulus rectus D sit maior, quàm E, obtinebit quoque latus, cui subtenditur, nempe A E maius, quàm latus, cui subtenditur angulus B acutus, quod latus est perpendicularis A D: Ergo hęc perpendicularis minor est crure B A: quòd semper eodem pacto concludes positis alijs, alijsque lineis ab A cadentibus super B E, vt manifestum est.

THEOR. XIII. PROP. XX. Euc. 20.

Omnis trianguli duo latera reliquo sunt maiora quomodocumque sumpta.

Dicit, quod si sumãtur simul *duo latera* trianguli cuiuscumque; siue hęc, siue illa assumas, vt tibi placet, *comparata cum reliquo semper esse eo maiora.*

Ad quod ostendendum Euclides facit triangulum quodcumque A B C: Prolungatque vnum ex lateribus, quod libuerit, V. g. A C in D, & quod ex documentis 6. propos. perficit, A D æqualem facit lineę A B, coniungitque rectâ D B: Ita quod triangulum constituatur A D B duo latera habens æqualia A B, & A D.

Probatur. Nam cùm in triangulo A B D duo latera ex constructione constituta sint æqualia; nempe B A, & D A fit (vt ex probatis in 14. proposit. constat) quòd anguli B niger, & D sint æquales, vt sunt in Isoscelibus anguli super basim: Quamobrem, cùm B niger angulus sit pars anguli nigri, albique B, trianguli D B C, fiet, vt angulus B niger albusque sua parte nigra maior, erit quoque maior angulo D, huic parti nigrę æquali. Hinc verò ensequtur, quod latus D C, vtpote oppositum maiori angulo B albo, nigroque, erit maius, quàm latus A C oppositum minori angulo D (vt ex probatis in anteced. prop. constat) at tota D C est æqualis duobus lateribus trianguli A B C, nempe, quod pars C A sit vnum latus, & pars A D ex cõstructione sit æqualis lateri A B. Quamobrem si tota D C est maior latere B C, etiam maius erit latus B A, & A C eodem latere B C. Et eodem modo argumentum contexes de quibuscunque alijs duobus lateribus respectu tertij reliqui. *Quapropter omnis trianguli duo latera reliquo erunt maiora, &c.*

THEOR. XIV. PROP. XXI. Euc. 21.

Si super trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs constitutæ fuerint: Hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt; maiorem verò angulum continebunt.

Dvas partes hęc propositio habet: Prima, quę depẽdet in Probatione ab anteced. dicit. Quod si ab extremitatibus vnius lateris, puta B C duę lineę ducantur in angulum D intra triãgulum A B C cõuenientes. *Illæ erunt minores exterioribus lateribus A B, & A C.* Dicit autem ab extremitatibus vnius lateris esse trahẽdas prędictas lineas interiores, quia potest esse, si trahatur à medio B C vna earum (vt in triangulo, rectangulo, vel amblygonio) quod lineę interiores simul sumptę, sint maiores, vt prob. Proclus. Secunda verò pars est, quæ in Coroll. 6. prop. 14. fundatur; quod angulus D, quem conuenientes in apice lineę ab extremitatibus lateris vnius B C protractę, efficiunt, erit maior angulo exterioribus comprehenso, vt est angulus A in triangulo A B C. Debent autem, & hic lineę protrahi ab extremitatibus; quia angulus tunc, quem constituunt lineę non ab extremis ductę, sed ab intermedijs partibus, vt idem Proclus ostendit, potest esse maior, aut æqualis angulo exterioribus lateribus effecto.

Ad ostendendũ verò id, quod propositio proponit. Altera earum, V. g. B D continuanda est, vsque ad latus alterum ad Q. Quo facto: ita primum assertum in propositione ostendetur.

Quoniam ex propos. antecedenti duo latera A B, & A Q trianguli B A Q maiora sunt latere B Q. Si addamus vtrisque latus Q C remanebunt latera B A, & A Q cum Q C adhuc maiora; quàm duo B Q, & Q C. Rursus. Si vertamus considerationem ad aliud triangulum D Q C ex eadem propos. anteced. concludemus duo latera D Q, & Q C esse maiora latere D C, & si addamus huic D C sicut, & duobus D Q, & Q C, latus D B: Maiora adhuc erunt hęc duo D Q, & Q C cum addito D B; quàm D C, cum addito eodem B D. Modò reassumamus id, quod probatum est primò, nempe duo latera B A, & A C esse maiora, quàm B Q, & Q C. Quod si verum est; cùm & B Q, & Q C sint maiora, quàm B D, & D C sequitur illa, nempe B A, & A C esse latera multò maiora: *Nempe externa, internis ab eisdem extremitatibus ductis.*

Secunda verò pars ostenditur quoque: Nimirum, quòd sit maior angulus D, quàm angulus A. Nam angulus niger Q externus respectu triãguli A B Q est maior; quàm eius internus niger A sibi oppositus: sed angulus D externus respectu alterius trianguli D Q C, est maior interno, & opposito nigro Q in eodem triangulo D Q C; *Ergo angulus D erit multò maior, quàm angulus niger A, siquidem superat nigrum Q superantem nigerrimum A.*

EXPENSIO V.

De comparatione triangulorum ad inuicem.

Comparantur hic triangula prout, aut lateribus, aut angulis talibus constant, propter quę euadant æqualia (Nam infra, vt partes parallelogrammorum comparationem quoque subibunt) & demonstratur quod datis aliquibus lateribus, aut angulis æqualibus, sequitur deinde, totum triangulum toti esse æquale.

THEOR.

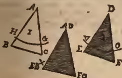
THEOR. I. PROP. XXII. Euc.4.

Si duo triangula habent crus vnum vni, & alterum alteri æquale, & angulum ijs comprehensum æqualem; basim quoq; habebunt æqualem.

Et totum triangulum toti erit æquale.

Sit triangulū D E F nigrum, cuius angulus niger D sit æqualis albo A trianguli B A C crusque vnum E D vni A B, alterum D F alteri A C sit æquale. *Dico, quòd basis E F quoque basi B C erit æqualis; & totum triangulum toti albo æquabitur.*

Probat Euclides superpositione. Nam si intelligantur vnum alteri superponi, vt E B, A D, F C, trianguli angulus D angulo A congruet, & fiet vnus angulus A D, crus verò vnum D E æquale vni A B congruet quoque, & in idem punctum finiet in E B; Sic & alterū latus D F alteri A C æquale finiet in idem punctum F C. Ergo basis, tum vnius, tum alterius in eadem duo puncta E B, & F C, finiet. Ergo ex 10. Axiomate erit eadem linea; Quia duę lineę in eadem puncta terminantes latitudinem non faciunt, qualis esset, si terminaret altera ex ipsis ad X.



THEOR. II. PROP. XXIII. Euc.8.

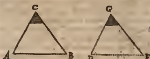
Si duo triangula, dua latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vnum vni, alterum alteri; habuerint verò & basim basi æqualem. Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt; Totumque triangulum toti æquale erit.

HÆc propositio conuertit antecedentem. Nam ibi ab æqualitate vnius anguli, & duorum crurum concludimus æqualitatem basis, & ideò totius trianguli, hic ab æqualitate basis. & duorum crurum concludimus æqualitatē anguli.

Sit itaque datum triangulum, cuius basis A B basi D E alterius, & crus vnum A C vni D G, alterum B C alteri G E sit æquale. *Dico angulum C nigrum nigro G esse æqualē* lateribus A C, & G D æqualibus, atque C B, & G E item æqualibus contentos.

Probatur basis æqualis A B basi æquali D E superponatur; Tunc ab eodem puncto extremo basis D, & etiam A duo latera exient æqualia D G, & superpositum A C. Sic à puncto E, idemque B duo crura æqualia prodibunt versùs easdem partes s. crus E G, & superpositum B C. Ergo ex prop. 16. in idem punctum terminabunt G, & C erit idem, ac G. Ergo eundem angulum constituent; & ideò totum triangulum toti erit æquale.

Possent autem hæ duę propositiones colligi ex dictis: hęc ex Coroll. propos. 3. illa ex propos. 4. Verùm euidentiùs, & vniuersaliùs hic rem concludimus.



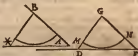
PROB. I. PROP. XXIV. Euc.23.

Ad datam rectam lineam; datumque in ea punctum constituere æqualem angulum, atque etiam triangulum alicui dato angulo rectilineo, siue triangulo.

HOc Problema parum differt à prop. 3. Tantùmque in eo aliquod discrimen patitur, quod præsuponit datas duas lineas angulum facientes, & tertiam, quæ debeat trahi, aut tractam triangulum complentem, quę tres lineę in illa dantur, vt partes vnius lineę, & absque eo quod faciant triangulum.

Sit itaque Angulus B comprehensus lineis A B, & A ✳, compleatur (si non sit completum) triangulum, & trahatur B ✳, & postmodum tracta linea indefinita diuidatur in tres partes, singulę singulis cruribus æquales, ex prop. 6. & ex prop. 2. super eam constituatur triangulum, quod obtineat latera tribus trianguli iam facti lateribus æqualia, nempe G D lateri B ✳, & D F alteri ✳ A, & tandem F G postremo A B. Nam hoc pręstito *angulus F erit æqualis angulo* A.

Ratio est, quia ex propos. anteced. hęc triangula duo latera duobus lateribus vtrunque, vtrique sibi correspondenti, vt basim basi æqualem adipiscuntur. Quare & omnes angulos correspondentes æquales habebunt, & ideò angulus A erit æqualis angulo F.



Verùm faciliùs praxis hęc fiet, si in B, & G posito centro fiat ad interuallum quodlibet circulus, sumatureq; in dato ✳BA portio circuli, quę intercipitur inter B ✳, & B A, & transferatur in altera portione circuli M N; Nam, si per puncta M, N trahas G D, & G F, à G habebis angulum G æqualem angulo B. Docet Clauius hic.

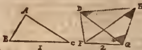
THEOR. XV. PROP. XXV. Euc.24.

Si triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque, vtrique: Angulum verò angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: & basim basi maiorem habebunt.

SIt triangulum A B C, cuius angulus A, cum angulo D trianguli alterius D F G comparatus dignoscatur maior, cùm tamen latera ambientia

bientia hunc angulum, qualia sunt A B, & A C, ita lateribus alterum angulum D claudentibus correspondeant, vt vnum sit æquale vni, V.g. A B, & D F, & alterum alteri; vt A C, & D G. Concludit Euclides, *quod hoc triangulum* A B C *basim quoque suam* B C *maiorem consequitur, quàm alterius basis sit, nempe* F G, *quod vt probetur*.

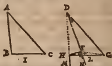
Fiat ex antecedenti propos. angulus D æqualis prædicto angulo maiori A trianguli A B C trahendo latus punctatum D H. Hoc autem latus semper cadet extra triangulum, quia angulus ad D sit maior. Sitque hic angulus maior ad D albus, & niger; Longitudo autem huius lateris punctati D H sit æqualis lateri D G: Trahaturque F H, quæ triplicem occupare situm potest secundùm diuersitatem triangulorum, quæ fiunt, nimirum supra F G, vt est in proposito triangulo; In ipsam F G, ita vt vna linea fiat. Vel infra F G ad partes exteriores, qui tres casus diuersam probationem requirunt. Vnde in tres partes probatio diuidenda est. Primò itaque ponimus cadere supra versùs ipsum triangulum, vt est F H. Coniungenda itaque sunt extrema H, & G lineâ H G. Quò posito sic Euclides contexit argumentum.



Probatur. Quoniam enim latus D F est æquale lateri A B, sicut & D H pūctatum lateri A C, angulus quoque D ex albo nigroque integratus angulo A prioris trianguli. Sequitur secundùm documenta 22. propos. quod & basis punctata F H sit æqualis basi B C prioris trianguli. Rursus oportet considerare, quòd & latus D G, vt præsuponimus est æquale lateri punctato D H; Quare anguli ad basim niger G, & seminiger H, ex doct. 14. prop. erunt æquales. At pars nigra huius anguli H, ex 6. pron. est minor, quàm totum ipsum nimirum, quàm pars nigra simul cum alba. Ergo, & angulus niger G toti H æqualis, est maior, quàm eius pars nigra: Sed si addatur angulo nigro G altera pars alba stellulâ notata, multò maior euadet eadem parte nigra, anguli eiusdem H. Igitur ex doct. prop. 19. subtendet maius latus, quod est F H, quàm pars nigra anguli ad H, cuius latus subtensum est G F. Linea verò F H æqualis est, vt in principio ostendimus basi B C prioris trianguli. *Igitur* F G *basis posterioris trianguli erit minor ipsa* B C, quod probare oportebat.

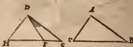
Casus secundus. Sit triangulū primū A B C acutangulum, aliudq; D F G secundum, habens angulū D nigrum minorem angulo A, huic verò angulo D nigro addatur talis pars, vt fiat æqualis angulo A, ex anteced. propos. trahendo latus punctatum D H vsque ad M. Abscindaturque æqualis ex 6. prop. lateri D G, & sit D H. Coniungantur deinde simul H, & G linea, quę cadet infra basim F G. Rursus coniungatur H F, & tandem prolongetur latus D F vsque ad N.

Patet itaque in primis H G basi B C æqualem esse, ex prop. 22. quod angulus D albus, nigerque sit æqualis angulo A, & latera secundi lateribus primi trianguli sibi correspondentibus æqualia, nimirum D H lateri A B, & D G lateri A C. Cùmque, & latus D F, prout supponimus, sit æquale lateri punctato D H, ex 14. prop. fit, quòd anguli infra basim, quales sunt H niger, & albus, &



angulus alter H F N totus niger sint æquales. Vnde hic totus niger F erit maior parte nigerrima anguli H: Angulus verò idem F niger, est pars anguli totius comprehensi lineis H F, & F G, & altera eius compars cruce notata est, quare totus F nimirū pars nigra, & altera cruce notata simul, erunt multò maiores, quàm pars nigerrima anguli H. Quamobrem totus angulus F, ex documentis 19. propos. habebit subtensum maius latus, nempe H G lineam, quàm pars nigerrima H cui subtenditur F G: Sed iam in principio dictum est H G esse æqualem basi B C. Igitur F G basis trianguli D F G, est minor, quàm basis B C.

At si tertius casus detur, nimirum. Quod F H neque cadat infra, neque supra F G, sed in ipsam, vt fiat vna linea. Facilis est probatio. Nam cum angulus niger ad D sit minor angulo A; si fiat æqualis addendo partem albam, & trahendo D H. Patet ex doct. propos. 22. quòd subtendet basim H G æqualem basi C B, & consequenter maiorem, quàm F G.

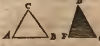


THEOR. XVI. PROP. XXVI. Euc. 25.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunq; vtrique; basim verò basi maiorem: & angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVo latera A C, & C B trianguli albi sint æqualia duobus trianguli nigri D F, & D G quodlibet suo correspōdenti: basis autem A B triāguli albi maior sit, quàm nigri F G. Dicit, & angulum C albi trianguli, qui clauditur inter lineas C A, & C B esse maiorem angulo D, qui lineis D F, & D G continetur.

Probatur autem facillimè. Nam si angulus C non est maior angulo D; erit, aut æqualis, aut minor ipso. Sed si est æqualis, sequitur ex doct. 22. prop. quòd basis quoque A B sit æqualis basi F G contra præsuppositum. Quia iam quoque præsupponimus latera, quodlibet suo correspondenti esse æqualia; tum nigri, tum albi trianguli; Quod si dicatur angulū C esse minorem angulo



lo D, tantò magis absurdum sequitur; Nempe, quòd & basis A G sit minor basi F G. Cum asseramus F esse maiorem; quia eùm præsupponamus quoque latera sibi correspondentia, tum alibi, tum alijs trianguli esse æqualia, sequitur ex propos. 20. antecedenti, basim etiam A B esse minorem basi EO; sicut angulo o minorem fingunt angulum C. Quare cùm non possit esse angulus C aut minor, aut æqualis angulo D; necessariò eum debebimus fateri maiorem.

THEOR. XVII. PROPOS. XXVII. Euc. 26.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque quodlibet latus alteri lateri æquale; & reliqua latera reliquis, vtrumque vtriq; correspondenti æqualia consequuntur.

DEntur duo triangula. Primum ABC. Secundum OEG. Primum habeat angulum C æqualem angulo G, & alium quoque angulum, V. g. B æqualem alteri sibi correspondenti similiter BEG. Insuper, & latus obtineat, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod alicui ex eis subtenditur. Et sit, quod adiacet BC æquale alteri GE adiacenti (vt priùs propositionem ostendamus de hoc.) Dicit igitur, datis omnibus istis conditionibus fore quoque æqualia reliqua latera; quodlibet nempe suo correspondenti, scilicet BA primi trianguli lateri DE alterius, & latus CA lateri GD exæquari.

* Neget igitur aliquis, quod res ita se habeat; tunc iste debebit assignare latus, V. g. E D, quòd sit, vel maius, vel minus latere AC. Si dicat esse maius; detruncetur per propos. 3. O H portio æqualis, & ducatur recta E H.

Probatur itaque propositio. Quoniam iam habemus ex hypothesi angulum C æqualem angulo O, & B æqualem angulo D E B, etiam ex Cor.



1. propos. 17. angulus reliquus A erit æqualis reliquo D. Sed BC latus ex hypothesi æquat latus EG, & GH æquat latus AC iuxta id quod effecimus ex aduersariorum sententia: quare ex 4. h. cum hæc latera singula singulis correspondentibus æqualia stringant angulos C, & G æquales etiam angulus H æquabitur angulo A, sed angulus A æquatur angulo D, ergo etiam angulus H æquabitur angulo D contra prop. 21. huius, nam linea EH interior facit maiorem angulum H, quam D. Quod si dicatur latus GD esse minus latere AC addetur punctata DI, vt tota GI æqualis sit ipsi AC. Et idem absurdum sequetur dum totus angulus punctato latere IE, & EG clausus esset æqualis angulo D, quia æquatur angulo A, vt dixi, eo quod sit I angulus ad basim trianguli, cuius latus IG æquatur lateri AC iuxta aduersarios, & EG ipsi BC ex hypothesi, & G angulus angulo C, ideoque etiam angulus I æquatetur angulo D contra prop. 21. h. At faciamus, quod latus æquale datum sit ex illis, quæ subtenduntur vni ex angulis æqualibus V. g. sit EG æquale lateri BC, & oppositus ei angulus A æquetur angulo D, & C angulus angulo G, tunc etiam tertius angulus B æquabitur ex Coroll. 1. propos. 17. angulo DEG; si ergo sit latus aliquod DG maius, quam CA detruncetur GH crus æquale cruri CA, & ducatur EH. Tunc sequetur idem absurdum H. Quia enim EG crus æquatur cruri BC, & GH crus cruri AC ex aduersarijs, & angulus G angulo C esset angulus H æqualis angulo A, & ideo ipsi æquali ex hypothesi angulo D contr. propos. 21. huius.

Quod si ex aduersarijs sit minus, tunc addatur IO punctata portio, ita vt latus GI æquetur cruri CA, & ducatur EI. Quia itaque G æquatur angulo C, & crus EG opposito angulo vni æqualium D æquatur ex hypothesi cruri BC, & IG latus ex aduersarijs fecimus æquale lateri AC etiam angulus H ad basim ex prop. 4. huius æquabitur angulo A, & ideo ipsi A æquali ex hypothesi angulo I contra 21. prop. huius.

Posset etiam probari propositio demonstrando secuturum illud absurdum, quòd pars HEG anguli DEG esset æqualis toti ipsi DEG si dicatur aliquod latus DG esse maius, quàm CA, vel anguli IEG pars DEG esset æqualis ipsi IEG toti. Si latus GO ab aduersarijs dicatur minùs. Nam angulus OEG esset æqualis angulo ABC, cui æquaretur I & angulus HEG, vel IEG ex aduersarie ob latus BC æquale lateri EG, & latus GH, vel GI assertum ab ipsis æquale lateri CA claudentia angulos C, & G æquales.

COROLLARIVM.

SEquitur ex demonstratione huius Theorematis, tota etiam triangula quoad areas esse æqualia; Nam si latera AB, & AC lateribus OF, & FG æqualia sunt; contineantque ex hypothesi angulos æquales C, & F, ex propos. 22. huius erunt quoque tota triangula æqualia inuicem.

EXPENSIO VI.

De situ linearum se mutuò, nec secantium, nec tangentium.

CVm iam visa triangulorum comparatione velit triangula ipse parallelogrammis comparare Euclides; necesse est, vt hanc comparationem cognitionem, duæ notiones procedant; Prima est de parallelis lineis, quomodo se habeant ad inuicem, & deinde ex hac parallelogrammorum hauriat cognitionem; quibus cognitis, inde possit parallelogramma triangulis comparare, vel vt eorum partes dignoscere.

THEOR. I. PROP. XXVIII. Euc. 27.

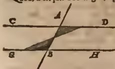
Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit; parallelæ erunt lineæ.

IN duas rectas, quę sint in eodem plano (hoc enim libro, vt notat Clauius, agitur de plano) incidat linea; nempe eas ambas secet, vt facit incidens AE in lineas CD, & OH: Et hæc faciat angulos alternos, nempe hinc, inde, vnus adiaceat parallelæ C D niger, & inde alter adiaceat alteri lineę parallelę OH, vt est nigerrimus,

faciat

faciat inquam hos angulos equales; *Dicis illas lineas esse parallelas, & semper æquidistantes.*

Quod, si aliquis hoc neget; Igitur adinuicem semper fient propinquiores V. g. versùs H, & D: quare tandem cōuenient; quod si cōuenient; facient triangulum, cuius vertex erit vbi conueniunt; basis verò erit AB, & angulus B nigerrimus erit externus: angulus verò niger oppositus A, & internus, qui ex hypothesi inueniuntur æquales contra probata in Coroll. 1. propos. 17. vbi ostendimus in omni triangulo externum angulum quolibet opposito, & interno esse maiorem.



Quare maior debebit esse angulus nigerrimus ad B, vtpote externus, & oppositus; quam niger apud A eo casu, quò conuenient: Cùm itaque sint æquales anguli; lineæ CD, & GH non conuenient. Quod autem lineæ rectæ; quæ sibi inuicem appropinquēt, tandem sint coituræ in communem verticem; inter principia posuimus, cum Euclide, & verè principium censendum est, cùm nulla in oppositum hæsitatio animum pulset, si de approximatione per partes æquales agatur, vt ibi declarauimus. Licet Proclus, & Clauius nimis scrupulosè dubitent, & ostensionem astruant ad id probandum.

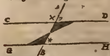
THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 26.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem efficit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, Parallelæ inter se erunt ipsæ rectæ lineæ.

Sit angulus externus factus ab incidente AB, & linea CD cruce signatus; Angulus internus, & oppositus, sed ad easdem partes, non autē, vt in anteced. prop. hinc, inde, qui est niger apud B factus ab incidente AB, & lineā alterā GH. Dicit; *Quòd, si hi anguli sunt æquales; & lineas æquidistantes. & parallelas futuras esse.*

Dicit quoque. Quòd si eadem AB cadens super rectas CD, & GH fecerit angulos internos, & ad easdem partes, vt est angulus niger, & angulus albus asterismo notatus, duobus rectis æquales; adhuc illæ parallelæ erunt.

Prob. verò 1. pars. Cùm namque angulus nigerrimus apud B sit æqualis angulo cruce notato ex hypothesi; isq; cruce notatus sit æqualis angulo nigro, ex documentis prop 12. (Namque linea AB secat CD; vnde anguli ad verticem, vt est niger, & cruce notatus æquales sunt.) Internus angulus niger ad B, & niger ad O erunt æquales, qui sunt anguli alterni: Quare ex præced. prop. *linea* CD, GH *erunt parallelæ*.



Prob. 2. pars. Nempe, si faciat internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, incidens linea AB super duas CD, & GH; eas etiam esse parallelas: Sint itaq; angulus internus niger O, & alter asterismo insignitus duobus rectis æquales. Sunt quoque ex 10 propos. angulus niger O, & alter comprehensus lineis AO, & DO duobus rectis æquales; quòd linea DO insistat super AB. Quamobrem ab ato angulo nigro communi, qui cum angulo O duos rectos æquat, & item cum angulo asterismo notato (vt præsupponimus) remanebunt angulus externus AOD, internusque, & oppositus asterismatus, æquales. Quare ex præcedenti propositione *linea* CD, & GH *erunt parallelæ*.

THEOR. III. PROPOS. XXX. Euc. 29.

Si in parallelas rectas lineas recta incidat linea, alternatim angulos inter se æquales efficit, etiā externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem.

Et internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales facit.

Hæc propositio duas antecedentes conuertit, vt perspicuum est; tresque partes habet. Namque intendit probare primò. Quod si in duas parallelas CD, & GH incidat linea AB *angulos alternos nigrum apud A, & nigrum apud B æquales efficiat.*

Prob. sic per reductionem ad impossibile. Si isti duo anguli niger, & nigerrimus non sunt æquales, maior cōsequenter erit vnus illorum. Is itaque, V. g. dicatur niger apud A. Vtrisque per imaginationem addatur angulus cruce impressus, eruntque niger apud A, & cruce notatus simul maiores nigro apud B cum eodem angulo cruce signato. Sed niger A, & cruce signatus ex 10. propos. sunt æquales duobus rectis; Quare niger apud B, & cruce signatus erunt minores duobus rectis. Vnde ex propos. 28. coibunt illæ lineę; quia tunc interni nigri æquales non essent duobus rectis. Quod est absurdum, cùm CD, & GH ponantur parallelæ.



Secunda pars intendit ostendere; angulum A externum ęqualem esse interno, & ad easdē partes, vt est niger apud B, qui sunt ad eandem partem dextram. Si lineę CD, & GH sint parallelæ.

Probatur ex modo demonstratis. Nam angulus niger apud A est æqualis angulo nigro apud B, idemque ex propos. 12. est æqualis angulo A externo: Ergo angulus A externus est æqualis angulo interno opposito, & ad easdem partes nigro apud B.

Tertio intendit demonstrare angulum internum cruce notatum, & angulum nigrum B esse æquales duobus rectis. Si CD, & GH parallelæ constitutæ sint.

Nam angulus externus A, & cruce signatus internus sunt æquales, ex 10. propos. duobus rectis. Quòd linea AD cadat, & insistat super lineam AB; Sed iam ostensum est, angulum A externum esse æqualem angulo nigro apud B opposito, & ad easdem partes lineæ AB. Quare angulus cruce signatus, & niger apud B duobus rectis remanebunt æquales.

THEOR.

THEOR. IV. PROP. XXXI. Euc.30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ sunt, & inter se sunt parallelæ.

PRæsupponatur, quod lineę A B, & G K in eodem plano existentes sint alteri, vt punctatę C D, parallelę. *Dicit. Illas inter se debere esse parallelas.* Quòd, vt ostendat, super eas trahit lineam, vtcunque, quæ sit M N.

Probatur propos. Nam anguli alterni niger apud M, & stellula notatus sunt æquales, siquidem lineę A B, & C D ex constructione presupponũtur parallelę, & ideò facientes angulos alternos æquales, ex propositione antecedenti. Secundò angulus niger ad N est æqualis angulo eidem stellula notato: Quia C D, & G K ex constructione presupponuntur parallelę. Quare ex propos. antecedenti angulus internus niger ad N erit æqualis ei angulo stellulâ notato, externo, & opposito, vt patet.

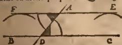
Quare concluditur, quod, cũ duo anguli nigerrimus ad M, & niger ad N sint æquales tertio, sint quoque inter se æquales: sed sunt quoq; alterni. Quapropter ex propos. 28. erunt A B, & G K lineę inuicem parallelę.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXII. Euc.31.

A dato puncto parallelam lineam ducere datæ rectæ lineæ.

A Puncto A ducenda sit parallela lineę B C. Ducatur ex A ad B C recta A D, faciens angulum quemcunque, V. g. nigrum, huicque angulo æqualis constituatur alternus niger, ex documentis propos. 24. trahendo lineam F E: *Dicit. Lineas esse parallelas.* Vbi aduerte punctum A debere esse extra lineam B C, vt ad eam linea duci possit.

Probatur ex dictis prop. 28. Quia anguli alterni niger apud A, & niger apud D per constructionem æquales sunt. Nota parallelas faciliùs duci. Si tracta linea B C eodem interuallo, & aperitione circini super duo puncta quæcumque distantia, vt sunt B, & C facto centro ducantur duę portiones circulorum æqualium, vt sunt F, & E. Et postea ducatur linea eas portiones tangens, vt linea F E. Hęc enim erit parallela; Quia puncta C, & E distant eodem interuallo, vt puncta B, & F ob radios circulorum ęquales.



PROB. VI. PROP. XXXIII.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SInt rectę lineę A B, & C D æquales, atque parallelę, quę coniungantur ad easdem partes rectis; ita vt, quę à sinistrâ parte discedit lineę C D, coniungat sinistram partem lineę A B; sicut, & quę à dextra discedit lineæ C D, annectat quoque dextrâ partem alterius A B; vt faciunt A C, & B D. *Dicit. Has lineas coniungentes, & esse æquales, & esse parallelas.* Quod, vt probet, oportet trahere diametrum A D ab A in D, incidetque lineis A B, C D, & A C, B D.

Probatur itaque. Nam, cùm A D incidat in parallelas A B, & C D; ex probatis in 30. propos. angulus niger ad A, & angulus niger ad D erunt æquales. Quoniam sunt alterni, qui, vt ibi demonstratum est, æquales sunt: Quapropter triangula A B D, & C D A æqualia erunt. Quoniam ex 22. propos. ea sunt triangula æqualia, quę habent vnum angulum alteri æqualem, vt est angulus niger A, & niger D, & latera eiusdem anguli sibi correspondentia æqualia; vt hic euenit; nam ex hypothesi A B, & D C sunt æquales rectæ; diameter verò A D est idem latus, quod deseruit vtrisque. Hęc inquam triangula basim quoque basi æqualem possidant. *Quamobrem A C, & B D erunt æquales*; Quod erat primo probandum.



Probatur itaque. Quod etiam sint parallelæ ex eadem propos. 22. In dictis triangulis A C D, & A B D habentibus angulum angulo, & latera lateribus vtrunq; vtriq; suo correspondẽti ęqualia, etiam totum triangulum est toti triangulo æquale. Quare angulus albus ad D, & angulus albus ad A erunt æquales. Sed hi sunt alterni respectu linearum A C, & B D, ergo *hæ lineæ A C, & B D erunt quoque parallelæ*, ex propos. 28.

EXPENSIO VII.

De Parallelogrammis, & Trapezijs.

HÆc Expensio diuiditur in tres partes. Prima agit de proprietatibus parallelogrammorum, tum in se, tum diametro diuisorum. Secunda comparat inuicem parallelogramma. Tertia docet quadratum constituere precipuam inter parallelogramma figuram.

THEOR. I. PROP. XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum anguli, & latera æqualia sunt inter se; quæ ex aduersò sibi sunt; illa verò spatia diameter bifariam secat.

SIt Parallelogrammum A B C D habens quatuor latera, quorum duo sibi aduersa sint parallela, vt sunt latera A B, & C D. Item A C, & B D. Dicit primò. Quod hęc figura possidet quoque *hæc latera, quæ sibi ex aduersò sunt æqualia*, nempe æqualia esse A C, & B D; sicut A B, & C D. Deinde dicit quoque *angulos sibi ex aduersò existentes esse æquales*, nempe B, & C sicut & A, & D albus nigerque. Postremò diametrum quoque, si ducatur, vt A D, diuidere spatium contentum à paral-



à parallelogrammo in duas partes æquales; & hęc vno, eodemque argumento ostendit.

Probatur. Quoniam diameter inter parallelas A B, & D C reperitur, erunt angulus niger ad A, nigerque ad D æquales, ex prop. 30. vtpotè alterni. Et quia A D est etiã inter parallelas A C, & B D eodem modo angulus albus ad A, & angulus albus ad D, ex propos. eâdem 30., quia sunt alterni, erunt æquales. Quapropter trianguli A B D, & A C D duos angulos æquales duobus angulis, quilibet suo correspondenti; insuper, & latus idem possident; nempe diametrum A D, & hinc ex demonstratis in 27. propos. latera correspondentia ad inuicem æqualia quoque erunt, nempe A B, & C D opposita ad inuicem; sicut A C, & B D opposita inuicem. Quod est primum.

Probatur secunda pars. Nam angulus B, & angulus C oppositi erunt æquales, ex eadem propos. 27. Et quia supra niger apud A nigro apud D, & albus apud A albo apud D ostensi sunt ęquales, si simul componãtur niger albusque apud A erit æqualis angulo apud D nigro, & albo, quod est secundum propositum.

Prob. tertia pars. Nam sequitur quoque ex Coroll. propos. 27. totum triangulum A B D toti A C D esse æquale. Quare spatium parallelogrammi diuisum est bifariam à diametro A D; nempe in duo triangula æqualia A B D, & A C D.

THEOR. II. PROP. XXXV. Euc. 43.

In omni Parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt inter se sunt æqualia.

Vide in definit. 37. Quid sint consistentia circa diametrum, & complementa.

Dicit ergo propositio. Quod complementa nimirum in parallelogrammo A G M C parallelogramma alba H F, & D C sint æqualia.

Probatur. Quoniam ex propos. præced. triangula A C M, & A G M, quę diuidit diameter sunt æqualia. Eademque ratione in parallelogrãmo nigro maiori H B duo triangula A B D, & A H D sunt æqualia; vtpote à diametro bisecta. Sic etiam in parallelogrammo minori nigriori D M duo triangula D F M, & D E M sunt æqualia. Deme ergo à triangulis totis maximis A C M, & A G M partes æquales, nempe huic A C M triangulum nigrum, & nigrius, & deme deinde alteri triangulum quoque nigrũ, & nigrius, quę primò demptis æquiualent, & residua H F, & D C complemẽta remanebunt æqualia, vt in 2. pronunt.

THEOR. III. PROP. XXXVI. Euc. 35.

Parallelogramma super eadem basi, in ijsdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

Dicitur. Aliquod parallelogramum esse cum alio inter easdem parallelas, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum; vt latus A D, & C E partes sunt parallelę L M, sicut, & F G est pars parallelę I H. Dicitur verò esse super eandem basim, cum latus alternum in parallela commune vtrisque est, vt F G. Dicit itaque hæc parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad latera, & angulos, sed quoad capacitatem, & aream: Propositio verò habet tres casus. Quare requirit tres probationes.

Probatur. Sint duo parallelogramma super basi F G eadem, & inter parallelas L M, & I H, nimirum A D F G, & C E F G, cadatque latus F C secundi suo extremo C inter latera primi inter puncta A, & D.



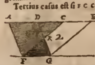
Nam cùm latus A D primi, & C E secundi sint æqualia suę basi communi, lateri que opposito F G, ex pręced. propos. fit vt sint æqualia inter se. Aufer itaque mente lineam C D; quę vtrisque deseruit, eisque est communis, remanebunt adhuc æqualia A C, & D E segmenta.

Progress. 2. Similiter iam constat ex prop. 34. latus A F nigerrimi trianguli esse æquale lateri D G albi trianguli 2; vtpote latera parallelogrammi seminigri nigerrimique.

Progr. 3. Angulus verò A nigerrimus est ęqualis angulo albo D ex propos. 30. quòd vnus sit externus, alter internus inter parallelas A F, & D G. Cùm itaque habeamus duo latera, quodlibet suo sibi correspondenti æqualia, nimirum A C, & D E inuicem ex 1. Prog. Sicut A F, & G D ad inuicẽ, ex 2. Prog. Angulumque A nigerrimum angulo D albo æqualem, ex 3. Prog. Ex 22. propos. duo triangula nigerrimum A C F, & secundum album D E G erunt æqualia, quibus vtrisque si addatur commune Trapezium nigrum C D F G, cum vtrisque idem addatur; adhuc erunt æqualia. Quare triangulum nigerrimum, & trapezium integrantes parallelogrãmmũ A D F G Trapezio, atq; triãgulo albo integrãtibus parallelogrammũ secundũ C F G E æquabũtur, quod demõstrare oportebat.

Secundus casus est. Si F C latus secundi parallelogrammi cadat in D. Tunc enim ex eadem ratione A D, & D E rectæ erunt (vt primo Prog. ostensum est) æquales sicut & A F, & G D, (vt secundo) Et angulus A nigerrimus angulo D albo æqualis. Quare duo triangula nigerrimum D A F, & E D G album æqualia erunt. Addito itaque, tàm vni, quàm alteri commune triãgulum nigrum D F G complens, tàm cum nigerrimo, quàm cum albo triangulo parallelogramma nigrum, & semialbum; Ea remanebunt adhuc æqualia, nimirum A D F G, & E D F G parallelogramma.

Tertius casus est si F C cadant extra punctum D, ita vt secet latus G D in K. Cùm itaque rectę A D, & C E ex supradicta ratione 1. Prog. æquales sint. Si vtrisque addatur D C inter eas medians Linea A C cum addita D C, & C E cum eâdem additâ D C erunt æquales. Sicut & F A, & G D ex prop. 34. Et etiam, supradicta ratione 3. Prog. angulus D niger



niger, s. CDX externus, & angulus A niger internus æquales erunt. Quare triangulum B D G, & C A F erunt æqualia. Aufer itaque triangulum nigrum G C K per imaginationem commune vtrisque, remanebuntque duo trapezia primum subnigrum A D F K, & secundum album C B K G adinuicem æqualia. Vt itaque fiant parallelogramma æqualia, adde vtrisque mente commune triangulum nigerrimum F O K, & habebis ea æqualia, nempe A D F G, & C E F G; quod demonstrandum erat.

THEOR. IV. PROP. XXXVII. Enc.36.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelas constituta inter se sunt æqualia.

SInt duo parallelogramma. Primum A B C D. Secundum verò F E G H inter parallelas A F, & H C constituta, & super æqualibus basibus C D, & F E sita. *Dico hæc esse æqualia.* Quod, vt probet, coniungit basim primi cum latere basi opposito secundi, nimirum puncta extrema ad eandem partem, V. g. sinistram, vt sunt E, & C recta C E. Similiterque duo puncta terminatiua ad partem dextram F, & D rectâ D F.

Probat verò ostendendo priùs, has lineas postremò tractas C E, & D F cum basi primi parallelogrammi C D, & basi secundi F E facere parallelogrammum, ex 34. propos. Nam cum E F basis secundi, & C D basis primi sint parallelę, & æqualis sit, vt ibi diximus. Quod C E, & F D postremò tractæ sint parallelæ, & æquales, & ideò, quod C D F E sit parallelogrammum, cùm eius definitio requirat tales prorsus conditiones. Quo posito sic astruitur intentum. Quę eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia: Sed parallelogrammum primum A B C D, ex pręced. propos. est ęqoale parallelogrãmo postremò facto C D E F; Eidemque est æquale ex eadẽ parallelogrammum secundum E F G H, ob basim eadẽ E F; ergo hęc nẽpe primum, & secundum erunt inter se æqualia.

C O R O L L A R I V M.

COlligitur trapezia quoque, quorum oppositę bases inter se æquales, sint inter parallelas, inter se æqualia esse; nam trapeziũ A E G C est æquale trapezio B D F H siquidem duo parallelogramma 1, & 2 sunt inuicem æqualia. Trapezium verò E D B G vtrisque commune: Vnde etiam idem dicendum erit si alterum latus alteri sit idem, & opposita latera sint æqualia.

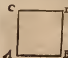
PROB. V. PROP. XXXVIII. Euc .46.

A data recta linea quadratum describere.

SIt data recta linea A B, super quam quadratum describere necesse sit.

E duobus punctis A, & B ipsi A B geminę perpendiculares erigantur, per 8. propos. & sint æquales per propos. 6. ipsi A B, & pũcta C D connectantur, *& quadratum erit constitutum.*

Probatur, quia illud erit quadratum. Quod æquiangulum, & æquilaterum est, sed figura ex facto habet æqualia latera duo nempe A C, & B D ipsi A B; Tertium verò nimirũ D C, quod reperiatur inter perpendiculares A C, & B D, & ideò parallelas, ex prop 29. quòd anguli A, & B sint duo recti. Quamobrem D C, vtpote parallelas coniungens, & æquales erit æqualis ipsi A B, & parallela, ex propos. 33. Omnia itaque latera sunt æqualia, & parallela.



Probatur secundò de angulis, nam iam duo A, & B sunt recti; quare & alij duo, D, & C, vtpote oppositi istis, ex propos. 34. erunt recti; cùm constitutum, sit quoque parallelogrammum.

E X P E N S I O VIII.

De triangulorum cum parallelogrammis trapeZijsque parallelis constantibus comparatione.

PArallelogramma in triangulã diuiduntur: Vnde iam incipit comparare triangula; cum toto, quòd primò, & immediatè componunt; Cæterę enim figurę, licet, ex triangulis componantur; plura tamen ea componunt: Trapezia verò, & parallelogramma tantùm duo.

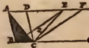
THEOR. I. PROP. XXXIX. Enc.41.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & eãdem basi constituti, dimidium est.

SIt Parallelogrammum seminigrum B A D C, & triangulum B C E inter parallelas A E, & B O & super eandem basim B C constitutum. *Dico esse triangulum B E C dimidium parallelogrammi seminigri A D B C.*

Quod vt probetur ex propos. 32. à dato puncto C ducatur parallela ipsi B E lateri trianguli, & erit factum parallelogrammum B C E F, cuius diameter C E. Diuidatur deinde parallelogrammum seminigrum bifariam ducto diametro A C. Quo posito sic propositio probatur.

Nam, cùm parallelogramma album, & semialbum sint super eamdem basim, & inter easdem parallelas, ex prop.36. sunt inter se ęqualia; Sed illorum parallelogrammorum æqualium dimidia sũt triãgula nigrum 1, & 2, ex prop. 34. Eo quia latera eorum A C primi, & B C secundi sint parallelogrammorum diametri. Quæ verò æqualium sont dimidium, ex pronunc. 7. inter se necessariò æqualia sont. Quapropter triangula primum nigrum, & secundum album inter se æqualia erũt. Sed nigrum est parallelogrammi seminigri dimidium. Ergo etiam triangulum album 2 erit eiusdem parallelogrammi dimidium.



COROLLARIVM I.

Hinc patet quod triangula super eandem basim, & inter easdem parallelas constituta sint inuicem æqualia: Nam sunt triangula nigrum 1, & album 2 dimidia æqualium parallelogrammorum A C semingri, & alterius albi B F, vt in serie demonstrationis ostensum est.

COROLLARIVM II.

Etiam esse veram propositionem conuersam, nempe *triangula æqualia super eadem basim, & ad easdem partes constituta esse inter parallelas*.

Nam sint triangula B A C, & B D C æqualia super eandem basim constituta B C, & ducta per eorum vertices A D linea, non sit parallela basi B C: Ducatur parallela; hæc cadet, vel infra, vel supra lineam vertices coniungentem A D.

Cadat primum supra, & sit A E, & producta B D, in E coniungatur C E. Itaque triangulum B C E; quod inter parallelas ex aduersarijs fit, erit æquale triangulo B C A. Sed idem ex hypothesi est æquale triangulum B D C: Ergo triangulum B E C maius esset æquale minori B D C, vtpote quod sint vni tertio B A C æqualia, quod est absurdum.

Quod si cadat infra ad F, vbi incidit, ducatur C F, & erit triangulum B C F æquale triangulo B A C eo quod ex aduersarijs sint parallelæ A F, & B C, & consequenter, minus B F C æquale triangulo B C D maiori; quod esse nequit.

THEOR. II. PROP. XXXX.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & æquali basi constituti dimidium est,

Sit triangulum L H O notatum numero 2, & parallelogrammũ feminigrum D B A C inter parallelas D G, & B L, & constituta super æquales bases B C, & H L; Dico triangulum 2 esse dimidium parallelogrammi feminigri.

Trahatur H E parallela lateri trianguli L O à puncto H, ex propos. 31., & erunt duo parallelogramma, ex 37. prop. æqualia, & erit H O parallelogrammi albi diameter. Trahatur quoque diameter B A in feminigro parallelogrammo.

Quo facto probatur propos. Triangula nigrũ, & album 2, vtpote dimidia æqualium parallelogrammorum semialbi, & albi inuicem sunt æqualia. Ergo triangulum 2 erit etiam medietas parallelogrammi semialbi.

COROLLARIVM I.

Colligitur hinc; triangula super æqualem basim, & inter easdem parallelas esse inuicem æqualia. Quia sunt dimidia æqualium parallelogrammorum feminigri, & albi.

COROLLARIVM II.

Esse quoq; veram propositionem conuersam præced. Coroll. *Nempe triangula æqualia super æqualem basim ad easdem partes constituta esse inter parallelas*.

Nam eadem ratio militat, quæ superiori 2. Coroll. præceden. propos. Nam si A D ducta per vertices triangulorum B A C, & E D F æqualium non est parallela lineæ B F; erit alteraq; que si cadet super A D, vt A G, ducta F G, fiet triãgulũ E F G, quod ex dictis per aduersarios æquabitur triangulo A B C, & cõsequenter sibi ex hypothesi æquali E F, maius minori, quod esse nequit; Et si cadat infrà, vt A H. Efficietur triangulum E H F, quod vtpote inter parallelas A H, & B F erit æquale triangulo B A C, & ideò sibi æquali triangulo E D F; minus maiori, Quod esse nequit.

PROB. I. PROP. XXXXI. Euc. 42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Datum triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oportet autem facere parallelogrammum, quod sit æquale triangulo: Sed quod obtineat angulum internum aliquem æqualem angulo D. Sic efficere oportebit. Trianguli dati aliquod latus, V. g. B C diuidatur per medium in H, ex propos. 7. & per doct. propos. 24. à puncto dato H fiat angulus æqualis angulo D; trahaturque H M, vt lubet, siue ad dextram, vt in exemplo, siue ad sinistram, si commoditas postulet. Deinde per propos. 31. trahatur parallela A M ad B C à puncto dato A. Rursusque per eandem propos. 31. ducatur à puncto dato C parallela ad H M; quę occurrat parallelæ primo tractæ A M, & prolungatę si oportuerit in N. Eritque factum *parallelogrammum* M N H C *æquale triangulo* A B C; quòd vt probetur linea A H coniungatur punctum H cum vertice trianguli A.

Probatur. Nam parallelogrammum H C M N duplum est trianguli A H C, propos. 39; siquidem est super eandem basim H C; & inter parallelas A N, & B C. Sed triangulum A H C est dimidium triãguli totius B A C, eo quod duo triangula, in quę diuisum est, sint æqualia, vtpote super æquales bases B H, & H C, & inter easdem parallelas A H, & B C constituta, ergo totum triangulum A B C erit æquale parallelogrammo M N H C, vtpote ambo eiusdem trianguli A H C dupla.

CO-

COROLLARIVM.

Colligitur ex Pelletario; quòd eodem pacto potest constitui triangulum in dato angulo, quod sit æquale dato alicui parallelogrammo, vt in figura huius propos. datum parallelogrammum sit M N H C, ex C puncto dato fiat angulus nigerrimus, in quo postulatur, vt fiat triangulum. Trahendo A O, & prolongato latere parallelogrammi M N, vsque dum occurrat in A lineæ anguli dati nigerrimi A C; assumatur in lineas B C, B H æqualis lineæ H C, trahaturq; à puncto B linea A B, quę compleat triangulum B A C, quod est duplum parallelogrammi M N H C, vtpote ex probatione superioris propositionis constat.

THEOR. III. PROP. XXXXII.

Triangula Trapezijs bipartitis, duobusque lateribus parallelis clausa inter se sunt æqualia.

Sint duo triangula A B C, & I E D clausa Trapezijs bipartitis, & parallelis duobus lateribus, vt sunt A C T D, & B C E I, & A B E D, quæ habent latera A D, & C T, & B E parallela, & bipartita linea L O. *Dico hæc triangula esse æqualia.*

Probatur Trapezium A C I D linea T L latera bipartiente est diuisū in duas partes æquales. Nam productis lateribus, vt conueniant in V, erit triangulum A V L triangulo V L D æquale; quòd sit inter easdē



parallelas, & super æqualem basim; sic dicas de triangulo C T V, & V T I. Ablatis ergo triangulis istis C T V, ab A V L, & T V I à triangulo V L D trapezium residuum A C T L erit æquale residuo T L I D. Et idem dicendum de parte C T B O, quòd sit æqualis parti T O E I in trapezio B T; & de parte A B O L; quòd sit æqualis parti L O E D, in trapezio B D; Si ergo ab istis partibus æqualibus trapezij magni auferātur partes æquales trapeziorum C O, & C A L T, hinc ab A O; inde T D, & L T I D ab O D, remanebunt residua triangula æqualia A B C, & I E D, quod erat ostendendum.

PROB. II. PROP. XXXXIII. Euc.44.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit triangulum datum punctatum B A G; angulus verò datus Q; linea verò data R. Iam nosti ex propos. 41. facere parallelogrammum æquale triangulo dato B A G, quod parallelogrammum angulum æqualem angulo dato obtineat. Fiat igitur, & sit parallelogrammum nigrum M N B L, habens angulum L equalē dato Q; ipsum verò totum secundum aream æquale sit triangulo dato punctato B A G. Extendatur ita que B L in H, ita vt L H sit æqualis datæ R. Deinde per punctum H extremum ducta parallela HO ad EM occurrat rectę M N parallelę B H, in O I Eritq; factum parallelogrammū album N H, quod diametro O L bifariam diuidatur, & producatur vltra L in C, donec occurrat lateri B M nigri parallelogrammi producto in C, deinde ex Ç ducatur parallela ad B H, vsque ad latus O M, productum in D. Postremò producatur latus N L parallelogr. N L nigri in V. Eritque alterum parallelogrammum nigrum longius, cuius latus L H, vel V D est æquale datæ R. Probandum verò est quod & angulus nigerrimus ad L sit æqualis dato Q, & ipsum V H triangulo dato punctato B G A.

Probatur itaque primò de angulo. Nam ex prop. 15. angulus ad L nigerrimus secundi parallelogrammi nigri lōgioris est æqualis angulo L alterius nigri primi parallelogrammi, quod sint anguli ad verticem. Sed angulus L est æqualis ex constructione angulo dato Q: Ergo & angulus L nigerrimus secundi V H est æqualis eidem Q.



Probatur secundò, quod totum parallelogrāmum nigrū secundum V H sit quoad aream æquale triangulo dato G B A; nam cùm sit vnum ex complementis eorum parallelogrammorum, quę circa diametrum sunt, fit, quòd ex propos. 35. fit æquale parallelogrāmo primo nigro B N: At illud est æquale ex constructione dato triangulo B G A. Ergo & parallelogrammum secundum nigrum eidem æquale erit, quod oportebat demonstrare.

PROB. III. PROP. XXXXIV. Euc.45.

Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Vult hic Euclides docere modum, quo quælibet figura rectilinea etiam si triangularis, & inæqualis, tum angulis, tum lateribus possit ad figuram parallelam reuocari. Sit itaque figura quæcunque rectilinea 1, 2, 3, quę in totidem triangula resoluenda est, per lineas ad vnum angulum protractas; Ea inde sit angulus D iuxta quem parallelogrammum æquale ijs triangulis 1, 2, & 3 oporteat costituere: ad id verò efficiendum obseruanda est primò regula, & praxis, quam in 41. propos. docuimus, & constituendum est parallelogrammum A B C E album habens angu-



lum C æqualem dato angulo D, secundò triangulum 2 reducendum est ad parallelogrammum nigrum per regulas propos. antecedentis, vt vides factum in sequenti figura signata numero 2, quod angulum nigerrimum ad G dato angulo D æqualem possideat, & latus insuper C M æquale lateri

BE consequatur F Hocque transferendum est ad 3 figuram inter A B, & C E parallelas prolungatas, ita vt G H conueniat, & idem fiat cum latere BE: quod autem hoc effici possit, ex probatione constabit; Tertiò de 3 triangulo idem efficiendum est, reducendo illud ex institutione præcedentis Prop. ad parallelogrammum nigrum, vt in tertia figurâ factum est, faciendo angulum nigrū ad K æqualem angulo dato D, & latus K L æquale lateri B E; deinde inter parallelas A B, & C E prolungatas quantum opus sit, constituendum; Ita vt apud parallelogrammum secundum nigrum collocetur, & K L cum latere M O idem fiat. Factumque erit parallelogrammum A N C P quod constabit tribus parallelogrammis 7, 8, nigro, & 9 æqualibus tribus triangulis, quodque nempe suo rectilineo, & per cōsequens toti rectilineo 1, 2, 3.



Quod ergo hic probationem reposcit est, quod parallelogrammum secundæ figuræ nigrum possit transferri inter parallelas A N, & C P, illud simul adaptando, vt præcepimus lateri B E. Et priùs quod latus G H parallelogrammi nigri in secunda figura possit adaptari lateri B E patet; quia huic B E per constructionem fecimus æquale latus G H: Quare cum eo congruet. At quia angulus G nigerrimus est æqualis angulo dato D, cui quoque æqualem fecimus angulum C, & per consequens, & angulum externū E nigrum in 1. fig. ex prop. 30. angulus G niger secundę figurę capiet prorsus, & se æquabit cum angulo E nigro, & latus G Q incedet super E O. Sic angulus H nigerrimus secundę figurę capiet adamussim, & conueniet prorsus cum angulo nigro B primæ figuræ, eo quia angulus B sit complementum anguli E ad æquandos duos rectos, siquidem ambo simul, vtpote ambo interni inter parallelas, & ad easdem partes sunt, ex prop 30. æquales duobus rectis. Et hanc eandem conditionem habet respectu anguli nigri G, & consequenter respectu anguli sibi ęqualis E in alterâ figura, angulus H nigerr. in hac figura secunda in parallelogrāmo G R cū sint inter parallelas Q O, & H R. Quare & etiam ipse erit complementum anguli E ad duos rectos æquandos, & ideò ipsi B æqualis. Vnde angulus H conueniet, & idem spatium æquabit, ac angulus B, & H R incedet cum parallela B M. Quare si fiat E O æqualis H R tracto parallelo latere M O erit B E O parallelogrammum æquale nigro G R figurę secundę. Eademque probatio applicabitur parallelogrammo nigro 3. figuræ ostendendo K L ex constructione conuenire cum M O: Angulum nigerrimum K bene collocari, & occupare idem spatium, ac angulus O exterior albus in prima figura, & angulum L nigerū in fig. 3. benè conuenire, & esse ęqualē angulo M albo in prima figura; Quia tàm vnus, quàm alius compleant æquales angulos, nēpe nigrum K, & album O, ad duos rectos. Vnde euenit, quod parallelogrammo 8 nigro possit superaddi parallelogr. 9 album inter parallelas A N, & C P, & fieri totum parallelogrāmum A N C P æquale rectilineo 1, 2, 3.



Ne mireris; nos hic primum librum finire; necessè enim fuit, vt Propositionem 47. Euclidis cum alijs eiusdem generis poneremus in fine secundi Libri.



TRACTATVS V.

In secundum Librum Euclidis de æquipotentia linearum.



IN hoc secundo libro agit Euclides de linearum æquipotentium diuersis generibus. Dicuntur autem lineæ æqualiter posse; Cùm super ipsas potest fieri quadratum æquale alteri, vel quadrato, vel parallelogrammo à duobus lineis effecto. Quando autem duę linee dicuntur æqualiter posse, de quadratis intelligitur. Quoniam, quando non intelligitur de quadratis, tunc exprimitur, quòd possit æquè, ac rectangulum tale, vel tale. In quatuor verò expensiones tantùm hunc tractatum secabimus. In prima agemus de principijs. Secunda potentias linearum, vt sunt latera quadratorum ostendet. Tertia quatenus sunt latera triangulorum; Et tandem ducere lineas æquipotentes, vel eas secare docebimus. Superfluum verò est texere huius libri laudes, & vtilitates enumerare. Cùm experimentum demonstratutum sit, nihil ferè sine hac doctrina in Mathematicis posse probari.

EXPENSIO I.

De principijs huic libro inseruientibus.

NE laboremus in singulis propositionibus ostendendo parallelogramma parua, quæ in rectangulo maiori à parallelis ad ipsius latera fiunt esse rectangula. Hic id duximus ostendendum semel; vt hęc vnius demonstratio singulis demonstrationibus infra ponendis desatulat. Aduerte autem parallelogrāmum rectangulū solo nomine rectanguli ab Euclide appellari.

THEOR. I. PROPOS. I.

In parallelogrammo omnes anguli recti sunt, si vnus sit rectus.

PRobatur eo quod omnia latera parallelogrammi sint parallela ex eius definit. Posito itaq; A angulo recto; cùm A C incidat parallelis A D, & C B, ex prop. 30. l. 1. anguli interni erunt duobus rectis æquales: Sed A est rectus, ex hypothesi; Ergo etiam C, Quòd si A, & C recti sunt: Ergo etiam oppositi D, & B anguli, ex propos. 34. primi.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si sit rectangulum, & intra ipsum ad latera parallelæ ducantur, quæ se intersecando faciunt sunt rectangula parallelogramma.

SIt rectangulū A B magnum contentum lateribus A C, & C B: *Dico, quod si ad latera hæc ducantur parallelæ* I N, & H M; & *rursus* E O, & F N, *se intersecando efficere rectangula.*

Probatur primò, quòd habeat latera æqualia parallelogrammum quodlibet inclusum, V. g. N E. Nam latus O E, est æquale lateri F N, quod sit inter parallelas O N, & E F. Sic O N, & E F sunt æquales; quòd sint inter parallelas E O, & F N, ex prop. 33. primi. Erunt quoque omnes anguli recti: Dùm C angulus albus rectus est ex hypothesi: Ergo etiam angulus a niger, quòd ex propos. 30 sint æquales, vtpote internus, & externus. Quare ex prop. anteced. etiam omnes reliqui O, N, F. Ideircò, cùm latera omnia probata sint æqualia, & anguli ostensi sint æquales; erit O a N F parallelogrammum rectangulum. Quod autem dicitur de hoc parallelogrammo; dicatur etiam de alijs, cùm par sit ratio.

COROLLARIVM I.

SEquitur ex hac propos. Duas parallelas, quæ ab æqualibus partibus laterum angulum rectum comprehendentium, hinc, inde proueniunt, se decussare in segmenta æqualia: quia ab æqualibus segmentis procedunt, & ideò efficere quadrata. Talis est figura seminigra M O, quia enim E F, & H I sunt æquales; M N, & O N sunt quoque æquales, & ideò est quadrata.

DEFINITIO.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duobus lineis angulum rectum comprehendentibus.

Sit parallelogrāmū rectangulū A C B D prop. 1. Dicitur

Dicitur hoc parallelogrãmũ duobus rectis côtineri; Namq; licet quatuor lineis verè côprehẽdatur, duę tamen sunt, quę inæquales inuicem; Illud à quadrato distinguunt. Sic,& vnum angulum, licet sint quatuor, sufficit nominare; quia per rectum angulum secernitur à Rhombis, & à Rhomboidibus, quę nullum angulum rectum obtinent. Patet autem definitio ex propos. 1. in quâ demonstrauimus, quòd in parallelogrammo, si vnus angulus sit rectus, omnes alij tres sint recti quoque.

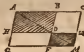
COROLLARIVM II.

SEquitur autẽ ex hac antecedẽti definitione, & propositione omnia parallelogramma, à parallelis ad latera in parallelogrammo maiori illa continente facta, contineri, vel sub ipsis segmentis, vel sub æqualibus ad ipsa segmenta à quibus illę parallelę ductę sunt. V. g. rectangulum seminigrũ HE dicitur côcludi sub segmentis C H, & C E; Patet, ex definit. quia angulum C rectum concludunt; quòd verò M O seminigerrimum concludatur sub æqualibus H I, & E F, patet; quia latus O N æquatur E F, cùm sit inter parallelas; & N M latus lateri H I eâdem ratione.

DEFINITIO II.

IN omni parallelogrammo vnumquodque eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

Dicit in parallelogrammo A G C M, vnum parallelogrammum diametrum A M ambiens, V. g. nigrum cum duobus complementis albis D C, & D G vocandum esse *Gnomonem*; Vel alterum nigerrimum minus, cum duobus complementis ijsdem *Gnomonem* appellari. Igitur tolle mente à parallelogrammo toto A C G M, vtrumlibet parallelogrammorum nigrorum diametrum ambientium, & reliqua remanens figura Gnomon vocabitur. Sic deme parallelogrammum nigrum A D, reliquum erit Gnomon H M B, vel nigerrimum D M, & reliquum erit Gnomon E A F.



EXPENSIO II.

De potentijs linearum diuersimodè sectarum ad æquanda suorum segmentorum rectangula.

POtentię linearum sumuntur, vel totæ, vt earum quadrata, & rectangula æquè possint, ac segmentorũ quadrata, atq; rectangula, vel totę cũ aliquo segmenti, vel quadrato, vel rectangulo, vel non totę; sed partis alicuius potentia, nimirum eius quadratum, dicitur æquale, vel solum, vel cum aliquo rectangulo, alijs segmentorum rectangulis. De istis ergo potentijs, idest quadratis, quę lineę possunt efficere, iuxta tres assignatas comparationes agemus in hac expensione.

THEOR. I. PROP. III. Euc. I.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera, in quotcumque segmenta: Rectangulum comprehensum sub duobus illis rectis lineis æquale est omnibus rectangulis, quæ sub non sectâ, & quolibet segmentorum comprehenduntur.

SInt duę rectę A, & B C, quarum B C in segmenta aliqua diuidatur, vt libuerit, V. g. in partes B D, & D E, & E C. Dico, quòd si ex omnibus istis partibus fiant rectangula, à singulis, & non sectâ lineâ A comprehensa: Hæc omnia erunt æqualia rectangulo, quod sub linea A non secta, & lineâ rectâ sectâ B C continetur.

Praxis 1. Constitue itaque parallelogrammum rectangulum erigẽdo duas perpendiculares ęquales lineæ A ab extremis B, C, & rectarum extremitates G, & F rectâ coniũgantur. Nam, vt probatum est propos. 38. primi de quadrato, omnia latera opposita erunt parallela, & æqualia, & omnes anguli recti. Quare erit factum rectangulum sub A non sectâ, & sectâ B C totâ comprehensum.

Praxis 2. Deinde ex diuisionibus D, & E trahe parallelas alteri perpendicularium vsque ad alterum latus oppositum G F. Nam ex propos. 33. primi erunt æquales perpendicularibus, vel C E, vel C F, & consequenter lineæ A non sectæ: Vnde erunt constituta rectangula super partes rectę B C, album, nigrum medium, & alterum nigrum E F, ex partibus B D, D E, E C, & lineis æqualibus datæ lineæ A.

Quare facili ostensione, quæ ex ipsa effectione eruitur, ostenditur propositio. Rectangula album, nigrum medium, & alterũ E F sunt constituta ex partibus lineę sectę B C, & linea A non secta, vt 2. praxi ostensum est; Sed hæc omnia integrant rectangulum à totâ rectâ B C, & non secta A comprehensum, & idem spatium occupant. Quare ei erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc colligit Commandinus. Idem sequi, etiam si altera linearum in quotcumque segmenta diuidatur. Nam rectangula facta à partibus, segmentisque, tum vnius, tum alterius, æquatur toti rectangulo à lineis illis duabus integris consurgente. Id verò patet. Nam diuisa A O in quotcumq; segmenta, & A B pariter, & à singulis diuisionum partibus ductis parallelis se insecabunt, & illis intersectionibus se diuident in partes illis segmentis ęquales, à quibus ducuntur, erũtq; rectangula, ex pr. 2. Quare, cũ omnia ea rectangula, vt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. à rectangulo toto, lineis A B, & A O comprehẽso, côcludantur, illi erunt æqualia.

THEO-

THEOR. II. PROPOS. IV. Euc. 2.

Si recta linea secta sit vtcumque, rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt illi, quod à tota fit, quadrato.

SIt recta A a diuisa vtcunque in E, & super eam constituatur quadratum A a C D. Dicit *hoc quadratum fore æquale rectangulis à tota B A, & parte A E, & à tota B A, & altera parte E B comprehensis.*

Trahatur à diuisione E parallela ad alterum laterum; factaque erunt duo rectangula, de quibus sermo est, nigrum, & album; quæ ex 2. propos. 2. Coroll. continebuntur nigrum sub segmento E B, & tota A B, vel æquali B D, & album sub tota A B, vel æquali A C, & segmento A E.

Quapropter cum hæc rectangula album, & nigrum in quadrato C B contineantur, eiq; commensurentur; patet esse æqualia. Vel prob. ex præced. quia A B secta est, vtcumque, & A C data æqualis ipsi A a, vnde rectangula nigrum, & album, ex tota, & segmentis A B, erunt æqualia rectangulo B C à secta, & non secta comprehenso.

COROLLARIVM.

ELicies. Quod licet propositio de vnica sectione loquatur; adhuc tamen verificatur de pluribus sectionibus, nedum vnius lineæ, sed vtriusque; eadem enim hæc prop. quæ 3, est, nisi quòd ambæ lineæ, quæ dantur, hic ponuntur æquales, quæ comprehendunt angulum rectum, & ideò hic faciunt quadratum, ibi verò inæquales, & faciunt rectangulum. Vnde quæ verificantur de præcedenti, etiam de hac vera sunt.

THEOR. III. PROP. V. Euc. 3.

Si recta linea secta sit, vtcumque; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, est æquale rectangulo, quod sub ambobus segmentis continetur, & quadrato, quod ab ipso segmento efficitur.

DIuidatur linea A C vtcumque in B, & eligatur, quæ paramagis placuerit, V. g. a C; fiatque rectangulum comprehẽsum à tota C A, & segmento B C; quod sit 1 semialbum. Deinde à puncto diuisionis B mensurato in P M ducatur parallela a T. Nam, quia B P est æqualis parti a A, & P Q parti B C erit rectangulum album 1 illud sub segmentis contentum, de quo loquitur propos. Pariter cùm B M, & M N sint æqualia segmento a C, rectangulum nigrum M T erit quadratum illius segmenti, sub quo, & tota, rectangulum continetur nimirum M Q. *Dico itaq; rectangulum E Q ex segmentis, & quadratũ M T ex segmento, esse æqualia rectangulo M Q contenta ab ipso segmenta M N; nimirum æquali B C, & tota P M æquali linea C A.*

Probat ex 3. propos. Quia linea P M secta est, vt nobis placuit, iuxta mensuram C a, & data est altera non secta æqualis, vt placet ipsi C a, nimirum M N. Vnde rectangula album, & nigrum ex non secta M N, & segmentis P a, & a M contenta æqualia erunt ex 3. huius rectangulo ex tota secta P M, & non secta M N comprehenso; Probatur etiam alio modo. Quia rectangulum 1 ex segmentis, & quadratum nigrum ex segmento a C ex constructione continentur in rectangulo M Q. Et idem erit, si eligas alterum segmentorum, & fiat eodem modo rectangulum M Q, quod est 2.

COROLLARIVM.

HInc est, si totum rectangulum 1, & rectangulum 2 componerentur; quòd facerent quadratum, dummodo secundùm latera longiora N Q, vel P M fieret compositio. Patet, quia latera longiora, V. g. P M constant ex duobus segmentis maiori A a, & minori a C. Sed minora latera sunt duo eadem segmenta maius rectanguli 2, minus rectanguli 1. Quare, si componantur facient totum latus P M; Vnde latera erunt æqualia totius compositi, & ideò totum compositum ex duobus rectangulis 1, & 2, integratum erit quadratum.

THEOR. IV. PROP. VI. Euc. 4.

Si recta linea secta sit vtcumque, Quadratum, quod à tota describitur, æquale est illis quadratis, quæ describuntur à partibus, & insuper duobus rectangulis, quæ à partibus comprehenduntur.

SIt linea A B, vt libet, diuidatur in P. Dico; quòd, si ex parte A P fiat quadratum, & aliud ex alia parte P a, & ex ijsdem partibus A P, & P B duo rectangula fiant; *hæc omnia fore æqualia quadrato, quod à tota describitur.*

* Probatur ex præceden. propos. Nam si fiat ex tota A B, & parte P B rectangulum Q B, & in eo per parallelam H F à puncto H æquali segmento P B describatur quadratum, habebimus quadratum nigrum ex segmento, & rectangulum 2 ex segmentis, & totum Q a ea continens. Item, si id fiat ex parte minori A P, habebimus quadratum nigrum, & rectangulum 1, ex segmentis, & hæc continens Q A. Quæ rectangula 1, 2, & quadrata nigra æquant comprehensa sub tota, & partibus, vt sunt rectangula ea continentia Q B, & Q A: Sed, & Coroll. propos. anteced. ea si coniungantur, faciunt quadratum æquale quadrato ex tota A B descripto; Ergo duo quadrata ex partibus descripta, & duo rectangula ab ijs comprehensa æquantur quadrato ex tota A B descripto.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc elicitur, lineas duplas facere quadrata sua quadruplicia. Nam si detur linea V, & dupla A B, super quam fiat quadratum A B C D; & diuisis lateribus singulis per medium, trahãtur parallelę ad latera F E, & H G; quę se intercipiendo ex 2. huius propos. Cor. æqualia



efficient segmenta, quod sint dimidia æqualium laterum quadrati magni C B. Sequitur omnia quadrata esse, & æqualia inuicem, & consequenter quadrato V punctato, cui ob lateris A H, quod sit dimidium A B, æqualitatem, ex eis vnum, V. g. nigrum quadratum æquatur; Ergo & omnia: Sed hęc quadrata sunt quatuor. Ergo quadratum illa continens C B quadruplum est quadrati punctati V.

COROLLARIVM II.

Elicitur quoque è contra; quòd si quadratum sit quadruplum alteri; latus maioris esse duplum minoris lateri: Quia, cùm quadratum nigrum in minori quadrato sit ęquale minori punctato V, sequitur; vt latera quoque sint ei æqualia: Quare A H æquale erit lineę V. Sed A H est æquale lineę H B; quòd quadratum eius seminigrum sit æquale ex hypothesi nigro. Ergo etiã latus H B est æquale lateri V. Quapropter totum latus A B erit duplum lateris V.

COROLLARIVM III.

Hinc quoque manifestatur. Parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata: Quia demonstrabitur ductam diametrum in figura propositionis, C F, & F B in quadratis nigris esse vnam, & eandem lineam; si rectangula C P, & Q B componantur, ita vt partes ęquę commensurentur. Nam tunc latus P F rectanguli, & Q F alterius coincident, & eandem lineam ficiẽt cum lateribus rectangulorum nigrorum; Vnde quadrata nigra se tangent in puncto F, quare, & diameter C F, & F B se tangent in eodem puncto. Erunt etiam in directum, quia anguli apud F recti à diametro bifariam diuiduntur, ex propos. 34. & latera subtensa sunt æqualia, vtpote latera quadratorũ: Cùm itaq; anguli C F Q, & H F B nigri sint semirecti, & angulus F rectus; Ergo lineę C F, & F B incidentes in lineam, V. g. Q F faciunt angulos semirectum nigrum, & album cum altero semirecto ad eandem partem nigro duobus rectis æquales; Quare illi ex prop. 14. lib. 1. diametri C F, & F B in directum erunt, & erit vna linea; & ideò diameter quadrati C B maioris. Ergo parallelogramma nigra circa diametrum quadrati C B magni erunt quadrata.



THEOR. V. PROP. VII. Euc 5.

Si recta linea secetur in partes æquales, & inæquales, rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cùm quadrato, quod nascitur ab intermedia sectionum, æquale est ei quadrato, quod à dimidia describitur.

Diuidatur linea A B in partes æquales, vt in M, & non æquales in O: Superque medietatem M B fiat quadratum; tractoque diametro B C, ubo puncto inæqualium partium, excitetur parallela O V lateri quadrati, V. g. C M, & vbi secat diametrum in H ducatur Q I parallela ad A B, & ducta ab A ei perpendiculari A Q, erit rectangulum O Q ex parte nigrum segmentis inæqualibus A O, & O B contentum, *de quo dico; quòd cùm quadrato ex* M O *inter media sectionum s. quadrato* C H, *sit æquale quadrato à medietate descripto* C B.

Probatur. Nam pro Progress. primò ex Coll. 3. anteced. prop. Rectangula nigrius, & album sunt quadrata, vtpote circa diametrum C B consistentia. Quadratum verò paruum album, ex prop. 2. Coroll. 1. huius



factum super N H, dicitur etiam factum super M O intermedia sectionum; & latus O H rectanguli Q O ex parte nigri æquatur ipsi O B: Vnde habemus rectangulum Q O, & quadratum paruũ C H, de quibus loquitur propositio, & dicit esse æqualia quadrato B C ex dimidiâ.

Progress. 2. Considerandum deinde complementa nigrum, & seminigrum, ex propos. 35. primi inuicem esse æqualia, quibus vtrisque, si addas quadratum nigerrimum per imaginationem adhuc remanebunt æqualia.

Progress. 3. Complementum autem alterum nigrum M O, cum quadrato nigro addito æquatur rectangulo albo M Q, vtpote ex propos. 37. primi inter parallelas, & super æquales bases A M, & M B posita.

Progress. 4. Idcircò concluditur, quod si complementum semialbum, cum quadrato nigro, ex 2. Progress. æquatur complemento nigro, & eidẽ quadrato nigro: At huic tertio, ex 3. Progr. æquatur rectangulum album; quod etiam sint æqualia inuicem rectangulum videlicet album, quadrato nigro, cùm complemento semialbo.

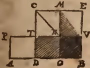
Progress. 5. Adde itaque vtrisque æqualia, nempe rectangulo albo complementum nigrum, & sit rectangulum ex segmentis inęqualibus O Q, & quadrato nigro, complementoque seminigro idem complementum nigrum, vt fiat Gnomon N B V: Eritque rectangulum ex segmentis inæqualibus Q O æquale Gnomoni N B V: Adde rursus vtrisque quadratum album C H, *eritque rectangulum* Q O *cum quadrato* C H, *æquale Gnomoni* N B V *cum quadrato eodem* C H *complente quadratum, nimirum* C B, *ex dimidia*, quod erat probandum.

THEOR. VI. PROPOS. VIII. Euc.6.

Si recta linea data bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adyciatur; rectangulum comprehensum à totâ datâ, & additâ, tamquam vno latere, & adiectâ solùm, tamquam alio, vnà cum quadrato, quod describitur à dimidia; æquale est quadrato, quod à medietate, & adiuncta; tamquam vnâ lineâ, describitur.

SI data linea A O diuisa per medium in D, & ei alia addita sit O B. Dicit propositio, quòd si à dimidia, & addita simul, nimirum D B, fiat quadratum C B, & ex tota A O data, cum adiecta tamquam vnâ lineâ A B, & adiectâ solùm pro alio O B; vel æquali B V, fiat rectangulum P B: *Quod hoc rectangulum erit æquale illi quadrato* C B, *non tamen se solum; sed cum quadrato* N C, *quod fieret ex* D O *dimidia.*

Progress. 1. Ductâ lineâ O M; & diametro C B per N. Rectangulum A V habet latus B V æquale adiectæ O B, ex hypothesi; Ergo nigerrimum rectangulum, ex Coroll. 3. propos. 6. est circa dia-



metrum, & ideò quadratum: Ergo latus O B est æquale lateri B V: Alterum verò latus A B est ex ta data A O, cum adiecta O B, ideò est rectangulum, de quo loquitur propos.

Sic C N est quoque quadratum, quòd sit circa diametrum, & ex Coroll. 2. propos. 2. dicitur contineri à linea D O dimidiâ; Ergo est quadratum, quod cum rectangulo prędicto æquale probandum est quadrato C B ex dimidia D O, & adiecta O B, tamquam vno latere confecto, ve vult propositio.

Progress. 2. Nunc considerandum est complementa inuicem, ex propos. 35. primi esse æqualia nigrum T O, & seminigrum. Sed complemento nigro est æquale rectangulum album P D, vtpote in parallelis, & super æquales bases A D, & D O, ex propos. 37. primi. Ergo rectangulum album, erit æquale complemento seminigro.

Progress. 3. Addamus complementum nigrum T O, & quadratum nigrum rectangulo albo, & fiet rectangulum P B de quo loquitur propositio: Addamus quoque eadem, nigrum complementum, & quadratum nigrum complemento semialbo, & fiet Gnomon T B M; Vnde additis vtrinque iisdem, rectangulum P D æquale priùs, ex 2. Progress. complemento seminigro, erit æquale Gnomoni T B M.

Adde rursus quadratum C N album, ex dimidia; ipsi Gnomoni fiet quadratum C B: Adde quoque rectangulo P B etiam hoc quadratum album C N; & erit æquale, quadrato C B, quemadmodum priùs erit æquale Gnomoni; quod volebat propositio.

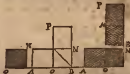
THEOR. VII. PROP. IX. Euc.7.

Si recta linea secetur vtcumque; quod à tota, quodq; ab vno segmentorum vtraque simul quadrata fiunt æqualia sunt illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit quadrato.

SIt data A B, quę vtcumque secta sit in O. Dico, quod, si fiant duo quadrata, vnum minus ex segmento, quod eligeris, vt A O; alterum maius C B ex tota: Deinde fiant duo rectangula, vt A N, & B P sub tota, & eodem segmento comprehensa, *erunt illis quadratis æqualia addito tamen rectangulis quadrato alterius segmenti* A O.

Progress. 1. Si rectangula A N, & P B superponantur, & latus maius ponatur super minus efficietur pars O N quadrata, cùm O B, & B N sint æquales parti minori O B; & ideò inter se, quare efficietur Gnomon A B P æquale duobus rectangulis non solùm tamen; sed additó quadrato nigro O N, cùm causâ superpositionis illud quadratum O N nigrum, quod in duplici rectangulo erat duplex, in Gnomone factum sit vnicum.

Progress. 2. Adde deinde Gnomoni A B P qua-



dratum ex reliquo segmento, ex prop. 2. Coroll. 2. complebit quadratum magnum C B, nam ex eo Coroll. quadratum C M est idem, ac quadratum ex A O: Itaque quadratum C B magnum cum quadrato nigro O N ex segmento est æquale duobus rectangulis A N, & P B nigris; sed non solis; verùm addito illis ipso quadrato C M ex A O altero segmento. Quod vult propositio.

THEOR. VIII. PROP. X. Euc.8.

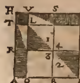
Si recta linea secetur vtcumq; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tamquam ab vna linea, describitur quadrato.

SIt linea A B secta vtcumque in O. Dicit, quòd si fiant quatuor rectangula comprehensa à tota A B, & altera portionum, quam volueris, V. g. O B; & postea ex reliqua portione A O fiat quadratum: hæc omnia fore æqualia quadrato ex tota A B, & portione, quæ pro rectangulis comprehendendis electa est. Nimirum O B,

 si li-

si lineę toti hęc pars insuper adderetur, & fieret A M.

Facto quadrato super A M, quod sit M H, ab extremo datę B, & sectionis pũcto O excitentur perpendiculares O V, & B S; perque puncta 4, & L in quibus secant diametrum agantur parallelę R X, & T I.



Probatur modo propositio, ex ipsa constructione.

Progress. 1. Itaque in primis rectangula H L nigrum, & semialbum 1, & 2 sunt quadrata, vtpote circa diametrum existentia, ex propos. 6. Coroll. 3. Et ex Coroll. 2. propos. 5. sunt facta ex O B: Ergo etiam reliqua duo alba, ex defin. 1. quia eorum angulus 3, & 4, continetur æqualibus lateribus seminigrorum quadratorum, erunt quadrata.

Progress. 2. Rectangula quoque nigra, & seminigra, vt O R, & alia tria sunt æqualia inuicẽ; siquidem æqualibus duobus lateribus comprehenduntur A O & O B, ex Coroll. 2. prop. 2. huius, vt per se patet: Nam L V est æqualis T L, &c. Sic A R æquatur lateri V S, &c.

Progr. 3. Adde itaque rectangulum O R, quadrato O 3 & hq; rectãgulum R A B 3 cõprehensum sub tota A B, & segmẽto O B; & si reliquis singulis quadratis addas singula rectangula quadratis semialbis semialba rectangula, & albis quadratis nigra rectangula, erunt quatuor rectangula; de quibus loquitur propositio sub tota A B, & segmento O B comprehensa, quæ cum quadrato H L nigro alterius segmenti A O integrant quadratum magnum ex tota A M confectum, & ei adæquantur, quod erat ostendendum.

EXPENSIO III.

De potentiâ laterum Triangulorum.

EXcerpsimus propositionem 47. & 48. à primo libro; & hic sub suo titulo apposuimus: vt ordo seruaretur materiarum, spretis numeris: Vnde audacię venia dabitur, quę in melius cesserit. Eximiam autem hęc Expensio consequitur vtilitatem: quòd in ipsa mensura triangulorum, quoad areas fundetur, & ferè vniuersa Mathematica maximè in hac innixa sit; vt villus tractatus in ea vix reperiatur; qui multas ex hac Expensione probationes, principiaque non desumat.

THEOR. I. PROP. XI. Euc. 47. Primi.

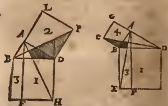
In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est duobus quadratis, quæ à lateribus angulum rectum continentibus describuntur.

FIat rectangulum habens rectum angulum A; duo verò latera quomodocumque, seu æqualia, seu inæqualia A B, & A D angulum A claudentia, basisque subtensa angulo recto A sit B D. Fiat itaque ex propos. 38. primi, quadratum 4 super A B, & aliud 2 super A D, & ex basi B D fiat aliud quadratum 1 3. *Dicit itaque propositio; Quod quadratum 1 3 basis sit æquale quadratis 2, & 4 laterum angulum rectum stipantium.*

Quod, vt probet, secundùm documenta propos. 32. à puncto dato A: nempe vertice anguli recti ducit parallelam A F lineę B E, quę diuidat quadratum 1 3 in duas partes 1, & 3. Deinde ab angulis quadratorum ad angulos trianguli oppositos rectæ ducuntur, vt C D, & B P, & etiam B A, & H A ab angulis quadrati basis ad angulum rectum A. Quæ ductæ faciunt triangula hinc quidem C B D, & E B A: Inde verò A D H, & B D P infra consideranda.

Probatio autem in tres considerationes secernitur. Vnde Progressus 1. Intendit probare latera quadratorum ex cruribus, quæ angulo recto adiunguntur in vnam eandemque lineam conuenire, cum cruribus ipsis trianguli angulum rectum claudentibus, quale est latus G A quadrati 4, & A L quadrati 2; nimirum vnicam lineam esse B A, & A L sicut A D, & A G. Hoc autem sic ostenditur. Crus A B incidens in crus A D angulum rectum A trianguli efficit, & latus quoque quadrati A L incidens in idem crus A D angulum rectum nigrum efficit quadrati. Ergo hæ duę lineę incidentes in eandem; & facientes duos angulos rectos in directum erunt, ex prop. 11. pr. & vnam rectam B L efficient. Et idem erit de linea G A respectu lineę A D, quę incidentes in lineam B A angulos rectos efficiunt quadrati nigrum, & trianguli A. Vnde G A, & A D erit vna recta linea G D.

Progress. 2. Vergit ad probandum triangula



C B D, & A B E esse æqualia. Similiterque B D P, & A D H: quę clarioris gratiâ in duas figuras diuisimus: Itaque in maiori figurâ 2. habemus triangulum A D H, & D B P, de quibus dico. Equalia esse. Si quidem illa triangula sunt inuicem æqualia, ex propos. 22. Primi, quorum vnum crus vni, & alterum alteri est, & angulũ conclusum æqualem obtinent; quod de triãgulis B D P, & A D H propositis verificatur. Quoniam latus D P vnius est æquale lateri A D alterius, cùm sint eiusdem quadrati 2, & latus B D prioris lateri D H alterius posterioris; quod sint latera eiusdem quadrati 1 3. Angulus quoque A D P niger, est alteri angulo albo B D H æqualis, vtpote recti ambo,

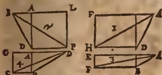
& spa-

& spatium B A D nigriùs commune vtrisque, quare totus angulus niger apud D addito spatio B D A æquabit totum angulum album apud B, addito illo spatio eodem B D A, qui sunt anguli triangulorum æqualibus cruribus conclusi: Quare ipsa triangula erunt quoque æqualia B D P, & A D H.

Hæc autem eadem probatio ostendit etiam æqualitatem triangulorum C D B, & A B E in altera figura minori 4. Quoniam latera A B vnius, & B C alterius sunt æqualia, vtpote latera eiusdem quadrati 4. Item latera E B vnius, & B D alterius, quod sint latera quadrati 1 3. Duo quoque anguli A B D æquales; quoniam, quidem angulus trianguli ad B nigrior communis vtrisque reliquus verò niger, in quo hic non occupat alterum album apud B angulus rectus est, sicut & albus. Quare triangula C B D, & E B A erunt æqualia.

Progress. 3. Comparat triangula cum quadratis; & intendit ostendere quadrata quoad continentiam, & aream eis esse duplicia: Pro quo reminiscendum est id, quod diximus in primo Progress. nimirum G A. & D A, & similiter A L, & A B esse lineas in directum positas, & vnam lineam rectam conficere. Deinde reducendum est ad memoriam. Quod fecerimus lineam A S parallelam lateribus B D, & D H quadrati 1 3, & ideò diuidere illud in duo parallelogramma 1, & 3.

Quo posito consideremus priùs parallelogrammum 1 comparando illud ad triangulum H D A, & videbimus ambo super basim H D, & esse inter parallelas F A, & H D. Quare concludemus ex propos. 39 Lib. 1. parallelogrammum 1 esse duplum trianguli D H A. Eodemq; argumento vtemur ad probandum paruum parallelogrammum 3 esse duplo maius, quam suum triangulum F B A.



Eodemque methodo probabimus de quadratis, nimirum esse dupla suorum triangulorum. Sic quadratum maius 2 est inter parallelas D P, & B L (A L enim est vna recta, vt ostendimus Progress. 1.) & super eandem basim D P. Vnde quadratum 2 erit duplo maius trianguli B D P.

Idem quoque argumentum vrgebit de quadrato 4 respectu sui trianguli C B D: Nam inter parallelas G D, & C B, & super eandem basi C B collocatum, duplum erit trianguli C B D.

Progress. 4. Quibus omnibus ostensis argumentum clauditur ostendendo parallelogramma quadratis, quodlibet suo correspondenti, & ad eandem partem rectanguli constituto æquari. V.g. Parallelogrammum 1 cum quadrato 2, & parallelogrammum 3 quadrato 4.

Hoc verò deducitur à Progress. 3. Nam, cum triangula facta super basim parallelogrammi 1, & quadrati 2, scilicet B D P, & A D H, sint probata æqualia: Ergo etiam parallelogrammum 1, & quadratum 2, vtpote dupla triangulorum erunt æqualia ad inuicem. Et tale erit parallelogrammum 3, & quadratum 4, vtpote dupla suorum triangulorum æqualium.

Quoniam itaque quadrata 4, & 2 sunt æqualia parallelogrammis 3, & 1, quæ integrant totum quadratum 3 1 factum ex basi B D; Ergo *quadratum ex B D angulum rectũ subtendente æquatur duobus quadratis factis ex lateribus B A, & A D angulum rectum concludentibus.*

COROLLARIVM I.

Ex hac propositione, quadratum diametri duplum quadrati lateris, arguitur. Quoniam angulus, cui diameter A B subtenditur, qui V.g. est C, rectus est, & triangulum A C B rectangulum est; Quare quadratum diametri est æquale quadrato duorum laterum; sed illa laterum quadrata sunt inuicem æqualia; Ergo quadratum diametri erit duplum vnius eorũ seorsim sumpti.

COROLLARIVM II.

Elicitur quoque quadratum diametri figuræ altera parte longioris æquale esse duobus quadratis laterum A C, & C B: Quia diameter A B subtendit angulum rectum C.

THEOR. II. PROP. XII. Euc. 48. l. 1.

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur æquale est eis, quæ à reliquis lateribus trianguli describuntur, quadratis, angulus comprehensus sub reliquis trianguli lateribus rectus est.

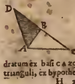
Conuertit hęc propos. antecedentem ad hoc, vt ostendat securum fore argumentum ab æqualitate quadrati basis, & laterum ad rectitudinem anguli.

Sit itaq; triangulum A B C. Dicit, quòd si quadratum confectum super latus maius A C, sit æquale quadratis simul sumptis crurum A B, & B C, *angulum B fore rectum.*

Vt autem id ostendat erigit super vtrumlibet laterum, V.g. A B à puncto B anguli, qui maiori lateri opponitur, versus partes exteriores perpendicularē B D æqualem reliquo lateri eiusdem anguli B C: Postea coniungit extremum D cum extremo lateris B A, super quod perpendicularis erecta est.

Prob. Progr. 1. Basis A D trianguli nigri describit quadratum æquale duobus quadratis, quę describuntur à lateribus A B, & B D angulum rectum A, ex effectione, claudentibus; vt præced. propos. ostensum est.

Itaque quadrato eidem ex basi erunt æqualia quadrata ex cruribus A B, & B C albi trianguli, quòd crus B C sit ex effectione æquale cruri B D, & crus A B commune.



Idcirco etiam quadratum ex basi C A æquale quadratis crurum albi trianguli, ex hypothesi, consequenter æquabitur

quadrato ex basi nigri trianguli, vtpote æquali æqualibus quadratis crurum.

Progress. 2. Cùm itaque quadrata basium A C, & A D sint æqualia; ipsę quoque lineę erunt ęquales A D, & A C, quòd quadrata æqualia æqualibus etiam constent lateribus.

Quadere ea propos. 23. lib. 1. angulus apud B albus erit æqualis nigro. Quia crura cruribus singula singulis, & basis basi ostensa est æqualis; Sed angulus niger apud B rectus est ea effect., ergo etiam albus B erit rectus.

THEOR. III. PROP. XIII. Euc. 12.

In Amblygonijs triangulis quadratum, quod fit à basi angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à cruribus eundem angulum comprehendentibus rectangulo basis comprehenso sub altero ex istis cruribus, in quod perpendicularis à vertice cadat, & sub adiuncta linea, quæ inter perpendicularem, & crus alterum intercipitur.

SIt triangulum Amblygonium A B C, & angulus apud B niger, obtusus, & perpendicularia C D cadat extra triangulum in crus A B prolongatum in D; nempe ad partem anguli acuti, vt Coroll. 10. prop. 17. (posset etiam cadere in latus B C ab A, si placeret.) Dico, quod quadratum descriptum ab A C basi angulo obtuso subtensâ *est maius, quàm duo simul, quæ describantur iuxta mensuram laterum* A B, & B C *angulum obtusum ambientium; & excedit illa rectangulis duobus*, quę fiunt à crure A B, in quod productum perpendicularis ducta est, & à segmento exteriori D B, quod est inter C B crus alterum, & C D perpendicularem.

Progress. 1. Probatur itaque, cùm enim recta A D diuisa sit vtcumque in B, ex propos. 6. erit quadratum rectę totius A D, æquale quadratis segmentorum 2, & 3, & rectangulis duobus 4, & 5 in segmentis comprehensis: Ex præced. verò propos. quadratum A Q ex basi obtusum angulum subtendente punctatum, est æquale duobus punctatis C M, & D N crurum perpendicularium C D, & D A; quòd angulus niger D sit rectus. Quapropter quadratum A Q ex basi erit æquale quadrato C M perpendicularis C D, & duobus quadratis 3, & 2 ex segmentis, simul cum rectangulis duobus 4, & 5 segmentorum ipsorum.

Progress. 2. Quadratum verò cruris C B angulum obtusum B ambientis (quòd tibi mente supplendú est) erit æquale duobus quadratis C M ex perpendiculari D C, & quadrato ex B D, nimirum quadrato 2 ex eadem antecedenti propositione; quòd sit subtentum latus angulo nigro D recto. Pone itaque illud mente conceptum ex C B pro istis duobus ex D B, & C D adhuc quadratum maximam punctatum A Q ex latere A C erit ęquale quadrato imaginato ex C B quadratoque 3 ex A B duobusque rectangulis 4, & 5 ex segmentis. Quapropter *quadratum* A Q *basis erit maius quadratis Crurum angulum obtusum claudentium* C B, & B A, *duobus rectangulis* 4, & 5, *quæ sub segmentis* D B, & B A *continentur*, quod erat ostēdēdū.



THEOR. IV. PROP. XIV. Euc. 13.

In omni triangulo Oxigonio Quadratum lateris angulum acutum subtendentis, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus illum acutum comprehendentibus rectangulis duobus comprehensis ab eo latere, in quod perpendicularis cadit, & segmento eiusdem inter perpendicularem, & angulum acutum intercepto.

SIt triangulum A B C, quod crus, V. g. A C oppositum angulo dato acuto B nigro habeat. Dico quod hæc basis describit quadratum A X minus quadratis B V, & A Y crurum illum angulum ambientium A B, & B C; Quantitas autem, quâ inuenitur minus, sunt duo rectangula, quę comprehenduntur pro vno latere à toto crure ex ijs, quę acutum angulum ambiunt, V. g. A B, in quod perpendicularis cadat, & pro alio latere clauditur ab eo segmento, quod intercipitur inter punctum O, & verticem B; Nimirum inter punctum illud, in quod cadit perpendicularis, & acutum angulum. Itaque quadratum punctatum A X minus est quadratis A Y, & B V punctatis rectangulis A B, & O Y.

Progess. 1. Deductâ perpendiculari ad alterum crurum ea ambientibus, puta A B: Latus A B erit sectum vtcumque in O. Quamobrem ex propos. 9. huius rectangula duo punctata A S, & O Y comprehensa à crure toto A B, & portione O B, vel æquali B S, & quadratum 3 2 ex A O sunt simul æqualia quadrato toti A Y, sed non soli, verùm simul cum quadrato O S. Quamobrem addito quadrato O T punctato ex perpendiculari O C vtrinque, adhuc hęc illis remanebunt æqualia; nempe rectangula A S, & O Y qudratum 3 2, & O T nuper additum æquabuntur eidem O T, & quadrato A Y, & quadrato O S.

Progress. 2. Quadratum factum super crus C B alterum ambientium angulú nigrum acutum B, nempe B V, ex propos. 11. huius est æquale duobus; nempe ei O T, quod à perpendiculari fit, & alteri minimo O S propter angulum nigrú rectum O, cui subtenditur. Quapropter B V poterit substitui loco horum duorum, quibus æquatur. Et hinc emerget quod rectangula illa duo A S, & O Y, quæ cum quadratis O T, & B 3 erant æqualia tribus quadratis in Progr. 1. nimirum A Y, & O S, & O T sic nunc cú ijs sint æqualia duobus; nimirú quadrato B V ex crure, & quadrato A Y ex altero crurę angulum acutum B ambientibus.



Pro-

Progress. 3 Quadratum A X ex basi A C subtensa angulo acuto B, ex propos. 11. æquale est quadrato B 3, & quadrato O T ex perpendiculari. Quadrati ei adderentur rectangula A S, & O Y quadratum A X esset quoque æquale quadrato maximo A Y ex crure, & B V quadrato ex altero crure ambientiū angulum acutum B: Quoniam ex B. Progress. illa duo quadrata B 3, & O T cum rectangulis istis duobus, quadratis A Y, & B V ex cruribus erant æqualia: Vnde vice quadratum B 3, & O T posito quadrato A X ex basi A C cū rectāgulis iisdem, quadratis ex cruribus æquabitur, & propterea quadratū A X ex A C basi erit minus quadratis crurum A B, & B C duobus rectangulis A S, & O Y, quod erat probandum.

EXPENSIO IV.

De reperiendis æquipotentibus lineis.

Licet ad plenam huius inquisitionis cognitionem particularis tractatus instituatur sit; vt infra. Hic tamen illius primę bases iaciuntur, & docet Euclides dato aliquo rectilineo reperire lineam, quę possit efficere quadratum illi æquale; Vel etiam ita secare lineam, vt segmenta æquè possint. Quod fuit necessarium pręcognoscere maximè ob 10. Libri plenam cognitionem.

PROB. I. PROP. XV. Euc. 11.

Datam lineam rectam ita secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmentorum minori comprehensum, æquale sit quadrato, quod fit à reliquo segmento.

Data sit recta A B, quam ita oporteat secare, vt tota cum segmento minori possit comprehendere rectangulum æquale quadrato, quod à maiori segmento describitur.

Describatur ex A B quadratum A D, & illud latus, quod cum data A B angulum rectum claudit, vt est C A diuidatur in duas partes æquales in O. Trahaturque recta O B ab angulo B ad illud dimidium O, Et æquale ipsi O B prolungetur latus bifariam diuisum C A ab O medietate vsque in F. Et excedet medietatem O A portione A F: Huic ergo portioni A F detruncetur æqualis ex A B datâ portio A G, & iam id fecimus, quod postulat propositio, *siquidem quadratum ex A G maiori portione erit æquale rectangulo ex A B & G B tota, & minori portione.*

Quòd verò A G possit detruncari patet, quia A O, & A B duo crura sunt maiora, quam O B crus tertiū ex prop. 20. Vt antè probetur propositio, fiat super A G maius segmentum quadratum A H à puncto G, & rectangulum G D, ex tota, & minori segmento: Et dico hoc quadratum nigrum rectangulo nigro esse æquale.

Progress. 1 Quoniam ex 8. propos. huius rectangulum, quod à tota cum adiecta pro vno latere, & ab adiecta solùm pro alio vnà cum quadrato dimidię totius æqualia sunt quadrato, quod describitur à dimidia simul cum adiuncta: hinc est, quòd quadratum punctatum ex medietate A O cum rectangulo C H ex tota C A cum adiecta A F, pro vno latere, & alio latere ab adiecta A F, vel F H comprehenso erit æquale quadrato O M ex dimidiâ O A, & adiectâ A F, vt vna, constituto.

Progress. 2. Quadratum verò O M est illud, quod fieret super O B; quia latus eius O F æquatur ex constructione lateri O B. At quadratum ex O B ob rectum angulum apud A album, ex propos. 18. æquatur quadrato ex A O dimidiâ, & quadrato C B ex A B tota, ergo etiam æqualibus rectangulo C H, & ipsi quadrato A O, æquabitur ipsum A O quadratum, & C B, ex A B datâ quadratum.

Progress. 3. Abijce itaque mente ab vtrisque quadratum A O nimirum à rectangulo C H, & quadrato C B, & adhuc remanebunt æqualia, vt priùs erant associata cum illo. Rursus deme à rectangulo eodem C H, & quadrato eodem C B commune spatium album C G, *& quadratum nigrum*, ex A H segmento *rectangulumque nigrum*, ex tota B D, & altero segmento G B *restabunt æqualia*, quod erat ostendendum.

PROB. II. PROP. XVI. Euc. 14.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

Sit Trapezium nigrum: quod ex documentis propos. 44. primi reducatur ad rectangulum A B C D. Quod facilimè efficies si cū diuidas in duo triangula recta F E, quorum diuiso bifariam latere, per eam diuisionem agantur parallelę ad F E; nempe A B, & C D, & eas perpendicularibus cōiungas ab extremis F, E. Verùm si in rectilineo plura capiant triangula ea bina, & bina ad parallelogramma reduces, & inde per proposit. 45. in vnicum parallelogrammum ea compones. Sit ergo latus huius rectanguli A B: quod prolungetur in G; ita ut B G pars prolungata alteri lateri B D æqualis sit. Deinde diuidatur per medium tota A G. Si medietas reperitur in puncto B erunt æqualia latera A B, & B G. Vnde rectangulum erit quadratum: nec aliud hoc casu faciendum erit. Quod si punctum B non sit medium, per medium diuidatur linea A G in H, & centro H fiat semicirculus A E G, ad interuallum medietatis. Postea prolungetur alterum latus B D, in quo centrum non est vsque ad E circuli circumferentiam, eritque linea B E perpendicularis, & hęc erit illa, quę quęritur, ex qua si fiat *quadratum B V hoc erit æquale rectangulo A D.*

Ad quod ostendendum à centro ad E, eius extremitatem ducatur H E, eritque triangulum H B E habens angulum rectum B.



Pro-

Progress. 1. Linea A G diuisa est in æqualia in H, & non æqualia in B. Vnde ex propos. 7. huius rectangulum comprehensum sub segmẽtis inæqualibus, vt est A D, cuius latus B D æquatur ipsi B C, ex effectione, hoc, inquam, rectangulum, & quadratum ea intermedia H B, quod est punctatum paruum 2 simul, est æquale quadrato magno punctato H S ex dimidia.



Progress. 2. Quadratum quoque H X erectum super H E basi æquatur quadrato 2 ex intermedia, & quadrato 2 V ex perpendiculari, ex prop. 11. huius: Sed hoc quadratum H X est æquale quadrato H S; Quia scilicet eorum latera H E, & H G sunt æqualia, vtpote radij eiusdem circuli: Ergo quadratum H X ex basi erit æquale quadrato 2 ex intermedia, & rectangulo A D siquidem ex 1. Progressu quadrato H S ea ostensa sunt æqualia.

Progress. 3. Cum itaque quadratum 2 ex intermedia, & E V ex perpendiculari sint æqualia quadrato HX; Rursusque idem quadratum 2 ea rectangulum A D sint æqualia quadrato H X. Ergo inter se erunt æqualia quadratum E V cum quadrato 2, & rectangulum A D cum quadrato item 2. Aufer itaque commune quadratum 2, *& rectangulum* AD *restabit æquale quadrato* ex EV, quod erat ostendendum.



TRACTATVS VI.

In Euclidis Librum tertium de Circulis.

EGIT in duobus primis Libris Euclides de primo genere superficierum; nimirum de rectilineis, & non quidem de omnibus; sed solùm de præcipuis, & quæ alias figuras planas integrant, & componunt, vt sunt triangula, & quadrangula, nimirum, vt eas solùm, quæ erant elementares attingeret: In hoc verò tertio Libro agit de circulis, quæ figura est origo, & principium omnium linearum flexarum, puta Hyperbolæ, Parabolæ, Ellipsis, aliarumq'ue similium, vt sicuti rectilineorum Elementa, & flexorum quoque doceat, his enim principijs ferè omnia fundantur, quæ tum de sphæra, tum de sectionibus conicis ostenduntur. Obiectum verò huius Libri est idem, quod primi, & secundi, nempe de sola circulorum æqualitate, vel actuali, vel potentiali, vel linearum in ipso descriptarum, peragere.

EXPENSIO I.

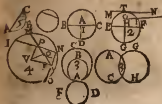
De Principijs.

Licet aliquę Definitiones ad initium primi Libri traditæ sint ad circulum spectantes, vt diametri, semicirculi, &c. Illæ tamen tantùm exhibitę sunt, quę ad illum Librum pertinebant: Modò superadduntur alię, quę propriè huius loci sunt.

DEFINITIO I.

ÆQuales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum radij sunt æquales.

Cùm enim ex ductu lineę, E. g. A D altero extremo A manente, tanquam clauo affixo, dùm extremum alterum se mouet vsque ad illud punctum, à quo discessit, circulus consurgat, & ab hoc ductu efficiatur, patet circulos fore æquales; quorum radius, vel semidiameter A D alteri C H fuerit æqualis, vel quorum diameter nimirum B C fuerit æqualis, ipsi E F, quod faciliter potest ostendi ex superpositione; Nam omnia puncta circumferentiarum, si circuli 1, 2 superponerentur, itaut centrum centro conueniret, & idem fieret; sibi inuicem incidereot, & eandem circumferentiam integrarent ob ęqualem distantiam ab eodem puncto medio.



DEFINITIO II.

REcta linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat producta illum non secat.

Vt recta M N circulum 2. E G F T tangit in T, quia producta vltra T in alteram partem non secat circulum, vt cum tangit N I, quę producta vltra I in O secat ipsum circulum, & idcò non dicitur tangens, quia tangeret solùm actu in I, potentia tamen eum secaret in sui productione.

DEFINITIO III.

CIrculi se mutuò tangere dicuntur, qui se se mutuò tangentes se se mutuò non secant.

Vt est circulus 2. B A interiùs tãgens, vel D F exteriùs tangens circulum C A, qui illum non secat, vt facit circulus H G, qui secat circulum A C.

DEFINITIO IV.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares ad ipsas à centro ducuntur æquales, & magis distare illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

Sic quia in duas I N, & M Q perpendiculares P V, & V Q cadentes à centro V sunt æquales, lineę prędictę I N, & M Q sunt æquali distantiâ à centro remotę: At linea O N magis distabit; quam Q M; quia perpendicularis V R in eam cadens maior est, perpendiculari V Q, vt in 4. fig.

DEFINITIO V.

CIrculi segmentum est figura, quæ sub recta linea, & parte peripheriæ comprehenditur.

DE-

DEFINITIO VI.

Segmenti verò angulus est, qui sub recta linea, & circuli periphe ia comprehenditur.

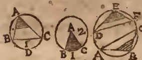
Segmẽtum itaque circuli est fig. 5. portio circuli A B C. Angulus verò, niger est C: Quia tùm figura, tùm angulus circuli peripherię portione A B C, & linea recta A C concluduntur.

DEFINITIO VII.

IN segmento anguli fiunt, cùm crura claudentia circumferentiam, vertice attingunt, & basim habent, rectam segmentum efficieat.

Illi verò peripherię insistere dicuntur, quam crura angulum claudentia intercipiunt.

Angulus itaque niger apud A, est in segmento B A C, quòd eius vertex sit in circumferentia in A, & pro basi B C lineã, quę segmentũ B A C facit, obtineat: At angulus idem niger insistere dicitur in peripheria B D C, quam crura se se aperientia A B, & A C concludunt.



DEFINITIO VIII.

SEctor circuli est figura comprehensa à duobus radijs angulum facientibus, & peripheria ab illis comprehensa.

Sector itaque circuli est A B C duobus radijs B A, & A C, & peripheriâ B I C comprehensus.

DEFINITIO IX.

SImilia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

Videtur aliquibus; quòd hic Euclides anticipauerit, & definitionem ponat, quę ostensione indigeret à 6. Libro dependente. Verùm, quia definitiones à Mathematicis non ostenduntur; sed accipiuntur tamquam nominum explicationes: hinc est, quòd hęc Definitio, licet quoad probationem dependeret à 6. Libro, si proponeretur tamquam propositio. Quia tamen tamquam Definitio exhibetur, à nullo dependet: nisi à sola explicatione: Sint itaque duo circulorum segmenta A B C, & D E F, quę excipiant angulos nigros æquales B, & E. Dico quod illa segmenta debebunt appellari similia, Nec tamen hic intendit Euclides agere de similitudine, vel proportione siue circulorum, seu segmentorum; sed tantùm de æqualitate, ad quam ostendendum erat necessaria hęc Definitio.

EXPENSIO I.

De punctis, tum centri, tum contactuum.

PVnctum duplici modo potest sumi, aut in medio circuli, aut in circumferentia. Si in medio, & sic aut erit centrum, aut extra centrũ. Si in peripheria, & tunc erit aut contactus, aut sectionis. In hac itaque expensione agemus de punctis, tum meditulij, tum circumferentiæ quatenus tamen referuntur ad circulos: Nam de punctis contactuum, aut sectionum rectę lineę cum circulo sequenti expensione peragemus.

PROBL. I. PROP. I. Euc. 1.

Dati circuli centrum reperire.

SIt datus circulus A B C D, cuius centrum oporteat inuenire.

Ducatur linea vtcumque D C, ex prop. 7. lib. 1. diuidatur bifariam in E, & ab eo puncto eleuetur perpendicularis, quę extremis suis punctis circumferentiam attingat, & sit B A. Postea hęc quoque bifariam diuidatur in X. *Nam illud punctum diuisionis, erit centrum, quod quæritur.*

Probatur, Nam si punctum X centrum non est. Assignetur ab aduersarijs. Assignabiturque, vel in ipsâ linea B A, vel alibi.

Non in ipsa linea B A; Quia omne aliud pũctum diuidit eam inæqualiter, & consequenter, contra Definitionem centri, non vtrinquè à circumferentia distaret æqualiter. Sed nec assignabitur extrà lineam prædictam. Nam si potest, assignetur, & sit punctum V. Ducantur itaque ad illud ab extremis D, & C, & medio E lineę C D primo ductę, aliæ tres D V, & C V, & E V; Quo facto ita exordiemur probationem per reductionem ad impossibile.

Progress. 1. Trianguli E V C nigri, & D E V seminigri duo crura ex effectione sunt inuicem æqualia, nempe medietates D E, & E C. Crus verò E V commune, & deseruit vtrique: Reliqua verò crura D V, & V C licet verè inæqualia; Aduersarij tamen debent ea dicere æqualia, vtpote radij ob centrum positum in V. Quamobrem ex propos. 23 primi anguli apud E niger, & semialbus, quę prędictis radijs D V, & V C insistunt, deberent esse æquales. Quare illi anguli erunt recti, ex 10. defin.

Progress. 2. Cum itaque angulus seminiger D E V dicatur rectus: Et eiusdem pars alba apud E sit quoque angulus rectus ex effectione, erunt æquales anguli albus, & semialbus, pars & totũ, quod esse nequit. Idem verò semper potest ostendi de omnibus punctis, quæ alibi assignarentur: Quaderè, cùm non possit esse alibi, quam in medio lineę B A; punctum X erit centrum circuli.

COROLLARIVM.

HInc manifestum est; si in circulo aliqua recta linea bifariam simulque ad angulos rectos secet aliquam aliam rectam in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod A B recta rectam D C, bifariam, & rectangulè secet ostẽsum fuit punctum eius medium esse circuli centrum.

THEOR. I. PROP. II. Euc. 5.

Si duo circuli se se mutuo secant, non erit illorum idem centrum.

SEcent se mutuo duo circuli punctatus, & non punctatus; Dico eos idem centrum non possidere, & ostenditur per reductionem ad impossibile.

Assi-

Assignetur itaque punctum aliquod ab aduersarijs, quod sit centrum commune vtriusque circuli, & sit D. Ducatur itaque ab hoc centro D: ad intersectionem circulorum F lineas punctata DF & ad peripheriam punctarum H D; quæ secet alteram in G.

Probatur itaq; propositio D centrum est commune vtrique circulo, vt mendaciter affirmatur. Ergo radius circuli nō punctati G D erit æqualis radio F D pūctato, & ita H D sidē radio F D æqualis cū punctatus sit radius vtriusque, in F intersectionē circulorum pertingens. Ergo H D, & D G essent æquales, pars, & totum, quod esse nequit. Ideoque centrum D non erit vtriusque centrum, & sic probabis de quolibet alio puncto. Vnde *non poterit esse vllum punctum centrum vtrisque commune*.

THEOR. II. PROPOS. III. Euc.6.

Si duo circuli se se mutuo interius tangant, non erit illorum idem centrum.

HÆc Propositio præcedenti sim lis omninò est. Sit ergo circulus punctatus, qui tangat continuum in G. Dico quod non possit obtinere idem centrum, quod ostendetur per reductionem ad impossibile.

Ostendatur itaque ab aduersarijs, quodnam centrum sit commune vtrique circulo. Sit V g. E. Ducatur ad contactum G recta E G, & ad peripheriam circuli continui punctata linea E L, quæ secet in F circulum punctatum; quo facto.

Prob. propos. E G est radius vtriusque circuli punctati, & non punctati, vtpote pertingens ad commune punctum G in peripheria ipsorum. Quapropter H E radius punctati, ei radio communi E G erit æqualis, rursusque. L E radius continui circuli eidem radio communi E G erit æqualis; ergo inter se L E, & H E essent æquales, pars, & totum, quod repugnat; Ergo assignatum E centrum non erit circulorum commune. Quod dicas de quocumque alio assignabili.

THEOR. III. PROP. IV. Euc.9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & à circumferentia ad illud cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

SI punctum datum H, ad quod à circumferentia A O D. sint tractæ plures, quam duæ rectæ lineæ æquales. V.g. tres A H, & O H, & D H. Dico, quod illud erit centrum circuli.

Quod, vt demonstret, connectit puncta rectis A O, & O D, quas mediæ diuidit in M, & N, super punctum diuidens erigit perpendiculares punctatas N M, & N H quo præstito.

Prob. Nam ex constructione. Crus A N nigri trianguli est æquale cruri correspondenti N albi, crus verò aliud sit vtrique deseruit. Bases quoque N A, & N O præsupponūtur æquales. Quare angulus ad N nigri, huius, & albus illius trianguli erunt æquales, nempe recti, ex propos. 10. primi.

Eodem modo constabit angulū ad M nigrum, & albūm tum huius albi tum alterius nigri esse æquales; Quare rectæ NH, MH, quę rectangulè, & bifariā diuidunt A O, & O D transibunt per centrū. *Ergo H erit centrum*. Si enim esset aliud punctum nō transiret vtraque per centrum, vt propositum cùm vnicum solùm sit, & duæ rectæ non nisi in puncto H conueniri possint.

THEOR. IV. PROP. V. Euc.10.

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus non secat.

SI circumferentia punctata, quæ secet circulum continuum in punctis pluribus æquam duobus A, B, C, D. Dico eam circumferentiam circulum esse non posse.

Quod, vt ostendatur ex ijs intersectionibus connectendæ sunt nimirum A, & B, & C, rectis A C, & A B, Quæ diuidendæ bifariam, & per diuisiones agendæ punctatè perpendiculares, H G, & X P, quæ ostendent centrum esse in P, ex propos. præced.

Probatur propositio. Quia si P centrum est, describet pro cētro vtrique tum punctatæ peripheriæ, tum circulo, cùm tria puncta A, B, & C sint vtrisque communia. Sed circuli se secantes, propos. 3. huius non habēt idem centrum; ergo non possunt esse ambo simul circuli, sed alter eorum circulus non erit, V.g. circumferentia punctata.

THEOR. V. PROP. VI. Euc.11.

Si duo circuli intus se se contingant, atque accepta fuerint eorum centra. Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet.

SI duo circuli continuum, & punctatum se tangant in A interiùs existendo vnus intra alium, & ducta sit linea L N, quæ connectat eorum centra L, & N. Dico, quòd si hæc producatur vsque ad circumferentiam in contactum terminabit.

Quod per reductionem ad impossibile ostenditur. Si enim ita non est. Sit aliud pūctum centrū circuli continui, quodcumque eligant aduersarij, V. g. O, per quod transiens recta P Q, & per centrum L non cadat in contactum, sed alibi,

puta in Q, vel in P. Ducantur ergo à centro L, & à centro mendaciter statuto O ad contactum A duæ rectæ, eritq; constitutum triangulum A O L. Quo exhibito Propos.

Probatur. Nam si O est centrum circuli punctati A O basis, & recta O Q debebunt esse æquales vtpote radij à suo centro ad suam peripheriam ducti. Hoc autem esse non potest; quòd O B, quæ est eius pars, deberet esse maior, quàm A O basis: Quare O Q esset minor, quàm sua pars O B.

Quod autem O B debeat esse maior; quam A O basis punctata, patet: Nam eius pars O L est crus trianguli, aliud verò crus A L est æquale reliquæ portioni L B, cum L sit centrum circuli punctati, eò quòd ducatur à suo centro L, quare tota O B deberet esse maior basi O A sicut latera O L, & L A, ex 20. propos. 1. sunt basi punctatæ O A maiora. Quamobrem O B pars esset maior, quàm O A, & consequenter, quàm O Q tota, eidem basi punctatæ æqualis (vt dictum est) Et semper eodem modo argumentabitur, quibuscumque punctis assignatis, quæ non sint L M. Ergo per L M ducta M A in contactum A cadit.

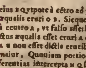
THEOR. VI. PROP. VII. Euc. 12.

Si duo circuli se se exteriùs contingant lineá rectá, quæ ad centra eorum adiungetur per contactum transibit.

PRobatur hæc Propositio per reductionem ad impossibile tali modo.

Nam datis duobus circulis se tangentibus punctatum, & continuum, & recta A B, quæ centra prout volunt aduersarij A, & B nectat, & tamen per contactum O non transeat, sed inferiùs. Ad hoc vt ostendatur, id esse falsum; ad contactum à centris præsumptis A, & B trahantur rectæ A O, & B O, & ecce tibi absurdum, quod sequitur.

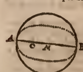
Namque A O B triangulum est, & consequenter ex propos. 20. primi duo crura A O, & B O debent esse maiora, quàm basis A B. Hæc verò ex alio capite debet esse maior. Nā cum B mendaciter dicatur cētrum, pars eius B Q vtpote à cētro ad peripheriam ducta esset æqualis cruri O B. Sicque alia pars A M, vt radius à centro A, vt falso asseritur, ad ambitum ductus æqualis esset cruri A O. Quare nedum tota A B non esset dictis cruribus minor; sed potius maior. Quoniam portio quoque inter circumferentias intercepta M Q superadderetur.



THEOR. VII. PROP. VIII. Euc. 13.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno siue intùs, siue extrà tangat.

REducitur quoque hæc propositio ad impossibile, duasque partes possidet. Prima enim loquitur de contactu interiori, secunda de exteriori. Ponemus itaque circumferentiam punctatam tangere circulum in duobus punctis A, & B, & trahatur recta per duo centra O, & M.



Vel ergo hæc recta transiens per centra, tum punctati circuli, vt mendaciter præsupponitur, tum cōtinui trāsit per ambos contactus, vel per neutrum, vel per alterum eorum, & sic tres casus habet ista propositio; de quorum singulis intexere oportet probationem.

Casus 1. Itaque dicatur rectam A B contactus ipsos coniungere, & hoc non potest esse, quia sic eadem linea diuideretur per medium in duobus punctis; quòd est absurdum; cùm enim puncta contactus, quia sunt communia, distent æqualiter à suis centris, clarum est, quòd quodlibet centrum assignatum diuideret eam æqualiter, & bifariam. Vnde duo centra in quatuor medietates eam secarent A O, & O B. A M, & M B.

Casus 2. At si velit aduersarius, quòd linea transiens per centra, vt est punctata in contactus non cadat, hoc est contra 6. propos. huius, quare saltem in vnum contactum incidet, elige itaque quod vis.

Casus 3. Si eligis contactum A. Ad alterum contactum B duo centra copulabis, lineis C B, & B M, & eadem forma argumenti valebit ad ostendendam impossibilitatem, ac vsi sumus in 6. propos. huius.

Nam sequeretur, quòd M A deberet esse maior, quàm M B; quæ tamen est ei æqualis, vtpote, quòd sint radij à centro M ducti ad circumferentiam circuli nō punctati in A, & B; Quod verò A M deberet esse maior, quàm M B patet. Quoniam C M, & C B simul sunt maiores, quàm M B, ex 20. propos. primi; sed C B, & A C, vtpote radij spurij circuli punctati sunt æquales ex aduersarijs. Adde C M ipsi A C: Fietque tota A M maior; quàm M B, vtpote, quod sit secundùm sui partem C M crus, & secundùm alterā partem A C æqualis cruri C B simul maioribus, quā M B basis trianguli nigri.

Quod & concluditur per idem argumentum etiam si duo contactus ponantur vicinius, quā in secunda figura punctum A, & punctum B, vt probauimus Expens. 2, Tractatus Præliminaris de Quantitate Continua.

2. Pars probatur. Quod si exteriùs se tangant, non se tangunt in duobus punctis. Nā si tangunt in puncto O ex 6. huius linea recta coniungens centra M N per contactū O transibit. Quod, & si se quoque tangunt in Q. Coniungatur ille contactus ad centra per rectas N Q, & M Q. Eritque triangulum M Q N, cuius duo crura simul, erunt radijs in basi N O, O M æqualia, vtpote, quia sūt radij, à cētris in punctum Q vtriusque circumferentię desinentes, & eadem



& eadem ipsi NO, non debebũt esse maiora; quia ex propof. 20. primi duo latera cuiusfcunque trianguli quomodocumque fumpta reliquo maiora funt; Vnde implicantia admitteretur.

EXPENSIO II.

De fegmentis Circulorum.

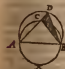
Patebit hic traditam fuisse inter principia fegmentorum fimilium definitionem, non ad hoc, vt eorum confideratio circa fimilitudinem, eorumque proportiones verfaretur, fed tantùm, vt ea fimilitudo mediante definitione fatis declaratâ præberet fundamenta ad oftendendas fegmentorum longè diuerfas affectiones à proportione.

Fuit verò neceffarium agere de fegmentis, quòd poffemus ea fegmentis ipfos circulos agnofcere; & angulos quoque in fegmentis, aut efficere, aut eorum proprietates agnofcere.

THEOR. I. PROP. IX. Euc.23.

Super eadem rectâ lineâ duo circulorum fegmenta fimilia, & inæqualia non conftituentur ad eafdem partes.

Educit hic Euclides demonftrationem ad impoffibile demonftrando fore, & non fore fimilia fegmenta fimilia, & inæqualia fuper eâdem rectâ effecta: Quod vt oftendat fiant (inquit) fuper datam A B duæ portiones circulorum fimiles A C B, & A D B (fi tamen id fieri poteft) Manifeftum eft ex dictis 5. propof. huius, quod folùm fe interfecabunt in duobus punctis, vt in A, & B; Quoniam circuli, nonnifi in duobus punctis fe interfecant. Quare peripheria vnius erit extra peripheriam alterius; Quo pofito trahatur recta A D fecans vtrafque circumferentias in C, & D, & ex ijs punctis duæ rectæ deducantur; nimirum C B, & D B: Habemufque triangulum nigrum cuius angulus D neceffariò, ex propof. 17 Coroll. 1. primi minor eft externo albo C.



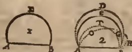
Probatur autem. Nam fegmenta fimilia funt illa, quæ capiunt angulos æquales, ex definitione 9 huius; Sed angulus niger D internus eft maior albo C externo. Ergò ACB, & ADB fimilia nõ fũt; alioquin angulus D niger effet angulo C æqualis, vt volunt, & minor, vt eft oftenfum, quod eft impoffibile.

Quare colligit Clauius, & fi anguli non fiant ad eafdem partes, idem fequi, quòd æquali fegmento el, V.g. A X B, quod eft ad alteram partem, ad eandem partem conftituto; Idem abfurdum fequatur.

THEOR. II. PROP. X. Euc.24.

Super æqualibus rectis lineis fimilia circulorum fegmenta funt inter fe æqualia.

Hæc propofitio oftenditur facilitee fuper pofitinne; nempe imaginando, vel ponendo vnum fuper aliud fegmentum papyro defcriptum. Sint ergo duo circuli fegmenta fimilia A B B primum, & A B E fecundum.



Et ad probandum ponatur vnum fuper aliud per imaginationem, vel propriè defcribendo alterum eorum, & circùm recifa charta fuper aliud realiter ponatur, vel cõgruet, itaut curuitas vnius eodem loco incidat, & feratur, ac curuitas alterius, vel non. Si non, vel intra curuabitur, vt punctatum fegmentum A T B, vel fupra, & extra, vt aliud punctatum A O B, & fic in eidemus in abfurdum propof. antecedentis. Quod fimilis fegmenta caperent angulos inæquales contra defin. 9.; Vel partim fupra partim infra, vt facit circũferentia pũctata A O G H B, & fic contra 5. propof. huius circulus fecaret circulum in pluribus punctis; quàm duobus, nempe in A, G, B.

PROB. I. PROP. XI. Euc.25.

Circuli fegmento dato defcribere circulum, cuius eft fegmentum.

Sit fegmentum quodcumque B T C, vel maius, vel minus, vel æquale femicirculo; connectaturque puncta B C rectâ, cui diuifæ per medium in D: In puncto D erigatur perpendicularis D T, & indefinitè prolongetur verfus A. Deinde trahatur à puncto, vel B, vel C, quæ rectâ copulabimus, ad punctum T, vbi perpendicularis modo ducta circumferentiam fecat recta B T, quæ angulum faciet nigrum ad T. Huic itaque angulo nigro alius angulus ad B niger, & albus conftituatur æqualis, ducendo lineam B A, quæ, vel cadet extra lineam B C, & adiunget partem nigram, vt hic vbi portio data femicirculo eft minor, vel intra, vt cum femicirculo maius eft fegmentum datum, & ideò portione nigra diminuit angulum B, vel fupra ipfam B C cùm femicirculus eft fegmentum datum, & fic nec diminuit, nec addit. Sed quomodocumque id accidat femper angulus B fiat æqualis angulo T, ex 24. prop. & A erit centrum oftmodum trahatur linea A C.

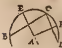
Probatur. Nam tres lineæ B A, nimirum A C, & A T funt æquales, quare ex propof. 4. huius A erit centrum circuli. Quia illud eft centrum, vt ibi probatur in quod plures, quàm duæ lineæ æquales cadunt. Quòd verò tres lineæ dictæ B A,



nempe A C, & A T fint æquales conftat: Nam in triangulo B T A angulus niger ad T, & angulus B femuniger ex cõftructione funt æquales; Ergo fubtendunt bafes æquales T A, & A B, vt ex propof. 15. Deinde punctata A C eft æqualis rectæ B A quia funt æquales duo trianguli niger, & albus, fiquidem anguli ad D niger, & albus recti funt ob perpendicularem D A; Ideò æquales, & quia habent D A crus commune, & alterum crus D C, alteri D B ex conftructione æquale; eadere. & bafes

bases B A, & A C erunt æquales. Vnde tres lineæ A B, scilicet A G, & A T radij erunt, & A centrum.

Sed expeditiùs datam circumferentiæ portionem circularem, vtcumque in B, C, D diuide, & rectis B C, & C D punctum diuisionis cum extremis punctis, vel quibuslibet alijs B, & D coniunge; diuisisque rectis bifariam trahe perpendiculares F A, & E A per puncta diuisionis, & in A erit centrum. Probatur, quia ex Coroll. propos. primæ duæ perpendiculares transeunt necessariò per centrum, quòd cùm sit vnicum necessariò in eo conuenire debebunt; quare punctum A, in quo conueniunt erit centrum circuli.



Sufficit quoque excitare perpendicularem sine tractione linearum B C, & C D si ex punctis C, B, D trahantur portiones circulorum se decussantes, & per eas duæ rectæ ducantur: quia non aliter fieret: Si super lineas iam tractas essent perpendiculares erigendæ, vtpote ex prop. 8. primi; Vnde licet non ducantur C D, & C B eadem operatio valebit.



EXPENSIO III.

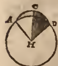
De lineis intra circulum ductis.

COgnitio linearum intra circulum ductarum deseruit tū ad cognitionem sinuū, tum ad cognitionem Parallaxium, tum ad cognitionem Excētricitatū, & ad multa alia, quare in Elementis aliquas primas cognitiones haurire oportet, vt facilior ad ea sublimiora pateat aditus.

THEOR. I. PROP. XII. Euc. 2.

Si in circuli peripheriam duo qualibet puncta electa fuerint. Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur tota intra circulum cadet.

HÆc propositio, quasi est principium, & per se nota. Vnde breuiùs eam probabimus. In circulo A C D sumantur duo puncta, quæ rectâ copulentur, *hæc recta intra circulum cadet*. Quod si non cadit, cadet in ipsam, vel extra ipsam circumferentiam. Quod si dicatur, aut idem erit cum circumferentia A C D, aut magis flexa, quàm ipsa, vt A C D. Quod si adhuc obstinatiùs asseratur recta, vt eos ita dicentes conuincamus, ducantur ad extrema huius lineæ A C D, rectæ à centro H A, & H D, & ducatur inter ipsas H C eis vtriqua, aut æqualis, aut maior, cum vel exeat, vel terminet ad circumferentiam; sed hæc eadem necessariò est minor, si A C D, vt mendaciter asseritur, est recta. Ergo recta, & non recta, quòd est absurdum.



Probandum est itaque, quod debeat esse minor. Id verò à prop. 14. primi eruitur. Nam ibi habemus angulos ad basim Isoscelιū esse æquales, vt niger D, & albus A in triangulo æquicruri A D H, cùm basis curua ab aduersarijs dicatur absurdè recta.

Secundò angulus albus ad C, vtpote externus est maior angulo interno, & opposito D nigro, ex Coroll. 1. prop. 17. primi. Quare, & erit maior angulo huic æquali ad A. Sed ex propos. 19. primi, maior angulus maius etiam latus subtendit. Ergo A H erit maior, vtpote subtensa angulo maiori albo apud C, quàm H C, quæ subtenditur angulo minori ad A. Quare H C, eâ A H erit minor, sed supra dictum est, quod esset maior, aut æqualis, quod est absurdum.

THEOR. II. PROP. XIII. Euc. 3.

Si in circulo quædam recta linea per cētrum extensa, quamdam non per centrum bifariam secet, eam quoque ad angulos rectos secabit, & si secet ad angulos rectos bifariam quoque eam secabit.

PEr centrum A circuli B C D transeat C E, secetque aliam quamcunque in circulo existentem B D non transeuntem per centrum, per medium; Dicit propositio, quòd & ad angulos rectos secabit, & hæc est prima pars huius propositionis.

Ad quod demonstrandum à punctis circumferentię extremisque lineę B D, trahantur ad centrum A rectę A D, & A B punctatę; quo facto.

Probatur prop. Latus D O trianguli nigri est ex hypothesi æquale albi trianguli cruri O B, bases quoque punctatæ B A, & A D vtpote radij sunt æquales. Crus vero O A commune: Ergo ex propos. 23. primi, angulus ad O niger erit æqualis albo, item ad O: Ergo erunt anguli recti.

Secunda pars est, quod si linea per centrum ducta C B alteri non per centrum ductæ, vt B D ad angulos rectos sit; quod B D etiam secta erit bifariam.

Probatur. Nam crura punctata, vtpote radij sunt æqualia. Quare totum triangulum semialbum B A D habebit angulos B, & D ad basim æquales; sunt quoque ex hypothesi niger ad O, & albus ad O æquales; Ergo in duobus triangulis habemus duo crura punctata æqualia, & anguli D niger, & B albus æquales, & rursus anguli ad O niger, & albus æquales; Ergo ex 27. propos. primi, reliqua quoque latera reliquis lateribus erunt æqualia, nempe B O, & O D.



THEOR. III. PROP. XIV. Euc. 4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se mutuò secent non per centrum deductæ, se se mutuò bifariam non secabunt.

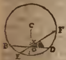
DVæ rectæ lineæ se mutuo secent, V. g. B D, & E F in circulo B D F, quæ per centrum non sint deductæ; dicit numquam posse euenire, vt se in duas partes æquales diuidant. Licet enim vna ex ipsis possit esse bifariam diuisa, altera

tamen

tamen nequaquam in partes æquales remanebit diuisa.

Probatur. Et si vna ex istis transeat per centrum alia non, clarum est, quod transiens per centrum bifariam non secatur: Eò, quia in centro solùm bifariam diuidatur, ex prop. 3.

At si neutra transeat per centrum. Tunc ad eam sectionem ducatur perpendicularis à centro inuento, ex prop. 1. huius, quod si nequeat deduci; est clarum, ex prop. anteced., neutram secari bifariam, cùm ad nullam ex ipsis transiens per centrum perpendicularis duci queat. Quod si ducatur ad alteram ipsarum, vt E D. Tunc dico alteram B F bifariam non esse sectam: Nam si secta B F bifariam est; Ergo etiam cum a F à centro cadens C O faciet angulos rectos, ex prop. anteced. Quare angulus X albus rectus erit æqualis recto seminigro C O D; quod esse nequit, cùm angulus albus X sit pars anguli seminigri C O D.



THEOR. IV. PROP. XV. Euc. 7.

Si in circuli diametro sumatur punctum, quodcumq; quod circuli centrum non sit; & ab eo in peripheriam lineæ rectæ cadant; maxima erit ea quæ per centrum ducitur.

Minima verò reliqua, quæ in directum ad oppositam partem tendit.

Aliarum verò semper maior est, quæ propinquior est maximæ.

Et illæ duæ æquè propinquæ, tantummodò æquales erunt.

QVatuor partes enumerat hæc propositio. Prima est illa, quæ ait quòd si eligatur aliquod punctum in diametro, quod nō sit centrum, V. g. o, & ex eo ducatur per centrum F ad circumferentiam B recta O B, illam fore maximam omnium. Ad quod probandum ducatur quælibet alia, quæ placuerit, V. g. O C punctata. Et puncta C, & F rectâ iungantur. Nam ostendetur O B esse maiorem, quàm O C, quam elegisti.

Prob. In triangulo C O F duo crura C F, & F O sunt maiora basi punctata, ex propos. 20. primi, Sed hæc duo latera sunt æqualia rectæ per centrum ductæ O B; cùm crus O F sit eius pars, & F C sit æquale reliquæ F B, vtpote radij. Ergo tota O B, vtpote æqualis duobus cruribus est maior basi punctata O C.



Secunda pars est. Quòd O H sit omnibus alijs minor, quæ ab O in directū maximæ O B ducitur, & sit vna cum illâ. Ad quod ostēdendum ducatur O L, & coniungatur L F, & probabitur O L esse maiorem, quàm O H.

Prob. Nam basis L F est minor cruribus L O, & F O, ex propos. 20. primi in triangulo nigro; sed tota basis L F est æqualis F H, vtpote radius; Et F O est crus parsque lineæ F H, ergo reliquum O H erit minus crure L O.

Tertia pars est. Quòd ex lineis ab O ductis, quæ sunt propinquiores maximæ; reliquis remotioribus sint maiores. Sic O C erit maior, quàm L O, quod sit propinquior maximæ O B.

Prob. Nam duo crura F C, & F L, quæ ducuntur à centro ad circumferentiam sunt æqualia, vtpote radij. Crus verò O F idem pro ambobus triangulis deseruit albo, & nigro. Sed angulus ad F seminiger maior est angulo ad F nigro; cùm sit niger eius pars: Ergo ex prop. 24. primi maior erit basis C O, quàm O L. Quod & verificatur etiam si punctum O, sit in circumferentiâ ipsâ, vtpote in figurâ appositâ L C O.

Dicit tandem ab eodem puncto duci posse tantummodo duas lineas æquales ad inuicem, hinc inde. Quod, vt demonstret, ad idem punctum F faciendus est angulus albus æqualis nigro; & sit O F M ducendo crus F M, & postea crus O M. Nam ostendetur O M esse æqualem lineæ O L.

Probatur verò sic. Quia crura nigri trianguli, & albi sunt æqualia vnum quidem commune F O, aliud verò L F, alteri M F, vtpote radij, æquale, angulus quoque albus ex effectione æqualis nigro est. Ergo ex propos. 23. primi, bases quoque L O, & O M erunt æquales. Quod verò nulla alia præter istas possit esse istis æqualis colligitur ex probatis. Nam quælibet alia erit, vel ijs maximæ propinquior, vel remotior, & ideò nulla istis L O, & O M erit æqualis. Cùm istæ sint æquidistantes ob æqualem angulum nigrum, & album; qui ab æquali circumferentia subtenditur L H, & H M.

THEOR. V. PROP. XVI. Euc. 14.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter distant à centro æquales sunt inter se.

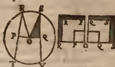
SInt intra circulū R S T V, cuius centrum O duæ rectæ æquales T R, & S V. Dicit prima pars propos. æqualiter à centro distare.

Et ad hoc, vt assumptum probetur; ducantur duæ perpendiculares P O, Q O à centro O ad prædictas rectas R T, & S V, quæ ex propos. 13. secabuntur ab ipsis in duas partes æquales. Deinde à punctis peripheriæ, & extremis datarum rectarum R, & S rectæ ad centrum ducantur, & erunt facta triangula duo album, & nigrum.

Probatur autem ex propos. 11. secundi. Nam cùm hæc duo triangula sint rectangula, quadrata facta super basim subtensam angulo recto erunt æqualia duobus quadratis factis à lateribus angulum rectum continentibus, quapropter quadratum ex O R basi, quod seorsim delineanimus, erit æquale duobus in ipsis descriptis à cruribus P R mediocri, & minimo P O. Et idem asseras de alio quadrato facto super basim O S, quod est æquale duobus inclusis ex cruribus Q S, & O Q.

Secundò. Duo quadrata maiora inter se sunt æqualia ob æqualitatem basium à centro ad circum-

cumferentiam ductarum R O S, & O R. Sed & duo quadrata mediocria sunt æqualia inuicem, vtpote super medietates P R, & S Q, æqualium datarum in praxi facta. Siquidem R T, & S V præsupposita sunt æquales.



Quamobrem, si quadrata minima ex P O, & O Q cùm mediocribus iuncta erant æqualia maximis, & per consequens inter se, ijs mediocribus ablatis per imaginationem; quę erant inuicem æqualia, adhuc quadrata minima remanebunt æqualia, & consequenter eorum latera P O, & O Q, quæ, cùm sint perpendicularia, mensurant distantiam linearum datarum R T, & S V à centro, vt constat ex Defin. 4. huius Libri, & ideò æquales rectæ R T, & S V æqualiter distabunt à centro.

Dicit quoque inuertendo primam partem. Quod datis rectis, V. g. R T, & S V; quę æquidistent à centro; quòd hæ lineę inter se erunt æquales. Ad quod ostendendum ducendę rursus sũt perpẽdiculares P O, & O Q, quę ex Def. 4. huius erunt æquales insuper, & rectas datas R T, & S V bifariam diuident, quòd perpendiculariter ducantur à centro, vt ex 13. propos. huius, deinde trahendę R O, & O S. Quò posito.

Probatur propos. eodem tenore, ac para antecedens probata est. Nam bases R O, & O S, vtpote æquales radij, dant quadrata ęqualia maxima quæ sunt R O, & O S; quę etiam sunt æqualia ijs, quę includunt mediocribus R P, & Q S, & minimis O Q, & O P; si tamen vnà mediocre, & minimum ad maximum includens referantur, & hoc, quia proueniunt à cruribus triangulorum nigri, & albi angulum rectum Q, & P concludentibus, vt ex propos. 12. secundi constat; maxima verò à basi. Minima autem quadrata æqualia sunt inuicem; Quia describuntur à perpendicularibus æqualibus O P, & O Q. Ergo sublatis istis minimis per imaginationem quadrata mediocria inter se æqualia remanebunt, & per consequens latera eorum æqualia. Hæc verò sunt crura in triangulis albo P R, & nigro S Q, quæ, &, vt diximus, sunt quoque medietates datarum R T, & S Q. Vnde si medietates sunt æquales; sequitur etiam; quòd integrę lineę datę æquidistantes à centro R T, & S V sint æquales, quod oportebat ostendere.

THEOR. VI. PROP. XVII. Enc. 15.

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro remotiore, semper maior.

SI detur circulus, in quo dentur duę protractę quomodocumq; V. g. Z Q, & T V, & quę transeat per centrum S R. Omnium maximam dicit esse S R, quę per centrum transit, reliquas, quò ei propinquiores, eò maiores. Quod vt probetur ad datas non transeuntes per centrum Z Q, & T V deducãtur perpendiculares ab ipso centro, quæ sint P L, & P N, quę enim remotior est, vt Z Q, ex Defin. quarta huius maiorem perpendicularem habebit. Detruncabis itaque alteri minori perpendiculari ab hac maiori æqualem portionem, quæ erit P M, & per hoc punctum M, ages aliam perpendicularem Y X huic P L, & puncta, in quibus circumferentiam tangit rectis Y P, & P X cum centro P connectes, Idemque fiat de remotiori data Z Q connectendo puncta extrema in circumferentiam desinentia, cum centro P rectis P Z, & P Q.

Probatur primo, quod data per centrum transiens S R sit maior quacunque assignetur, & sit assignata Z Q. Crura trianguli nigri in centrum desinentia P Z, & P Q simul sunt æqualia, vtpote radij medietatibus S P, & P R diametri, & per centrum transeuntia S R, quæ, & radij sunt. Sed duo crura cuiuscumque trianguli, ex propos. 20. primi sunt maiora basi; ergo, & diameter æqualis cruribus istis erit maior, quàm basis Z Q, & ita probabitur de omni alia linea assignabili, quę tamen per centrum non transeat, vt patet.

Probatur quoque; quod propinquiores centro sint maiores distantioribus.

Duę lineę C T V assignata est æqualis protractę punctatę Y X; quia æqualiter distant à centro ob perpendiculares æquales protractas P M, & P N: & ex propos. anteced. quę æquidistant à centro æquales sunt inuicẽ. Sed assignata remotior Z Q est minor, quàm punctata Y X: Ergo, & minor quàm assignata T V. Quod verò sit minor, patet ex propos. 25. primi. Nam crura trianguli nigri, & alterius Y X P, vtpote, quod omnes sint radij sunt æqualia. Angulus verò ad centrum P nigri minor se comprehendente Y P X. Ergo, & basis Z Q, quę est assignata remotior est minor; quàm punctata Y X, & consequenter minor, quàm altera assignata huic æqualis T V.

EXPENSIO IV.

De lineis circulum tangentibus exteriùs.

VIsis proprietatibus linearum intra circulum, remanent exteriorum proprietates examinandę verè mirabiles propter angulum cõtactus; qui, cũ sit in infinitũ augumẽtabilis, non tamen minimum angulum acutum rectilineum superare potest, nec angulus rectilineus quantumlibet diminutus, eo potest esse minor.

THEOR. I. PROP. XVIII. Enc. 16.

Quæ ab extremo cuiuscumque diametri ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum ducetur.

Et in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum altera recta linea duci non poterit.

Et semicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior est.

Reliquus verò minor.

MVltas partes complectitur propositio, quas singulis declarationibus illustrare opus est prima

prima est, quod si adsit diameter A S ad cuius extremum A ducatur perpendicularis D A C. Dicit hanc extra circulum cadere. Et probatur per reductionem ad impossibile.

Si namque possibile existimatur, quod intra circulum trahi queat. Trahatur A P coniungaturque eius extremum centro recta P Q.

Probatur. Nam angulus niger ad A per aduersarios, cùm mendaciter asserant A P esse perpendicularem, est rectus; Sed angulus ad P est ei æqualis, vtpote æquicruri trianguli anguli ad basim, ex propos. 5. primi propter æquales radios, cruraque Q P, & Q A. Ergo triangulum A P Q duos angulos A, & P rectos haberet, quod est impossibile, quia ex propos. 17. primi, omne triangulum omnes suos tres angulos duobus tantùm rectis æquales obtinet.

Prob. etiam hęc pars positiuè hoc pacto. Nam assumpto in perpendiculari B O quolibet puncto, v.g. o iunguntur O Q, cùm ergo huius trianguli angulus ad S rectus sit erit angulus ad O minor recto, ex propos. 17. primi, quare erit maior Q O basis, vtpote subtensa angulo maiori recto, ex propos. 19. primi, quàm B Q angulo O subtensa, & consequenter punctum O extra circulum erit, & idem erit de quolibet alio puncto assignabili.

In secundâ hac parte asserit inter circũferentiã A P, & perpendicularem ad extremum diametri, A D, rectam aliam non posse trahi à puncto A, quę circumferentiam non ingrediatur ex parte. Et probatur per reductionem ad impossibile. Nam si hoc euenire potest ducatur, & sit punctata A R, ad quam à puncto Q ducatur perpendicularis Q Y ad quodlibet eius punctum Y.

Probatur angulus ad Y rectus est, quia Q Y facta est perpendicularis; ergo angulus ad A erit minor, ex propos. 17. primi. Sed ex propos. 19 primi, maiori angulo maius latus subtenditur. Ergo recta A Q subtensa angulo maiori Y erit maior quàm Y Q subtensa angulo minori A. Sed illa est semidiameter; ergo Q Y minor semidiametro, & tamen si punctata A R non intra circulũ caderet, sed extra deberet esse maior semidiametro ad hoc, vt punctum Y, quod esset extra, copularet; quãobrem punctum Y intra erit.

Tertia pars affirmat quoque angulum interiorem factum à circumferentia, & diametro, vt est angulus Q S T esse maiorem quolibet acuto rectilineo.

Probatur. Nam linea faciens quemlibet acutum angulum, nempe minorem recto, esset veluti punctata A R, vel quęlibet alia similis ei, quę à puncto A inter perpendicularem, & circulum, istis minorem angulum efficeret. Sed iam ostensum est A R, & quamlibet aliã intra circumferentiam cadere, ergo portio circumferentię remanet foras, V.g. Y A. Sed hæc portio circuli facit angulum internum dictum circumferentia diametroque conclusum. Ergo hîc angulus erit maior quàm acutus ad A à punctata diametroque conclusus.

Dicit tandem angulum contingentiæ, qui dicitur, & angulus Reliquus, qualis est angulus niger T B S circumferentis B T, & linea circumferentiam tangente in B comprehensus; qui est reliquus anguli interni à peripheriã diametroque conclusi. Dicit inquam hunc angulum contingentiæ, & reliquum, omni acuto rectilineo esse minorem.

Probatur. Nam sequitur ex dictis. Etenim angulus internus est maior omni acuto angulo, sed hîc est reliquus eius ad complendum rectum. Ergo minor omni acuto angulo, qui possit vsque ad rectum, alium acutum rectilineum complere.

COROLLARIVM.

HInc manifestum est rectam à diametri extremitate orthogonaliter ductam ipsum circulũ tangere. Ostensum enim est cadere extra circulum, quare in solo illo extremo diametri circulum attingit, & si prolongetur, cum & prolongata orthogonalis sit ad diametrum, cadet extra circulum. Vnde non secabit. Quare tangentem ad quodcumque punctum circumferentię ducemus, si tracto ad illud diametro, perpendicularem ad eius extremum excitabimus.

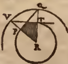
PROB. I. PROP. XIX. Euc. 17.

A dato puncto extrinseco rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

TAngens linea ea dicitur ex 2. Def. huius, quæ circulũ tangens, etiam producta, non secat, quod scilicet exteriorem circumferentiam radat, vt in anteced. propos. esset S O; intendit ergo hic docere modum quo hęc trahatur.

Sit itaque circulus, cuius centrum R, & sit punctum datum V, à quo hęc tangens deducenda sit. Connectatur centrum R, cum puncto dato V secante V R, & à puncto vbi secat P excitetur perpendicularis P Q. Deinde centro R ad interuallum R V, portio sufficiens circuli ducatur, ad cuius circumferentiam prolõgetur perpendicularis P Q vsque dum secet, & à puncto, vbi secat Q ad centrum R recta ducatur Q R. Quę secabit circulum datum minorem in T. A puncto igitur dato V ad hoc punctum sectionis T, recta ducatur: & hæc erit tangens quæsita, quę tanget circulum datum in T.

Probatur angulus ad T niger rectus est; ergo quę exposcitur T V ad angulos rectos ad diametrum T R incidit. Itaque est tangens.



Quod verò angulus niger ad T sit rectus probatur. Nam angulus ad P niger rectus est. Sed hi anguli sunt æquales; ergo, & angulus T est rectus. Quod verò sint æquales, patet ex 22. prop. 1. Nam triangula V T R, & aliud Q P R habent crus vnum minus P R æquale alteri R T, vtpote semidiametri circuli minoris, & aliud V R alteri R Q, vtpote semidiametri circuli maioris. Angulus verò niger ad centrũ R, est vtrisq; communis. Ergo secundùm eam propositinẽ 22. primi triangula tota erunt æqualia, & anguli quoque, qui sibi correspondent, æquales, vt est angulus niger P, & angulus niger T. Quare erunt recti, cùm niger P vnus eorũ talis sit, ex effect. Vnde T V perpendicularis erit, & ideò tangens.

THEO-

THEOR. II. PROP. XX. Euc.18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea; à centro verò ad contactum adiungatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

TAngat recta A B circulum in C, & ab hoc puncto contactus, ducatur ad centrum, C a. Dicit esse perpendicularem ipsi A V. Quòd probabitur per reductionem ad impossibile. Nam ducatur quælibet alia, quæ sit perpendicularis, & hæc V. g sit s v.

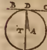
Si itaque s v, vt aduersarij fabulantur perpendicularis est, erit angulus niger ad v rectus, reliqui verò ad c, & ad s oportebit; quod fiur minores recto, tũ 2. Coroll. prop. 17. primi, in omni triãgulo 3. anguli, solùm duobus rectis æquẽtur. Sed quia omnis trianguli maior angulus maiorem basim, latusq; subtendit, ex 19. primi. Erit itaque a c angulo nigro, quem rectum appe lant, basis subtensa maior, quam s v minori angulo c subtensa, at c a est, vt semidiameter, æqualis semidiametro a R, quæ est pars totius a v. Ergo pars esset totâ maior; quod est absurdum.

THEOR. III. PROP. XXI. Euc.19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea: à contactu verò ad angulos rectos recta linea ipsi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli.

SIt circulus, quem tangat recta B C in puncto D, & ab eo puncto erigatur perpendicularis D T. Dicit in hac centrum reperiri. Quod si aliquis negauerit, ostendetur quodlibet punctum ab eo assignatum pro centro impossibilitatem inuoluere. Assignetur itaque, & sit punctum A, ad quod ducatur à contactu D recta A D, quæ ex eis, quæ ostendimus in præcedenti propos. erit quoque perpendicularis.

Probatur itaque faciliter. Quia cùm D A ad centrum A fictum ducta sit, perpendicularis erit, facietque angulos hinc inde rectos. Sed etiam D T ducta est ad angulos rectos. Quare, cùm omnes recti sint æquales, angulus lineis D C, & D A clausus albus esset æqualis angulo cruribus D C, & D T seminigro comprehenso. Qui albo C D A parte nigrâ maior est. Quadere totum esset suæ parti æquale, quod repugnat.



THEOR. IV. PROP. XXII. Euc.8.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, & ab eo ducantur rectæ, vna per centrum transiens, reliquæ aliæ in cauam peripheriam, vel conuexam.

Earum; quæ in cauam protenduntur transiens per centrum, maxima; cæteræ, quò viciniores sunt lineæ transeunti per centrum eò, maiores.

Earum autem, quæ in conuexam terminant, minima est illa, quæ inter punctum exterius assumptum, & peripheriam conuexam interponitur tendendo ad centrũ.

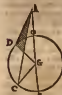
Reliquæ, quò huic viciniores, eò minores.

Duæ verò æquales solùm in peripheriam cadunt vtrinque maximæ, vel minimæ.

HÆc Propositio quinque partes habet, & in omnibus, vt 15. propos. eisdem principijs innititur, excepta 4. probatione, & eodem modo argumentandi procedit, vnde ex ea facilis, & expedita euadit. Dicit primò itaque; quod si eligatur aliquod punctum, V. g. A extra circulum, & ex eo in concauam peripheriam cadens recta transeat per centrum o: Hæc erit maior omnibus, quæ possint in dictam concauam peripheriam cadere.

Quod, si negetur, trahatur quæcumque linea à puncto A in cauam peripheriam, & sit A C. De hac enim, & de qualibet alia, quæ assignetur, probabitur esse minorem linea per centrum ductâ A B. Ad quod ostendendum ducatur à puncto C peripheriæ, quæ ab ea tangitur ad centrum recta G C.

Probatur duo crura sunt maiora reliquo nimirum basi C A in triangulo albo A C O, ex prop. 20. primi. Sed crus à cẽtro ad circunferentiam terminans C o est æquale portioni o B lineæ A B per cẽtrum transeuntis: Crus verò aliud est idem, ac A C alia portione eiusdem per centrum transeuntis lineæ. Ergo tota A B per centrum transiens est maior, quia A C, quæ per centrum non transit, & sic probabitur de omni aliâ, quæ posset assignari.



Secunda pars est; quòd portio A O, quæ cadit in peripheriam conuexam, & si protenderetur, in centrum caderet, sit omnium minima, quæ in circumferentiam conuexam cadunt. Quod si nõ credatur, assignetur quæcumque, & sit A D. Coniungaturque punctum D, vbi peripheriam tangit, ad centrum linea G D, habemusque triangulum seminigrum D A G.

Probatur itaq;. In hoc triangulo basis G A est minor ex propos. 20. cruribus simul sumptis G D, & A D. Sed G D est æqualis portioni G O, cùm vtraque à centro ad circumferentiam pertingat. Ergo O A est minor, quàm A D; quod volebam ostendere,

ostendere, & valebit in qualibet aliâ lineâ, quæ assignetur, idem argumentum.

Tertia pars est. Quod si aliæ rectæ præter A B transeuntem per centrum, in cauam peripheriam protendantur, vt A C, & A M, illam esse maiorem, quæ magis propinquat transeunti per centrum A B. Quod, vt ostendatur coniungatur G C, & G M, eruntque duo triangula seminigrum A G C, & totum album A G M.

Probatur autem. Nam crus trianguli seminigri C G est æquale cruri trianguli albi M G: Sunt enim ambo radij; nimirum ducti à centro ad peripheriam: Crus verò aliud A G in ambobus triangulis idem est. Sed angulus ad G trianguli albi, cùm sit pars, est minor angulo ad G trianguli seminigri; quod insuper addat portionem nigram: Ergo ex propos. 19. primi basis A M erit minor, quàm A C.

Quarta pars asserit insuper. Quod, quæ sunt viciniores portioni lineæ transeuntia per centrũ extra circulum A O sint minores remotioribus; quæ à dicto puncto A in conuexam peripheriam cadunt, vt sunt A P, & A Q. Nam linea A P erit breuior, quàm A Q; quòd sit vicinior.

Probatur. Nam ductis à centro ad circumferentiam rectis G P, & G Q ad puncta, vbi prædictæ A P, & A Q eam contingunt, erunt æquales. Sed intra triangulum maius A Q O ab extremis A, & G duæ rectæ cadũt G P, & P A, quæ ex prop. 21. sunt minores duabus A Q, & G Q cruribus trianguli A Q G. At iam duo radij G P, & G Q sunt æquales: Si itaque auferantur, remanebit A P minor, quàm A Q. Et sic ostendetur de quibuscunque alijs, quæ possent duci.

Quinta pars est tandem: Quòd duæ rectæ lineæ, hinc, & inde duci possint ad lineam transeuntem per centrum æquidistantes, quæ sint æquales. Inspice figuram Coroll. sequen.

Quod, vt demonstretur, fiat angulo ad centrum G albo, angulus æqualis niger, item ad G; & trahatur A Q. Et probatur sic propositio.

Nam duo crura G D albi, & Q G nigri trianguli, vtpote radij, sunt æqualia. Anguli verò ad G, tum niger, tum albus sunt æquales, & crus G A commune; Ergo ex prop. 22. primi, bases A Q, & A D erunt æquales.

Quòd verò nulla alia possit esse istis æqualis; patet ex eo, quia deberet trahi, vel remotius, vel propinquius ad lineam centralem G A, & iam probatum est lineas rectæ transeunti per centrũ propinquiores esse minores; remotiores verò maiores.

COROLLARIVM.

COllige, quòd licet Euclides solùm demonstrarit de lineis cadentibus in circumferentiam conuexam, eadem tamen demonstratio valet in lineis cadentibus in concauam, vt patet de lineis R A, & S A.

COROLLARIVM II.

COlligitur 2. Quod licet Euclides demonstrarit de lineis cadentibus ad vnam partem; verificatur tamen etiam de lineis cadentibus hinc, & inde; cùm sit par argumenti ratio; dummodo vna sit remotior alterâ.

EXPENSIO V.

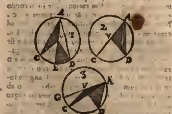
De Angulis in circulis inexistentibus.

DVplex est angulus rectilineus in circulo inexistens, alius est ad centrum, alius est ad circumferentiam. Comparat verò istos angulos, tum inter se, tum prout sunt in segmentis, tum in peripherijs, quibus insistunt, tum angulis, quos facit contingens cùm aliquâ lineâ intrinsecâ, & omnes istæ propositiones verè fundamentales sunt; cùm ex ipsis multa, multaque deducantur ad Parallaxes præcipuè spectantia, & ad figuras describendas; ad sinus inueniendos, &c.

THEOR. I. PROP. XXIII. Euc. 20.

In circulo angulus ad centrum duplex est anguli ad circumferentiam, cùm fuerit eadem circuli circumferentia basis angulorum.

TRibus modis potest accidere; quòd eadem circumferentia sit basis angulorum duorum, quorum vertex vnius ad centrum terminet, alius verò vsq; ad circumferentiam extendatur. Nam potest euenire, quòd crura incipientia ab ijsdem punctis peripheriæ, V.g. C D exterius, ferantur, vt in prima figura crura A C, & A D anguli ad peripheriam C A D cadunt extra angulum ad centrum C V D. Vel potest euenire, quòd vnum crus feratur super aliud, vt in secunda figura C A ducitur super C V, eandemque lineam facit. Vel tandem potest euenire; quòd vnum crus anguli ad circumferentiam secet aliud anguli ad centrum, vt in tertia figura C A secat crus V D. Sed quomodocumque id eueniat, affirmat Euclides; quòd semper angulus ad centrum: nempe C V D est duplus anguli ad circumferentiam C A D.



Probatur primò quoad primum casum trahendo lineam A E, quæ per vtrumque verticem V, & A transeat, & diuidat vtrosque in duas partes: Et primò probabimus de vna parte.

Triangulum itaq; nigrum A V C habet ex prop. 14. primi angulos ad A, & C inuicē æquales, cùm

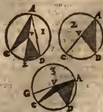
 sit

fit triangulum Isosceles ob crura duo V A, & V C, quæ sunt semidiametri. Sed ipsi ijdem anguli C, & A ex propos. 87. primi sunt æquales externo albo ad centrum V: Ergo angulus V albus ad centrum est duplus angulo nigro A; qui est ad circumferentiam.

Deinde idem quoque ostendetur de alia parte simili prorsus argumentatione. Triangulum album A V D Isosceles ob crura, & radios æquales A V, & V D habet angulos A, & D æquales. Sed angulus externus ad V niger est æqualis istis duobus: Ergo est duplus vni eorum, V. g. angulo albo A: Sed angulus niger, & albus ad A angulum totum integrant ad peripheriam; sicut angulus niger, & albus ad V integrãt angulum ad centrum: igitur si partes anguli V erant duplæ partibus anguli A; & totum erit duplum toti.

Probatur in secundo casu eodem prorsus argumento. Nam triangulum nigrum A V D in 2. figura est Isosceles. Quare anguli ad basim æquales sunt; sed angulus V albus ad centrum, vtpote externus est æqualis illis duobus, ex propos. 17. primi. Ergo est duplus vni eorum; nimirum angulo A.

Progress. 1. Probatur quoque in tertio casu. Nam tracta à puncto A per centrum V recta A G. Fient duo anguli, vnus ad centrum G V D, alius ad peripheriam G A D, super eandem circumferentiam G D. Et eadem prorsus, quæ in secundâ figurâ de hac diximus. Nam crus G A deseruit pro vtrisque. Vnde idem argumentum valebit, & angulo nigro ad D, seminigerrimoq; ad A erit æqualis angulus ad centrum semialbus G V D, & ideo duplus ipsi A.



Progress. 2. Trianguli quoque, partes dictorum maiorum sunt eiusdem rationis, ac in secundo casu, nempe albus G V C, & nigerrimus V A C. Nam crus A deseruit vtrisque; Quare albus ad centrum V est duplus nigerrimi ad peripheriã A.

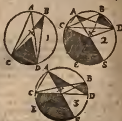
Cum itaque hæc pars alba externa apud V sit dupla parti nigerrimę apud A internę in triangulo C V A, & ex Progr. 1. totus quoq; angulus G V D externus sit duplus angulo toti interno G A D in triangulo V A G; si auferatur, tum ab angulo toto ad centrum G V D externo pars alba, tum ab angulo toto ad circumferentiam interno nigro apud A nigerrima pars: quod residuum erit angulus niger C V D ad centrum erit, & restabit duplus quoque anguli nigri C A D ad circumferentiam.

THEOR. II. PROP. XXIV. Euc. 21.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inuicem æquales.

HÆc propositio tres casus potest habere. Segmentũ enim circumferentiæ, vel potest esse maius semicirculo, vt in prima figura segmentum C A B D. Vel minus, vt in secunda C A B D. Vel ei æquale, vt in tertia figura segmentũ C A B D.

Sit itaque hoc segmentum semicirculo maius vt in prima, in quo sint duo anguli A albus, & B niger ad circumferentiam. Superque eam circumferentiam, super quam insistunt, vt C D iuxta propos. antecedentem fiat angulus X ad centrum totus niger trahendo crura C X & X D.



Probaturque propositio. Angulus A albus ad circumferentiam iuxta preced. propos. est semissis anguli nigri X ad centrum: Sed eiusdem nigri X ad centrum est quoque semissis angulus B niger ad circumferentiam. Ergo cùm B niger, & albus A sint medietas eiusdẽ, inter se erunt ęquales.

Ad probandam secundam, & tertiam partem simul, necesse est diuidere angulos A, & B per lineas transeuntes per centrum A S, & B E quemlibet in duas partes nigram, & albam. Insuper & trahere semidiametros C X, & X D, & iam vides angulum partialem ad A album, tam secundę, quàm tertię figurę habere angulum ad centrum ex nigro, nigerrimoque integratum C X S. Sed eundem nigerrimum, & album S X D obtinere quoq; alteram portionem nigram anguli B. Portionem verò albam anguli B in vtraque figura habere pro angulo ad centrum angulum nigrum C X E: Sicut & anguli A portio nigra obtinet pro angulo ad centrum angulum album D X S. His perceptis,

Probatur sic. Duo anguli ad centrum niger & nigerrimus C X S sunt dupli, ex preced. propositione portioni albę anguli A. Angulus verò albus ad centrum D X S est portioni nigrę ad A duplus. Ergo niger nigerrimus, & albus simul est duplus toti angulo nigro alboque ad circumferentiam A. Sed hi tres albus niger nigerrimusque ad centrum sunt dupli quoque totius anguli B ad circumferentiam: Siquidem niger est duplus eiusdem B portionis albę; nigerrimus, & albus S X D ad cẽtrum portionis nigrę ad B. Quare angulus B niger albusque totus, & angulus A albus nigerque totus sunt semissis anguli totius portionibus alba, nigerrima, nigraque constantis ad centrum. Quare inter se erunt æquales.

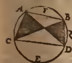
THEO.

THEOR. III. PROP. XXV. Euc. 22.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

Dico: quod si quadrilaterum quodcumque circulo inscribatur CABD illius anguli oppositi, quales sunt B, & C, aut A, & D sunt duobus rectis æquales. Quod, vt probet, trahit duas diagonales lineas AD, & CB, quę angulos in duas portiones diuidunt.

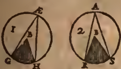
Probatur. Nam anguli A pars nigra est æqualis parti nigrę anguli B, ex pręc. propos. quòd fiot io eodē segmento CABD. Similiter etiam pars alba anguli A, quòd sit in eodem segmento BACBD, erit æqualis parti albę anguli C. Igitur totus angulus A feminiger æquatur duabus portionibus nigrę B, & albę C: Sed addamus istis portionibus albę C, & nigrę B angulum D semionigrum totum erunt isti, ex propos. 17. primi duobus rectis æquales; Siquidē sunt interni triangulo CBD. Quamobrem angulus totus A niger, albusque vice harum portionum, quibus æquatur, nigrę B, & albę C substitutus, cum angulo D seminigro. Faciet duos angulos duobus rectis æquales: Eodem modo procedet demonstratio in oppositis B, & C. Quare patet propositio.



THEOR. IV. PROP. XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

Si sint duo circuli æquales, quibus fiant duo anguli ęqual, vel ad centra, vt sunt nigri, vel ad circomferentias, vt albi. Dico illos angulos subtendere portiones circulorum æquales, vel eis insistere. Quod est idem.



Probatur primò de angulis æqualibus ad centrum. Nam segmentum primi G Æ H æquale est segmento secundi R A S, & toti circuli prçsupponuntur æquales. Ablatis ergo à circulis æqualibus segmentis æqualibus portiones æquales remanebunt; nimirum G H, & R S.

Quod verò segmenta G Æ H, & R A S sint æqualia probatur. Quia ex defin. 9. ea segmenta sunt æqualia, quæ angulos æquales includunt: Sed Æ, & A sunt æquales. Siquidem dimidij sunt, ex propos. 23. huius æqualium angulorum nigrorum ad centrum. Quamobrem circulorum portiones G Æ H, & R A S, in quibus insunt, erunt æquales.

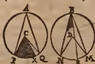
Quare sequitur quoque secunda pars. Nam si fiant anguli ad peripherias æquales Æ, & A insisteot ęqualibus segmeotis ex eadem defin. 10. Quare ijs segmentis à circulis æqualibus ablatis portiones circulorum G H, & R S remanebunt æquales.

THEOR. V. PROPOS. XXVII.

In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus perispherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

Hæc propositio conuertit antecedentem. Sed alio pacto ostenditur. Nempe per reductionem ad impossibile. Dētur itaque duo circuli æquales, & anguli io illis A, & B, vel ad centrum C, & D, qui insistant peripherijs æqualibus P Q, & M N. Dicit *eos angulos fore æquales*.

Nam si non sunt, ducatur punctata C X, quę faciat angulum nigrum ad centrum C primi circuli æqualem angulo albo ad D centrum secundi circuli, prout volunt aduersarij.

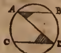


Tunc probatur angulus niger ad C centrum, vt falso mentiuntur aduersarij est æqualis angulo D albo secundi circuli. Ergo insistant peripherijs æqualibus, ex propos. anteced. Quare portio peripherię P X est æqualis portioni M N secundi circuli. Sed eidem ex suppositione est æqualis portio P Q. Ergo portio P Q erit æqualis suę parti P X. Quod est impossibile.

Eodem modo probatur de angulis ad peripheriam A, & B. Nam, si non sunt æquales. Aduersarius faciat eos æquales tracta linea B R: Eritque angulus niger ad B, ęqualis angulo albo ad A. Quare peripherię portiones, quibus insistunt, N R, & P Q erunt æquales. Sed quoque portio M N est æqualis eidem P Q. Ergo portio minor N R esset æqualis maiori N M. Quod est absurdum.

COROLLARIVM I.

Colligitur hinc primo. Quod si duę lineę in circulo, vt A B, & C D intercipiant duas æquales portiones circuli, vt C A, & B D fore inuicem parallelas, quia tracta A D incidente anguli nigri alterni sunt æquales ob portiones æquales, quibus insistunt ex premissâ. Quando verò anguli alterni fiunt ab incidente, vt est A D æquales, duæ super quas cadit, parallelę sunt, ex propos. 28. primi.



COROLLARIVM II.

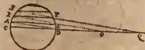
Elicitur rursus duarum linearum se rectangulè decussantium, & per centrum transeuntium. Angulos ad centrum quartę circuli insistere. Nam, cùm faciant quatuor rectos A B C D,

 & om-

& omnes recti æquales sint, oportebit, etiam circumferentias, quibus insistunt esse æquales: Et ideò circumferentiam in quatuor portiones esse diuisam, quę dicuntur quadrantes. Quare quoq; euidens est; omnem angulum acutum insistere minori portioni quadrantis; quis est minor recto: Obtusum verò maiori circumferentię, quàm quadrans sit; quia est maior recto.

COROLLARIVM III.

Colligitur item, Quod illę, quę in circulo coniungunt parallelas æquales arcus intercipientes ad partes oppositas, vt sunt AD, XG, & BF punctatę coniungentes parallelas arcus ęquos intercipientes CD ad AO, & A ad BB, adhuc esse parallelas. Ratio est, quia, cùm AG sit incidens in punctatas, & anguli alterni sint æquales ob æqualitatem portionum circuli GD, & AC, quibus insistunt, ex propos. 30. primi, punctatæ quoque æquidistantes erunt.



COROLLARIVM IV.

Deducitur etiam. Quod si FC punctata protendatur, & similiter diameter vsque dum occurrant in O, æqualem futurã diametri portionem, quę extra circulum prolungatur, vt est UO, & lineam A G in circulo ei æquidistantem. Ratio est, quia FO, & AD punctatę sunt parallelę similiter, & OD, & AG. Quare AOGD erit parallelogrammum, ex def. 35 primi. Quare ex propos. 34. primi, latera aduersa erunt inter se æqualia. Vnde OD erit æqualis rectę AG, & si alias protendas eodem modo idem sequetur. Quare diameter productum extra circulum æquabitur omnibus in circulo existentibus sibi parallelis, vt est CQ, quę æquatur tribus in circulo existentibus, & sibi parallelis CD, & AG, & EF.

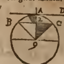
COROLLARIVM V.

Colligitur quoque rectę BC portionẽ circuli subtendenti esse parallelam lineam AD tãgentem punctum medium peripherię subtensę BAC, quale est A. Quia illę sunt parallelę, super quas rectã cadens angulum facit externum, & internum oppositum, & ad easdem partes æqualem. Sed angulus A niger, & B 19. albus sunt æquales, cùm recti sint, vt dictum est.

Ergo sunt tangens AD, & subtendens BC parallelę; vt figura sequenti.

COROLLARIVM VI.

Colligitur tandem, Quod si XC secetur per medium per aliquam lineam à centro prouenientem, & portionem circuli, quam subtendit secari per medium, & viceuersa.



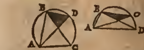
Nam anguli ad centrum æquales æqualium triangulorum, qualia sunt ostensa album, & nigrum ad 9 habent etiam bases æquales, ex 22. primi 2 B, & 2 C, & æqualibus peripherijs insistunt, vt AC, & AB, ex præced. & ideò erunt æquales portiones BA, & CA.

THEOR. VI, PROP. XXVIII. Euc. 31.

In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui autem in maiore segmento, minor recto; qui autem in minore maior est recto. Insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est, minoris verò segmenti angulus minor est recto.

Hæc propositio quinque partes habet. Sed quę, primã ostensã ceterę faciles euadant. Primam itaque partem primò declarabimus. Dicit itaque, quod angulus in semicirculo, vt est C, niger nigerrimusque simul, cuius vertex in circumferentia est, basis verò illum subtendens totus diameter AB, rectus est. Quod, vt ostendatur, ducenda est recta CD, & prolungandum latus CA in O.

Probatur angulus externus albus C est æqualis angulis internis, & oppositis A, & B totius trianguli ACX, ex propos. 17. primi. Ergo est etiam ęqualis angulo interno ad C, qui nigerrimus nigerque simul. Probatur. Nam angulus A, & angulus B sunt æquales eius duobus portionibus, & A quidem nigrę, angulus verò B portioni nigerrimę: Ergo & eędem portiones aũt æquales angulo externo albo C. Quod verò angulus A sit æqualis portioni nigrę, patet ex propos. 14 primi. Nam sunt anguli ad basim in triangulo Isosćele ACD, cùm duo crura sint semidiametri AD, & CD. Quod verò B sit æqualis portioni, & angulo nigerrimo C, eodem argumento probatur. Nam triangulum totum nigrum ob crura, quę sunt semidiametri est Isosceles, vnde B, & C nigriores, vt anguli ad basim sunt æquales.



Dicit quoque. Quod si in maiori segmento sit ABC angulus erit minor recto, & si angulus ABO, sit in minori segmento erit recto maior. Quod, vt probetur, trahatur à puncto A diameter in vtrisque segmentis AD. Trahaturque crus BD faciens, ex præced. probat angulum rectum BAD. Nam angulo in maiori segmento AXC, addit partem nigrã; vnde ABC minor erit recto, at angulo in minori A B O parte nigra minor est idem rectus, quare ABO maior erit recto.

Dicit tandem circumferentiam maioris segmenti facere cum recta subtensa, angulũ recto maiorem; At minoris segmenti rectã minorem, ad

Ad quod ostendendum inspiciatur prima figura. Nam C B erit subtensa, & peripheria segmenti maioris C B A, minoris verò C X B, cùm ergo angulus C rectus sit, & recta C A intra circulum cadat: Patet; quòd circumferentia extra cadens C A faciat suum angulum, cùm recta C B maiorem recto. At in minori segmento peripheria C B lineam C O foras relinquit: Quare facit cum C B angulum recto minorem; quia angulus O C B maior rectus est, vt prima parte huius propos. est ostensum.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quod si fiat triangulum rectangulum quodcumque, & maior eius basis bifariam diuisa assumatur pro centro interualli medietate eius præbente, circulum necessariò per tres vertices extremos angulorum rectanguli esse transiturum. Quoniam, si non transiret, vel secaret, vel supra, se fleteret: Si secaret, ergo iam intra illud rectangulum triangulum æquale ei posset constitui contrà propos. 21. primi: Si super transiret, posset constitui triangulum angulum rectum comprehendens, & tunc angulus rectus rectanguli, vtpote comprehensus, ex propos. 21. primi esset maior.

THEOR. VII. PROP. XXIX. Euc.32.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea. A contactu verò producatur aliqua recta linea circulum secans; Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt illis angulis, qui in alterni circuli segmentis consistunt.

SIt tangens circulum O L in puncto A, à quo recta educatur, quę secet circulum in duo segmenta, vt est A D, Hęc vel per centrum transibit, vel non. Si transibit per centrum, erit primus casus, de quo primò demonstratio erit.

Casus 1. Asserit itaque, quòd hęc transiens per centrum A D faciet angulum, cum tangente æqualem angulo, qui comprehenditur ab alterno segmento; nempe angulum nigrum ad A dextrû angulo C nigro sinistri segmenti; Angulum verò sinistrum ad A album angulo segmenti dextri B albo.

Probatur verò, Omnes recti anguli sunt ęquales. Sed anguli segmentorum C, & B recti sunt, ex pręced. & anguli O A D, & L A D, quos perpendicularis per centrum transiens facit, cum tangente sunt, ex propos. 20. huius recti: Ergo omnes sunt æquales.

Casus 2. Dicit quoque idem esse, & euenire. Si linea à puncto A egrediens non transeat per centrum, vt in hac secunda figura. Nam angulus dexter albus nigerrimusque ad A à secante A D tangenteque O L factus est æqualis angulo C segmenti sinistro, sicut & alius niger ad A est æqualis alteri nigro B. Quod, vt probetur trahenda est A F, quę transeat per centrum, & tracto crure D F constituendum est rectangulum triangulum A D F,

Probatur propos. Angulus niger O A D est æqualis angulo apud F in triangulo A D F. Sed iste angulus F est æqualis angulo nigro B. Ergo angulus B niger, & niger apud A sunt inuicem æquales. Probatur ex propos. 24. huius, quòd angulus F in triãgulo A D F sit æqualis nigro B: Quia est in eodem segmento A B F D, Probatur quoq; quod idem angulus F, sit æqualis nigro A; Quia niger D ex anteced. rectus est, quare ex propos. 17. primi, reliqui nigerrimus apud A, & apud F vni recto erunt æquales: Sed angulus niger, nigerrimusque apud A rectus est: Ergo ablato angulo nigerrimo, cum quo angulus apud F, & niger apud A æquantur vni recto, restabunt inuicem anguli F, & A niger æquales. Quamobrem angulus B angulo F æqualis, æquabit quoque angulum nigrum apud A.



Sic probatur de angulo dextro L A D, quod sit æqualis angulo sinistro A C D in segmento: Nam B niger, & C albus in quadrilatero C A D B, ex propos. 25. huius æquantur duobus rectis, & similiter anguli niger, & L A D apud A æquantur duobus rectis; Sed iam ostensum est angulum B nigrum esse æqualem angulo A nigro. Ergo reliquum nigerrimum, & album ipsius erit æquale angulo albo C in triangulo A C D segmenti.

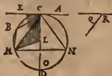
PROB. V. PROP. XXX. Euc.33.

Super data recta linea describere segmentum circuli; quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DOcet hîc constituere quodlibet segmentum super quamlibet rectam, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Et quidem si angulus rectus datus sit, non oportebit, nisi diuidere lineam, V. g C D bifariam, & ibi centro posito in L describere semicirculum. Nam ex dictis propos. 28. explet angulum rectum, qui erit ęqualis dato; cùm omnes recti sint ęquales. Sed si non sit rectus, at acutus, vt Q, tunc magis operis requiritur.

Sit itaque angulus datus Q acutus, cui æqualis capax super lineã C M facere oporteat aliquòd segmentum circuli. Ducatur ad initium eius C linea B A, quę faciat angulum acutum nigrum ęqualem angulo dato Q, & ad eam erigatur perpendicularis, exiens à puncto C, quę sit O C, & portione nigerrima compleat angulum rectum, & ab altero extremo M punctata alia ducatur



versus perpendicularem, quæ faciat angulum ad M nigrum ęqualem angulo nigerrimo ad C. Hę namque punctatę C L, & L M, vt subtensę angulis

equalibus

æqualibus, ex propoſ.15. primi erunt æquales. Quare facto centro in L interuallo L C deſcribi poterit circulus, qui tranſibit per M, vtpote per ſemidiametrū æqualem. Si itaque in hoc ſegmento C N M ſuper lineam C M conſtituatur angulus N. *Iſte erit æqualis an-alo acuto nigro ad* C. Qui eſt æqualis angulo Q dato.

Probatur autem ex præmiſſa propoſitione faciliter. Nam angulus ad C niger B C M eſt angulus ad contingentem. Ergo erit æqualis angulo alterni ſegmenti, qui eſt angulus N.

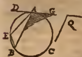
Quod ſi velimus facere angulum obtuſum, V. g. R. Fiat angulus eodem pacto, quo ſupra A C M el angulo B æqualis, & facto circulo è centro L in ſegmento C B M fiat angulus B. Nam, cùm ſit ex præcedenti propoſ. in ſegmento alterno C B M erit æqualis angulo obtuſo A C M, & R.

PROB. VIII. PROP. XXXI. Euc.34.

A dato circulo ſegmentum abſcindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

SIt datus angulus Q, & oporteat à circulo dato A B C abſcindere portionem, quæ capiat angulum æqualem dato angulo Q. Ducatur recta D G tangens circulum in puncto A, & à puncto A ducatur recta A B, quæ faciat cum tangente D G angulum æqualem angulo Q, prout docet propoſ. 24. primi, & ſegmentum alternum A B B capiet angulum E æqualem angulo Q.

Probatur. Nam ex 29.propoſ.huius angulus in ſegmēto alterno A B B capiens eſt æqualis angulo nigro ad A. Sed angulus niger ad A factus eſt æqualis angulo dato Q; Ergo ſegmentum A E B capit angulum æqualem dato angulo Q.



EXPENSIO VI.

De Peripherijs.

HIc agimus de Peripherijs eas comparando ad inuicem, & oſtendendo quales ſint æquales, qualeſque non ſubeant æqualitatem. Docemus etiam peripheriam, atque adeò circulū bifariam ſecare: Et, licet hæc expenſio ſit facilior præcedenti, oportuit tamen poſponere, cùm dependeat in aliquibus à demonſtrationibus angulorum præhabitis.

THEOR. I. PROP. XXXII. Euc.28.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt maiorem quidem peripheriam æqualem maiori alterius, minorem verò unius æqualem minori alterius.

DIcit lineas æquales in circulis æqualibus (quòd etiam intelligitur de eodem, vt notat Clauius,) vt ſunt A B, & C D in æqualibus circulis primò, & ſecundò auferre ſegmenta æqualia ſcilicet diuidere qualibet ſuum circulū in duas portiones, quæ & ſi non ſint æquales, inuicē illæ, quæ ſunt eiuſdem circuli, comparanda eſt maior primi circuli, cum maiore ſecundi, & hæ circuli portiones erunt inuicem æquales; ſicut & minor primi comparata minori ſecundi.



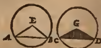
Probatur. Nam anguli ad centrum E, & L triangulorum albi, & nigri ſunt æquales. Ergo inſiſtunt ſegmentis, & peripherijs æqualibus minoribus A B, & C D, ex propoſ. 26. huius, quæ ablatæ ab æqualibus circulis per imaginationem relinquent portiones peripheriæ maiores A G B, & C H D æquales.

Probatur verò quod anguli E albus, & L niger ad centrum ſunt æquales, quoniam baſes A B, & C D, ex præſuppoſitione ſint æquales: Latera verò, vt ſemidiametri æqualium circulorum æquales ſunt, totum igitur triangulum nigrum, toti albo æquale eſt. Quare & angulus ad centrum, ex prop.23. primi E albus erit æqualis nigro L.

THEOR. II. PROP. XXXIII. Euc.29.

In æqualibus circulis rectæ lineæ quæ æquales peripherias ſubtendunt, ſunt æquales.

ESt conuerſa præcedentis, & ſequitur à 27. huius, quę & ipſa conuertit 26. Sint itaque peripheriæ æquales A B, & C D, quę rectis ſubtendantur, fiantque anguli ad centrum E, & G tractis ſemidiametris A E, & E B conficientibus triāgulum album, & alijs G C, & G D nigrum delineantibus.



Probatur. Quia peripheriæ C D, & A B, V. g. minores præſuppoſūtur æquales, anguli E albus, & G niger ad centrum ſunt æquales; Sed & crura ſunt æqualia; Quia omnia ſunt ſemidiametri. Ergo ex propoſ. 22. primi, & baſes æquales erunt quales ſunt A B, & C D.

THEOR. III. PROP. XXXIV. Euc.30.

Datam peripheriam bifariam ſecare.

AD hoc vt peripheria A B C bifariam ſecetur. Ducatur recta ſubtendens A C, & diuidatur bifariam in D, & ab ea diuiſione D erigatur perpendicularis B B vſq; ad peripheriā protenſa; hæc namque diuidet eam in duas partes æquales, ad quod probandum ducendæ ſunt duæ lineæ nimirum A B, & B C.

Probatur

Probatur lineę modò tractę sunt æquales. Ergo ex prop. 32 huius, & peripheriæ, quas subtendunt A B, & B C æquales sunt.



Probatur, quòd subtensę sint æquales. Nam bases sunt triangulorum æqualium A B D, & B D C. Hęc verò triangula probantur æqualia, ex prop. 4. primi: Quia crus B D est commune: alterum verò crus D C ex constructione fecimus æquale D A alteri cruri: At anguli ad D, A D B, & B D C recti sunt. Quare & bases A B, & B C æquales.

EXPENSIO VII.

De Rectis circulo inscriptis, & circumscriptis.

Quemadmodum egit Euclides Libro secundo de potentijs laterum trianguli, tum rectanguli, tum obtusanguli ad æqualia quadrata, & rectangula constituenda.

Sic hic agit de potentijs linearum, aut in circulo se secantium, aut circulum tangentium ad æqualia quadrata, rectangulaque describenda. Vtilissima omnium cognitio; quippe qui conicis maximè deseruiat, tangentibusque reperiendis, & secantibus maximè prosit, & solidis ipsis sphęricis, conicisque ad inueniendam eorum soliditatem aditum sternat.

THEOR. I. PROP. XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuò secuerint rectangulum comprehensum sub segmentis vnius æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis alterius comprehenditur.

Quatuor casus propositio hęc enumerat. Nam vel ambę lineę, quę se in circulo secant sunt diametri, & est primus casus. Vel vna earum, sed se inuicem secant ad angulos rectos; & erit secundus. Vel vna earum diameter est; sed non se secant ad angulos rectos; & erit tertius. Vel tandem neutra earum transit per centrum, sive ad angulos rectos, seu ad non rectos secet, & erit quartus casus: Qui singuli diuersas probationes exposcunt.

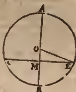
Primus casus. Sit igitur circulus A B C D, in quo duo diametri A D, & B C se secent in E dicit rectangula, ex segmentis B E & E C vnius, & ex segmentis alterius, A E, & D E facta inuicem esse æqualia.

Patet, quia cùm segmenta sint semidiametri sunt omnia æqualia. Vnde & æqualia rectangula constituent.



Casus 2. Sit, in circulo C B E, linea, quę rectè secet diametrũ in M. Dicit, quòd quadratum factum ex M E, & M C, est æquale rectangulo facto, ex A M portione diametri, & M B alia diametri portione. Quod vt demonstretur trahendus est semidiameter O B.

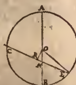




Probatur verò ex propos. 7. secundi rectangulum nigrum factum ex A M, & M B vna cum quadrato paruo O M ex intermedia O M est æquale quadrato ex dimidia, quale est punctatum B O; quòd diameter A B secta sit in æqualia in O, & non æqualia in M. Sed huic eidem quadrato ex dimidiâ æquale est quadratum ex dimidia M E; quale est M C iuncto tamen eidem quadrato M O. Ergo si hoc quadratum M O, tum à rectangulo nigro, tum à quadrato M C auferatur remanebunt quadratum rectangulumque nigrum inter se æqualia. Remanet probanda minor, quod duo quadrata M C, & M O paruum æquentur quadrato punctato B O, hoc autem patet. Nam quadratum O B est æquale quadrato O E cùm sint semidiametri, & lineę æquales, sed quadratum ex O E cùm sit basis subtensa angulo recto O M, ex propos. 47. secundi est æquale quadratis ex M E, quod est M C, & M O paruo. Ergo eisdem quoque est æquale quadratum punctatum ex O B. *Quare rectangulum nigrum erit æquale quadrato* M C, quod probandum erat.

Casus 3. Dicit tertiò. Quòd si linea C E secuerit A X diametrum, & non ad angulos rectos, adhuc vera erit propositio; Et quod rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, V. g. sub C M, & M E erit æquale rectangulo comprehenso sub segmentis alterius, népe diametri M B, & M A. Quod, vt probet, trahit perpendicularem à medietate lineę C E; nempe à puncto R, quę cadet ex propos. 3. huius Coroll. in centrum O. Deinde coniungit centrum cum extremo E rectâ O E.



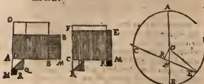


Probatur paulò operosiùs, quam precedens propositionis pars. Diameter A B est secta in O, in æqualia, & in M in non æqualia: Quapropter rectangulum sub partibus inæqualibus A M, & M B contentum, quale est nigrum M A X, & quadratũ A Q E B intermedia M O seminigrum simul sunt æqualia quadrato ex medietate diametri O B, ex propos. 7. secundi, quale est O B, & quod idem est propter æqualitatẽ linearum quadrato ex O E. Sed hoc quadratum ex O E, vel O B est quoque æquale propter propos. 47 secundi quadratis C R E S O B hoc est seminigro, & ex R E punctato F R. Ergo quadratum hoc R F punctatum vna cum quadrato seminigro annexo erit ęquale rectangulo nigro.

nigrn A M B ex segmentis diametris iuncto cum quadrato Q A ex O M.

Sed modò hoc quadratum Q A, ex propos. II. secundi est æquale duobus O R seminigro, & M R minimo nigerrimo ob angulum rectum R.

Quapropter poterimus substituere loco illius Q A hęc duo, seminigrum ex O R, & M R minimú nigerrimum. Quare quadratum punctatum R F, vt diximus, cum quadrato seminigro erit æquale huic rectangulo nigro A M B associato cum quadrato eodem seminigro O R, & minimo nigerrimo M R.



Abijciatur itaque ab vtrisque comes iste seminiger O R, & remanebũt adhuc æqualia rectangulum nigrum A M B cum minimo nigerrimo quadrato, quod remansit, & quadratum punctatum R F factum ex dimidia R B.

Sed huic quadrato punctato R F facto ex dimidia R B est æquale rectangulum nigrum factum ex segmentis inęqualibus C M, & M E linęę C E, nimirum C E vnà, cum quadrato ex intermedia R M facto, quod est minimum nigerrimum R M, ex propos. 7. secundi; Siquidem linea C E est diuisa in æqualis in R, & non æqualis in M. Quare duo rectangula nigra A B M nimirum ex segmentis diametri, & C E ex segmentis alterius associata duobus quadratis minimis nigerrimis sunt æqualia vni tertio; nempe quadrato R F ex R B. Vnde erunt æqualia inuicem. Tolle itaque illa quadrata minima nigerrima, cùm sint eiusdem quantitatis, vtpote eiusdem intermediæ R M, *&, remanebunt æqualia rectangulum nigrum, ex segmentis diametri* A M B; *& ex segmentis alterius nigrum rectangulum* C E.

Casus 4. Sine tandem duę rectę, quę in circulo quomodocumque se secent C E, & O R in M. Ducatorque per punctum M ad centrum diameter A B. Dicit; quòd *rectangulum* ex segmentis linęę C E *æquale* est *rectangulo* ex segmentis lineę R Q.

Probatur. Nam ex pręcedenti tertia parte rectangulum ex segmentis C M, & M B lineę C B est æquale rectangulo ex segmentis diametri A M, & M B. Sed ex eãdem rectangulum ex segmentis G M, & M R lineę G R est eidem rectangulo ex segmentis diametri A M, & M B æquale. Ergo rectangulum ex segmentis lineę C B, & rectangulum ex segmentis lineę R G sunt æqualia inuicem.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quomodo datis duobus lineis inæqualibus poterimus eas ita secare, vt ex earum segmentis rectangula componantur æqualia. Nam si eas in circulo accomodamus, ita ut se inuicem secent; certum erit, quòd rectangula ex segmentis ijs confecta æquabuntur ad inuicem.

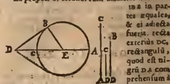
THEOR. II. PROP. XXXVI.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum tangat, altera secet. Rectangulum, quod sub tota secante, & portione exterius inter punctum assumptum, & conuexam peripheriam intercepta comprehenditur, æquale est ei quadrato, quod describitur à tangente.

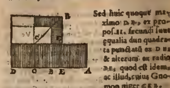
DVos casus hæc propositio enumerat. Nam secans; vel per centrum transit, vel non. Si per centrum transeat, vt est in apposita figura D A

Primus casus erit, & intendit demonstrare rectangulum sub tota D A, & sub portione D C, quę inter peripheriam conuexam, & punctum assumptum mediat, comprehensum nigrum esse æquale quadrato rectę tangenti D B; Quod, vt perficiat, à puncto contactus ad centrum ducit B E, quæ ex 18. tertij perpendicularis erit.

Ex propos. 8. secundi cùm diameter sectus sit in partes æquales, & ei adiecta fuerit recta exteriùs D C, rectangulũ, quod est nigrũ D A comprehensum à tota D A, & adiecta D C, cum quadrato ex dimidia C E nimirum radio, quod est C E, cuius Gnomon niger est æquale quadrato ex D E dimidia, & adiecta confecto, nimirum maximo D E.



Sed huic quoque maximo D E, ex propos. 47. primi sunt æqualia duo quadrata punctatũ ex D B & alterum ex radio B E, quod est idem, ac illud, cuius Gnomon niger C E B.

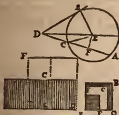


Ergo rectangulum nigrum D A iuncto eodem quadrato C E B, cuius Gnomon niger est, æquale inuenitur istis duobus, punctato nimirum iuncto eodem C E B. Quare, si hoc C E B auferatur ab vtrisque *remanebunt rectangulum nigrum* D A, *& quadratum punctatum ex* D B *tangente æqualea*.

Dicit quoq; hanc propositionem verificari quàuis *recta secans per centrum non transeat*, vt est in seq. figura D A. Nam tota D A, & portio D C exterius intercepta faciet rectangulum æquale quadrato tangentis B D. Vt verò probet. In primis trahit à puncto contactus ad centrum perpendicularem B E, ex 18. huius. Rursusque diuisâ C A bifariam in F, ab eo ducit perpendicularem ad centrum E, ex 3. huius. Deinde ducit radium C E.

Prob. Quadratum punctatum ex D F dimidiã, & adie-

& adiectâ est equale rectangulo nigro ex tota A D, & adiecta D C, comite quadrato ex dimidia C F ex propof. 8. secundi, & addito vtrinque quadrato minimo B E, quadratum B F cum punctato E D, & rectangulum nigrum cum eodem B E, & alio quadrato C F iam sibi comite remanebunt æqualia.



Hęc autem duo quadrata comitantia rectangulum nigrum, vtpote ex cruribus C E, & F B æquantur quadrato ex semidiametro quale est C E B, cuius Gnomon niger, ob rectum angulum F, ex propof. 11. secundi. Ergo possumus substituere hoc pro illis, & sic rectangulum nigrum quadrato hoc B C B comite æquatur quadrato D F punctato, & addito minimo nigro F B.

At hęc duo punctatum, & nigrum minimum æqualia sunt maximo quadrato D B, vtpote facto ex basi, & subtensa angulo recto F, ex prop. 11. secundi. Quamobrem, & rectangulum nigrum comite quadrato B C B ex radio B C nuper substituto æquabitur ipsi maximo B D. Sed & huic idē est æquale quadratum ex tangente D B, & quadratum B C B ex radio B B, ex propof. 11. ob rectum angulum B. Ergo & rectangulo nigro vna cum quadrato B C B erunt æqualia.

Tolle itaque ab vtrisque quadratum B C B ex radio E E, aut B C, quod idem est; *remanebuntque æqualia quadratum* D B, *& rectangulum nigrum ex* D A, *&* D C.

Quod & verificabitur si linea D A non cadat ad alteram partem, sed ad easdem partes, vt in figura secunda videre licet.

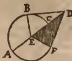
COROLLARIVM I.

HInc manifestatur; Quod si plurimę lineę cadant secantes circulum, omnia rectangula à totis ijs lineis, & earum partibus extra circulum remanentibus inter se esse æqualia; quoniam sunt æqualia omnia vni tangentis alicuius ab eodem puncto exeuntis quadrato.

COROLLARIVM II.

MAnifestum quoq; est tangentes ab eodem puncto ductas inuicem æquales existere. Ratio est; quia omnes lineę, quæ tangunt, faciunt suum quadratum rectangulo alicui secantis æquale; Propterea, & quadrata debebunt esse æqualia. Quare & latera eorum quadratorum æqualia esse debebunt.

COROLLARIVM III.



COnstat quoque ab eodem puncto extra circulum assumpto non, nisi duas, tangentes duci posse: Alioquin; si alia duceretur, aut infra B D, aut supra caderet, & sic ducta B E eius contactum coniungente esset maior, vel minor, quòd esse nequit, & angulus ad B esset maior, vel minor recto, quod, nec esse potest.

COROLLARIVM IV.

COnstat quoque, quòd si duę rectę æquales à quolibet puncto exteriùs assumpto in conuexam peripheriam incidant, & vna earum sit tangens, alteram quoque tangere; Quia si non tangeret, secaret. Quare ad alteram partem punctata tangens duci posset, quę, & esset æqualis tangenti alteri, V. g. D B. Quare in circumferentiam ab eodem puncto incidereut tres æquales contra documenta propof. 22. huius.

THEOR. III. PROP. XXXVII.

Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat. Sit autem, quod sub totâ secante, & exteriùs inter punctum, & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente describitur quadrato, incidens ipsa circulum tanget.

EXtra circulum datum sumatur punctum D, & ex puncto duæ rectæ in circulum cadant, quarū vna secet, & faciat rectangulū sub suo segmento D C, & tota A D comprehensum æquale quadrato ex tota alterius incidentis, V.g. ex B D. Dicit *eam* B D *circulum tangere in* B. Quod, vt demonstretur, ducenda est tangens aliqua, V.g. D F, & coniungenda sunt cum centro punctum contactus huius recta E F, & punctum B incidentię alterius lineę rectâ E B; Et si non transeat secans D A per centrum, ducenda est altera secans, quę per centrum transeat, quę sit D E.

Probatur, Nam triangula album, & nigerū ęqualia sunt lateribus sibi correspondentibus: Quare ex 23. primi anguli B, & B erunt ęquales; Sed angulus F rectus est, ex propof. 20. quod D F circulum tangat. Ergo & angulus B rectus erit, & cōsequēter ex Coroll. prop. 18. D B *circulum tanget*.



Remanet probandum. Quòd triangula latera habeant correspondentia ęqualia. Nam basis D B

communis est, crus B E; & B F radius est: Quare remanet probandum de altero crure D B, & DF, id verò ostenditur. Nam quadratum factum ex D F est æquale rectangulo facto ex tota A D, & segmento exterius inter peripheriam, punctumque assumptum intercepto D C. Sed & huic eidem rectangulo ponitur in propos. hac ex suppositione æquale quadratum ex B D: Sed quadrata æqualia facta sunt ex æqualibus lateribus. Ergo, & latus, crusque D B est æquale cruri D F.

Collige hinc lineam à puncto exterius assumpto per centrum ductam diuidere angulum B D F comprehensum à tangentibus ab eodem puncto nascentibus bifariam. Ratio est, quia probata sunt duo triangula hinc, inde æqualia. Quare, & è conuersò recta diuidens bifariam angulum D B F necessariò per centrum transibit; Quòd si non transiret per centrum alibi transiret. Vnde ducta, quæ transiret per centrum, D E, angulum D B F bifariam diuideret: Est autem impossibile, quòd angulus in duobus locis bifariam diuidatur.





TRACTATVS VII.

In Librum quartum Elementorum. De inscriptione, & circumscriptione figurarum in circulo.

LIBER quartus agit de descriptione figurarum respectiuè ad circulum; licet enim triangula, & quadrara possint sine circulo describi, commodiùs tamen cum reliquis figuris, aut intra circulum, aut circa circulum describuntur. Vsus verò huius Libri pernecessarius est, tum solidis in sphæra inscribendis, & circumscribendis, tum ad comparationem externæ figuræ solidæ, cum interna, ex qua Archimedes soliditatem sphæræ adinuenit, tum ad lineas, chordasque arcuum inueniendas, & tandem ad Militares delineationes fortalitiorum.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam propositiones ipsas aggrediamur aliqua principia, definitionesque ad hunc librum, spetialiter spectantes oportet agnoscere; istæ verò sunt.

DEFINITIO I.

FIgura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm singulæ eius figuræ, quæ inscribitur anguli singula latera eius, in qua inscribitur tangunt.

Cùm debeat agere Euclides de figurarum inscriptionibus, & circumscriptionibus paucis declarat, quid sit figura inscribi, & circumscribi: Quare dicit; quòd, si sit triangulum A B C, cuius vertices omnes angulorum tangant latera alterius, vt tangit triangulum prædictum latera figuræ H F G in punctis A, B, & C; quòd figura tangens in verticibus suis erit inscripta, altera tacta in lateribus vocabitur circumscripta.

DEFINITIO II.

SImiliter etiam figura circumscribi figuræ dicitur cum circumscriptæ latera singula tangunt angulos singulos inscriptæ.

Hæc Definitio est opposita precedenti; definitque circumscriptam H S G, quæ dicitur talis eò quod latera eius tangant angulus A, B, & C alterius inscriptæ.

DEFINITIO III.

FIgura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum figuræ inscriptæ singuli anguli tangunt circuli peripheriam.

Sic triangulum A B C circulo inscribi dicetur; quia extremi apices angulorum C B A eũ tangunt.

DEFINITIO IV.

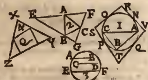
FIgura verò rectilinea circulo circumscribi dicitur; cùm singula eius, quæ circumscribetur, latera tangunt circuli peripheriam.

Sic quadrilaterum R V S T circumscribitur circulo; quia eius latera circulum tangunt in punctis N O P Q, vt fig. 1.

Quare patet; quòd quadratum in triangulo, nec quælibet figura possit inscribi in alia; cùm aliquod latus inscriptæ, est idem cum circumscribentis latere, vt quadratum Q tangit circumscriptam figuram X Z Y: Hanc tamen inscriptionem licet impropriam admittit Clauius in fine Lib. 6. num 16.

DEFINITIO V.

SImiliter circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera figuræ circumscriptæ contingit.



DEFINITIO VI.

CIrculus autem circa figuram rectilineam describi cum circuli peripheria tangit singulos angulos figuræ inscriptæ.

Sic circulus N O P Q erit circumscribens triangulu; quòd apices eius tangat in A B C: At inscriptus quadrilatero R V S T; quòd eius latera tangant in punctis N O P Q.

DEFINITIO VII.

REcta linea circulo accomodari, seu coaptari dicitur; cùm eius extrema in circuli peripheria fuerint.

Ita nec recta A B, nec C D est coaptata circulo; quòd eius duo extrema non tangant circulum;

lum; sed solùm F F; quòd eius duo extrema circulum tangant, & in circulo sint vt fig. 3.

LEMMA PROBLEMATICVM PROP. I.

In dato circulo rectam lineam accomodare, quæ circuli diametro non sit maior.

COaptanda sit in circulo A B D recta æqualis rectę B, quæ esse debet nō maior diametro; quia diameter est maxima linearum, quæ in circulo capere possunt, vt docuit 17. propos. tertij. Ducatur itaque diameter A C D. Et si fuerit diametro æqualis data B, factum erit quod quæritur. Nam coaptatus, & accomodatus diameter ęqualis rectæ est. Si verò B minor fuerit; Ex diametro abscindatur ei æqualis, vt A C, & centro A, interuallo verò C, circulus punctatus describatur secans circulum priorem B; *Nam ducta recta* A B *accomodata circulo* A B D *æqualis erit data* B.

Probatur, quia est ęqualis, ipsi portioni diametri A C, quàm detruncauimus; sunt enim & A C, & A B radij, & semidiametri.

EXPENSIO II.

De mutua circuli, & trianguli inscriptione, & circumscriptione.

HÆc Expensio vtilis admodum est pręcipuè quod 5. propos. aperuerit istuam, datis tribus punctis peripheriam, quæ transit per illa, inueniendi; & data portione circuli centrum reperiendi, quæ iucundo immensos vsus habet.

PROBL. I. PROP. II.

In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIt describendum in circulo A D E triangulum A E D æquiangulum dato triangulo cuicumq; V. g. V S R.

Ducatur rectą tangens circulum in A, quę sit C B, & à puncto A contactus recta ducatur A D faciens angulum nigerrimum apud A cum tangēte æqualem angulo S; ducatur quoque alia ab eodem puncto contactus, quę sit A E, quę faciat cum tangente angulum nigrum æqualem angulo R, coniungaturque E D; *Eritque triangulum constitutum æquiangulum triangulo* V S R.

Dices. Lineas A E, & A D posse cadere vnā super aliam, aut vnā vltra aliam; itant non cadat in E; sed ad alteram partem, V. g. F. Respondetur enim id non posse euenire. Quia duo anguli nigerrimus, & niger sunt minores duobus rectis, quod sint æquales duobus angulis R, & S, qui in quocumque triangulo sunt minores duobus rectis, cum omnes tres anguli sint æquales duobus rectis, ex propos. 17. primi. Deberent autem esse duobus rectis æquales, si vna linea caderet super aliam, ex propos. 10. primi, quia tunc insisteret tangenti C B, quamobrem maiores esse quoque deberent, si altera, V. g. A E in alteram partem transiret, puta inter A C, & A D in F. Soluto hoc scrupulo, propositio

Probatur. Quę sunt æqualia vni tertio, sunt æqualia inuicem. Sed angulus S ex constructione est æqualis angulo nigerrimo apud A, & eidem nigerrimo est quoque æqualis angulus albus E in alterno segmento A E D, ex prop. 29 Lib. 3. Ergo inter se angulus S, & E erunt æquales.

Eodem modo angulo nigro apud A est æqualis ex constructione angulus R, eidemque nigro apud A est æqualis angulus apud D in segmēto A F D B alterno, ergo R, & D anguli inter se erunt æquales.

Sed insuper anguli trianguli cuiuscumq; sunt æquales duobus rectis. Quare etiam horum duorum triangulorum A E D, & V S R anguli duobus rectis æquabuntur. Ablatis itaque à quolibet duobus æqualibus, à dato V R S angulis R, & S & ab inscripto A E D angulis E, & D correspondenter æqualibus, reliqui albus apud A, & V erunt inuicem æquales. Quamobrem omnes anguli A, E, & D trianguli inscripti erunt æquales omnibus angulis V, S, & R trianguli dati, prout oportebat ostendere.

PROBL. II. PROP. III.

Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIt datum triangulum nigrum, & circulus B A N; oporteatque circa hunc circulum describere triangulum æquiangulum triangulo nigro dato.

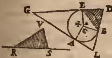
Prolungetur basis R S, vt euaniant duo anguli exteriores albi R, & S. Repertoque iuxta 1. prop. tertij centro C, ducatur vtcumque recta B C; Et deinde alia, nempe A C è centro C educatur; quæ cùm primo ducta capiat angulum ad cētrum cruce notatum æqualem angulo externo albo R dati trianguli nigri. Rursusque alia ducta C B eum hac alium angulum C efficiat ad centrum æqualem alteri angulo exteriori albo dati trianguli nigri ad S. Quibus tribus semidiametris ducantur perpendiculares, quę ex Coroll. propos. 18. tertij erunt quoque tangentes, quę productę conuenient inuicem in punctis G, D, L, & constituent *triangulum* G D L *circumscriptum dato triangulo nigro* æquiangulum.

Dices Lineas G B, & L B non coituras in D.

Respondetur enim spatium ad centrum clausum rectis C B, & C A stellula notatum esse angulum, & consequenter tractam rectam punctatam F E. (Debet enim, si sic videbitur, trahi) incidentem in dictas rectas G B, & L D facere angulos ad B, & E nigros minores duobus rectis; cū radij C B, & C E angulos rectos constituant ijs maiores, vt videas. Quare ex def. 12. primi necessariò conuenient in D lineę G B, & B L; quod idem poterit ostendi de linea B A, & B D. Quæ conuenient in L, propter quod spatium C ad centrum sit angulus ex constructione, & de linea L A, & D E; quę conueniet in G; quòd spatiū cruce signatū ex costructione angulus factus fuerit.

Quod

Quod verò etiam spatium stellula notatum angulus sit, quod præsupposui, sic ostenditur. Nam Coroll. 2. propos. 32. primi, totum spatium circa centrum, quod litera C, cruce, stellula notatum est, quatuor rectis æquale est. Item anguli ad R albus externus, nigerque internus sunt æquales duobus rectis, ex propos. 13. sicut & anguli ad S externus albus, & internus niger sunt æquales duobus rectis, qui duo, & duo simul sunt quatuor. Quamobrem, cùm angulus ad centrum cruce signatus, & alius litera C notatus facti sint æquales albis, & externis ad S, & R; spatium stellula notatum erit æquale duobus nigris internis ad S, & R. Sed illi duo interni sunt minores, ex prop. 17. duobus rectis; Ergo & spatium stellula notatum minus erit duobus rectis. Quare lineæ E C, & C B à puncto centri ductæ non erunt in directum, ex propos. 14. primi; Sed facient angulum, & quidem non versus crucem. vel C illi enim anguli maiores sunt duobus rectis. Quare angulum efficient versus stellulam lineis E C, & C B conclusum.



Probatur modò. Quòd hoc triangulum sit æquiangulum. Nam quadrilineum G E A C, quatuor angulos habet æquales 4. rectis vt 17. pr.. Quare ablatis duobus rectis A; & E per imaginationem, reliqui duo remanebunt duobus rectis æquales. Sed & anguli dati trianguli ad R externus albus internus niger sunt duobus rectis æquales; Ergo erunt æquales inuicem simul sumpti. Sed angulus cruce notatus est æqualis, quòd ita fecerimus angulo externo ad R dati trianguli; Ergo oppositus G erit æqualis nigro ad R interno. Eodem modo probabitur de angulo L; quòd sit æqualis angulo nigro ad S.

Sed omnes anguli cuiuscumque trianguli sunt duobus rectis æquales. Ergo, cùm duo interni S, & R sint æquales duobus G, & L; *Reliquus* D *circumscripti* angulo reliquo V dati trianguli remanebit æqualis. *Quare anguli* G L D *æquabuntur angulis* R V S. Quod, &c.

PROBL. III. PROP. IV.

In dato triangulo Circulum describere.

SIt describendus Circulus in dato triangulo A B C. Diuidantur per punctatas A V, V B duo quilibet anguli bifariam angulus A, & angulus B, & à puncto V, in quo se intersecent punctatæ ducantur rectæ lateribus perpendiculares, quæ sint V T, & V S, V R. Quæ probabuntur æquales. Vnde per earũ extrema tamquam semidiametrorum poterit peripheria transire S T R.



Probatur itaque lineas perpendiculares ad lateres V R, & V S, primò esse æquales. Anguli ad A albus, & niger per diuisionem, quam linea punctata facit, sunt æquales, angulus quoque niger R, & niger S sunt æquales; cum recti sint, basis vero A V eadem in vtrisque triangulis nigro, & semialbo.

Sed si duo triangula habeant duos angulos æquales insuper, & alios duos item æquales, latusq; aliquod æquale, æqualia quoque esse, quoad reliquos angulos, & latera ex propos. 26. primi constat.

Ergo latera V R, & V S æqualia erunt inuicem. Idemque demonstrabitur de V R, & V T. Quare tres lineæ S V, & T V, & R V erunt æquales; poteruntq; deseruire pro semidiametris, & V in quo conueniunt pro centro. Quare descriptus ex V circulus tanget puncta S T R laterum trianguli. Vnde triangulo erit inscriptus.

COROLLARIVM I.

COllige ex Io. Baptista Benedicto duo latera superare reliquum lineis, & segmentis suis tangentibus circulum v. g. duo latera C B, & A C, alterum A B superare segmentis tangentibus C T, & C S. Nam demonstratum est basim A R esse æqualem basi A S ob æqualitatem suorum triangulorũ, & quia sunt tangentes, vt ex Corol. 2. prop. 36. tertij, & idem dicas de basi T B, & B R. Quare hæc duo segmẽta A S, & A T reliquum eius A B integrabunt, & residua remanebunt, quibus excedunt S C, & C T, quæ etiam sunt tangentes, & consequenter æquales, & si angulus C rectus esset, quod hic non est, æquales etiam semidiametris S V, & V T.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque quòd, cùm segmenta excessus huius C S, & C T sint tangentes; eorum quadratum, si quodlibet segmentum sumatur seorsim, erit æquale ex propos. 36. tertij rectangulo facto, & tota secante C 4. & segmento extra circulum remanente C 3. etiamsi C 4 transiret per centrum. Quare sequitur quoque si super duo segmenta excessus, tamquam vna linea fiat quadratum. Illud sit eidem rectangulo quadruplum: Quoniam est quadruplum quadrati ex vnico segmento facti vt colleg. ad propos. 6. secundi. Quod si angulus C rectus sit, erit hoc quadratum ex duobus segmentis factum æquale quadrato ex diametro descripto. Quoniam hæc duo segmenta ei diametro æquantur ea ratione, vt dixi in primo Corol. quod æquantur duobus semidiametris.

PROBL. IV. PROPOS. V.

Circa datum triangulum circulum describere.

SIt triangulum A B, & B C, circa quod debeat circulus duci. Diuidantur bifariam quælibet duo eius latera, & (non quod sit necessarium, sed facilitatis gratia) assumantur duo latera, quæ maiorem angulum claudant, vt A B, & B C, & punctisque diuisionis duæ perpendiculares excitentur V R, & R Q quæ conuenient in V vt patet, si duceretur recta ab V in Q. Nam facerent, cùm punctatis perpendicularibus angulos minores rectis. Quare ex prop. 28. pr. conuenient. Coniungantur itaque vertices trianguli rectis A R, & B R, &

BR, & CR. *Nam cum hæ fiat omnes æquales poterunt deseruire p o semidiametris peripheria* ABC, *& punctum* R *pro centro. Pro circulo circa vertices extremos trianguli* ABC *transeunte.*

Probandum itaque primò est; quod rectæ AR, & RB sint æquales.



Triangula nigrum, & album sunt æqualia. Quare, & bases AR, & BR erunt æquales. Quòd vero triangula sint æqualia, probatur. Nam vnum eius AF nempe albi est æquale alteri FB nigro sibi correspondenti. Crus autem FR punctum commune. Anguli quoq; ad F niger, & albus æquales, eo quod recti. Ergo ex propos. 4. primi tota triangula nigrum nempe, & album erunt æqualia.

Probatur deinde, quòd etiam linea RC sit æqualis lineæ RB, & ideo æqualis quoque lineæ RA Quoniã triangula RBQ, & RQC habent crus BQ, & QC; æqualia; crus verò RQ commune angulosque ad Q rectos. Vnde bases subtensæ RB, & RC erunt æquales. *Et sic circulus centro* R *per* ABC *transibit*, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Hinc elicitur. Quod si cẽtrũ intra triangulũ cadat, omnes anguli triãguli dati sint acuti. Quia sunt in maiori circuli segmento. Si verò centrum cadat in aliquo laterum angulum oppositum huic lateri esse rectum. Quod fit in semicirculo, & latus in quo centrũ fit diameter. Si verò cadat intra triãgulũ, angulũ lateri, cui cẽtrũ prope, est oppositũ, esse obtusũ; quia est in minori segmento, quæ omnia patent ex propos. 28. l. 3.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque sequitur, id quod supra diximus propos. 11. l. 3. quomodo datis tribus punctis non in directum positis inueniatur circumferentia, quæ transeat per ea puncta: nam si cogites apices trianguli ABC esse tria puncta data, & ea iunges lateribus BC, & BA, & cætera præstes vt in propos. propositum exequeris, & eadem probatio militabit. Vide quæ citata prop. 11. l. 3. diximus.

EXPENSIO III.

De mutua quadrati, & circuli inscriptione, & circumscriptione.

Sicut facilis est hæc quæstio, ita non admodum vtilitatibus abundat: vnde in illa immorandum non est.

PROBL. I. PROPOS. VI.

In dato circulo quadratum describere.

Sit datus circulus ABCD, cuius centrum T, in quo describendum sit quadratum. Ducantur duo diametri secantes se ad angulos rectos AC, & BD iunganturque extrema eorum quatuor lineis, vt AB, & BC, & CD, & DA, *facietque quadratum in dicto circulo inscriptum.*

Probatur triangula alba, & nigra sunt æqualia ex 4. propos. primi propter æqualitatem laterũ, qui sunt semidiametri, & angulorum ad centrum T albi, & nigri æqualitatem cum omnes fecerimus rectos; quare, & bases BA, & AD, sic BC, & CD erunt æquales.

Aut breuiùs anguli ad centrum sunt omnes æquales. Quare ex 26. tertij arcus quibus insistunt, & subtensæ ijs erunt æquales. Insuper, & anguli omnes A, & B, & C, & D sunt æquales; cum sint in semicirculis. Ergo figura ABCD erit quadratum.

PROB. II. PROPOS. VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

In circulo ducantur duo diametri ad rectos angulos AB, & CD; ad quorum extrema ducantur perpendiculares OG, & GP, & PQ; & QO, quæ conuenient in quatuor punctis, *& constituent quadratum* OGQP *circumscriptum circulo* ACBD.

Probatur latera postremò tracta sunt lineæ perpendiculares diametris, pro vt fecimus, fienti, & illi sibi inuicem sunt perpendiculares. Quare latera erunt diametris parallela ex 28. primi, cum anguli interni v. g. nigri R, & D sint recti. Propterea ex prop. 31 inuicem quoq; erunt parallela hæc latera, & spatium nigrum; erit parallelogramum sicut, & album.

Sed omne parallelogramum ex propos. 34. primi habet angulos oppositos æquales: Ergo anguli O, & C nigri Q, & P albi sunt recti: Quoniam anguli oppositi nigri ad C, & D, ac albi ad D, & C eis oppositi sunt recti. Insuper ex eadem propos. & latera opposita æqualia. Quare latera OC, & QP, sicut vt OQ, & CP æqualia erunt diametris, & ideo inter se. Vnde figura OGQP erit quadratum circulo circumscriptum.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

In dato quadrato circulum describere.

Sit quadratum RQST, in quo necesse sit describere circulum. Diuidantur singula latera bifariam in ADCB, rectæque ducantur AB, & CD Et vbi se decussant in V fiat centrum interuallo, vt placet v. g. VB. *Nam circulus transibit per omnia alia puncta* D, A, C *ea lambendo.*

Probatur quoniam VB lineæ VA, VC, & VD sunt æquales: Ergo pro diametris deseruire possunt. Quod verò sint æquales, patet, sunt enim inter parallelas æquales, & simul sunt parallelæ æqualium, cùm de medietate in medietatem ductæ



fint

sint: Quapropter sicut sunt æquales dimidio laterum, ita erunt æquales inter se. Nam ex propos. 33. primi, quæ pararellas, & æquales ad easdem partes coniungunt, inter se æquales, & paralleleæ sunt.

PROB. IV. PROPOS. IX.

Circa datum quadratum circulum describere

TRahantur in quadrato dato A B C D duo diametri ad angulos rectos, A D, & B C: Et puncto M, in quo se secant facto centro intervallo M C ducatur circulus. Iste enim per vertices B, & A, & D, transibit, & ideo erit circa datum quadratum, circulus circumscriptus.



Probatur Angulus B A C rectus, & latera B A, & A C æqualis. Ergo anguli ad basim B, & C æquales in triangulo B A C. Ideo semirecti ex propos. 17 Cor. 3. primi. Idem ostendetur de alijs angulis B A M, &c. Quaderè lineæ B M, & M C, sicut, & A M, & M D erunt æquales, vtpote bases æqualium angulorum habentium anguloe æquales, nimirum semirectus: Ergo centro M circulus ductus per A B C D vertices transibit: Vnde erit circumscriptus circulus quadrato B A C D.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quadratum circumscriptũ esse duplum quadrati inscripti; Eo quod latera inscripti sint diagonales quatuor quadratorum, in quæ diuisum est circumscriptum punctarum. Vnde illa ex prop. 34. lib. 1. diuidunt bifariam. Cum ergo quadratum inscriptum occupet quatuor medietates circumscripti solummodo: Circumscriptum erit quatuor medietatibus maius, Propterea erit duplum.

EXPENSIO IV.

De Pentagoni, circuliq; mutua inscriptione, & circumscriptione.

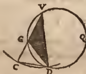
DIfficilior est hæc quæstio, quam precedens: sed cum maiori vtilitate coniuncta est, siquidem fundamentum est Icosaedri sphera inscribendi, & inueniendi chordas, quamplurimas, vt suo loco docebimus, in trigonometria necessarias.

LEMMA. PROPOS. X.

Isosceles triangulum constituere, quod habeat vtrumque eorum, quæ ad basim sunt, angulorum duplum reliqui.

LInea quæcumque mediâ, & extremâ ratione secetur, vt docet 15. prop. secundi; ita vt rectangulum sub segmento, & tota cõprehensum C O, & C V æquale sit quadrato ex maiori segmento facto, nimirum C V. In hoc itaque extremo maioris segmenti V facto centro describatur circulus ad interuallum totius V C, & ab extremo C accomodetur in hoc circulo æqualis linea maiori segmento V O, quæ sit C D coniunganturq; extrema V, & D recta V D. Factumque erit *triangulũ, cuius duo anguli ad basim C, & D reliquo V ei insistenti erunt duplicia.* Quod reposcit propositio.

Quod vt ostendatur ducenda est D O puncta-ta, & per tris puncta V nimirum O, & D ducendus est circulus, ex 5. propos. huius.



Probatur anguli ad basim C, & D in omni triangulo æquicruro sunt æquales ex 4. propos. primi, Sed vnus ex istis, nimirum D est duplus anguli V. Ergo, & alter.

Probatur minor. Quod D sit duplus anguli V. Siquidem angulus V est æqualis parti albæ anguli D. Sed pars alba est medietas anguli totius D: Ergo angulus V est minor dimidiò angulo toto, vtpote eius medietati æqualis.

Si negea maiorem propositionem. Nempe angulũ V esse æqualem parti albæ D anguli; ita ostendetur.

Linea C D tangens est. Quare angulus albus ad D à tangente C D, & secante O D factus ex propos. 29. tertij equabitur angulo V. alterni segmenti O V Q D (siquidem D O peripheria remanet pro alio segmento) Quare erit equalis ei. Quod verò C D tangens sit, non est dubitandum ex propos. 37. tertij. Quoniam rectangulum sub tota secante V C, & segmento exterius assumpto O C est equale quadrato facto, ex C D. Nam D C fecimus equalem lineæ O V, quæ talis est, vt eius quadratum sit equale rectangulo sub tota V C, & portione C O comprehensum.

Si vero negea minorem, nimirum albam partem esse medietatem totius anguli D.

Probatur. Triangulum nigrum est equicrurum; Ergo anguli nigri V, & D ad basim sunt equales. Sed angulus ad D albus est equalis angulo V, vt diximus. Ergo est medietas totius anguli D, & pars nigra alia medietas: Cùm tùm pars alba, tum nigra anguli D ipsi angulo V equentur, & ideo inter se.

Quod verò triangulum nigrum sit equicrurum; probatur: Angulus C est equalis angulo D, vt diximus, ãgulus D est equalis suę parti nigrę & angulo nigro V, vt probauimus. Sed angulus albus O vtpote exterior, est equalis ex propos. 17. primi istis duobus nigris interioribus, & oppositis ad V, & ad D. Ergo est etiam equalis angulo C quamobrem ex prop. 15. primi, angulus C, & angulus O, tanquam equales, habebunt bases equales C D, & O D. Sed C D est equalis cruri V O ex effectione; Ergo, & O D erit eius eidem equale.

COROLLARIVM

QVare si partiamur duos rectos angulos in 10. partes angulus v duas partes sibi vsurpabit. Reliqui verò ad basim quilibet ex eis continebit quatuor partes. Quia omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, ex prop. 17. primi. Quare cum c, & d ad basim contineant duplum, vt ostensum est; si angulus ad A assumat duas partes; reliqui, vt 10. partes duorum rectorum compleant, quilibet quatuor partes sibi vsurpare debebit.

PROB. I, PROP. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

AD describendum in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum construatur triangulum Isosceles R Q P habens duos angulos ad basim duplos reliqui iuxta præcedentem propos. & in circulo A B C D F dato triangulum fiat habens angulos omnes ei æquales, vt ex propos. 2. huius efficere potes, & secundum documenta propos. 4. primi diuide angulos C, & D bifariã rectis CF, & DB coniungeque puncta rectis A B, & B C, & rursus alia rectis A F, & F D. *Eritq; hæc figura pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.*

Pars 1. Probatur, nempe quod sit æquilaterum. Duæ partes anguli D nigra, & nigerrima, sicut, & aliæ duæ anguli C nigra, & nigerrima sunt æquales nigro angulo ad A: Siquidem ambæ sumptæ simul duplæ ei sunt. Ergo ex propos. 26. tertij, & arcus, super quos insistunt. Vnde, & rectæ hos arcus subtendentes, nempe latera pentagoni A B, & B C & cæt. sunt inuicem æquales.

Probatur 2. Pars de angulis. Nam æqualibus quoque perispherijs insistunt. Ergo ex propos. 27. tertij inter se sunt æquales. v. g. angulus pentagoni A clausus lateribus A B, & A F insistit perispheriæ constanti tribus partibus F D, & D C, & C B, quæ est æqualis perispheriæ ABCD; cui insistit angulus pentagoni F quoniam æqualibus circuli portionibus A B, B C, D C, vt dictum est in prob. primæ partis insistit,

COROLLARIVM I.

COlligitur angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti sex partes ex decem, in quas duo anguli recti diuiderentur. Nam tres anguli ad D niger nigerrimus, & albus æquales sunt inuicem, vt æqualibus arcubus insistentes. Quare cum ex coroll. propos. præced. duo nigerrimus, & niger quatuor ex decem partibus occupent, albus additus duas superaddet, vt fiant sex: vnde totus sex partes occupabit, in quas anguli duo recti diuiderentur.

COROLLARIVM II.

SI quis tamen velit construere pentagonum facilius super datam rectam AB; diuidatur, vt superius in C iuxta documenta propos. 15. secundi, deinde prolongetur, & sit ista additio æqualis maiori segmento A C, ita vt punctatæ additæ ei sint æquales; Interuallo denique datæ AB facto centro in punctis extremis Q, & P, duo arcus describantur; qui se intersecent in R. sic eodem interuallo facto centro in A, & P duo alij arcus se intersecent in S; factoque centro in ijs intersectionibus R, & S eodem interuallo manente describantur duo alij arcus, qui se intersecent in T; coniunganturque rectis puncta intersectionum T, S, R, B, & A. Eritque constitutum pentagonum.

Quod erit quidem æquilaterum, eo quod omnia latera sint protracta eodem interuallo B A, Insuper, cum duo trianguli A P S, & Q R B sint æquicrura, & A P, vel Q B basis sit maius segmentum iuxta 10. propos. huius angulus P, V. g. continebit duplum, quam angulus S. Quare angulus exterior A, albus, qui est pentagoni continebit ex propos. 17. primi duos internos, & oppositos S P. Propterea continebit 6. partes ex decem, in quas duo recti diuisi essent, quibus 6. partibus æquantur, vt in corolli dictum est, duo anguli P, & S. Quare A angulus erit angulus pentagoni. Et si hic est, reliqui quoq; erunt, quod debeant istis æquales esse. Nam si non essent, possent fieri; Et si fierent, latera eorum, vel caderent supra, vel infra lineas R T, & T S. Quamobrem, ex propos. 21. primi, essent maiora, vel minora lineis R T, & T S: Vnde deinde pentagonum non esset æquilaterum.

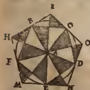
PROB. II. PROPOS. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

NOn potest circumscribi circulo pentagonum; Nisi priùs in eo inscribatur: Quare dato circulo C E B D, in quo sit, ex antecedenti propos. inscriptum pentagonum, poterit deinde circa illum ita pentagonum circumscribi.

Reperto eius centro A ad angulos pentagoni ducantur semidiametri AB, AC, AE, AD &c, A F, & eis ducantur perpendiculares circulum tangentes. Nam hæ productæ hinc inde se mutuò occurrent ex defin. 18. primi, cum anguli albus F & niger E, &c. sint rectis minores, quos facit linea V. g. F A incidens in duas H L, & H M, & sic de cæteris, *Quæ de re constituent pentagonum requisitum æquilaterum, & æquiangulum*; vt autem id probetur ducendæ sunt rectæ à centro ad puncta H, & L, &c. in quæ postremò ductæ conueniunt. Pro-

Probatur itaq; prima pars, quòd sit æquilaterum. Nam quadratum factum super AH est ex prop. 11. l. 2. æquale duobus quadratis factis ex FA, & FH; similiter quadratis AB, & HB propter angulos rectos nimirum B, & F semialbos. Sed quadrata semidiametrorum BA, & FA sunt æqualia inuicem. Ergo, & quadrata ex HB, & HF, & consequenter ipsę quoque lineæ BH, & HF. Et hoc pro prima parte probationis.



Nam modo ostendendum est, has lineas BH, & HF esse medietates laterum, quorum portiones sunt, & consequenter omnia latera HL, & HM, & cętera esse æqualia, vtpote ex medietatibus æqualibus confecta.

Triangula tota semínigra HBA, & HFA habent æqualia latera, quæ sibi correspondent, ergo ex prop. 8. primi, & anguli correspondentes ęquales sunt. Ideo anguli in eis albus, & niger ad centrum A erunt æquales, sicut, & anguli albus, & niger ad H, & sic in omnibus alijs. Angulus autem ad centrum A totus albi, nigrâque portione integratus est ex propos. 27. l. 3. ęqualis omnibus quatuor alijs ad centrum; cum insistant æqualibus basibus, & peripherijs FB, & BC, & cæt. pentagoni inscripti. Quare, & eorum portiones inuicem ęquales tum nigræ, tum albæ erunt. Propteresque angulus V. g. ad centrum HAF niger, qui probatus est æqualis angulo albo ad centrum HAB, est ęqualis etiam angulo albo ad centrum FAM. Sed anguli quoque ad F in triangulis HFA, & MFA, vtpote recti à radiintangente quæ effecti sunt ęquales; radiusque AF est crus commune ambobus triangulis adiacens. Ergo ex propos. 27. primi, etiam latus HF erit ęquale lateri FM.

Idem quoq; argumentum valebit in triangulo BLA, cuius latus BL erit ęquale lateri BH. Quare totum latus HL erit ęquale toti HM; Sicq; probabitur de alijs successiuè. quapropter pentagonum circumscriptum erit ęquilaterum.

Probatur quoq; esse ęquales angulos. Ablatis ęqualibus, quę remanēt, sunt ęqualia: sed in triangulis quibuscunque HFA, & FAM, & cęt. omnes anguli ad centrum A tum albi, tum nigri ostensi sunt ęquales in probatione primę partis. Anguli quoque F, & B, & C facti à radio AF tangenteque FM, & cęt. sunt recti, & ideo æquales: ergo ablatis istis, reliqui ad M, H, &c. tum albi, tum nigri sunt ęquales. Quoniam omnes trianguli tres anguli sunt inuicem ęquales, cùm omnes ex prop. 17. pr. sint duobus rectis ęquales, Et ideo cum omnes anguli H, & L, & O, &c. sint compositi ex medietatibus albis, nigrisque ęqualibus, omnes inuicem erunt ęquales.

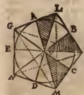
COROLLARIVM.

SEquitur hinc illud. Si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula descripta sit, & semidiametri de centro ad angulos singulos protrahantur, hisque perpendiculares ducantur circulum tangentes describi figuram similem inscriptæ æquilateram, & ęquiangulam. Siquidem probabitur ductis ad earum mutuum concursum à centro rectis, vt in pentagono factum est eius angulos, & latera inter se esse æqualia.

PROB. III. PROPOS. XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere.

* PEntagoni dati duo latera bifariam diuidantur in A, & B, & à punctis perpendiculares rectę trahantur, quæ se mutuo intersecabunt in V. Ibi ergo facto centro, si vsque ad intercapedinē perpēdicularium V. g. VB, extendatur interuallum, & describatur eo interuallo circulus: Is circulus erit inscriptus, & tanget latera in punctis ABCDE.



Quod vt probetur cæteræ quoq; à dimidijs lateribus C, D, E ducendæ ad centrum, vt CV, DV, & deinde ad angulos GV, & VL, &c. Et rursus punctatæ GH, & LM, &c.

Pro probatione obseruandum est, nos hic adibuisse eandem regulam: quam supra dedimus propos. 5. huius ad circumscribendum circulum triangulo, velut triangulo GLH. Ideoque tres ductę OV, & VL, & VH erunt ex probatione propos. 5. æquales. Latera quoque AL, & BH sunt æqualia, vtpote dimidia æqualium laterum pentagoni, anguli vero adiacentes nigri A, & B æquales, quòd recti sint: Ergo triangula nigra ALV, & VHB erunt æqualia ex propos. 32. lib. 1. & crus VA cruri VB.

Idem argumentum valebit in triangulo LHM. Quare VC erit æqualis lineæ VB, & consequenter æqualis, vt ostensum est lineæ VA, Idem quæ argumentum in alijs vrgebit. Cum ergo omnes lineę, quas fecimus perpendiculares, nimirum VD, & VE, & prædictæ inuicem sint æquales poterit fieri centrum in V, & interuallo vna earum V. g. VB circulus circumduci, qui lambat puncta ABCDE.

COROLLARIVM I.

* COllige primò: quomodo etiam circulus possit circūscribi. Nam cum ex 5. prop. lineę VG, & VL, & VH sint æquales ad apices trianguli GLH ductę, & eadem ratione MV, & HV, & VL ductę ad apices trianguli LHM, sequitur; vt omnes sint æquales, & consequenter; quòd facto centro in V interuallo vna earum V. g. VH transeat circulus ductus per vertices L, H, & alios.

COROLLARIVM II.

* COlligitur secundo hoc valere, ne dum in pentagono; sed etiam in qualibet alia figurâ ęquilaterâ, & ęquiangulâ; quod valeat idem argumentum in omnibus facta eadem operatione ob latera ęqualia, & angulos ęquales, quę con-

constituunt omnia triangula, in quę per operationem diuiditur, ęqualis.

PROB. IV. PROPOS. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

INspice figuram præcedentis propositionis. Si reperiatur pentagonum, circa quod necesse sit describere circulum. Diuidemus omnes eius angulos bifariam rectis H V, & M V, &c. quas dicimus futuras esse æquales. *Quare facto centro in V interuallo V H poterit describi circulus, qui transiens per apices H, L, G, N, M, pentagonum circumscribet.*

Probatur vero, quod O V, & cæteræ ductæ debeant esse æquales alio modo, ac in coroll. præcedenti. Nam anguli niger ad L est æqualis nigro ad H; cùm sit dimidium æqualium angulorum pentagoni, angulus verò A, & B sunt recti; Crus autem A L cruri A H æquale cum sint dimidium æqualium laterum: Ergo ex propos. 27. lib. 1. triangula ad A, & B nigra æqualia erunt, & erit L V æquale eius cruri V H. Idem dicetur de triangulo nigro V M C, quod erit æquale eadem ratione triangulo V B H, & crus V M cruri V H, & ideo cruri V L, & sic de alijs N V, & O V: cum ergo sint omnes æquales V L, &c. ad angulos pentagoni pertingentes, circulus per earum extrema duci poterit.

COROLLARIVM

HInc elicies idem valere in qualibet alia figura æquilatera, & æquiangula. Vnde eadem arte circa eam circulus describetur.

EXPENSIO V.

De Exagoni, & Quindecagoni in circulo inscriptione.

CIrcumscriptionem exagoni circulo, & circuli inscriptionem, & circumscriptionem prętermitit Euclides, & per accidens agit de quindecagono, vtpote de figura consurgente, ex triangulo æquilatero, & Pẽtagono: de alijs autem figuris plurium laterum non agit: Nam quæ vtiles sunt, ex prædictis facile colliguntur; quæ vero difficiles, aut fortè inuentu impossibiles, aut inutiles, vt figura septem laterum, prætermittuntur; sed de istis cum de sinubus ampliora agemus: sufficit Euclidi rudimenta primarum figurarum tradere.

PROB. I. PROPOS. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

OPorteat in dato circulo hexagonum describere. Ducto diametro A B eodem interuallo, quo descriptus est circulus facto centro in circumferentia in a portio circuli ducatur, quæ in C, & E circumferentiam secet, à quibus punctis per centrum transeuntes duo diametri ducantur. *Si ergo extrema horum diametrorum rectis coniungas, vt sunt E E, & E C, &c. erit hexagonum inscriptum æquiangulum, & æquilaterum.*



Prob. Primo, quod omnia latera sint æqualia. Tres anguli nigri ad Q centrum, ab insistentibus Q E, & Q B super diametrum C G effecti, sunt inuicem æquales. Ergo ex propos. 26. tertij circumferentię, quibus insistunt sunt inuicem æquales: Vnde ex propos. 33. tertij subtentæ C B, & B E, & E G sunt inuicem æquales. Sed istis, quælibet suæ oppositæ, lineæ A G, & A H, & H C sunt æquales. Ergo omnes æquales, & æquilaterum est hexagonum. Id autem ostenditur, quia insistunt arcubus æqualibus. Et arcus ęquales sunt. Quia super eos ascendunt anguli tres albi ad centrum Q æquales, Sunt autem æquales: Quia ęqualibus nigris æquantur, quilibet suo, cui est ad verticem ex prop. 15. primi. Remanet itaque ostendendum, quod tres anguli nigri ęquales sint. Id autem

Probatur. Nam sunt facti super diametrum C G ab insistentibus Q B, & Q E, & ideo ex propos. 13. primi æquantur omnes duobus rectis, sed duo ex istis nimirum ✠ notati quilibet occupat tertiam partem duorum rectorum, ergo tertius reliquus tertiam partem reliquam, quare omnes æquales erunt.

Quod verò duo cruce insigniti tertiam partem duorum rectorum occupent ostenditur. Quia quodlibet triangulum C Q B, nempe, & B Q E est æquilaterum, vtpote quorum latera sunt semidiametri. Ideoque ex propos. 14. primi, & æquiangulum. Sed omnes tres anguli cuiuscunq; trianguli sunt duobus rectis æquales; Ergo quilibet angulus tertiam partem duorum rectorum occupabit, & sic anguli cruce notati quilibet erit tertia pars duorum rectorum.

COROLLARIVM I.

HInc manifestum est hexagoni latus æquale esse semidiametro. Nam C B latus est semidiameter circuli C Q E; & ideo æquale semidiametro Q B.

COROLLARIVM II.

COllige quomodo possit inscribi triangulum æquilaterum, & æquiangulum in dato circulo. Nam si coniungas vertices C, A, E, id erit factum; erit enim æqualis quilibet angulus, & latus. Quia circunferentijs æqualibus ille insistit, hoc subtenditur, vt sunt C B E, & E G A, &c.

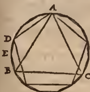
PROB.

PROB. II. PROPOS. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

Describatur in circulo triangulum æquilaterum, & æquiangulum ABC, vel ex Coroll. præcedenti, vel ex 2. huius propos.

Rursusque describatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex propos. 11. huius applicando eius angulum aliquem vertici trianguli cui placuerit, V. g. A. Deinde arcus interceptus inter primum latus pentagoni incipiendo ab A, & primum latus trianguli, nempe inter AD, & AB, qui est arcus BD, diuidatur in duas partes æquales. Ducanturque rectæ DE, & EB, & *duo latera quindecagoni habebimus; quorum alios 13. capiet circumferentia, vt 15. latera compleantur.*



Probatur tres arcus, quibus anguli trianguli insistunt, vel quibus latera æqualia subtenduntur, ex propos. 26. vel 32. tertij sunt æquales. Ergo si circumferentia tota sit diuisa in quindecim partes quilibet arcus, vt AB quinque earum comprehendet, vtpote eius tertia pars.

Sed, & arcus quibus quinque latera pentagoni subtenduntur sunt æquales, ergo ex iisdem partibus 15. tres quilibet arcus comprehendet, vtpote quinta pars totius circuli; quapropter arcus AD tres partes totius peripheriæ continebit, at AE quinque. Vnde arcus AB intermedius duas continebit. Quare eius medietas vna ex quindecim partibus erit. Recta, itaque DE subtendet decimam quintam partem totius circumferentiæ. Propterea que cęterę quoque applicatę quęlibet decimam quintam partem subtēdet, & anguli omnes erunt ęquales, vtpote in ęquali segmento, insistentes, nempe in segmento DEB, qui duas totius peripherię partes ęquales comprehendit.

COROLLARIVM.

Collige hic cum Clauio: Quod tali modo possumus reperire figuras multilateras, æquilateras, & ęquiangulas; Quia enim AB denominatur à ternario, quod sit latus trianguli, & AD à quinario, quod sit latus pentagoni possumus describere figuram 15. laterum; nimirum consurgentem ex multiplicatione ternarij cum quinario; Et quia ternarius exceditur à quinario duabus vnitatibus, ideo arcus interceptus inter extremum lateris trianguli dat duo latera quindecagoni. Tali quoque ratione in alijs lateribus aliarum figurarum idem eueniet.

Nam latera pentagoni, & hexagoni facient figuram 30. laterum; nimirum consurgentem, ex multiplicatione 5. cum 6. & quia sexagonus excedit quinarium vnitate, ideo arcus interceptus inter extremum lateris pentagoni, & hexagoni subtendet lineā, quę erit latus figurę laterum 30.

Sic latus quadrati, & sexagoni relinquet arcum, qui subtendet duo latera figurę 24. Quoniam 4. multiplicatus cum 6. reddit 24. & differentia inter 4. & 6. est 2. Sic latus quadrati, & pentagoni relinquet inter sua extrema arcum, cui subtendetur vnicum latus figurę 20. laterum, & sic de cęteris.





TRACTATVS VIII.

ARITHMETICA SIMPLEX,

& Generalis integrorum numerorum.



VM iam de quantitatis contiouæ æqualitate satis cognitionis, quæ ad elementum sufficere possit, ediderit Euclides in 1.2. & 3. libro, & Lineas æquales, Angulos æquales, Triangula æqualia, Parallelogramma æqualia, Linearum quoque potentias æquales, tum laterum parallelogrammorum, tum triangulorum tradiderit; Insuper ex quarto libro docuerit figurarum inscriptionem, quæ pluribus, quàm duobus triangulis coostabant. Iam aliam prouineiam aggredirur, & *Proportionem Inæqualitatis* præcipuè considerare, vel saltem iam ab æqualitate præscindere incipit.

Verùm; quia Arithmetiea ita miscetur Geometriæ, vt altera sioe altera claudicet, & manca euadat; ideo antequam ad vlteriora progrediamur, Arithmeticam geoeralem tradere oportuit, quòd proportiones inæqualitaris rationales meliùs expliceotur numeris, quàm quantitate cootinua: Vode; quia adhibeodi erant oumeri in proportionibus declarandis; proiode hic de Arithmetiea generali primùm agere oportuit, tanquam primus aditus ad proportiones quascumque beoè cogoosceodas; cum ipsa faciliùs proportiones explicet, & maximè si de numeris integris agitur.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVod sit numerua vidimua, & ipsius essentiam Iam speculati sumua Tract. 2. præliminari. Vnde hic solùm numerorum Definitiones sunt explicändæ, & illæ sunt, quas Euclidea 7. libro exponit; siquidem, eum ad præseutem tractatum deseruiant, hic transcribere oportuit.

DEFINITIO I.

VNitas est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

In qua aduertendum, quòd, sicut punctum abstractum est indiuisibile, sic vnitaa abstractiuè sumpta vnum est. Nam quodlibet, quod dicitur vnum, semper consideratur abstractè, vt vnum iu se, & diuisum à quocumque alio: alioquid, si acciperetur, vt à parte rei, iam, cùm nihil sit plures, seu partes, seu rationea non obtinens, plurificatum esset.

DEFINITIO II.

NVmerus est ex vnitatibus composita multitudo.

Hinc euenit; quòd omnis numerus sit commensurabilis; cùm habeat partes assignabiles, secundùm quas vnumquodq; numerua dicitur; V. g. 8. componitur ex octo vnitatibus, & 7. ex septem. Vnde vnitaa omniũ numerorum erit communis mensura, quâ omnes mensurari poterunt.

DEFINITIO III.

PArs est numerus minor ipsius maioris numeri, qui metitur ipsum maiorem.

Significat, quòd minor numerus sit appellandus pars numeri maioris, qui multiplicatus totum metitur; ita vt nihil supersit, neque deficiat. Sed ex æquo illi commensuretur. Sic 6. metitur numerum 18. quia multiplicatua per 3. euadit in numerũ eundem, nihil addendo, vel diminuendo. Omnis verò pars assumit nomen ab eo numero, per quem multiplicata metitur maiorem, vt 6. dicitur tertia pars numeri 18. quia 6. multiplicatus per 3. metitur numerum 18.

DE-

DEFINITIO IV.

Partes autem; cùm non metitur.

Numerus, qui alium maiorem adamussim non metitur; sed aliquid remanet, dicitur non pars, sed partes; quia scilicet saltem comprehendit tot vnitates ipsius, quæ sunt omnium numerorum communes partes, V. g. 5. erit non pars, sed partes numeri 18. quia comprehendit quinque vnitates, quarum quælibet est decima octaua pars numeri 18. Partes verò nomen sccipiunt ab eis numeris, qui, & partes, & totum adamussim metiuntur per eundē numerum, V.g. 6. est partes numeri 10. &, quia 2. metitur 6. per 3. & totum per 5. indè 6. dicetur esse tres quintas partes numeri 10. quia tres metiuntur 6. numerum, & quinque numerum 10. per eandem mensuram, quæ est 2.

DEFINITIO V.

Multiplex autem maior minoris, cum minor metitur maiorem.

Sicut numerus minor dicitur pars maioris; sic maior dicitur multiplex minoris. Sed tantùm, cùm minor fuerit maioris pars, non verò partes. Sic 18. dicitur multiplex numeri 6. quòd ex æquo mensuretur ab eo: Non autem numeri 5. quia, licet illius vnitates, quæ numeri 5. partes sunt contineat, non tamen à numero 5. adamussim mensuratur.

DEFINITIO VI.

Numerus par est, qui bifariam diuidi potest.

Vt numerus 2. 4. 6. 8. sunt pares, quia in duas partes æquales diuidi queunt.

DEFINITIO VII.

Impar verò, qui bifariam non diuiditur, vel qui vnitate differt à pari.

Vt numeri 11. 13. 17. 7. quia non possunt diuidi bifariam, vel quia differunt à paribus 10. 12. 18. 6. solâ vnitate, dicuntur impares.

DEFINITIO VIII.

Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

V. G. 8. quia 2. & 4. metiantur, ipsum 8. dicitur pariter par: Nam 4. est par, qui paribus vicibus acceptus, nempe duabus, facit 8, ideoque dicitur numerus 8. pariter par.

DEFINITIO IX.

Pariter impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum parem.

Numerus 30. quem 15. impar numerus metitur multiplicatus per 2. numerum parem dicetur pariter impar. Aduertendum est autem, quòd idem numerus potest esse pariter par, & pariter impar, vt 12. Nam metitur, & numero 6. multiplicatus per 2. & sic est pariter par, & numero 3. multiplicatus per 4. & sic est pariter impar.

DEFINITIO X.

Impariter autem numerus impar est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt numerus 15. quem metitur 3. & 5. ambo impares numeri dicitur impariter impar.

DEFINITIO XI.

Primus numerus est, quem vnitas sola metitur.

Si detur namque numerus, qui neque à pari, neque ab impari patiatur dimensionem, sed à sola vnitate ille numerus dicetur primus, vt 2. 3. 7. 11.

DEFINITIO XII.

Primi numeri inter se sunt, quos vnitas sola metitur.

Licet enim quilibet possit dimetiri per parem, seu imparem, nisi ille numerus mensurans sit communis dimensor vtriusque, dicentur illi numeri inter se primi, V. g. 8. & 9. Quamuis etenim 2. multiplicans 4 numerum 8. mensuret, & 3. multiplicans 3. mensuret 9. quia tamen, nec 4. nec 2. mensurat alterum 9. nec 3. huius numeri 9. mensura, illum numerum 8. mensuret: ideo illi numeri primi inter se dicendi.

DEFINITO XIII.

Compositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

Silicet exceptâ vnitate, quam Euclides non vocat numerum. Perspicuum autem est omnes numeros pares præter binarium esse compositos; quia saltem binarius eos metitur, ex quò etiam euenit omnes numeros primos, rempto binario, esse impares. Nam ex paribus binarius solus est primus.

DEFINITIO XIV.

Compositi numeri inter se sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

Igitur sunt compositi inter se illi numeri, qui ad differentiam primorum inter se, aliquam habent communem mensuram, vt 24. & 18. prò communi mensura sortiuntur numerum 6.

DEFINITIO XV.

Numerus numerum multiplicare dicitur, cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis alius.

Vt

Vt numerus 5. dicetur multiplicare numerum 6. cum toties sumitur numerus 6. quot sunt vnitates in numero 5. & 6. quinquies acceptus producat alium, nempe 30.

DEFINITIO XVI.

Numerus numerum diuidere dicitur, cùm numerus alius acceptus fuerit, indicans suis vnitatibus vices, penes quas diuidens numerus in diuiso continetur.

Vt Numerus 6. dicetur diuidere numerum 18. cum accipitur alius numerus, V. g. 3. indicans suis vnitatibus vices iuxta, quas 6. continetur in 18. nempe tribus vicibus.

DEFINITIO XVII.

Ratio est duorum numerorum mutua in ratione mensurantis, & mensurati relatio.

V. g. quia 4. metitur 4. vnica vice acceptus, & 8. metitur 4. gemina vice, & 3. vnica vice, & $\frac{1}{2}$, ideo dicuntur numeri isti Rationem habere. Omnis autem numerus obtinet Rationem cum quocunque alio, etiam rationalem; quia, vt diximus, alium saltem per vnitates, quæ in ipso sunt, metitur.

DEFINITIO XVIII.

Proportio similis, seu ratio inter numeros est, cum primus ad secundum in simili mensura sunt, ac tertius respectu quarti.

Proportio similis, & Ratio est quædam similitudo, non numerorum; sed ipsarum Rationum in ratione continentis, & contenti, seu metiti, & mensurantis. Si ergo duo numeri sint; qui se contineant, vel mensurentur, vt duo alij. Eg. 2. metiatur 4. vt numerus 3. metitur 6. dicetur ita 3. ad 6. in proportione, ac 2. ad 4. quia sicuti 4. dualitatem gemina vice continet, sic, & 6. ternarium gemina vice complectitur.

Vnde hinc colligas; quòd numerus multiplicans habet eam proportionem ad vnitatem; quã genitus habet ad multiplicatum, V. g. multiplicati 2. per 4. faciunt 8. numerus itaque multiplicans 2 ita se habet ad vnitatem, vt 8. genitus ad 4. multiplicatum; quia ex def 15. tot vicibus genitus continet multiplicatum, quod multiplicans vnitatem.

Secundo, quod numerus diuisus habet ad diuidentem eam proportionem, quam quotiens, seu diuidens habet ad vnitatem, quia quot vicibus diuidens continet vnitatem, tot quoque diuisus diuidentem complectitur ex definitione 16.

DEFINITIO XIX.

Numerus numerum metiri dicetur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum metitum producit.

Postponitur ista definitio prædictis; cùm debuisset anteponi, quia definiuimus multa per mutuam commensurabilitatem; sed quia, & hæc illas supponebat; nempe definitionem multiplicationis saltem, ideo postposita est, cùm hoc liceat in Mathematicis definitionibus, quæ non probantur.

POSTVLATA.

Postuletur cuilibet numero, quoslibet posse sumi æquales, vel multiplices.

Secundò quolibet numero posse sumi maiorem.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri, vel æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel quorum duo multiplices sunt æquales, illi inter se quoque sunt æquales.

III.

Qui numeri, æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, inter se sunt æquales.

IIII.

Quorum idem numerus, vel numeri æquales fuerint pars, vel partes eædem, illi inter se æquales sunt.

V. g. quia 5. est eadem pars numeri 10. ac numeri cuiusdam Equorum, numerus Equorum erit æqualis numero 10. Quod si 5. numerus sit dimidia pars, tum numeri 10. tum numeri Equorum, numeri Equorum, & 10. erunt æquales. Sic si 5. & numerus quidam Ouium, sit tertia pars numeri 15. numerus Ouium, & 5. sunt æquales numeri. Et si numerus 10. & numerus Ouium sint eædem partes nempe 2. ex tribus partibus numeri 15. numerus Ouium, & 10. erunt æquales,

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipso numero sunt metitur.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum; multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Si namque 4. multiplicet 3. producet 12. & 4. per 3. nempe tribus vicibus acceptus, & 3. si-

3. similiter per 4. ideſt quatuor vicibus acceptus producet 12.

VIII.

Si numerus numerum metiatur, numerus vices numerans, eundem quoque menſuratum numerum metietur, & numerus metiens, vices huius numerabit per ſuas vnitates.

Sic ſi 4. menſuret 20. vices numerabit numerus 5. quinquies enim numerus 4. continetur in numero 20. & hoc per ſuas vnitates nempe per 5. vnitates. Et iſte numerus 5. vices numerans menſurabit quoque ipſum 20. ſed alter primo metiens nempe 4. numerabit vices huius, iuxta quas continetur in 20. quia quater capit 5. in numero 20; Et hoc per ſuas vnitates, quæ in numero 4. quatuor ſunt.

IX.

Numerus numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metietur.

V. g. ſi 2. menſuret 4. & 6. menſurabit quoq; 10. qui componitur ex 4 & 6.

X.

Numerus numerum metiens metitur, quoque omnem numerum, quem ille metitur.

V. g. ſi 2. menſuret 4. menſurabit quoque numerum 12. 16. & 20. quos 4. metitur.

XI.

Si numerus numerum metiens, eum per quem metitur multiplicet, vel ab eo multiplicetur, producet eum, quem menſurat.

Sit Eg. 4. qui menſuret 24. per 6. dicit, quod ſi 4. multiplicet 6. vel à numero 6. multiplicetur, producet 24. quem menſurat per numerum 6.

EXPENSIO I.

De integrorum numeratione.

Exprimere quantitatem numerorum multorum, non quilibet ſine aliqua regula facilè poteſt: Vnde de hoc primo agendum.

THEOR. I. PROP. I.

Omnes numeri procedunt, & continuantur per proportionem decuplam.

Probatur ex eſt proportio numeri; quando tot vicibus ſumitur, quot in numero proportionem denominante ſunt vnitates, V. g. illa eſt proportio; quam habet 3. ad 1., quæ aſſumit alium numerum, V. g. 4. toties, quot in 3. ſunt vnitates, vt eſt numerus 12. vt ex 18. definit. colligimus: ſed in diſpoſitione numerorum aſſumitur toties 1. quot vnitates ſunt in 10. & faciunt 10. Iterũ aſſumitur 10. toties quot vnitates ſunt in 10. & faciunt 100. Iterumque aſſumitur 100. toties, quot vnitates ſunt in 10. & fiunt 1000. Iterum aſſumitur tot vicibus 1000. quot vnitates reperiuntur in 10. & faciunt decem millia: Ergo creſcit, & propagatur per proportionem decuplam omnis numerus naturalis.

PROBL. I. PROP. II.

Cognitis vicibus proportionum, & nominibus earum, facilè quilibet numerus exprimi poteſt.

Præſuponendum eſt *locum*, in quo numerus eſt, vices proportionum ex inſtituto hominum ſignificare, V. g. ſi ſint 124. numerus 4. primo loco exiſtens (dexter enim apud Arithmeticos primus locus eſt) ſignificat vices vnitatum, quę acceptæ ſunt. Nempe vnitates quatuor eſſe acceptas. Secundus locus n. 2 ſignificat vices decimarum; nempe pro vnitatibus acceptas fuiſſe decimas vnitatum, ita vt 2; quia eſt ſecundo loco non duas vnitates, ſed duas decimas vnitatum exprimat. Tertius verò locus numeri 1. eſt centũ multiplicati per 10. ideſt ſignificat, non iam acceptas fuiſſe pro vnitatibus decimas; ſed centeſimas vnitatum; ita vt 100. vnitates pro vna vnitate accipiantur. Numerus autem ipſe ſignificat vices, quo vnitates, vel decimæ, vel decimæ decimarum, ideſt centeſimæ acceptæ fuerint, Quod ſi ſola zifra adſit, ſignificat nullas proportionum vices illi loco cõuenientes exprimẽdas reperiri, ſic ſi adſit numerus 200. nihil erit vnitatum, nec decimarum; ſed ſolum numerus erit centeſimarum, & quia eſt 2. duæ erunt centeſimæ.

Secundò nomina proportionum cognoſcere neceſſe eſt; hoc autem ex hac ſerie cognoſcetur.

Si vnitas accipiatur decies, decem vocatur.

Si decem accipiatur decies, centum vocatur.

Si centum accipiatur decies mille vocatur.

Si mille decies aſſumantur, decẽ millia dicitur.

Si mille centies ſumatur, centũ millia dicitur.

Si mille millies ſumatur, millio vocatur.

Deinde aſſumuntur iterum milliones, tanquã vnitates, & incipimus iterum à capite.

Si millio decies ſumatur, decẽ milliones dicunt

Si millio centies ſumatur, centum milliones.

Si millies aſſumatur, mille milliones.

Si millio ſumatur decem vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio centum vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio ſumatur mille vicibus millies, duclio vocatur, & ita duciones, triliones, quadriliones incipiẽdo rurſus ab vnitate in infinitum.

Ita ergo legendus eſt numerus 10000. quia 1. eſt in quinto loco, & cęteri omnes non ſunt numeri, ſed zifrę; ideo non ſignificant, niſi locum numeri; & hoc deſeruit, vt numerus ſuo loco poſitus ſignificet vices proportionum, quæ illi loco conueniunt. Igitur 1. quinto loco poſitus ſignificat 4. ordines proportionum præcedere primus numerorum ſimplicium in primo 0. ſecundus decimarum in ſecunda zifra, tertius centeſimarum in tertia zifra, quartus decimarum cẽteſimarum nempe milliarium in quarta zifra quibus locis licet numeri non adſint, adeſt tamen zifra; quę locum ſeruat, & operatur, quòd 1. vim quinti loci obtineat, & ideo, quòd 1. ſignificet decimas milliariorũ, nempe decẽ millia, quòd ſi eſſet 2. eſſent viginti millia, ſi 3. triginta millia.

Et quia, vt dictum eſt, primus locus in quo numerus exiſtit, ſignificat vnitates ad decimas aſcendentes. Secundus verò numerus ſignificat decimas vnitatum acceptas tanquam, ſi eſſent vnitates

vnitates ascendentes ad centesimas, & quia, vt potest videri à serie superposita, placuit hominibus ad quamlibet proportionẽ tricies acceptam, mutare nomina proportionum; ideo faciliorem regulam ad legendum reddere possumus, dispositis per ordinem numeris, primo incipiendo ad dextram, & ad omnes tertios duobus intermissis applicare punctum, vt vides in hoc exemplo

2 1
. . . . . .
3456480124900712. & deinde super quodlibet secundum punctum incipiendo ab vnitate applicare numerum tali ratione, vt primo nihil apponatur, neque secundo puncto, tertio apponatur vnitas, & vno intermisso puncto, quinto apponatur 2. & sic consequenter. Nam hoc modo sciemus, vbi primum punctum reperitur esse numerum simplicem. Vbi secundum esse milliaris accepta tanquam vnitates. Vbi numerus esse milliones accepti tanquam vnitates, & vbi duo esse duelliones, & sic consequenter augendo in infinitum. Et ita numerus superpositus pronuntiabitur. Nimirum

3 4 5 6
Tria millia, & quatere utum quinquaginta sex duel-
4 80 10
liones, quatercentum octuaginta millia, & centum
4 900 7
quatuor milliones, nongenta millia, & septingenta
12
duodecim vnitates.

Vbi iterum aduertendum, quòd nullum nomen zifris attribuitur; quia non significant; nisi locũ numeri, vt numerus suo loco positus vices proportionũ significet, quibus vnitas est assumpta. Vt in hoc numero 100. duæ zifræ, quæ vnitatem præcedunt, solùm demonstrant illam vnitatem non significare vnitatem simplicem; sed neque significare vnitatem decimarum, sed vnitatem centesimarum expromere, nempe proportionem 10. gemina vice acceptam. Nam si vnitatem multiplico per 10. facit 10. quam decimam, si adhuc multiplico per 10. facit centum. Ecce gemina vice assumpta proportio. Quare, si omnes numeri præcedentes essent 0 nihil significarent, at si ante sequeretur eos sola vnitas ad sinistram significaret iuxta locum, in quo reperitur. V. g.

2 1
. . . . . .
1000000000000. iste numerus significat duellionem, quia nimirum zifræ antecedentes reiciunt illam vnitatem ad decimum tertium locum, qui est locus duellionis: & hæc de numeratione.

EXPENSIO II.

De integrorum collectione;

QVatuor præcipuæ operationes, & vniuersalissimæ circa numeros integros, & naturales exercentur, quæ omnes sub vno nomine *Algorhythmi* cõprehenduntur; atque istæ sunt *additio, subtractio, multiplicatio*, & *diuisio*. Hic agimus de additione, quæ datis pluribus numeris eos in vnam summam redigit, atque aliás appellatur *collectum*, & *totum*.

THEOR. I. PROP. III.

Cuilibet numero quilibet alius numerus competens addi potest.

* PRob. Nam iam concessum est in postulato secundo numerum posse sumi alio numero maiorem sint ergo numeri simul addendi 3. & 4. summo ergo numerum æqualem istis duobus simul nimirum 7. & iam facta est additio, namque 7. continet 4 & 3. Probatur vero, me duobus numeris posse sumere æqualẽ, nã ex 2. Post possũ sumere vni illorũ vtlibet maiorem, & ex 1. Post cuilibet æqualem, ergo possum sumere maiorem tribus vnitatibus, ita vt hæc maioritas sit æqualis numero 3. & iam duobus numeris 3. & 4. sumpsi æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Numeri dissimiles dissimilibus nõ addendi.

* SInt numeri decimas significantes 40. & sint significantes numeros simplices 5. Dico 5. numero 40. addi non posse; Nam si fieri potest, addatur: Erit ergo vel 9. vel 90. zifra apposita, sed nec 9. nec 90. esse potest; ergo neque addi potest, quod verò neque 90. neque 9. esse possit probatur. Nam non 90. quia quinque vnitates super quadraginta vnitates non addunt, nisi id quod sunt; nempe quinque, ergo erit 45. & non 90. Sed nec 9. quia quatuor decimæ sunt magis, quam quatuor numeri simplices, sed quatuor simplices additi 5. simplicibus faciunt nouem: ergo quatuor decimæ magis, quam nouem.

PROB. I. PROPOS. V.

Si similes numeri, & eandem proportionem significantes addantur similibus numeris, eandem proportionem significantibus erit optimè facta additio.

CVm ergo certum sit ex præced. addendos numeros accipiendos esse eiusdem proportionis; iuxta eorum proportionem ita disponendi sunt, vt singulæ proportiones addendæ loco correspondeant, & dignitate vt videre est in hoc exemplo.

1945
7329
405
———
9679

Nam omnes, qui sunt in primo loco ad inuicem sibi, & per rectam lineam respondent, & ita, qui in cæteris locis. Quo facto lineola subducta distinguendi sunt numeri addendi à numeris additis supponendis. Postea addantur simul tres primi ordinis 5. 9. & 5. incipiendo ab inferiori, & faciunt 19. & quia habes duos numeros, quorum primus 9. est eiusdem speciei, cum illis, qui erant addendi; ideo sub ipsis rectà pono 9. tanquam ad primum collectum ordinem pertinens; & transfero 1. qui est decimarum, tanquam ad secundum ordinem spectans; & addo simul hoc 1. & deinde cæteri secundi ordinis 0. 2. 4. & faciunt 7. (nam 0. nihil addit,) & quia est numerus simplex decimarum, pono sub hoc secundo ordine, spectans

ad

ad decimas. Deinde assumo 4. 3. 9. tertij ordinis. qui simul additi faciunt 16. & quia obtinui duos numeros, primum 6. eiusdem ordinis, quare illum pono apud 7. sub tertio, ad quem spectat, ordine; & transfero secundum 1. ad ordinem altiorem, & sequentem: addo igitur simul 171. & faciunt 9. apud 6. ponendum. Habeoque numerum collectum 9679. æquiualentem illis tribus ordine positis. Quod promissum est in problemate, & ex antecedentibus Theorematibus sequitur.

EXPENSIO III.

De subductione numerorum integrorum.

SVbductio, aut subtractio est, cùm duobus numeris datis minor aufertur à maiore ad obtinendum residuum, qui numerus etiam appellatur *Quæsitus*, & *Reliquus*.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Quilibet numerus minor à quolibet maiori correspondenti extrahi potest.

CVm namq; ex defin. omnẽ numerũ vnitates mensurent; in numero maiori erunt tot vnitates, quot in numero minori, & ampliùs. Sed ex 1. post. cuilibet numero licet accipere ęqualem. Sumam igitur ex numero maiori æqualem alicui numero minori, V. g. à 5. possum sumere numerum æqualem numero 4. quo ablato, quod residuum erit, numerus à subtractione residuus erit, qui exquiritur.

COROLLARIVM I.

QVòd, si simul addantur 4. & 1. efficent, quod erat; cum sint partes ipsius 5.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Numerus à numero similis proportionis subducendus est.

PRobatur. Nam si possunt diuersę proportionis numeri auferri; minor à maiori auferantur, V. g. 5. à 70. Quia ergo abstuli à 70. residuus erit numerus 20. Sed addantur simul rursus iuxta dicta prop. 5. anteced. 20. & 5. faciũt 25. Sed debebant efficere, quod priùs erat, nempe numerum 70. ex Coroll. præced. Ergo non potest fieri subductio numerorum: nisi sint eiusdem dignitatis.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Si à numeris maioribus, & eandem proportionem habentibus numeri minores, & eandem proportionem habentes, ac ipsi, demantur; fiet optimè subtractio.

SIc subtrahendus numerus æqualis huic 678. à numero 1257. Quia proportionales à proportionalibus sunt auferendi, ita collocandi sunt vt loco, ideoque proportione respondeant, vt in hoc exemplo. Et subducta lineolâ distinctionis gratiâ, deinde assumatur à superiore numerus æqualis numero primo 8. & si non possit id fieri, quòd 7. minor sit; à numero secundo proximo accipiatur vnitas decimarum, & sint 17. deducaturq; ab eo numero 8 æqualis. & residuus erit 9. Qui, vt numerus vnitatum, sub vnitatibus scribendus. Iamque accedimus ad secundum numerum subducendum, & quia sustulimus à 5. vnitatem decimarum; ideo edasit 4. Videatur ergo; an 7. secundus subducendus à numero 4. auferri queat, & cum non possit, iterum à præcedenti assumatur vnitas decimarum, & sint 14. ex quibus 7. ablatus relinquit 7. igitur subscribo 7. numeris secundi ordinis apud 9.

1257
678
———
579

Et quia à præcedenti 2. abstuli 1. ideo remansere 1. à quo 6. auferri nequeunt; igitur vnitas præcedens, quæ est centesimarum addatur, & fiant 11. ablatus 6. restituit 5. itaque residuus erit 579. subducto 678. à maiore numero 1257.

Quòd si in præcedenti non reperiretur, nec quidem vnitas, sed alfra, tunc accipienda est adhuc vnitas, non quidem ab illo loco, sed à superiori saltem virtualiter, vt in istis terminis.

Si enim volo subducere 8. à primò 0. nequeo; quia numerus non est, accipio itaque vnitatem decimarum ab antecedenti; sed nequeo; quia est 0. Accipio ergo ab antecedenti; qui licet sit 1. est tamen numerus vnius decimæ decimarum, idest centesimarum; ideoque subduco 8. à 10. residuus erit 2. at verò 10. iam non erit 10. sed 9. quod vna decima ablata sit; Ideoque residuus erit 92.

100
8
———
92

Poterit quoque facilitatis gratia, vnitas ablata numero sequenti restitui, V. g. si sic fiat 2. à 0. nequit fieri, sed mutuo accepta vnitate à maiori fiet, 10. à quo subductus 2. residuus erit 8, sed quia ab antecedenti abstuli vnitatem, ideo secundo 7. ei addo, & fient 8. demo itaque 8. à 10. eodem modo, & fiunt 2. & quia abstuli vnitatem; ideo eam subduco à residuo 10. & fiunt 9. & sic habetur residuus 928. Illud enim augmentum, quod subtrahendo numero fit; æquiualet diminutioni factæ in numero, à quo aufertur. Nam ita est, si auferantur 8. à 10. quam si auferantur 7. à 9. In prima verò regula cogitauimus numerum, à quo subducitur diminutum: hic verò numerum subtrahendum augemus vnitate; vt idem relinquat; ibi cogitatur iam ablata vnitas; hic tanquam si non esset ablata, cùm numero subducendo auferatur.

1000
72
———
928

Potest etiam fieri alio modo, vt si auferendi sint à numero 2081. numeri 479. dispono, vt supra, & quia 9. ex 1. auferri nequit, ideo differentiam, quæ est inter 9. & 10.; nimirum 1. assumo, & eam addo numero superiori scilicet numero 1. & fiunt 2. quos subscribo. Ita 7. secundum aufero à 7. & numero superiori (est enim 7. non 8. ob vnitatem ablatam) & nihil remanet: Vnde scribo 0. ad hoc, vt seruetur locus. Deinde quia 4. nequit deduci à 0. assumo differentiam inter 4. & 10. remanent 6, quam numero superiori non addo, cùm zifræ non possit fieri additio, & ideo scribo 6. & deinde scribo 1. ita enim remansit, quòd vnitas ablata sit à numero 2. propter 10. mutuò assumptos priùs. Qui omnes modi in idem recidunt.

2081
479
———
1602

EXPENSIO IV.

De numeris multiplicandis,

MVltiplicatio est duplex, alia simplex, alia composita. Simplex est, cùm vnus simplex numerus per alium multiplicatur, composita verò, cùm vel plures numeri per vnum multiplicantur, vel plures per plures. Agemus priùs de prima, vtpote de faciliori.

THEOR. I. PROP. VIIII.

Quilibet numerus potest multiplicari.

PRobatur multiplicare est sumere toties alium numerum, quot numerus multiplicans habet vnitates; cumque liceat alteri numero addere quantum quisque vult ex post. 11 si V. g. assumam 4. licebit mihi addere, quantum volo. Addam ergo ei rursus 4. & rursus 4. toties quot vnitates sunt in 3. & sic habebo 4. ter acceptos, Quod est multiplicare ex definit. 15.

THEOR. II. PROPOS. X.

Si sit numerus, vel medietas decimæ, vel medietatem decimæ excedens, multipliceturq; per alium excedentem vnitatem, cum fuerit multiplicatus, vel æquabit decimam, vel decimam superabit.

PRobatur facilè; quia minus, quàm 2. assumi nequit; nec minus 5. pro numero multiplicando, quæ faciunt 10. Quare, si alij assumantur, patet decimam superaturos.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Si sint duo numeri se se mutuo multiplicantes; quorum vnius medietas simul cum toto alio posita sit magis, quam medietas decimæ, illi numeri multiplicati decimam superabunt.

PRobatur facilè. Nam, iste numerus 4. adiunctus numeri multiplicantis 3. medietati quę sit 1. $\frac{1}{2}$ facit 5. $\frac{1}{2}$. Quare si tantùm addatur iterum 4. & 1. $\frac{1}{2}$ multiplicando per 2. facient magis, quam 10. Quia gemina vice accipientur. Ergo tanto magis si multiplicatur 4. per 3. aut quemlibet alium maiorem.

COROLLARIVM

HInc habes numeros tales generare numeros ad duas proportiones pertinentes, vel ad vnam tantùm; sed semper superiorem. Sic 3. & 4. generant duos numeros 12. quorum primus 2. est eiusdem proportionis, ac multiplicati, secundus verò 1. proportionis immediatè sequentis decimarum. Sic si 5. multiplicentur per 6. generabunt numerum 30. qui ternarius non erit numerus simplex: sed ternarius decimarum, nempe ordinis immediatè sequentis.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

Numerus simplex multiplicans numerum simplicem non potest generare numerum, nisi proportionis altioris immediatè sequentis.

PRob. Quia numerus maximus simplicium est 9. qui multiplicatus per 9. maximum item simplicium producet numerum, nouies numerum 9. continentem; sed proportio altioris ordinis, quæ proportionis immediatè sequentis numeros simplices continet decimas decies. Maior autem est numerus continens partes plures, & maiores, quàm qui continet pauciores, & minores. Ergo erit minor numerus continens nouies nouem; quàm decies decem. Ergo non poterit efficere proportionem istã tertiam. Quod si maximus simplicium id nequit. Ergo nec cæteri.

COROLLARIVM

HInc est, quòd, etiam si numerus multiplicans alium significet decimas, vel decimas decimarum; quòd eadem ratio erit, & producere nequibunt numerum pertinentem; nisi ad proportionẽ immediatè sequentem, vt patet, quiâ eadem ratio sit de numeris, vel sumptis, vt vnitates simplices, seu, vt vnitates decimarum, seu vt centesimarum, &c.

THOR. V. PROPOS. XIII.

Omnes numeri se se multiplicantes faciunt numerum, qui comprehendit, tum vnius, tum alterius partes.

PRobatur. Quia id vnumquodque continet, ex quo componitur: Ergo cùm numerus sit compositus ex multiplicatione, tum vnius, tum alterius, debet eorum partes in se habere.

THEOR. VI. PROPOS. XIV.

Si numerus simplex multiplicet non simplicem, numeri geniti simplices non erunt: sed eius proportionis, cuius est multiplicatus, vel immediatè sequentis.

SIt 3. numerus, qui multiplicet 5. numeri 250. Dico, quòd in genito 15. numerus 5. non est simplex; sed eius proportionis, cuius est 5. in numero 250.

Prob. Nam in numero 150. numerus 5. quælibet vnitate decimam significat. Ergo quælibet eius vnitas tricies accepta decimarum erit. Igitur etiam, si toties 5. simul sumatur genitus decimarum erit ex propos. 12. Coroll. numerus uero 1. in genito 15. ex propos. 11. Coroll. significabit proportionem immediatè sequentem.

THEO-

THEOR. VII. PROPOS. XV.

Si numerus non simplex multiplicet non simplicem producet eam proportionem, quæ tum vnius, tum alterius ab vnitate distantiâ conficitur.

Sit numerus 7. in numero 70. & numerus 5. in numero 50. qui se inuicem multiplicent. Dico quod numerus genitus erit eius proportionis, quæ ex distantiâ, tum unius, tum alterius à primo numero versùs sinistram recedit; & quia loca per zifras notata sunt. Ideo dicu recedere zifris, tum huius, tum alterius numeri nimirum: duabus zifris, eritque 3500.

Probatur: Quia ex antecedenti numerus simplex primus multiplicans secundum generat numerum secundo loco ponendum. Ergo secundus multiplicans secundum generabit numerum tertio loco ponendum, & ideo secundus multiplicans tertium generabit numerum quarto loco ponendum, & hinc tertius multiplicans tertium generabit numerum quinto loco ponendum, & sic de cæt.

ABC

Quod, ut magis pateat, sit numerus 323. &

DEF

228. Quia 3. A est tertio loco, si illum multiplicet F 2. erit genitus ex 8. tertio loco ponendus: ex propos. anteced. & ostendet tres centesimas, ut unitates fuisse acceptas. Quod si multiplicet 2. E numerum A 3. eundem, significabit tres centesimas non iam bis acceptas, sed dualitate decimarum, idest uigesies acceptas. Ergo genitus non iam significat unitates centesimarum; sed decimas centesimarum. Ideo secundo loco post primum collocandus, idest quarto loco ponendus; Et si illum D 2. multiplicat; iam non erunt decimæ centesimarũ. Sed centesimæ centesimarum, ideo numerus genitus tertio loco ponendus post primum, idest quinto loco collocandus; & sic, si alij adsint argumentabitur.

PROB. I. PROPOS. XVI.

Si omnes numeri simplices in quadratam seriem ita disponantur, vt prima series sit continua additio vnitatum, secunda dualitatum, & sic consequenter vsque ad 10. Tabula talis ordinata erit, quæ numerorum simplicium multiplicationem exibebit.

Dvcantur lineæ æquidistantes undecim, & istas decussantes aliæ undecim. Deinde ascribantur numeri in prima serie ponendo unitates sibi inuicem additas; in secunda dualitates sibi superadiunctas; in tertia triadas, & sic de cæteris. Nam tabula erit confecta, quæ à Pythagora primò inuenta est, & ab eius nomine Pythagorica uocatur: Quam dico numerorum simplicium exibere multiplicationem.

Probatur multiplicare est sumere numeros multiplicandos tot uicibus, quot sunt in numero multiplicante unitates: cum ergo quilibet numerus simplex additus sit alteri tot uicibus, quot numeros habet ipsa decima, V. g. unitas unitati 10. uicibus addita est, dualitasque dualitati, trias triadi, &c hæc erit numerorum simplicium multiplicatio.

							A		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12 D	15	18	21	24 C	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Vsus etiam clarus est. Nam, si reperio à latere sinistro numerum multiplicantem, & in superiore parte multiplicatum in eo quadrangulo, ubi series inuicem concurrunt, erit numerus genitus. Sic 8. per 3. multiplicatus erit 24. ubi series A, & B occurrunt in C. Obseruaque ex propos. 13. numerum tabulati D excedere simplices numeros, & proportionem sequentem inducere.

* Verum quia non semper hæc tabula in promptu est, & quandoque in multiplicationibus numerorũ maiorum potest suboriri difficultas; ideo hæc regula poterit obseruari ad facilitatem sectandam.

Volo Eg. cognoscere 8. multiplicatum per 9. quem numerum gignat: Video, quot numeris distet minor numerus 8. à 10. & video esse 2. differentiam. Accipio ergo 9. gemina vice, & subduco à 9. addito 0. nempe à 90. & residuum 72. est numerus quæsitus; Sic 7. per 6. differentia est 4. quam multiplico per 7. & faciunt 28. subduco à 70. & dant 42. numerum genitum ex multiplicatione 7. in 6. Et ratio est; quia 70. est 7. decies acceptus. Quòd, si auferatur ab eo 7. quater acceptus, clarum est, quòd remanet 7. sexties acceptus, nempe per 6. multiplicatus: hæc autem regula comodior est in magnis numeris: cum differentiæ à 10. paruæ sunt, & in illis deseruit.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datis duobus numeris non simplicibus inuicem multiplicandis, si quilibet numerus per alium multiplicetur, & seruetur proportionum locus vbique, & summa cuiuslibet multiplicationis colligatur, erit facta multiplicatio compositorum numerorum.

Visa facili multiplicatione numerorum simplicium, videndum est quomodo ex eis numeri maiores multiplicentur. Sint ergo multiplicandi 254. per 43. cùm sit seruandus proportionis locus, debet minor sub maiore subscribi tali modo, 254
vt numerus vnitatum sub vnitatibus, 43

decimarum ſub decimis, & omnes alij numeri correſpondenter collocentur. Et quia quilibet per alium multiplicari debet, & iam cognoſco quomodo multiplicentur numeri ſimplices. Ideo multiplico 3. per 4. & faciunt 12. ſilicet ex propoſ. 10. & 11. numeros geminę proportionis, primum ſimplicium vnitatum, ſecundum numerorum decimarum, & proportinnis immediatè ſequentis: ideo 2. vnitatibus ſubſcribo, et 1. decimis. Poſtea 3. per 5. ſequentem numerum multiplico, & faciunt 15. quorum primus 5. incum ex propoſ. 14. proportionis eiuſdem, quæ eſt numeri 5. debet occupare nempe ſecundum. Vnde numero 1. ſubſcribendus, vt vides, & 1 numeri 15. ad tertium locum pertinebit, cum ſit proportionis immediatè ſequentis. Deinde multiplico 3. per 2. & faciunt 6. numerum tertij loci.

254
43
———
12
15
6
———
16
20
8
———
10922

Itaque iam prima figura inferioris numeri multiplicata eſt per omnes figuras numeri ſuperioris. Modo multiplicanda eſt ſecunda figura; ideoque accipio 4. & multiplico per 4. & faciunt 16. & quia 4. eſt ſecundi ordinis in numero 43. ideo genitus ad eundem locum ſpectat ex propoſ. 14. nempe ſecundum. Quare ipſius 1. ad tertium deuenit ex propoſ. 15. Poſtmodum iterum multiplico 5. per 4. & faciunt 20. cuius primus o. ex propoſ. 15. debet occupare tertium locum, & ideo ſubſcribo tertio loco o. & 2. quarto. Deinde 2. per 4. & faciunt 8. quarto loco ponendus. Tandem congrego omnes ſimul, eritque ſumma numeri ex multiplicatinne geniti 10922.

Practici tamen breuitatis gratia non omnes numeros diſtinctè ſcribunt; ſed transferunt ad alios anteriores, V. g. in præcedenti exemplo, nón ſcribent numerum 12. ſed 2. quidem ſcilicet numerum verò 1. mente retinebunt, donec multiplicent ſequentem 5. per 3. & producant 15. cuius numero 5. addent illam vnitatem mente retentam, & ſcribent 6. & alterum 1. mente conſeruabunt, donec iterum per 3. multiplicent 2. & faciunt 6. cui addent 1. mente ſeruatum, & ſic ſcribant 7. & ſic in ſecunda multiplicatione numeri 4. efficiunt vt hic videre licet. Nam ſolum ſcribet 6 & 1. coniungent cum 16. vt ſint 21. & ſcribent 1. & 2. coniungent cum numero 8. vt ſint 10. quem tandem ſcribent. Deinde, vt priùs, ſumma colligitur

254
43
———
762
1016
———
10922

Si quando numerus zifris conſtat, ſufficit ponere tot zifras, quot ſunt in numeris tum multiplicato, tum multiplicante, & deinde vltimum numerum multiplicare inferioris, cum ſuperiori, & erit facta multiplicatio, V. g. ſint multiplicandi 20000. per 300. Quia ſunt 6. zifræ in vtroque eas omnes ſcribo, deinde multiplico 3. cum 2. & vltimo loco pono 6. & erit ſine ſumma confecta multiplicatio.

20000
300
———
6000000

Quod ſi numerus alter conſtet zifris, at alter nequaquam; alter per alterum multiplicandus eſt: Et confecta multiplicatione ſummæ eius addendæ ſunt tot nullæ, quot ſunt in altero ipſorum, vt vides in exemplo.

33000
35
———
165
99
———
1155000

EXPENSIO V.

De numerorum integrorum diuiſione.

Diuiſio eſt inuentio numeri, qui ſuis vnitatibus demonſtret, quoties numerus minor continetur in maiore; & metiatur maiorem. Duplex eſt autem, alia enim eſt numeri ſimplicis quemcunque alium diuidentis, alia numeri compoſiti alium pariter diuidentis.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Quilibet numerus maior cuiuslibet proportionis per quemlibet alium numerum partiri poteſt.

Sit numerus proportionis decimarum 80. Dico quod per quemlibet alium numerum minorem, ſeu æqualem diuidi queat.

Probatur primo de minori, qui ſit V. g. 4. Vtique ego poſſum aſſumere huic numero 4. æquè multiplicem, vt mihi placet, ex poſt. 2. Accipiam ergo numerum multiplicem, qui 80. non excedat proximè, ita vt, ſi ſemel adhuc multiplicem, excedat; Iterum poſſum exprimere numerum multiplicitatis, ideſt quot vicibus aſſumpſerim. Si enim aſſumo multiplicem, etiam quot vicibus aſſumpſerim ignorare non debeo. Si ergo exprimam, expreſſus numerus erit ille, qui quæritur, & appellabitur Quotiens, ideſt indicans, quot vicibus contineatur 4. in 80. qui numerus vicinus erit 20.

Probatur etiam de æquali; quia, ſi eſt æqualis cõmenſuratur ipſi, ergo vnica vice capiet in ipſo.

Quare patet. Quod numerus cuiuslibet proportionis per quemlibet diuidi poſſit; cum per minorem, & æqualem, vt libet diuidatur.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Quilibet numerus minor, vt minor, per maiorem partiri nequit.

Probatur ex definitione 16. Minor nullis vicibus continet maiorem; Ergo vices ſecundum quas continet, exprimi nequeunt. Quare nec diuidi.

Dixi autem, *numerus minor, vt minor*, quia numeri minoris, vtpote quantitatis in partes deſignabiles plures ſecari poterit quælibet vnitas, & ſic augeri numero. Quare auctus numero, diuidi poterit.

THEOR. III. PROPOS. XX.

In qualibet figura numerica, non poteſt eiuſdem proportionis maior numerus capere, quam 9.

Probat. Nam caperet maior numerus. Iam euadit 10. ideſt alterius proportionis, nempe vnitas decimarum.

THEO-

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Non omnis numerus per alium, ita diuidi potest manendo eiusdem rationis, vt non supersit aliquid.

PRobatur diuidere est cognoscere, quot vicibus numerus datus contineatur in diuidendo: sed non omnis numerus ex æquo omnem numerum metitur, cum non sit eius pars, sed multoties partes ex defin. 4. Ergo tunc aliquid remanere debet.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Illud, quod remanet, semper est aliqua pars numeri diuidentis.

PRobatur: Nam ex Axiom. 6. omnis numerus seipsum per vnitatem metitur: Ergo quemlibet alium ex Axiomate 9. per vnitatem metietur, quia numerus quemcúq; numerũ metiẽs metitur etiam omnem numerum, quem ille metitur. Quare, cùm vnitas metiatur omnem numerum saltem per vnitatem, numerus remanens metietur numerum diuisorem saltem per vnitatem. Propterea hoc erit exprimendum.

COROLLARIVM

QVoniam numerus residuus à diuisione est pars numeri diuidentis: Ideo erit numerus fractus, idest non erit totum; sed aliqua pars. Vnde hìc necessariò docendum erit, quomodo fracti scribantur, & quomodo partes eorum nominentur: Numerus itaque fractus necessariò exprimendus duobus numeris; quia ex præced. prop. cùm nõ sit numerus absolutus; sed relatiuus, & se habeat tanquam pars ad totum. Relatiua verò ex Arist. sint simul cognitione consequenter exprimendum erit totum, & pars tali modo $\frac{3}{6}$ cognoscetur enim 3. numerum superiorem concludere in se tres partes numeri 6. Ideoque 3. numerus superior dicetur numerator, quòd numeret partes: at inferior denominator, qui exprimit totum, & indicat, cuius totius partes sint super lineolam numeri descripti, lineola vero interijcitur distinctionis gratia. Superior quoque numerus potest esse maior, & inferior minor; quia aliquando necesse est exprimere habitudinem, & relationem numeri superioris ad inferiorẽ, vt $\frac{8}{2}$ vnde more fractorum id fit: quòd in fractis exprimatur relatio totius, & partis.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII.

Residuum numeri alicuius vnitatis maioris potest habere tot vnitates in minori proportione acceptas, quòd possit diuidi per eundem numerum, quo prior diuisus est.

SIt diuidendus numerus 90. per 8. Iam certum est 8. in 9. vnica vice capere, & residuam esse vnitatem, quæ non capit 8; sed, quia illa est vnitas decimarum, si decima accipiatur tanquam numerus simplex, & proportionis immediatè inferioris, iam habebit numeros 10. capaces semel numeri 8. cum residua vnitate.

PROB. VII. PROP. XXIV.

Si videatur quoties numerus minor contineatur in numeris maioris cuiuslibet proportionis: Deinde successiuè in alijs minoris proportionis cum residuo remanente à diuisione numeri maioris, & hæ vices scribantur per ordinem erit facta diuisio.

QVoniam, vt dictum est propos. 18. in hac operatione proportio non est seruanda. Sed quilibet numerus alium diuidere potest, cuiuscumque proportionis sit: Ideo ponemus numerũ diuidentem. V.g. 34. sub numero diuidendo 7828. absque respectu loci, & quia residuum maioris numeri potest iterum diuidi ex prop. 23. in minori sequenti proportione: Ideo ponemus numerum diuidentem sub maiore numero diuidendo, ad hoc vt ex eo diuiso remaneat residuum iterum diuidendum, sed acceptum in minori proportione tali modo, & ducatur lineola. Video quot vicibus numerus primus diuisor 3. capiat in 7. & cognosco vicem esse duplicem, simulque etiam aspicio, si eadem gemina vice numerus 4. possit capere in numero sequente 8. cum eo, quod remanet à primo numero 7. Sed hic potest capere; ideo scribo 2. seorsim. Et ad hoc, vt sciam numerum subtrahendum multiplico 2. per 3. & faciunt 6. quos subduco à 7. & remanet 1.

7828
34

Scribo itaque 1. residuum super 7. deleoque 7. tali modo, vt possit cognosci, lineolâ super 7. ductâ. Iterumque multiplico 4. per 2. & faciunt 8. quos subduco ab 8. & nihil remanet. Quare scribo super 8. zifrã, & deleo 8. Deleoque etiam totum numerum 34. vt nihil iam amplius eo loco deseruiens, quòd numeri illius proportionis iam sint diuisi. Quamobrem scribo loco immediatè inferiori sub residuo numeri diuisi ad diuidendam proportionem inferioris ordinis, & considero, quot vicibus capiat 3. in residuo 10. tanquam numerum inferioris proportionis acceptum; & video tricies. Scribo ergo 3. apud 2. seorsim, & eodem modo multiplico 3. per 3. & faciunt 9. quos subduco à 10. & remanet 1. Deleo igitur 1. in numero 10. & zifræ deletæ superpono 1, quæ cum 2. facit 12. multiplico itaque 4. per 3. rursus, & faciunt 12. subduco itaque 12. à 12. & nihil remanet: Vnde deleo 1. & 2. & superpono 0. eoquòd nihil remaneat. Deleo quoque numerum diuisorem, tanquam non amplius eo loco deseruientem, sed ad vlteriorem locum promouendum. Quare scribo sequenti loco numerum diuisorem; hac enim mutatione loci fit, vt accedat ad numerum residuum acceptum in minori proportione ex præced. propos. 23. & ideo diuidi possit: Si tamen aliquid remaneat sufficiens. Hic autem nihil remanet sufficiens, cùm tantùm relinquatur 8. numerus primus

primus simplicium vnitatum, in quo numerus 34. capere nequit, & ideo in quotiente apud 3. pono 0. eò quòd in vltimo numero vltimi loci nulla diuisio potuerit fieri, quòd semper seruandum est, quotiescumque occurrerit numerum diuisorem in aliqua proportione non capere: sed diuisorem esse promouendum adhuc ad minorem numerum.

Residuum verò 8. est pars numeri diuidentis ex propos. 21. ideo scribendus est apud alios, sed vt minutia, nempe superiùs 8. & interiecta lineola numerus diuisor 34. quare diuiso numero 7828 per 34. quotiens erit 230. $\frac{8}{34}$ nempe 230. & insuper ex triginta *quater partibus in quibus vnitas diuisa est* 8. *partes*.

Quod si aliquando occurrat in vltimo ipso numero versùs sinistram, qui primus omnium diuidendus est non capere numerum diuisorem, vel vltimum capere: sed non penultimum, vel antepenultimum; tunc ad secundum locum inferiorem promouendus est.

Sit numerus diuidendus 7930. per 794. quia 4. prima diuisoris non capit in 3. ideo assumenda est proportio minor, & prima diuisione non debeo diuidere 793. quia nequit. Sed numerum 7930. Considero itaque quot vicibus capiat 7. in 79. & video; quod nouem vicibus, (neque enim amplius capere potest, vt supra propos. 20. quam 9. in qualibet proportione, licet aliquando minus) ideoque multiplico per 9. diuisorem 794. & fiunt 7146. auferendi à diuidendo 7930. & facta erit diuisio. Quod si iste defectus eueniat non in principio, sed in medio, vt si 7945. diuidantur per 73. Tunc apposita apud quotientem zifra, ad locum inferiorem diuisor promouendus. Sic semel 73. capit in 79. Ideoque quotiens est 1. & residuum est 6 qui cum 4 numero sequentis proportionis facit 64. in quo deberet capere diuisor numerus 73. Cum ergo non capiat, ad aliam proportionem transeundum est, priùs appositâ zifrâ apud quotientem, vt significet 10. Et est deinde diuidendus numerus 646. per 73. Et quia 7. capit in 64. nouem vicibus, & 3. non capit in residuo 16. nouem quoq; vicibus; ideo dico octo vicibus capere & pono 8. apud quotientem; vt fit 108. & facta multiplicatione eueniunt 584. quos subduco a 646. & fiunt 62. residui pro fractis ponendi. Quare quotiens erit 108. $\frac{62}{73}$

Alius modus tutissimus diuidendi erit. Multiplicare priùs sensim numeros diuisoris per numeros simplices, vsque quo eorum summa eueniat maior, quam correspondentis figuræ numeri diuidendi: deinde extrahere summam proximè minorem à numero diuidendo.

V. g. sit diuidendus numerus 993470 per 247. Priùs per numeros simplices multiplico diuisorem 247. hoc modo hic lateraliter apposito priùs per 1. deinde per 2. &c. vsque quò perueniam ad numerum 1235.

247	1
494	2
741	3
988	4
1235	5

maiorem numero 993. constante tribus vltimis figuris diuidendi, quæ debent primo diuisori correspondere. Quo facto video; an reperiatur 993. in his numeris ita multiplicatis: Et si non reperio, summo proximè minorem; nempe 988. deducoque à 993. & remanent 5. & quia 4. apposui apud 988. notando quod 988. est 247. quater acceptus; Idcircò appono pro quotiente 4.

993 | 4
988
5

Deinde assumo aliam figuram à numero diuidendo, nempe sequentem 4. & pono apud 5. & considero in numeris multiplicatis, & genitis à diuisore per numeros simplices ducto; an adsit hic numerus, & video non adesse, nec quidem proximè minorem, sed omnes maiores, vnde apud 4 quotientem pono zifram, & assumo aliam figuram nempe 7, & video, an in serie numerorum adsit hic numerus 547. & video nec hic quidem reperiri; sed proximè minorem 494. ergo quotienti 40. appono 2. lateralem, & deduco à prædicto 547. numerum 494. & residuum est 53. deinde vltimam figuram assumo, nempe 0. à diuidendo, & appono ad 53. & faciunt 530. Reperioq; numerum proximè minorem esse 494. quem deduco à 530. & apud quotientem, item 2. lateralem appono & facta subtractione residuum est 36. quam more residuorum apud quotientem adscribo. Eritque quotiens 4022 $\frac{36}{247}$

547 | 40

547 | 402
494
53

530 | 4022
494
36

Sed licet tutissima sit hæc regula; Attamen prolixa est. Quare poterit deseruire in aliquo magno numero diuidendo per alium aliquem magnum numerum; cùm enim ibi error sit maximi dispendij temporis, & laboris; opportuniùs erit hoc modo operationem contutari; Et nota ex præced Prop. 20. multiplicationem numeri diuisoris non esse continuandam vltra 9. quia magis, quàm nouem vicibus non potest contineri figura diuidens in diuidenda.

Tertius modus apud Italos vsitatus est talis. Sit diuidendus numerus 4680. per numerum 37. Posito numero diuisore seorsum, trahatur infra ipsum lineola. Deinde video, vt supra feci, quot vicibus 3. capiat in 4. nimirum quòd vnica vice; ideo pono 1. pro quotiente super lineolã, & per illum 1. multiplico diuisorem, & numerum genitum sub duabus vltimis figuris diuidendi subscribo.

Et ex inde subduco, & residuum noto sub lineola. Multiplicatis ergo 37. per 1. generat 37. quos deduco à 46 & reliquunt 9. Assumo deinde aliam figuram, nempe 8. à diuidendo, & pono apud 9. Et video, quot vicibus capiat 37. in 98. Cognoscoque capere bis, quia licet 3. capiat ter in 9. non tamen capit 7. in 8. ter: quare dico bis, & sic 7. capit in 8. cum residuo ex 9. etiam bis, & licet capiat magis; nil interest. Ergo apud quotientem 1. appono 2. & multiplico per diuisorem 37. & faciunt 74. quos deduco à 98. & residuum est 24. Assumo rursus vltimam figuram 0. & appono apud 24. faciuntq; 240. Video igitur, quot vicibus capiat 3. in 24 & cognosco, quod octies: Verùm 7. in 0. nullo modo capit. Assumo itaque minus, & dico 3. in 24. capere septies, remanentq; 30. in quibus 7. septies non capit. Assumo itaq; rursus minus, & dico capere 3. in 24. sexties, & residuum est 60. in quibus sexties vtique 7. capit; quia 7. multiplicatus per 6. facit solum 42. Ideo apud

4680 | 1
37 | 37
98

4680 | 12
37 | 37
98
74
240

apud quotientem 12 adſcribo numerum 6. ſignificantem ſex vicibus numerum diuiſorem in diuidendo contineri: multiplicoque per 6. diuiſorem 37. & genitus eſt 222. quos deduco à 240. & reſiduum eſt 18. quem numerum more reſiduorũ apud quotientem ſcribo. Eſtque quotiens 126.$\frac{1}{3}\frac{3}{3}$

4680		126
37		37
98		
74		
240		
222		
18		

EXPENSIO VI.

De Probationibus.

QVoniam in calculandis numeris non rarò eueniunt errores; nunc modus tradendus eſt, quo in vnaquaque regulâ operationes factæ examinentur.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Ablato 9. ex qualibet proportione integra remanet numerus ſimplex denominans eam proportionem.

DEtur numerus 70. à quo auferatur 9. quoties auferri poteſt. Dico quod remanebit numerus denominans eam proportionem, & quia denominabatur à 7. Ideo remanet numerus 7.

Probatur. Nam V. g. 70. ſignificat ſeptem decimas; ſi autem ex decima qualibet dematur 9. in qualibet decima ſupererit 1. cùmque ſint 7. decimæ, erunt reſiduæ ſeptem vnitates, quę conſtituunt numerum 7.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ſiue numeri aſſumantur, vt ſignificantes decimas, ſiue decimas decimarum, &c. ſemper æquali modo idem remanſurum ſimplicem proportionis denominatorem; ac ſi, vt numeri ſimplices accepti fuiſſent. Nam ex qualibet ablatione cuiuſcumque proportionis ſemper remanet vnitas; vt ſi ex 102. auferatur 9. tot vicibus, quot poteſt auferri, remanet numerus 12. à quo deductus 9. relinquitur numerus 3. illa ipſe; qui reſtaret, ſi numerus 1. & 2. tanquam ſimplices vnitates in numero 102. acceptæ fuiſſent. Item à numero 730. aufero 9. quoties fieri poteſt, ideſt vicibus 80. reſiduum erit 10. à quo ſi aufero 9. remanet 1. idem numerus, qui remanet à 7. & 3. vt ſimplicibus acceptis.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Si numerus decimarum multiplicetur per numerum quemcumque, & à multiplicato auferatur 9. quoties fieri poteſt, relinquetur numerus, ac ſi ſimplices numeri fuerint inuicem multiplicati.

SI numerus 80. multiplicatus per 3. & generet 240. Dico, quòd ſi à 240. auferatur 9. quantùm fieri poteſt, relinquetur numerus talis; ac ſi 8. ſimpliciter per 3. fuerit multiplicatus.

Probatur. Nam relinquitur numerus denominans eam proportionem, & antecedens ideoq; à 100. auferatur 9. quantũ fieri poteſt remanet 1. & à 200. reſtat 2. & à 40. remanet 4. Quare ablato 9. à 240. quantũ fieri poterit remanet 24. nempe numerus ille, qui factus, & genitus fuiſſet; ſi 8. fuiſſet multiplicatus per 3. Sed ſit numerus multiplicans, & multiplicatus decimarum V. g. 80. & 30. adhuc idem ſuccedet. Nam producet 2400. à quo ablatus 9. relinquit numerum 24. quem produxiſſent, ſi fuiſſent ſimplices.

COROLLARIVM

HInc eſt: Quod, ſi à numero aliquo genito à ſimplicibus auferatur 9. quantùm fieri poteſt; quod relinquetur idem reſiduũ; ac ſi fuiſſet numerus genitus à numeris decimarum; ſi à 24. relinquitur 6. & à 2400. relinquitur adhuc 6.

Quòd, ſi ſit coniunctus cum aliquo ſimplici, idem eueniet; ſi ab eis priùs auferatur 9. quantũ fieri poteſt; nimirũ à 75. octies remanent 3. & ab 86. nouies, remanent 5. qui ſimplices numeri inuicem multiplicati generabunt talem numerum, à quo ablatus 9. quantùm fieri poteſt, idem reſiduum relinquet; ac ſi in ſua ſpecie, & ab illorum genito ablatus 9. fuiſſet, quantùm fieri potuiſſet. Sic 3. & 5. inuicem multiplicati faciunt 15. & ablato 9. relinquũt 6. quod reſiduum à genito 6450. ex numeris 75. & 86. reſtat. Ratio eſt; quia aſſumptus 7. & 5. vel 8. & 6. vt ſimplices, idem relinquunt, ac aſſumpti; vt decimas ſignificantes, ſic 7. & 5. faciunt 12. & ablato ſemel 9. remanet 3. quòd remanet ablato 9. octies à 75. & ab 8 & 6. vt ſimplices; nempe à 14. idem reſiduum remanet ablato ſemel 9. ac remanet ab 89. nouies ablato 9.

Quare ex præced. multiplicatis inuicem iſtis reſiduis 3. & 5. ſi à genito dematur 9. idem reſiduum dabit, ac ſi à genito ab eorum primitiuorũ 75. & 86. mutua multiplicatione 9. quoties fieri poteſt auferatur. Oportet verò ab illis priùs auferre 9. quantùm fieri poteſt, alioquin, ſi ſemel poſſet auferri, non eſſent ſimplices; ſed decimas ſignificantes.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si à numero collecto in vnam ſummam auferatur aliquis numerus, & à colligendo idem numerus auferatur debent reſidua, tum collecti, tum colligendi remanere æqualia.

Probatur. Nam ſit ſumma a 169. & numerus colligendus ſit priùs 42. & 37. & 81. & 9. qui ſunt notati litera A, & auferatur idem numerus ab vtriſque, V. g. 81. *Dico quod reſidua erunt æqualia.*

A
42
37
81
9
169 a

Probatur. Nam ſi ab æqualibus æqualia demas; quæ remanent ſunt æqualia, ſed numerus colligendus A, & collectus a ſunt æquales: Ergo ablato eodem numero 81. ab vtriſque erunt adhuc reſidua æqualia,

PROB.

PROB. I. PROPOS. XXVII.

Collectionem; an sit benè facta, examinare.

AVferatur à numero collecto, & colligendo 9. quantum fieri potest, numeris, vt simplicibus ad sectandam facilitatem assumptis, ex coroll. propos. 4. Nam, si idem numerus remanet, facta, tum à collecto, tum à colligendo, ablatione, bona erit collectio.

Sit numerus colligendus A, & à primo 39. auferatur 9. quoties potest, remanent 3. qui cum 5. faciunt 8. & cum 1. faciunt 9. qui abijciatur; & deinde assumatur 1. cum 5. faciunt 6. & cum 1. faciunt 7. & cum 9. eueniunt 16. à quibus abijcio 9. residuum est 7. quem scribo seorsum.

A
39
51
15
19
1248

7 | 7

Deinde ad summam B accedo nimirum 124. & addo 1. ad 2. faciunt 3. & 3. ad 4. & faciunt 7. æqualis nimirum numerus alteri 7. iam scripto. Vnde benè erit facta diuisio.

Dices aufertur maior numerus à numero colligendo ab A, quàm à collecto B: nam ex numero A multotics aufertur 9. at à collecto nulla vice: quare non possunt residua remanere æqualia ex propos. 26.

Respondetur posse occurrere quandoque errorem illo solo casu, si error in colligendo commissus sit intermissio, aut superaddito 9. vt patet in numero C, & eius summa D, quæ falsa est; eò quia 9. sit intermissus, & tamen idem numerus 7. remanet.

49 C
51
15
19
9
D 124

7 | 7

Cæterum, cum hic error rarò occurrat, hinc est; quòd regula sit bona; quia licet 9. auferatur pluribus vicibus à numero colligendo A, quàm à collecto B, nihil tamen interest; cùm idem sit auferre 9. à numero A, & non auferri à numero B, vt simplex, dum tamen auferri possit in sua proportione acceptus, vt Coroll. prop. 24. Et patet. Nam idem numerus remanet, si auferatur 9. ab 80. octies, ab 8. sumpto, vt 8. nulla vice. Semper enim remanet 8. propter proprietatem numeri 9. quæ ostensa est Propos. 24.

PROB. II. PROPOS. XXVIII.

Subtractionem examinare: vtrum bene fuerit confecta.

AVferatur 9. Quantum fieri potest à subtracto, & residuo, & id quod remanet notetur, & similiter à numero, à quo deducitur, subducatur 9 quantum fieri potest. Nam, si residua sint æqualia, bona erit subtractio. Sit numerus A, à quo facienda est subtractio, numerus subductus B residuum verò sit C.

3675 A
439 B
3236 C

Accipio residuum C, & aufero 9. quoties fieri potest, dicendo 3, & 2. faciunt 5. & 3. faciunt 8. & 6. faciunt 14. à quibus ablatis 9. remanet 5. & scribo seorsum ad latus crucis. Deinde assumo numerum B subductum, nempe 4. cum 3. faciunt 7. & 9. abijcio scribo 7. ad alterũ latus crucis. Addo hoc 7. cum numero priori seorsim scripto 5. & faciunt 12. à quibus deductis 9. restant 3. & scribo super crucem. Deinde accedo ad numerum A, & 3. addo numero 6. & faciunt 9. quem abijcio, & 5 & 7 faciunt 12. à quibus abijcio, 9. & remanent 3. vt priùs. Ideoque subtractio optima est.

3
5 | 7
3

Ratio est. Quia numerus subtractus cum residuo æquatur numero, à quo fit subtractio. Vnde 9. ab vtrisque æqualiter deductus debet relinquere idem residuum.

PROB. III. PROPOS. XXIX.

Multiplicationem explorare: an bene sibi constet.

AVferatur 9. tum à numero multiplicante, tum à numero multiplicato, quoties fieri potest, & à residuis quoque inuicem multiplicatis 9. auferatur quoties fieri potest, & residuum notetur. Iterumque à numero genito auferatur 9. quantùm fieri potest. Si residuum sit æquale residuo præcedenti iam notato, multiplicatio benè se habebit, & absoluta consistet: Pro exemplo sit numerus 3792. multiplicandus per 97. Aufero 9. assumendo priùs 3, & deinde 7. & faciunt 10. abiecto 9. remanet 1. abijcioque sequentem 9. & 1. cum 2. faciunt 3. quem scribo.

Abijcioque à multiplicatore 97. semel 9. & residuum est 7. multiplico quoque 7 per 3. & faciunt 21. abiectis 9. relinquitur rursus 3. quos scribo, vt vides 7. ad partem crucis, 3. ad ulteram partem, & vltimum 3. super crucem.

3792
97
26544
34128
367824

Deinde accedo ad numerum genitum; & dico 3. & 6. faciunt 9. quem abijcio; hinc 7. & 8. faciunt 15. & abiecto 9. fiunt 6. & cum 2. fiunt 8. & cum 4. faciunt 12. à quo abiecto 9. remanet 3. numerum infra crucem collocandum quia ergo 3. infra crucẽ cũ 3. supra crucem æquales numeri sunt ideo multiplicatio benè se habet.

3
7 | 3
3

Probatur. Nam si assumpsimus numerum multiplicatum, & multiplicantem, vt numeri simplices: Numeri verò simplices inuicem multiplicati producunt ex coroll. propos. 25. numerum, à quo ablatus 9. quoties potest demum relinquit unmerum æqualem residuo; quod à genito restat, si ab eo similiter 9. auferatur.

Quòd, si occurreret ipsum 9 relinqui; abijcitur tamen, & ad latera crucis, & super crucem 0. ponatur. Nam, & 0. infra crucem collocabitur genito, ablato 9. nihil relinquente. Sic 54. & 39 inuicem multiplicatis faciunt 2106. Ablato itaque à 54. 9. remanet 0. & ablato à 39. idem 9. remanet 3. qui multiplicatus cum 0. producit 0. alterã supra crucem ponendam. Quare, & genitus 2106. ablato 9. relinquit 0.

0
0 | 3
0

PROBL. IV. PROP. XXX.

Diuisionem examinare.

EOdẽ modo fit, ac in multiplicatione, & eadẽ ratio valet. Sic V. g. 7945. diuisus per 35. & quotiens sit 227. Auferatur à 35. numerus 9. quo-

quoties fieri potest, & sunt 8. & à 227. remanens 2. multiplicentur inuicem fiunt 16. à quibus ablatis 9. relinquit 7. Deinde à numero diuidendo 7945. auferatur 9. vt supra dictum est, & relinquet 7. Quare bene stabit diuisio: At si adsint minutiæ V. g. si diuidendus numerus esset 7950. & diuisor 35. & quotiens 227 $\frac{5}{35}$; tunc numerator 5. cum quotiente sumendus, & ab eo 9. quoties fieri potest demendus, & relinquetur 7. qui multiplicatus cum 8. residuo diuidentis, dat 56. à quo subductus 9. quantùm fieri potest, relinquit 2. & à numero diuidendo 7950. reiectis 9. prout fieri potest, relinquitur 2. Vnde facta diuisio benè se geret.

PROB. V. PROPOS. XXXI.

Cuiuscumque regulæ operationem per aliam examinare.

SVmma numerorum subtractione collectorum probatur. Sic summa 117. examinatur subtrahendo 39. & 42 & 117. Nam si remanet 36. erit bene facta collectio. Et è contra subtractio numerorum collectione examinatur; sic, si residuum 17. à subtractione numeri 32. à 24 remanens colligatur cum numero 32. qui à maiori subducitur, & efficiat 49. vt priùs, subtractio recta erit.

36
42
39
117

49
32

Ratio patet. Quia si auferatur id, quod additum est, quod est subducere relinquitur necessariò id, quod erat, & si addatur id, quod ablatum est, idem, quod erat, integratur. Quare si benè erit facta collectio, subtractione idem restituetur, quod priùs, & si bona est subductio, additione, quod priùs erat, integrabitur.

Multiplicationem numerorum ex diuisione experimur. Nam si multiplicationis summa per numerum, vel multiplicatum, vel multiplicantem diuidatur, necesse est alterum ex ipsis prouenire, quòd, si non proueniat, signum est collectionem, vel multiplicationem non fuisse exactam.

Partitio quoque examinatur multiplicatione: Nam si numerus quotiens cum numero diuidente multiplicetur, additis, si fortè fuerint, reliquijs, debet summa multiplicationis æquare numerum diuisum; quòd si non æquet, signum est diuisionem non esse perfectam, sed in aliquo deficere.

Ratio est, quia diuidere est numerum in tot partes secare, quot sunt in diuidente vnitates, & multiplicare est numerum integrare ex alio numero, tanquam para assumpto toties, quot sunt in multiplicante vnitates, ex def. 15. & 16. Vnde dato multiplicante, qui quotiens erat, & multiplicato, qui erat diuidens, necesse est, vt idem numerus rursus integretur. Sicut dato eodem genito, & integrato, & eodem diuidente necesse est, vt idem quotiens numerus restituatur, qui multiplicatus fuerat.



TRACTATVS IX.

IN V. LIBRVM EVCLIDIS

PARS PRIMA.

De Proportionum Notione.



VM definitiones, quas ad initium Quinti libri tradit Euclides multa luce indigeant, vt percipiantur, visum est earum explicationem profusiùs prosequi, & ne dum eas, vt Mathematicorum mos est, tanquam nomina explanare; sed proportionum, quam explicant, essentiam probare, diuisiones, modumq; eas cognoscendi, & in eis argumentandi exponere: vt hac cognitione præuia, quæ deinde 5. libro ostenduntur genericę proportionum habitudines faciliori captu comprehendantur.

EXPENSIO I

Quid sit Ratio.

RAtio est quædam quantitatiua relatio. Relatio secundùm nostra principia philosophica expens.4. de relatioe concl. 5. & expens. 7. concl.3. est quædam dependentia obiectorum in eis cognoscendis, quæ fundatur in aliqua positiua, seu dependentia, seu saltem applicatione vnius rei ad aliam. Ideoque Ratio erit quædam relatio quantitatis orta ex applicatione reali, aut possibili ad minùs quantitatis ad aliam quantitatem; vt inuicem commensurentur, vel saltem inuicem se contineant, aut se superent, & hæc possibilis quantitatum commensuratio, vel actualis est illa, ob quam intellectus considerat alteram quantitatem dependenter ab altera, & inter eas respectum, & relationem recognoscit. Cum ergo Ratio in relatione partis, & totius consistat, & commensurationis, operæ prætium est priùs partis, & totius definitionem declarare.

DEFINITIO I.

P*Ars est magnitudo minor alia magnitudine, quæ multiplicata eam adeo mensurat, vt nihil mensuratæ maioris magnitudinis supersit.*

Duplex ex pars alia *Aliquota*, alia *Aliquanta*. Aliquota hic definitur, quæ talis est, vt tot vicibus capiat in maiori, sint illæ vices, quot, quot sint, vt nihil supersit tale, quod illi adamussim nō commensuretur: Sed totum multiplicatis illius vicibus penitùs correspondeat. Sic vncia, seu digitus metitur lineam 4 digitorum quater acceptus, & lineā sexdecem digitorum sex decies acceptus: sed si aliquid supersit in toto, quod mensuranti quantitati non adæquetur, sed eius alicui parti, tunc dicitur pars aliquanta, de qua definitio non est: Sic digitus, linea 4. digitorum, & $\frac{1}{4}$ dicetur pars aliquanta; quia id quod superest quatuor digitorum, & vnica quarta pars ipsius digiti mensurantis.

DEFINITIO II.

M*Vltiplex est autem maior minoris, cùm minor metitur maiorem.*

Esse partis est relatio minoris quantitatis ad maiorem; Multiplicitas verò est relatio maioris quantitatis ad minorem; Intelligitur verò multiplicitas non respectu partis aliquantæ, sed aliquotæ ita, vt vices quibus mensura adhibetur æquent pluries replicatæ tandem maiorem, & sibi multiplicem.

DEFINITIO III.

Æ*Quemultiplices illæ magnitudines dicuntur cum æqualibus numero vicibus à minori quātitate mensurantur.*

Duæ lineæ quatuor palmorum dicuntur æque multiplices vnius palmi; quia palmus quatuor vicibus adhibitus successiuè, & hanc, & aliam mensurat.

DEFINITIO III.

R*Atio est duarum magnitudinum eiusdem generis secundùm quantitatem habitudo.*

Quùm duæ quantitates; sint illæ, seu lineæ, seu superficies, seu solida inuicem comparantur, & sunt eiusdem generis secundùm quòd vna maior est, quā alia, seu minor, seu æqualis; tunc illæ magnitudines inter se Rationem consequi dicuntur, & hæc collatio, seu comparatio dicitur Ratio, ab aliquibus etiam Proportio; Quare patet; cur debeant esse eiusdem generis: quia scilicet, vt inquit Arist. 10. Methaph. tex.4. *mensura eiusdem generis est, magnitudinum namque magnitudo, & secundum vnumquodque longitudinis longitudo, latitudinis latitudo, vocum vox, grauitatis grauitas; &c.*

Cum ergo magnitudines inuicem referātur prout vna excedit, vel æquat, vel ab alia deficit, hinc est, quod debeant eiusdem generis esse: alioquin inter ea, quæ diuersi generis sunt, nec maius quid, nec minus, nec æquale est; siquidem numerus non potest dici æqualis alicui superficiei, aut maior, aut minor: cùm in eodem genere non reperiatur, & ratio fundamentalis est, quia inter ea, quæ diuersi generis sunt non potest fieri realis applicatio; vnde habitudo, quæ in reali, seu possibili applicatione fundatur, inter ea reperiri nō potest. Maximè quòd mēsura debet nos inducere in cognitionem rei mensuratæ; at quomodo id eueniet, si quod mensuratur alterius generis est; nec suæ mensuræ conforme reperitur.

Dicitur quoque secundum quantitatem: quia comparatio penes qualitatem Ratio non vocatur; nec lineæ referri Ratione, quòd ambæ, V. g. sint albæ, aut nigræ. Sic dicitur *habitudo* in genere, nec explicatur, in quo consistat ista relatio; an in ratione mensurantis, & mensurati: quia licet hanc proportionem dicant inuicem aliquæ quantitates, quæ dicuntur rationales; non tamen omnes id habitudinis assequuntur, cùm quædam dictæ irrationales nullam commensurationem adipiscantur, sed earum proportio in eo consistat: quòd ampliùs non sint respectu alterius, quam quod sunt, quæ nihil vltra quantitatis obtineant ad alteram collatæ; quàm quòd consequuntur.

Verum fundamentum huius relationis dicitur à Mathematicis antecedens terminus verò consequens. Sic linea 3. palmorum collata ad lineam 6. palmorum dicetur antecedens; & linea 6. palmorum subsequens, & è contrariò quoque linea 6. palmorum relata ad lineā trium palmorum dicetur antecedens, sicut illa trium palmorum consequens.

DEFINITIO IV.

Proportio est rationum similitudo.

Proportio dicitur etiam analogya; ab Euclide autem vocantur quoque proportio, & est in ratione continentis, vel contenti, vel maioris, & minoris, aut æqualis similitudo. Ità quod fundamenta huius relationis non sint quantitates ipsæ: sed quantitatum habitudines.

Cum ergo repetiuntur duæ magnitudines, vt 2. ad 6. quæ se respiciant in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, vt aliæ, V. g. vt 4. ad 12. tunc duæ illæ 2. & 6. dicentur consequi eandem analogyam, & proportionem; quam 4. & 12. Dixi autem in ratione maioris, & minoris; vel æqualis, non in ratione mensurantis, & mensurati: quia sunt aliquæ quantitates, vt inferiùs suprà, & sequenti expens. pleniùs dicam, quæ irrationales nulla cōmensuratione inuicem referantur: Quare similitudo earum ita erit, vt V. g. quantitas A collata ad quantitatem B sit tanta, & non amplius, vt quotitas C respectu quantitatis D, ita quòd licet vices, quibus A mensurat B, aut vices, quibus C, mensurat D, non possint exprimi, adhuc tamen similes sint: sed ad pleniorem huius rei declarationem videamus. Vnde dignoscatur in quantitatibus Analogya.

EXPENSIO II.

In quantitatibus quænam sint proportionis notiones.

Sciendum est quantitates respectu alterius, alias irrationales esse, alias rationales. Rationales quantitates sunt duę, vel plures, in quarum vna reperitur aliqua pars æqualis alteri parti alterius, quę mensuret ambas seu per æqualem replicationē illius partis mensurantia, seu per inæqualē. V. g. rationales dicentur lineæ duæ, quarū vna sit 7. palmorū altera 20. palmorū: quia palmus in vtrisq; est pars ęqualis, per quam ita metiri potest linea 7. palmorū, vt nihil remaneat ex ea, cum tota longitudo 7. palmis æqualis sit, sicut, & linea 20. palmorum vigesies multiplicatos palmus cōplectitur, vt nihil remaneat. Irrationales verò sunt tales quædam, lineæ, vel quantitates, in quibus pars nulla reperitur, quæ sit æqualis parti alterius quantitatis; per quam ita metiatur, tum vna, tum alia; vt nihil remaneat. V. g. diameter quadrati, & latus sunt lineæ incommensurabiles; Quia nec palmus, nec semipalmus, nec quarta pars palmi; nec aliqua alia mensura; quæ ex æquo mensuret vnam V. g. latus, vt nihil ex eo supersit, mensurabit, & alteram: quia semper, aut aliquid superabit, aut aliquid deficiet, & (quia faciliora sunt antè proponenda) ponemus primò definitionem habitudinis rationalis vnius quantitatis ad aliam.

DEFINITIO V.

Rationem habere dicuntur rationales magnitudines, cùm vna alterius partes aliquotas continet.

Partes aliquotas appellamus eas, quæ multiplicatæ totam quantitatem æquant, vt diximus.

Cùm ergo aliqua quantitas continet partes alterius, illa respectu alterius dicitur habere rationem, & habitudinem. Diximus verò partes, non assignando quot sit; quia siue partes, quas continet, prima quantitas A, mensurent quantitatem alteram B per eundem numerum, seu eam superent, seu minus sint, nihil interest; & ita linea 7. palmorum habet Rationem lineæ 6. palmorum, & lineæ 7. palmorum, & lineæ 20. palmorum, seu 30. licet tamen non eiusdem speciei.

DEFINITIO VI.

Irrationales quantitates inuicem habitudine referuntur, & relatione, cùm multiplicatæ se inuicem continere possunt.

Ratio huius definitionis est, quia per continentiā partium nequaquam poterat definiri; cùm nulla pars in vna sicut nec in altera detur; quę pro communi mensura deseruire possit. Vnde præcedens definitio non poterat deseruire: licet enim, & hæc definitio rationalibus quantitatibus quoque conueniat; non tamen illas per hanc definitionem, quæ parum obscurior est, definire cōnoniens visum est ob facilitatem sectandam; licet Euclides id fecerit.

Quod autem quantitates, quorum vna multiplicata superare potest aliam V. g. duo latera diametrum vnum, sicut diametri duo latera duo, & sic continuè, habitudinem dicant, patet. Nam secundum magis, & minus se inuicem excedunt,

& ideo habitudinem talem habent; vt saltem quoad multiplicationē comparabiles sint: Nam multiplicatæ saltem poterunt esse fundamentum proportionis, & ita speculationi Mathematicæ subijci. V. g. circumferentia ad diametrum proportionem habet, sed irrationalem; ideoque potest esse fundamentum proportionis. Nam poterit dari aliqua alia linea recta irrationalis ad quam se habeat diameter, vt ad circumferentiam. Si verò multiplicata non superet aliqua quantitas, aut non superetur, habitudo inter illas non est. Sic infinita quantitas non habet relationem aliquam quantitatiuam ad alteram quantitatem infinitam; quia infinitum, quantumuis multiplicatum, infinitum non superat. Quòd autem hic mutuus excessus proportionalium quantitatum sit fundamentum similitudinis alicuius patet. Quia quantitates duæ A, V. g. ad B in omni multiplicatione quantitatis A, quæ adhibeatur possunt inuicem se habere, ac duæ aliæ C, & D, si & ipsæ tot vicibus multiplicentur nimirum fundamenta, vel termini æquo numero vicium multiplicata assumantur: nam potest esse, quòd si fundamentū A multiplicatū 20. vicibus minus inueniatur quam B terminus suus; quòd sic quoque fundamentū C 20. vicibus multiplicatum minus inueniatur, quàm suus terminus D: Vel si multiplicetur fundamentum A 21. vicibus, & maius inueniatur, quā suus terminus B: Quod sic quoque fundamentum C 21. vicibus assumptum suo termino D maius inueniatur.

At si è contra termini multiplicentur duabus vicibus, & fiat maior B fundamento A, & deinde terminus alter D multiplicetur duabus vicibus, quòd similiter euadat maior quam C, & sic semper in omni multiplicatione æquis vicibus adhibita, aut fundamenti, aut termini succedat; Omnino in hoc A, & B quantitates se respicient similiter, ac C, & D, & fundamentū primum habitudinis ad suum terminum habebit similitudinis relationem eandem, quam fundamentum secundum ad suum terminum; quia simili modo in omni multiplicatione, quæ possit fieri fundamentum primum excedit suum terminum, sicut aliud secundum fundamentum excedit quoque suum: Vel si æquatur primum, æquatur quoque secundum, vel si primum fundamentum termino suo sit minus, hoc quoque secundum fundamentum relationis suo termino est minùs. Ecce ergo in istis fundamentis, quæ multiplicata superant suos terminos, vel superantur ab ipsis, aliqua in hac mutua termini, fundamentiq; superatione, similitudo: cùm, & aliud fundamentum æquali multiplicatione multiplicatum superet quoque suum terminum.

A B
C D

At si daretur aliqua quantitas, V. g. angulus contactus tanquam fundamentum, qui ad suum terminum angulum rectilineū comparatus semper minor inueniretur, hæc habitudo alteri habitudini, V. g. alterius anguli contactus cum altero angulo rectilineo comparari nequit. Nam angulus primus contactus nunquam potest, aut æquare, aut superare suum terminum rectilineum; sicuti nec alter angulus contactus potest vnquam superare suum; & ideo nullam aliam habent fundamenta, cum suis terminis similitudinem, nisi quòd minus sunt; at si sint minus eodem modo, & simili ratione, seu habitudine dissimili dignosci nequit: cùm nec sint quoad suas partes comparabiles, eò quòd sint irrationales; neque earum similitudo proportionum quò ad omnem, multiplicationem, & genericam similitudinem probari possit.

Patet itaque, cur habitudo duarum proportionum irrationalium definiatur per earum mutuā superationem; si multiplicentur: Quia hoc tantùm præbet fundamentum similitudinis ipsarum proportionum. Et hæc similitudo proportionum est illis, quæ speculationi, & argumentationi Mathematicæ deseruit.

EXPENSIO III.

Quænam quantitates proportionem consequantur.

OPeræ pretium est cognoscere, quænam sint illæ quantitates, quæ proportione, & ideo analogys gaudeant; ne aliquando sumamus eas quantitates, quæ nulla proportione assimilari possunt, tanquam in ea similes; & sic ab euidentia in manifestos errores incidamus.

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Infiniti ad infinitum nulla est proportio.

PRobatur, quoniam infinitum multiplicatum non potest superare aliud infinitum; neque illud continere. Siquidem infinitum, vt voluere antiquiores est illud, quod in se continet, quid quid est conceptibile illius; si vero multiplicaretur, iam esset aliud infinitum, cum quo multiplicitatem constitueret.

Deinde iuxta Arist. est illud infinitum, in quo est semper aliquod vltra accipere; si autem infinitum non adæquaret infinitum multiplicatum, in eo iam non esset vltra quid acciperetur; siquidē acceptū esset quid quid eius esset dum aliū adæquare nequit, ergo infinitum non potest habere aliud infinitum maius se, & ideo multiplicatum erit.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

Finitum nullam dicit rationem cum infinito.

PRobatur, quia finitum, si maneat finitum nūquam aut æquabit, aut superabit infinitum; sed illæ quantitates inuicem dicunt proportionē, quæ se mutuo possunt superare, ergo finitum infinito nulla proportione conformatur.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Puncta, quæ sunt in aliqua quantitate nullam dicunt proportionem Mathematicam, & cognoscibilem, cum punctis, quæ sunt in alia.

PRob. Ea enim, vel finita sunt, vel infinita: Si infinita ex præcedenti nullam dicunt inuicem rationem, si finita; vel sunt indistinguibilia, & indetermina, vel non. Si indetermina

iam

iam nequeunt se inuicem superare: Nam quòd indeterminatum est multiplicari nequit; cùm eius neque hæc, neque illa pars adsit, nec si multiplicetur, quantitas illius multiplicationis agnoscitur.

Si determinata sunt, vel sunt æqualia quantitate, & hoc est falsum: Nam omnes lineæ essent cómensurabiles, vel quantitate inæqualia: At earum quotitas non agnoscitur, nec determinata est. Nam quantitas puncti saltem sub indiuisibilitate sensibili latet: Ergo multiplicata, incertum erit, an se superent, aut æquent, siue non.

2. Probatur. Nam demostrationi Mathematicę deseruire non possunt; cùm ad hoc lis inter Phylosophos pendeat; an sint puncta, vel partes; an sint finita, vel infinita; an distincta, seu indistincta; an æqualia, seu inæqualia. Quare nec vlla proportio, si qua esset, certa reperiretur, & indubitabilis, quæ fundamentum demostrationi Geometricæ firmum præberet.

CONCLVSIO IV. PROP. IV.

Inter puncta, & lineas. Inter lineas, & superficies. Inter superficies, & corpora nulla proportio intercedit.

PRobatur. Nam nec punctum quantumuis multiplicatum lineam adequare potest, nec linea superficiem, nec superficies corpus, cùm vel infinitæ sint, vel indeterminatæ, nulloque certo numero comprehendantur: Quare ęquè multiplicari non possunt, cum earum numerus non agnoscatur.

COROLLARIVM.

HInc habes, quòd ex Geometria, quæ in indiuisibilium proportionibus fundatur omnino suspecta sit; licet enim conclusiones, quas deducit verè reperiantur: non inde tamen hinc illa certitudinem acquirit, vel in principijs, vel in illationibus; cum à præmissis falsis verùm sequi possit, vt Logici fatentur, vt patet ex hac omnis homo est bellua, omnis bellua est viuens, ergo omnis homo est viuens.

EXPENSIO IV.

De diuisione Rationum.

RAtio apud Mathematicos vocatur etiam proportio: quia sumunt fundamentum proportionis pro ipsa proportione. Vnde diuisiones, quæ sequuntur Rationum, vocantur etiam proportionum.

CONCLVSIO I. PROPOS. V.

Proportio rationalis diuiditur in duas, inæqualitatis, & æqualitatis.

PRobatur: Quia aliqua quantitas ita continet aliam, vt ab ea contineatur, vt duæ lineę 7. palmorum se inuicem commensurant. Alia verò continet magis aliam, quàm quòd contineatur ab ea: vt linea 7. palmorum continet lineam 3. palmorum, & amplius: at linea trium palmorum non continet lineam septem palmorum: nisi secundũ quid, & quoad aliquos palmos.

CONCLVSIO II. PROP. VI.

Ratio inæqualitatis quæcumque etiam irrationalis; quæ semper inæqualitatis est, diuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis.

PRob. Nam quantitatũ inæqualium, vel maior confertur ad minorẽ, & hæc maioris inæqualitatis est, vel minor ad maiorem, & hæc est inæqualitatis minoris. Neque tibi videatur maior ad minorem eâdem relatione referri, quâ minor ad maiorem; est enim diuersa relatio, & proportio. Quoniam quantitas maior V. g. quinque palmorum linea ad minorem trium palmorum habet maiorem proportionem, quàm minor ad se, cũ eã contineat semel, & insuper ipsius duas tertias partes: & minor ad maiorẽ collata minorem proportionem habet, cum minus ipsius contineat; siquidem nec totam quidem continet, sed tantum tres partes ex quinque, quibus constat. Cum ergo maioris ad minorem maior proportio sit, quam minoris ad maiorem patet esse diuersas, & ideo distingui.

CONCLVSIO III. PROP. VII.

Ratio rationalis maioris inæqualitatis secatur in sex genera. Si proportionem Æqualitatis multiplicem, superparticularem, superpartientem in multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. *At minoris inæqualitatis in easdem species quoque se recipit verùm ad distinguendum, & indicandum; quòd sit minoris inæqualitatis additur particula* sub: *ita dicitur submultiplex, subparticularis, subpartiens, &c.*

PRobatur, & simul singulæ proportiones assignatæ explicantur.

Nam maior continet minorem, aut semel, aut pluries. Si maior continet minorem pluribus vicibus ex æquo, vt nihil supersit, ita vt minor maioris pars aliquota sit, vt palmus est pars decima lineæ, quæ sit decem palmorum; dicitur multiplex. Multiplicaturque secundùm vices, quas continet minorem V. g. dicitur dupla, tripla, quadrupla, quæ continet minorem bis, ter, quater. At si minor conferatur ad maiorem dicitur subdupla, subtripla, subquatrupla; quòd minor contineatur, à maiore bis, ter, quater, &c. At si continet pluribus vicibus, & aliquid insuper remaneat; tunc, aut id, quod remanet, facit vnã partẽ aliquotã minoris, aut nõ, sed plures partes, si facit vnam partem aliquotam minoris; tunc dicitur multiplex super particularis; Sic 9. ad 4.

ad 4. habet proportionem multiplicem super particularem; quia bis 4. continet, & insuper quartam ipsius partem; ita 26. ad 6. habet rationem multiplicem super particularem; cùm quater sex contineat, & insuper 2. nimirum tertiam eius partem.

At si ne dum pluries contineat; sed insuper plures partes eius, quæ non conficiant vnam partem aliquotam. Tunc est multiplex super partiens V. g. 27. ad 5. comprehendit enim quinquies 5. & insuper duas eius partes, quæ aliquotam partem non conficiunt, cum non mensurent numerũ 5 ex æquali; si autẽ conficerent vnam partem aliquotã, iam illa esset Ratio multiplex superparticularis propter vnicã partem aliquotam, quæ superesset, vt est 26. ad 6. nam 2. qui supersunt tertiam partem numeri 6. conficiunt.

Facessunt autem hæ duæ Rationes in diuersas species, quæ denominantur iuxta partes, quas cõtinent E. g. si multiplex supparticularis talis sit, vt maior bis contineat minorẽ, & remaneat pars dimidia dicitur dupla sesquialtera, si bis, & tertiam partem minoris, dicitur dupla sesquitertia; si ter, & insuper quartam partem, dicitur tripla sesquiquarta, &c.

Ceterum si Ratio esset minoris inæqualitatis tunc adderetur particula *sub* 3. & diceretur subdupla sesquialtera subtripla sesquiquarta.

At si de multiplici superpartiente loquamur, hęc quoq; denominatur iuxta vices, quas maior cõtinet minorem, & iuxta id, quod insuper continet V. g. Si quinquies minorem contineat, & insuper 3. ex quatuor partibus, quibus minor constat, vt est 23. ad 4 dicitur Ratio quintupla super tripartiens quartas, sic si esset 22. ad 5. diceretur quadrupla superbipartiens quintas, &c. Et hoc quoad multiplicem proportionem maioris inæqualitatis, Verùm si sit minoris inæqualitatis idem dicendum prorsus; nisi quòd particula *sub* est addenda pro *super* V. g. quadrupla subbipartiens quintas, Tripla sub tripartiens octauas, &c.

At si maior contineat minorem semel tantùm; tunc est ęqualitatis. Verùm si contineat semel, & insuper vnam eius partem aliquotam; tunc dicitur superparticularis, V. g. 8. ad 9. habet Rationem superparticularem; quia 9. continet 8. semel, & insuper octauam eius partem; sic 10. ad 8. Rationem superparticularem tenet; quia 10. semel continet numerum 8. & insuper eius quartam partem, quæ est 2.

Quæ in species multas secatur iuxta diuersas partes, quas insuper maior continet minoris quãtitatis: Nam si minorem quantitatẽ contineat semel, & eius dimidiam dicitur superparticularis sesquialtera, si tertiam partem, dicitur sesquitertia, &c.

At si semel contineat, & insuper aliquas partes amplectatur vnam aliquotam non integrantes, vt 9. continet 7. semel, & insuper duas partes, quæ 7. non diuidunt ex æquo, nec sunt eius partes aliquotę; tunc est Ratio superparticularis partiẽs.

Quæ, & habet diuersas species iuxta partes, quas continet maior minoris vltra continentiam totalem ipsius maioris; Sic si contineat maior minorem semel, & 3. partes, ex 10. vt se habet 13. ad 10. dicitur Ratio superparticularis tripartiens decimas, & ita de alijs. Et hę sunt Rationes maioris inęqualitatis: at minoris inęqualitatis sũt ipsæ eędem: nisi quòd pro particula *super* addatur particula *sub*. Sic Ratio 2. ad 3. erit subparticularis sesquialtera, sic 8 ad 10. erit proportio subparticularis sesquiquarta. Sic 5. ad 7. erit Ratio subparticularis bipartiens quintas, &c.

PROB. I. PROPOS. VIII.

Datis duobus numeris reperire, quam Rationem ex assignatis dicant.

Dentur primo 5. & 20. de quibus volumus agnoscere, in quã Ratione inuicem sint; diuidatur maior per minorem, & quotiens erit 4. quia ergo est numerus plurium vnitatum, & nihil remanet. Dico quod est Ratio multiplex, & dicitur quadrupla, quia 5. numeri 20. est quarta pars aliquota: igitur 5. ad 20. erit Ratio multiplex subquadrupla, & 20. ad 5. erit Ratio multiplex quadrupla.

Detur secundo 15. & 35. Diuido rursus maiorem per minorem, & quotiens est 2. remanentq; 5. diuido rursus per hoc residuum numerum minorem, & quotiens est 3. Quia itaque primus numerus quotiens est 2. dico esse rationem multiplicem duplam; quia verò secundus est 3. pars aliquota numeri 15. dico esse duplam sesquitertiam.

Verum si aliquid adhuc remaneret V. g. si esset datus numerus 16. & 35. tunc primus quotiens esset 2. & ideo Ratio esset dupla, & residuum essent 3. per quod diuisus numerus minor 16. aliquid remanet nempe 1. ideo dicitur Ratio tertij generis multiplex, & superpartiens, nec secundus quotiens quæritur, cùm residuum numeri minoris pars aliquota non sit, sed vterque numerus minor, & residuum exprimitur, & dicitur *dupla tripartiens* ob 3. residuum, *decimas sextas* ob 16. numerum minorem. Vnde 35. ad 16. habet proportionem multiplicem duplam tripartientẽ decimas sextas; idest complectentem bis minorem, & insuper tres partes ex 16. quas numerus minor continet.

Eodem modo agendum est; si est Ratio superparticularis, vel superparticularis partiens: Sic si quæratur, quę sit Ratio 10. ad 8. diuidendus est numerus maior 10. per 8. & quotiens est 1. remanentq; 2. quo diuisus 8. dat per quotientem 4. dico itaque proportionem 10. ad 8. esse superparticularem sesquiquartam; at si numerus minor non diuideretur ex ęquo, & aliquid remaneret; tunc non esset superparticularis; sed superpartiens, vt si quæratur Ratio 10. ad 7. Iam quia 7. diuidit 10. semel, & quotiens est 1. dicitur superparticularis, at quia 3. remanent, per quem ex æquo non diuiditur 7. & aliquid remanet. Ideò est superparticularis tripartiens ob 3. residuum, septimas, quòd innuit numerum minorem 7.

COROLLARIVM.

Si quis volet exprimere Rationes per numeros. Si sint maioris inæqualitatis multiplicis eam exprimet eo modo, quo solent fractiones exprimi, ponendo tamen si sit maioris inæqualitatis numerum maiorem super lineam, & minorem infra eam, V. g. scribet proportionem duplam, sic $\frac{2}{1}$ triplam $\frac{3}{1}$ quadruplam $\frac{4}{1}$

At, si sit multiplex super particularis, exprimet per integrum, & fractionem, vt quintupla sesquiquarta $5\frac{1}{4}$ vel reducendo totum numerum in fractionem $\frac{21}{4}$

Si

Si autem sit multiplex superpartiens exprimetur nihilominùs per integrum, & fractionem eodem modo vt 2. & $\frac{3}{7}$ exprimit Rationem duplam tripartientem septimas, vel etiam poterit exarari reducendo totum in fractionem scribendo $\frac{17}{7}$. Et ita agendum est in superparticulari exprimendo eam per vnitatem tanquam per integrum, & per fractiones, vt Ratio 8. ad 10. nempe superparticularis sesquiquarta exprimitur, vel numero $1\frac{1}{4}$, vel per $\frac{10}{8}$ vel per $\frac{5}{4}$

Idem obseruabitur in exprimendo superparticulari multiplici, & efficietur $1\frac{3}{7}$ vel $\frac{10}{7}$ quæ est Ratio superparticularis tripartiens septimas.

At sit exprimenda Ratio, quam habet numerus minor ad maiorem numerus minor ponetur super lineolam, & maior infra.

Sic submultipla erit $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$, &c. multiple subparticularis erit $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ Multiple subpartiens $\frac{1}{2\frac{2}{3}}$ subparticularis $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ subpartiens $\frac{1}{1\frac{2}{3}}$

EXPENSIO V.

De rationum compositione.

CVm proportiones, Rationumque similitudines debeamus declarare præmittenda est earum compositio; quæ eam immutat similes proportiones, vel dissimiles componendo.

Obserua etiam esse proportionem duplam, triplam, &c. aliam duplicatam, triplicatam, aliam compositam.

Proportio tripla, quadrupla, &c. est, cùm quantitas maior continet maiorem ter, quater, quinquies, &c. vt 2. continetur à 4. vel 6. vel 10. At proportio duplicata, triplicata, quadruplicata est; cùm numerus, vel quantitas multiplicat se, & suum productum, & productum producti, & sic successiuè: Quoties enim interuenit hæc multiplicatio, tot vicibus dicitur multiplicata, sic si semel fiet est simplex; si gemina vice, est duplicata; si ter, est triplicata; vt si 2. multiplicet se, & fiat 4. hæc est proportio simplex: at si iterum 2. multiplicet 4. & fient 8. est duplicata, & si iterū 2. multiplicet 8. & fiant 16. est triplicata, & 32. quadruplicata est proportio huius numeri ad 2.

At si hæc multiplicatio non per eandem proportionem fiat dicitur composita, V. g. si 2. ad 6. dicat proportionem, & 6. ad 9. proportio 9. ad 2. dicitur composita ex proportione 2. ad 6. & 6. ad 9. in nulloque alio differt à duplicata; nisi quod illa semper eadem est, & continua hic verò proportio non continua: sic 3. 9. 27. sunt numeri, qui continue proportione progrediuntur; ideoq; 27. ad 3. dicitur habere proportionem duplicatam. Nimirum gemina vice repetitam; At 3. 6. 9. sunt numeri, qui continua proportione non correspondent; neque enim similis Ratio est 3. ad 6. quam 6. ad 9. cùm prima sit subduple, nempe 1. ad 2. Secunda verò subparticularis sesquialtere nimirum 2. ad 3. & ideo 9. dicitur habere ad 3. proportionem compositam.

Itaque proportio tripla: quadrupla, &c. est propriè Ratio: at verò duplicata, triplicata; vel etiam composita est Proportio possibilis: nempe inter 2. V. g. & 16. possunt intercipi, & interseri duo proportionales numeri dicentes inuicem similem proportionem, & Analogiam silicet 4. & 8. inter 2. & 16. & erunt 2. 4. 8. 16. & triplex similitudo intermediabit nimirum 2. ad 4. prima, 4. ad 8. secunda, 8. ad 16. tertia. Sic composite est proportio possibilis, quæ potest intercepi inter duos numeros; sed dissimilis, & diuerse, si inter eos plures numeri interijciatur. Sic 2. ad 10. habet proportionē cōpositā: quia duo intermedij diuersam proportionem dicent, vt 2. 4. 6. 10. Nam proportio 2. ad 4. est differens ab ea, quam habet 6. ad 10. cùm hæc sit subparticularis quadripartiens sextas, at illa subduple.

Aduerte autem vnius quantitatis ad alteram non esse vnicam compositam proportionem; sed multis posse eam respicere compositis proportionibus pro vt sunt quantitates, quæ inter vnam, & alteram mediant, quæ sunt infinitæ, ita 9. dicit proportionem compositam ad 3. eius; quā habet 6. ad 3. sed etiam erit composita quam 4. ad 3 & quam 5. ad 3. Sic inter 100. & 5. multæ, multæque proportiones interponi possunt, ex quibus omnibus dicitur componi proportio 100. ad 5. ve 100. 20. 5. 100. 50. 5. 100. 30. 5. 100. 10. & 5. sic tot erunt compositæ proportiones, quot numeri possunt interponi inter 100. & 5.

Vnde proportio composita est etiam simplex; prout eam animaduertes: Nam, si V. g. 10. compares ad 5. erit simplex; at respectu 5. & 7. erit composita ex proportione 5. ad 7. & 7. ad 10.

Ratio verò cur inter vnam quantitatem, & aliā positā quantitate intermediā extreme ex illā dicātur componi est: quia cum V. g. 100. habeat in se eas partes, quas 50. possidet tot vicibus contentas prout continetur in 100. V. g. duabus vicibus necesse erit; quod, & obtineat omnes partes secundum quas numerus ipse 50. continet 5. quæ sunt 10. ideoque 5. decies acceptus componit 50. & etiam in duplo maiore proportione sumptus; nempe secundùm eam, quā 100. respicit 50. componet numerum 100. Sic proportio 10. ad 5. componitur ex proportione alicuius numeri intermedij, vt 8. Nam 5. ad 8. est vt $1\frac{3}{5}$ vel $\frac{8}{5}$ nimirū quātitas 5. cum tribus vnitatibus, vel partibus accepta æquat 8. at 8. est ad 10. vt $\frac{4}{5}$ nempe; si ad 8. addatur quarta eius pars æquat 10. Ergo quantitas 5. aucta tribus partibus ipsius 5. nempe 3 & quarta parte ipsius 8. nempe 2. æquabit 10. Quare proportio 10. ad 5. constat ex proportione; seu partibus, quibus 8. continet 5 & hie quibus ipsa quantitas 10. continet 8. comparata ad 5. & 8. secus verò si ad vnum simplicem numerum.

Et hinc licet definitiones harum proportionum colligere.

DEFINITIO VII.

PRoportio replicata est; cum trium magnitudinum, vel plurium, eadem est ratio primæ ad mediam, quæ media ad tertiam, & tertia ad quartā prima enim dicitur duplicatā habere proportionem ad tertiam; triplicatam ad quartam, & sic consequutiuè donec termini extiterint.

DEFINITIO VIII.

RAtio composita est, cum rationum quantitates aliquam effecerint rationem inter se multiplicata.

Rationum quantitates sunt denominatores Rationum V. g. rationis A a $\frac{6}{2}$ denominator est 3. quia indicat sula vnitatibus quomodo 6. contineat 2. vel quot partes ipsius 6. in se contineat 2. nempe tertiam. Si ergo denominatores multiplicentur

centur inuicem alicuius proportionis nimirum 3. denominator proportionis A B $\frac{2}{6}$ & C D $\frac{3}{12}$ denominator, qui est 4. producunt 12. denominatorem, qui denominat proportionem compositam ex A B, & C D nimirum H F $\frac{6}{72}$ & exprimit quod 6. in 72. contineatur vicibus duodecim, quia ergo denominator proportionis $\frac{6}{72}$ est 12. Et 12. producitur ex multiplicatione denominatorum 3. & 4. qui denominant proportionem; 3. quidem rationis A 2. ad B 6. & 4. rationis C 3. ad D 12. Ideo proportio H F $\frac{6}{72}$ producitur à proportionum compositione A B, & C D.

PROB. I. PROPOS. IX.

Datis duabus proportionibus quatuor numeris, expressis reperire tres terminos easdem proportiones habentes.

Sit data gemina proportio, nimirum 3. ad 4. & 2. ad 5. Oporteatq; reperire tres numeros eandem proportionem exprimentes. Disponatur, vt vides.

3 2
4 5

Deinde fundamenta Rationum 3. & 2. inuicem multiplica & fient 6. Postea fundamētū vnius, cum termino alterius multiplicetur, vt 3. cum 5. & fient 15. Tandem ipsi termini multiplicentur inuicem, & fient 20. Dico quod 6. 15. & 20. habent eandem proportionem, quam 3. ad 4. & 2. ad 5.

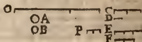
Probatur. Nam cùm numero 3. multiplicauerimus 2. & 5. producti 6. & 15. constabunt tot ternarijs, quot vnitates erant in 2. & 5. ex defin. 15. Tract. 8. Ideo dicent eandem proportionem ex defin. 5. huius, quam 2. & 5. Deinde quia 5. multiplicauit 3. & 4. productis 20. & 15. constabit tot quinarijs, quot vnitates erant in 3. & 4. ex cit. defin. ideoq ex defin. 5. huius dicent 15. & 20. eandem proportionem, quam 3. & 4. quòd tot quinarij sint in vtroque multiplicato, quot priùs erant in multiplicandis vnitates: Quare ita erit in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5. quòd sicut 5. continet 5. vnitates, & 2. duas, sic 15. continent 5. ternarios, & 6. duos, & sicut 4. continet quatuor vnitates, & 3. tres: sic 20. continet 4. quinarios, & 3. tres quinarios: Quare ita erit 2. ad 5. vt 6. ad 15. & 15. ad 20. vt 3. ad 4. quod erat præstandum.

PROB. II. PROPOS. X.

Datis duabus proportionibus, quibus proportio alicuius quantitatis erga aliam constat, cognoscere; quænam sit ipsius ad aliam proportio.

Sit data proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ dicatur composita ex duabus proportionibus; quam nimirum habet linea, vel numerus 3. ad 2. & linea, seu numerus 4. ad 1. vt cognoscatur quænam sit A ad B quantitates quascumque proportio: Inueniantur ex præcedenti tres numeri eiusdem proportionis, vt sunt 2. 3. 12. vt sit 12. ad 3. vt 4. ad 1. & 3. ad 2. vt priùs erant. Dico, quòd ea est proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ est 12. ad 2. nihil curando de intermedio 3.

Probatur. Quia 12. numerus habet proportionem compositam eam, quam 12. ad 3. & 3. ad 2. quæ est ea, quam habet 4. ad 1. & 3. ad 2. sed hæc est gemina proportio, ex qua componitur proportio quantitatis A ad quantitatem B ex suppositione. Ergo proportio quantitatis A ad quantitatem B est illa quam habet 12. ad 2.



COROLLARIVM I.

* Hinc ergo elucet: Quomodo proportio composita dignoscatur: nimirum si comparentur extrema relictis medijs. Vnde neque erit necesse reperire tres numeros; sed solum duos extremos inter quos composita proportio reperiatur, hoc autem fiet ex præced. 9. propos. si multiplicemus simul, Rationū antecedentia, seu fundamenta, V. g. 2: Et 3. & 4. & 5. terminos: Nam numeri producti 6. & 20. habebunt proportionem compositam, quam 3. ad 4. & 2. ad 5. ita quoque in lineis poterit fieri. Nam si detur proportio E ad F, & C ad D non eadem; & multiplicetur C fundamentum tot vicibus, quot partes aliquotæ sunt in antecedenti, seu fundamento E, & fiat O iterumque consequens D multiplicetur, seu terminus secundum partes; quę sunt in consequenti, seu termino F, & secundum quas dicit proportionem, & fiat P; dico O ad P habere proportionem compositam; cum idem fiat quod in numeris effectum est. Vnde si quantitas A dicatur habere proportionem compositam ad B lineæ C ad D, & E ad F habebit eam proportionem quam O ad P.

COROLLARIVM II.

* Hinc etiam est: Quod si dentur plures proportiones; quam duæ ex quibus aliqua alia proportio componatur, idem agendum fit multiplicando fundamenta inuicem, deinde terminos, vt si sit proportio 3. ad 4. & 1. ad 5. & 2. ad 7. & 4. ad 5. multiplicabimus omnia antecedentia ducendo primum in secundum, deinde tertium in productum ex primis vt fiant 24. deinde eodem modo consequentes terminos, & fient 700. Ergo proportio 700. ad 24: est composita ex proportionibus assignatis omnibus; quod etiam potest fieri reperiendo quantitates, quæ continuè sint proportionales.

COROLLARIVM III.

IDem prorsus agendum, & faciliùs, cum proportio est eandem, quæ multiplicanda sit, vt inueniatur proportio replicata, sic 2. ad 4. & 5. ad 10. inuenietur proportio duplicata 10. ad 40. vt patet in istis numeris 10. 20. 40. inter quos est eadem proportio primi ad medium, quæ medij ad vltimum,

EXPEN-

EXPENSIO VI.

Quænam quantitates proportionem consequantur, & quam obtineant.

CVm actum fimus de modo argumentandi de vna proportione ad alteram, & vis argumentationis in earundem similitudine consistat; ideo priùs quænam sit, & inter quas quantitates reperiatur proportio cognoscere oportet.

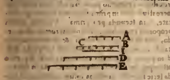
DEFINITIO IX.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse; cùm prima, & tertia, idest fundamentorum æquè multiplicia à secunda, & quarta, idest terminorum æquè multiplicibus, aut æquantur, aut superantur, aut superant iuxta omnem multiplicationem, quæ adhibeatur.

Quia dantur quædam quantitates, nempe irrationales, vt supra diximus, quæ nulla communi mensura possunt mensurari. & ideo neque earum proportio indiuidua manifestari; cùm non cognoscatur: ideo in hac definitione proportio tantùm generica exprimitur, quam omnis proportio possidet, seu rationalis, seu irrationalis: nempe, quòd si multiplicentur fundamenta æquè idest per eundem numerum, & termini æquè idest per eundem numerum; non tamen necessariò, quem adhibuimus in fundamẽtis, & reperiatur, quòd fũdamenta semper simul excedunt, aut æquent, aut minus sint, adhibitâ quacumque multiplicatione, dicendum esse fundamenta ad suos terminos simili proportione referri.

Ratio est. Quia impossibile est, quod fundamenta cum terminis non sint in eadem proportione, deinde semper æquo pacto respectu terminorum se habeant data qualibet multiplicatione possibili.

Nam sit maior A, quàm B particulâ C, quæ deberet abesse, vt esset similis proportioni D ad E: ita quòd, si illa deficeret, tunc proportio A ad B esset similis proportioni D ad E. Certum est, quòd si A, & D fundamentorum æquè multiplicia sumantur, & etiam B, & E terminorum. Quod terminus B crescet magis; quàm E respectu fundamentorũ; & non simili augmento, quia semper C particula abundans, & similitudinem auferens



etiam ipsa multiplicabitur. Cùm ergo crescat magis B; quàm E, & non similiter augeatur, necessariò aliquando eueniet, quòd si E proximè æquetur suo fundamento D in aliquâ multiplicatione, vt clarum est posse euenire, data qualibet multiplicatione; ita vt deficiat solùm pars C, vel minus, quam C, eueniet inquam, quòd BC iam æquabitur suo fundamento A, vel etiam superabit: Quapropter, tũc terminus BC æquabitur suo fundamento A, vel illud superabit; dum terminus E non est maior, nec æquat suum fundamentum D. Exemplum sit in numeris, & dicantur

esse fundamenta	4 ad 6		
	vt		terminos
	3 ad 5		

Sumanturque æquè multiplices fundamentorum, 8. fundamenti 4. & 6. fundamenti 3.

Sic quoque terminorum 12. termini 6. & 10. termini 5. Videtur, quòd sit proportio, quòd terminorum ambo æque multiplicia superent pari consensu fundamentorum æquè multiplicia. Verùm alia multiplicatio adhibeatur, & fundamenta quinquies accipiantur, eruntque multiplicia fundamentorum 20 & 15. Termini verò sumantur tricies; eruntque terminorum æquè multiplicia 15. & 18. Vides ergo iam quomodo multiplex 15. termini 5. tricies acceptus æquet multiplicem fundamenti 3. quinquies accepti: at termini 6. tricies accepti multiplex 18. fundamenti sui multiplicem 20. quinquies accepti non æquet; igitur inter hos numeros similis proportio non erit, eo quia inuentum sit aliquando fundamentum esse maius suo termino, cùm aliud fundamentum suo termino non sit maius, cùm fundamenta æqualibus vicibus, tum termini æqualibus vicibus licet non eiusdem numeri, ac fundamentorum, fuerint multiplicati.

Dices omnis possibilis multiplicatio est infinita. Ergo numquam possumus scire: an in aliqua multiplicatione contrarium eueniat; cum omnis multiplicatio adhiberi ob suam infinitatem non possit.

Respondeo in vnaquaque materia suppetere tales probationes, quæ ostendunt: quòd idem eueniet in omnibus possibilibus multiplicationibus, quod euenit in multiplicationibus de præsenti adhibitis, & quòd semper res ita procedet. Quoniam par sit ratio de omni multiplicatione possibili, ac de illis, quæ in præsentiarum adhibentur.

DEFINITIO X.

EAndem verò habentes rationem magnitudines proportionales dicũtur. Hoc per se clarum est.

DEFINITIO XI.

CVm fundamentum primum iuxta aliquam multiplicationem excedit suum terminum, & fundamentum secundum suum terminum non excedit; tunc primum fundamentum habet maiorem proportionem ad suum terminum; quam secundum ad suum terminum.

Ratio huius rei est. Quia si aliquando contingat, quòd fundamentum B. crescat, ita quòd superet terminum A, altero fundamento E suum terminum D non superante, in aliquo erit maior B V. g. in C, quam requireretur ad hoc, vt diceret eandem proportionem ad A; quàm E ad D eã antecedit. Linea autem maior dicit maiorem proportionem ad aliam, quam linea minor eò, quòd requiritur, vt similes sint. Namque sit linea I ad A, vt E ad D illa erit minor, quam B: cùm B deberet detruncari, vt supponitur, si ad similem proportionem E ad D deberet reduci. Cùm ergo B sit maior, quàm I dicet etiam maiorem proportionem, quam I, quia linea maior B continet plus, vel plures partes lineæ A, quam linea I, & ideo continebit etiam magis de linea A, quàm E contineat de linea D, quæ tantũ de ea continet, quantũ I de A.

COROLLARIVM.

CVm ergo duæ quantitates inæquales comparantur ad maiorem V. g. Pes 12. vnciarum palmus 6. & passus 72. Pes dicitur habere maiorem rationem ad passum, quam palmus eo, quòd plures partes eius contineat; nempe 12. cum palmus solum 6. contineat ex vncijs 72. At si passum compares cùm pede, & palmo, nempe cum minoribus, passus habet minorem proportionem cum maiori nempe cum pede, quàm cum minori, nimirum cum palmo; quia pedem continet solum sex viribus, at palmum 12. vicibus; & ideo est maior proportio passus ad palmum; quàm ad pedem; minor, verò ad pedem, quam ad palmum.

Si verò duas quantitates inæquales compares cùm minori V.g. passum, & pedem cum palmo. Maior est proportio maioris, quam minoris ad eam; quia plus continet maior de ea V. g. passus de palmo, quàm minor, nempe pes de ipso palmo. At è contra minor comparata cum duabus inæqualibus, se maioribus; Minor hæc ad minorem V. g. palmus ad pedem maiorem proportionem habet, quam ad maiorem, cùm de illa minori contineat magis, quòd palmus pedis continet medietatem; at verò passus 12. partem.

Si tandem mediocris comparetur, cum maiori se, & cum minori, vt pes cum palmo, & cum passu; mediocris magis continet de minori; cum eam totam contineat, & insuper aliquid ampliùs quã de maiori, quam nec totam continet. Vnde habet maiorem proportionem cum minori, quam cum maiori. At, si minor, & maior ad mediocrem comparentur, maior dicet ob eandem causam maiorem proportionem ad mediocrem; quàm minor ob continentiam maiorem, quam habet cum totam eam contineat; non autem minor mediocrem.

DEFINITIO XII.

PRoportio in tribus terminis ad minus consistit.

Quia, cùm sit proportio Relationum quantitatiuarum, & Rationum similitudo, & ad relationem requiratur fundamentum, & terminus ad hoc, vt inuicem comparentur relationes, & similes inueniantur, oportebit assignare fundamentum, & terminum hinc, inter quæ reperiatur vna relatio; & fundamentum, & terminum inde; in quibus consistat alia relatio, quæ relationes, & & habitudines, deinde similes dicantur. Verum, quia eadem quantitas potest respectu vnius esse fundamentum; vt 4. ad 8. & respectu alterius terminus, vt 2. ad 4. in quo 4. est terminus respectu minoris, & fundamentum respectu maioris: ideo proportio, & rationum similitudo in tribus terminis ad minus consistit.

DEFINITO XIII.

HOmologa, seu similes ratione magnitudines sunt, antecedentes quidem antecedentibus, idest fundamenta fundamentis, & consequentes consequentibus, idest termini terminis,

Docet ne dum dari similitudinem rationum, seu habitudinum vnius quantitatis ad aliam, quæ relationes sunt fundamenta proxima similitudinis, sed etiam fundamenta remota, idest ipsas quantitates Rationem dicentes in similitudine cum alia proportione conuenientem, dici, & ipsa similia in hoc; quod duæ quantitates deseruiant pro fundamentis, & in ratione fundamentorum conueniant, & duæ pro terminis deseruiant, quę non est simplex denominatio: sed necesse est fundamenta in hoc conuenire, quòd aut ambo sint æqualia terminis, aut ambo maiora, aut ambo minora, alioquin si vnum esset maius, aliud minus suo termino non esset eadem proportio cum vna esset maioris inæqualitatis, altera minoris.

DEFINITIO XIV.

ORdinata proportio est; cùm in duplici serie quantitatum proportionem dicentium eadem quantitates media deseruiunt pro fundamento, & termino Rationis.

Sint duæ series quantitatum proportionalium.

Prima	2	3	4
Secunda	4	6	8

Referaturq; 2. ad 3. vt refertur 4. ad 6. & rursus 3. ad 4. vt 6. ad 8. ita quòd termini 3. & 6. deseruiant etiam pro fundamentis: Et sint quidem termini respectu proportionis antecedentis, fundamenta verò respectu sequentis: Quamuis proportio antecedens non sit eadem, ac sequens; sed diuersa; nihil interest, dicit quod hæc erit ordinata proportio. Quoniam eodem ordine dispositi termini inuicem se respiciunt procedendo versùs extremos terminos 4. & 8.

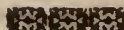
DEFINITIO XV.

PErturbata proportio est; cùm in duplici serie quantitatum proportionem dicentium medius terminus vnius deseruit pro fundamento respectu extremæ quantitatis; at fundamentum alterius deseruit pro termino respectu primæ quantitatis.

Sint duæ series quantitatum proportionalium.

Prima	2	3	4
Secunda	6	8	12

Ordo verò earum perturbatus sit, & referatur 2. ad 3. vt 8. ad 12. Deinde referatur 3. terminus, vt fundamentum sumptus ad 4. vt alia quantitas 6. refertur ad fundamentum 8. Ita quòd terminus primæ seriei 3. deseruiat pro fundamento ad aliud tertium; at fundamentum secundæ seriei 8. deseruiat pro termino ad aliud sumptum, vt fundamentum. Si ergo ita sint ordinati termini, vocabitur proportio perturbata; & oportebit ponere illud aliud in prima serie pro vltima quantitate, vt in secunda pro prima. Vocatur autem proportio perturbata, quòd non seruetur idem ordo, cùm in prima serie media, & secunda quantitas sit terminus, & fundamentum: respectu quidem primę quantitatis terminus; respectu verò assumptæ extremæ fundamentum. At in secunda serie secunda quantitas solum terminus est respectu primæ; at prima est fundamentum, & terminus; terminus quidem respectu antepositæ assumptæ, fundamentum verò respectu secundæ suę quantitatis.



EXPEN-

EXPENSIO VII.

De modis arguendi in proportionibus.

PRius agendum est de modo arguendi in genere; deinde de singulis modis in specie.

Præsupponendum ex Logica. Solùm syllogismum inter argumenta à Logicis enumerata efficaciter concludere: Vnde, vt argumenta in proportionibus fundata vim adstrictiuam adipiscantur, & intellectum euidentiâ conuincant, oportet, licet Enthymematis modo prolata; quòd tamẽ ad syllogismum reduci possint. Syllogismus verò constat tribus propositionibus: Primæ duæ dicuntur Præmissæ, & earum prima est Maior, secunda Minor, vltima dicitur Conclusio. Præmissę verò constant ex Subiecto, & Prędicato terminis, & Copula: Et terminus, qui replicatur in maiori, & minori dicitur, *Medius terminus*. Sic, si dicatur *omnis homo est animal*, hæc est maior propositio, & *homo* est subiectum *est* copula *animal* Prædicatum, cui additur minor. *Sed omne animal est viuens*; quæ, vt prima componitur ex ijsdem partibus, sed subiectū est medius terminus nempe *animal*, quod replicatur in maiori, & minori; & ambæ hæ propositiones dicuntur *Præmissæ*. Tandem deducitur Conclusio euidens. *Ergo omnis homo est viuens*. Quæritur itaque in argumentis proportionum, quænam sint partes ad syllogismum necessariæ?

CONCLVSIO I. PROPOS. XIII.

Argumenta proportionum duo extrema, & medium terminum possident ipsas Rationes; copula est proportio asserta, quæ particula vt explicatur.

PRobatur Sit argumentum Mathematicum *numerus 1. est ad 2. vt 3. ad 6. Sed vt 3. ad 6. ita est 4. ad 8.* Ergo 1. ad 2. est vt 4. ad 8.

Numeri ipsi non sunt termini: nã, tunc argumentum consequeretur sex terminos, vt sunt sex diuersi numeri: argumentum verò constans pluribus terminis; quam tribus, non concludit ex Logicis; sed fallax est, & deficit in forma. Quare erit terminus ipsa proportio, quæ inter duos terminos reperitur.

Confirmaturque. Nam propositiones modales pro terminis integrã propositione gaudent vt *necesse est hominem esse animal*; illud enim *necesse* est subiectum, at hominem esse animal, est prædicatum. Sic, & hic 1. est ad 2. subiectum est, & 3. *ad* 6. est Prædicatum, nempe duæ relationes altera, quæ est inter 1. & 2. altera verò, quæ militat inter 3. & 6. medius verò terminus erit proportio media 3. *ad* 6. quæ reperitur in maiori, & minori.

Probatur secunda pars. Nam copula est illa, quæ semel est in maiori, semelque in minori, & in consequentia. Sed talis est particula *vt* si sit assertiua, vel negatiua, nempe iuncta cum verbo *est*, vel *non est*; quoniam reperitur in omnibus tribus propositionibus. Ergo, *vt est* erit copula.

Probatur secundò. Quoniam tota vis argumenti ex proportionibus deducti, vt propos. 16. huius consistit in identitate similitudinis proportionum: Et ex eo, quòd proportiones duæ sint similes alicui tertię, arguitur, esse idem similitudine inter se. In hoc enim probauimus vniuersaliter in nostris Placitis Phylosophicis vim syllogisticam statuendam; *Sed vt est* significat hanc relationem similitudinis; & indicat proportiones esse idem in similitudine; Ergo in eâ particula copula latebit, cum copula sit illa, quæ significat identitatem Prædicati, & Subiecti.

Sed iam accedamus ad particulares modos explicandos, quibus vtuntur Mathematici; qui sex sunt *Alternatio, Inuersio, Compositio, Diuisio, Conuersio, Æquatio*. Et licet sint alij modi, vt explicabimus, hos tamen particulariter proprijs definitionibus illustrauit Euclides, vtpote difficiliores, & in quibus, vt plurimùm termini, & fundamenta sedes mutarẽt, & alterum vices alterius in deductione conclusionis subiret. V. g. antecedens, & fundamentū A in pręmissis ponitur in conclusione, tanquã terminus, & consequens. At nos alios etiam modos, in quibus nulla terminorum, fundamentorumque vicissitudo reperitur, perspicuitatis gratia explicabimus.

Modi itaque argumentandi sunt quædam enthimemata constantia ex duplici propositione perfectâ, & affirmatiuâ; quorum consequentiâ semel probatâ, ex inde efficaciam syllogisticam consequuntur, & euidenter ostendunt. Quia omne Enthymema, cuius consequentia probata sit, vim syllogisticam consequitur; vt *iste angulus est in semicirculo, ergo rectus est*. Si aliũde constet, omnem angulũ esse rectũ in semicirculo, erit ac si integrum syllogismum conficeres, *& diceres Omnis angulus in semicirculo rectus est. Iste in semicirculo reperitur: Ergo rectus erit*. Quapropter, & modi arguendi Mathematici in proportionibus sunt efficaces, quia licet sint Enthymemata, eorum tamen consequentiam esse bene deductam in 5. libro Euclid. ostenditur.

Istis itaque perceptis, obseruandum est, duplicem esse modum argumentandi: Alium absolutum, cùm quantitates dicunt quidem proportionem similem, sed non se habent inuicem, vt continens, & contentum; vt pars; & totum. Alium verò esse relatiuum, in quo quantitates sumuntur, tanquam dicentes relationem totius, & partis. Primò itaque explicabimus modos argumentandi absolutos à respectu partis, & totius. Deinde relatiuos.

DEFINITIO XVI.

ALterna, siue permutata ratio est sumptio antecedentis, seu fundamenti, & termini vnius proportionis tanquam fundamenta in conclusione, vt se referentia ad fundamentum, & terminum alterius proportionis, tanquam ad suos terminos.

Iste modus est: Cùm ponitur fundamenti ad suum terminum similis proportio, quæ est alterius fundamenti ad suum terminum: Et deinde infertur, Quod fundamentum, ad fundamentum eâdem simili habitudine refertur, vt terminus ad terminum. Sic si ponantur esse.

2 ad 4
vt
3 ad 6

Deinde poterit deduci, Ergo erit etiam Fundamentum 2. ad fundamentum 3. pro termino sumptum, Vt terminus 4. pro fundamento sumptum ad terminum 6.

Qui modus argumentandi efficaciter concludens demonstratur propos. 19. lib. 5. Quod intelligitur, si fundamenta, & termini sint eiusdem generis. Non enim rectè inferetur ex eò, quòd linea A ad lineam B esset in proportione, vt numerus 2. ad numerum 3.; quod deinde esset etiã linea A ad numerum 2. vt linea B ad numerum 3. vt clarum est; cum nulla sit proportio lineæ ad numerũ. Hanc verò argumentatione Doctores exprimunt, cum eâ vtuntur, dicendo; si 2. ad 4. vt 3. ad 6. *ergo permutando* 2. ad 3. vt 4. ad 6.

DEFINITIO XVII.

INuersa ratio est, cùm fundamenta, antecedentiaque proportionum assumuntur pro terminis, & termini, seu consequentia assumuntur in conclusione pro fundamentis.

Si aliquis argueret: Quoniam est fundamentum 2. ad suum terminum 4. vt fundamentum 3. ad terminum 6. Ergo etiam erit terminus 4. ad fundamentum 2. vt terminus 6. ad fundamentum 3. vsurpando in conclusione terminos pro fundamentis, & fundamenta collocando pro terminis: hic modus dicitur *inuersa ratio*, & hunc modum esse demonstratiuum constabit ex Coroll. pr. 4. par. sequentis, Exprimiturque dicendo. Ergo permutando, &c.

DEFINITIO XVIII.

ARguere ex æqualitate est, cum sunt plures quantitates, quam duæ ordinatam, seu perturbatam proportionem dicentes, & arguitur, esse eã proportionem inter fundamentum, & vltimum terminum vnius seriei, ac inter fundamentum, & terminum alterius vltimum, relictis intermedijs.

Dentur plures magnitudines; quàm duæ dicentes proportionem, veluti aliæ eiusdem numeri, seu proportione perturbatâ, seu ordinatâ, & sint

Ordinata 1. 2. 6. Perturbata 4. 8. 12.
vt 3. 6. 18. vt 2. 3. 6.

Si ergo relinquantur media assumptis extremis in conclusione, & primum fundamentum 1. dicatur referri ad vltimum terminum 6. vt fundamentum 3 ad vltimum terminum 18. ex eo, quod sint 1. ad 2. sic 3. ad 6. & 2. ad 6. sic 6. ad 18. bona erit illatio in ordinata proportione; & bona quoque in perturbata; & ex eo, quod sit 4. ad 8. vt 3. ad 6. & 8. ad 12. vt 2. ad 3. efficaciter deducetur conclusio, esse quoque 4. ad 12. vt 2. ad 6. In qua proportione, vt valeat, ritè ordinandi sunt termini: nam si 2. poneretur vltimo loco post 6. in secundâ serie, tunc vltima relictis medijs, vt patet, non sumerẽtur. Quod si sint plures termini, quàm tres, valet adhuc argumentum; sic si sint.

Ordinata 1. 2. 6. 8. Perturbata 4. 8. 12. 18.
[illegible] 3. 6. 18. 24. 2. 3. 6. 9.

Licebit adhuc in proportione ordinata arguere, vt 1. ad 8. sic 3. ad 24. & perturbata vt 4. ad 18. sic 2. ad 9. Hunc verò modum esse efficacem in omni proportione etiam irrationali; licet sint series diuersi generis ostenditur pr. 24. & 23. lib. 5. & eam significant in arguendo. Ergo *ex æquo, vt, &c.*

MODI ADDITI.

DEFINITIO XIX.

ENumeratio rationis potest dici, cùm pluribus quantitatibus ordinatis, quæ dicant eandem proportionem, assumuntur omnia fundamenta, vt dicentia eam proportionem ad omnes terminos, vt vnum ad vnum.

Si dentur multæ proportiones ordinatæ, & sint

1. vt 3. 4. 5.
ad ad ad ad
2. 6. 8. 10.

Et illis positis, deinde inferatur esse 13. nempe omnia fundamenta ad 26. omnes terminos simul, vt fundamentum aliquod, V. g. 3. ad terminum suum 6. iste modus potest vocari Enumeratio; eo quia ad similitudinem enumerationis Dialecticæ positis pluribus particularibus proportionibus cõclusio deducatur, quę concludat omnes; & probatur propos. 17. lib. 5.

DEFINITIO XX.

COllectio est, cum plurium quantitatum proportionem ordinatam dicentium assumuntur fundamenta, & termini vnius simul, vt fundamentum, & antecedens ad fundamenta, & terminos alterius proportionis tanquam ad consequentem, & terminum, & arguitur, ita esse omnia ad omnia; vt fundamentum aliquod ad aliud fundamentum.

Sit proportio ordinata proposita

1. ad 2, & hoc ad 6. & hoc ad 8.
vt 3. ad 6. & hoc ad 18. & hoc ad 24.

Si hac positione inferatur. Quod etiam omnia fundamenta, terminique 1. 2. 6. 8. nempe 17. sint ad alterius seriei fundamenta, terminosque 3. 6. 18. 24. nimirum 51. vt aliquod ipsorum 2. ad aliud correspondens 6. bona erit illatio, & ostendetur Coroll. 2. propos. 19. Potest verò hæc illatio esse integra, & dimidiata: Nam omnia fundamenta, & termini possunt colligi, vel eorum aliquot in prima serie; dummodo colligantur correspondentia in secunda serie.

Sic si colligantur extrema 8. & 1. in prima serie, & fiant 9. & item in altera serie correspondentia 3. & 24. & fiant 27. erit eadem proportio 9. ad 27. quæ 2. ad 6. vel 1. ad 3. vel 6. ad 18.

Verùm hic quoque fundamenta, & termini debent esse eiusdem rationis, & speciei alioquin sicut in permutata, rectè illatio non fieret.

DEFINITIO XXI.

REsiduatio est modus argumentandi, in quo totum ponitur, ad totam proportione respondens, vt pars ad partem, & deinde arguitur ex hoc quoque, esse residuum ad residuum, vt totum, ad totum.

Sit V. g. proportio 15. ad totum 3. vt pars 5. primi totius ad partem alius 1: Erit quoque residui 10. primi totius, proportio similis proportioni, quæ est ad alteram partem residuam 2. alius.

Iste verò modus arguendi est diuersus ab ijs, de quibus acturi sumus, qui se referunt; vt totum, & pars. Nam hic pars non confertur cum toto suo; sed cum parte alius totius. Propterea que non est proportio partis, vt partis propriè; cùm non respiciat suum totum; sed partem alteram, non sibi compartem, alterius totius. Iste verò modus ostenditur propos. 12.

DE-

DEFINITIO XXII.

Replicati potest dici modus arguendi; cùm terminus, & fundamentū replicata æquè sumuntur, & ad fundamentum, et terminum conferuntur, vel æquè replicatos, vel simplices, alterius combinationis.

Sit V.g. 3. ad 4
Vt 6. ad 8

Possum arguere esse quoque multiplex 3. nempe 9. ad suum terminum 12. multiplicem æquè numeri 4. quemadmodum est 6. ad suum terminum 8, quod ostendetur propos.18.lib.5. Idemq; argumentum valebit, si quoque combinationis alterius æquè multiplicia sumantur, V.g. 24. numeri 8. & 18. numeri 6. erit namque 9. ad 12. vt 18. ad 24.

DEFINITIO XXIII.

Detractio potest dici modus argumentandi, cùm ex antecedenti, et consequenti partes proportionales detrahuntur, et arguitur esse residuum fundamenti ad residuum termini, vt aliud fundamentum ad aliam terminum, vt priùs erat totum fundamentum ad suum terminum totum.

Dicatur quod 8. sit ad 24.
velut 1. est ad 3.

Si ex 8. & ex 24 detrahantur partes proportionales 3. & 9. remanebunt 5. & 15. Si ergo arguatur, quòd 5. sit ad 15. vt 1. ad 3. iste modus poterit vocari *Detractio*; & ostenditur valere in proportione multiplici propos.6. lib.5. In quacumq; proportione Coroll.prop.25. eiusdem.

DEFINITIO XXIV.

Reflexio potest dici modus argumentandi, cùm duo fundamenta; seu antecedentia seorsim referuntur ad vnicum terminum, simili proportione, vt alia duo fundamenta, seu antecedentia ad suum terminum, seu consequens; Deinde fundamenta prima simul sumūtur, & arguitur obtinere eandem proportionem; quam alia duo fundamenta simul sumpta ad suum terminum.

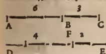
Dentur duo fundamenta 3.& 2. qui referantur ad terminum 6. & alia duo 6. & 4. qui referantur simili proportione; ac prædicta ad suum terminum 12. Si deinde arguatur esse quoque duo fundamenta simul, seu antecedentia 3. & 2. nempe 5. ad suum terminum 6. vt fundamenta 6. & 4. nempe 10. ad suum terminum 12.; erit bona deductio, & efficaciter concludet.

Probatur verò iste modus propos. 25. lib. 5.

Modi, qui inuoluunt rationem totius, & partis.

DEFINITIO XXV.

Compositio rationis est sumptio antecedentis cum consequente, seu vnius; & hoc totum collatum ad ipsum consequentem.



Sit proportio A B partis ad B C partem; vt proportio alterius partis D F, ad alteram partem F E. & colligatur, eam quoque esse proportionem totius A C; nempe antecedentis cum consequente, fundamenti, & termini proportionis simul ad ipsam consequentem, seu terminum B C; vt aliud totum D E fundamentum, terminosque alterius proportionis ad suum terminum F E; dicetur huiusmodi argumētum Compositio rationis eo, quod ex consequente, & antecedente componatur aliud nouum antecedens, seu fundamentum. Demonstraturque hic modus argumentandi propos. 18 lib. 5. Euclid. & quando illo vtuntur Mathematici; ita arguunt, vt A B ad B C; sic D F ad F E, ergo *componendo*, vt A C ad C B; sic D E ad F E. Sed forte explicabitur meliùs iste modus argumentandi Quod sit: à proportionis partis ad cōpartē totius eiusdem similitudine proportioni alterius partis ad cōpartē alterius totius, deinde deducere, quod etiam totum prius sit ad partem suam, sicut totum posterius ad partem suam, quæ partes fuerint ambæ, vel termini, vel fundamenta, & è contrà.

V. g. sit pars 1. ad partem 2. totius A;
Veluti pars 1. ad partem 2. totius B;
Erit etiam componendo totum A ad suam partem 2; vt totum B ad suam partem 2.
Vel; si sit pars 1. ad partem 2. totius A,
Velut pars 1. ad partem 2. totius B:
Erit quoque totum A ad suam partem 1;
Vt totum B ad suam partem 1.
Vel è contrario.
Si sit pars 1. ad partem 2. totius A;
Vt pars 1. ad partem 2. totius B.
Erit quoq; pars 1. ad totum suum A;
Vt pars 1. ad totum suum B;
Vel etiam erit pars 2. ad totum suum A.
Sicut pars 2. ad totum suum B.

DEFINITIO XXVI.

Diuisio rationis est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsum consequentem.

Sit proportio, vt in præc. figura, A C totum ad B C partem vt D E totum ad F E partem, si deinde arguatur, quod excessus quoque A B, quo antecedens; nempe totum A C superat consequens, sit ad suam partem B C consequentem. Velut excessus D F, quo item antecedens D E superat consequentem F E, nimirum totum suam partem, ad ipsam F E consequentem, iste modus arguendi appellabitur diuisio rationis, eò quod diuidantur antecedentia, seu fundamenta proportionum in suas partes, & ostenditur iste modus propos. 20. lib. 5. Eucl. In diuisione autem rationis, dum deducunt conclusionem, ita loquuntur auctores *ergo diuidendo*, &c.

Diuisio itaq; rationis ad hoc, vt rem clariùs explicemus, est cū à similitudine proportionis partis cum toto suo ad proportionē partis cum alio toto suo, quę partes sint ambæ homologæ scilicet, vel fundamenta, vel termini, deducitur similitudo proportionis compartis alteri parti eiusdem totius ad proportionem compartis alteri parti alterius totius.

V.g. sit totum A ad suam partem 1.
Vt totum B ad suam partem 1.
Erit ergo *Diuidendo* compars 2. ad suam compartem 1. totius A.

vt

vt compars 2. ad suam compartem 1. totius B.

Vel vt totum A ad suam partem 1.

Sic totum B ad suam partem 1.

Ergo erit, vt 1. pars ad compartem 2. totius A;

Sic 1. pars ad compartem 2. totius B:

Vel etiam sic vt 1. pars ad A suum totum;

Sic 1. pars ad B suum totum:

Ergo vt pars 1. ad partem 2. totius A;

Sic pars 1. ad partem 2. totius B.

DEFINITIO XXVII.

Conuersio rationis est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum consequentem.

Veluti in praecedenti figura ex eo, quod sit A C ad B C, vt D E ad F E; Ergo eadem tota A C ad excessum A B; sic altera tota D E ad excessum D F: iste modus arguendi dicitur *Conuersio rationis*, & ostenditur propos. 19. lib. 5. & cum illo vtuntur Mathematici, sic inferunt; Igitur per Conuersionem rationis, &c.

Itaque Conuersio rationis propriè est arguere à similitudine proportionis totorum cum suis partibus, ad similitudinem proportionis totorum cum reliquis suis partibus.

V.g. vt totum A ad suam partem 1.

Sic totum B ad suam partem 1.

Ergo conuertendo vt totum A ad reliquam partem suam 2.

Sic totum B ad reliquam partem suam 2.

Tandem aduerte, quod praeter compositionem rationis assignatam datur etiam alius modus argumentandi, qui est compositio ipsarum proportionum, & differt propter hoc ab allata; quòd illa sit compositio ipsarum quantitatum proportionem dicentium; haec verò ipsarum rationum. Si enim sint duae proportiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, & duae aliae istis similes $\frac{4}{6}$, & $\frac{8}{10}$; & ex primis modo, quo docuimus propos. 11. vnica proportio componatur $\frac{8}{15}$, item ex secundis, & fiant $\frac{32}{60}$ erit adhuc eadem proportio 8. ad 15. quae 32. ad 60. vtpote ex ijsdẽ ꝓportionibus cõposita; si ergo prob. proportionem A ad B esse compositam ex ijsdem proportionibus ex quibus est composita proportio quantitatis C ad D; bene arguetur esse A ad B, vt C ad D. Vnde dabitur quoque alia diuisio rationis, nempe; ablatis rationibus similibus à similibus, quòd etiam residua habebunt eandem proportionem; sic ablata proportione $\frac{2}{3}$ à proportione $\frac{4}{5}$; & item proportione $\frac{4}{6}$ à proportione $\frac{8}{10}$, remanebunt residuum primae $\frac{10}{12}$, residuum secundae $\frac{40}{48}$ qui similem proportionem dicent ad inuicẽ; eritque 10. ad 12. vt 40. ad 48. Vnde si quis probet, ablatas fuisse à similibus proportionibus A ad B, quae est C ad D proportiones similes; residua quoque (poterit deducere) esse inuicem similia: quod ostendemus agentes de proportionalitatibus Rationum.

TRACTATVS IX. IN V. LIBRVM EVCLIDIS PARS SECVNDA.

De Proportionibus in genere.



COgnitis Rationum, Proportionumque definitionibus, modumq; illas tractandi, & in illarum cognitione se exercendi, ad proprietates earum genericas, & vniuersalissimas accedimus. Estq; hic tractatus veluti Metaphysica apud Phylosophos. Nam sicut illa entia vniuersalissimè accepta cognitione intuetur; Sic iste liber proportiones, atque earum similitudines sub tota vniuersalitate animaduertit. Primòque agit, vtpote notiori de proportione multiplici: secundò de proportione plurium quantitatum ad vnam comparatarum, tertiò de pluribus quantitatibus ad plures collatis in ordine ad cognoscendam earum in proportionibus dissimilitudinem, & tandem de plurium quantitatum ad plures in Rationibus similitudine, in quibus modi argumentandi fundantur. Iste verò Tractatus à primis quatuor libris nullatenùs dependet; sed tantum ab antecedenti Tractatus parte: verùm, quia eius cognitio ad sextum necessaria est, cui, & primus, & secundus liber deseruiunt; conueniens erit primum, secundumque librum legisse saltem, vt mens illis libris exercitata faciliùs per huius propositiones excurrat.

EXPEN-

EXPENSIO I.

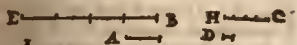
De similitudine multiplicium quantitatum.

QVoniam proportio multiplex facilis est, conueniens fuit, vt ipsa ad percipiendam similitudinem cuiuscumque proportionis aditum sterneret.

THEOR. I. PROP. I.

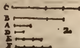
Si sint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æquè multiplices; Quàm multiplex est vnius vna magnitudo; tam multiplices erunt, & omnes omnium.

SI dentur quotcumque magnitudines; nimirum duæ; A quidem vnius palmi; at D vnius digiti, & dentur deinde æquè multiplices aliæ æquales numero, V. g. E B ipsi A, & H C ipsi D. Dicit propositio, *quòd si omnes simul ponãtur, multiplices nempe binæ* E B, *&* H C, *& simplices inde* A, *&* D. *quòd adhuc illa composita simul, alijs simul compositis, erunt æquè multiplices, vt erant priùs.*



Nempe; quod vt quatuor palmi continebant priùs *quater* lineam palmarem; sic nunc quatuor palmorum linea; & quatuor digitorum *quater* continet lineam palmi, & digiti vnius.

Probatur ex defin. 3. præc. Tract. Illæ dicuntur æquè multiplices quantitates; cùm æquis numero vicibus vna continetur in alia. Quare A quater continebitur in E B, & D quater in H C. Si ergo diuidatur, in suasque partes distribuatur E B, & H C singulæ partes palmares erunt ex E B effectæ, singulæ digitales ex H C. Addantur itaque singulæ partes digitales palmaribus singulis; hæ singulæ lineis simplicibus compactis simul A, & D, æquiualebunt. Ex 2. enim pronunc. l. 1. æqualia addita æqualibus æqualitatem non tollunt. Quapropter A, D simul singulis palmis, digitisq; æquiualebit, cumque sint quatuor digiti, & quatuor palmi ex hypotesi, quòd sint æquè multiplices. Ergo A, & D vnitæ lineæ continebuntur quater in lineis multiplicibus E B; & H C simul. Vt priùs continebantur sumptæ seorsim in singulis seorsim sumptis.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si prima secundæ æquè fuerit multiplex, ac tertia quartæ; fuerit autem, & quinta secundæ, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, æquè multiplex secundæ, sicut est tertia cum sexta quartæ.

SIt duplex ordo linearum; Prior, in quo sint tres magnitudines, nimirum prima, & antecedens palmorum 2. sequens palmorum 4. subsequens C palmorum 8. Deinde fit posterior series trium quoque magnitudinum; quæ antecedenti suæ D sint æquè multiplices; vt sunt prioris ordinis magnitudines antecedenti suæ A. V. g. si antecedens D est digitus, erit E sequens duorum digitorum, & F subsequens quatuor digitorum. Dicit propositio *compositas quoque subsequentem* C *extremam, & sequentem* B primæ A primi ordinis, esse *æquè multiplices*, vt in posteriori ordine cũ mediã E, & sequenti *extrema* F *composita, est* primæ D.

Probatur, Nam linea A mensurat lineam sequentem B bis: Quater verò subsequentem C. Ergo si addantur simul B, & C bis, quaterque nimirum sex vicibus eadem A. ambas mensurabit.

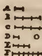
Sed in posteriori ordine antecedens D ex hypothesi mensurat quoque bis sequentem E, & subsequentem F quater. (quia mensurat suas sequentes, vt in priori ordine antecedens suas sequentes mensurabat) Ergo hic quoque antecedens D suas sequentes E, & F simul positas bis, quaterq; mensurabit, nimirum sexties; vt faciebant sequens, & subsequens compositæ in priori ordine, quod erat ostendendum.

Aduerteque primam esse B, secundam A, quintam C; tertiam E, quartam D, & sextam F, sed, quia iste modus explicandi videtur non adeo perspicuus, illum vitauimus; licet alioqui laudatissimus.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si sit prima secundæ æquè multiplex, ac tertia quartæ; Sumantur verò æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt ex æquo sumptarum multiplex, altera quidem secundæ, altera verò quartæ.

SIt duplex ordo magnitudinum, Prior, in quo sit prima B, & sequens pal. 3. multiplex secundæ A, quæ sit 1. palmi; huic verò sumatur subsequens C, quæ sit sequenti multiplex, & eam V. g. contineat bis. Deinde Posterior Ordo sumatur magnitudinum eadem multiplicitate continentiarum conformis priori Ordini. Cuiusque sequens E sit trium digitorum respectu primæ D vnius digiti. Illi autem sequenti E sumatur æquemultiplex F, nempe bis, vt in priori Ordine.



Dicit propositio *has subsequentes* C, *&* F, *tum prioris, tum posterioris ordinis esse etiam æquemultiplices suis antecedentibus* A, *&* D.

Pro-

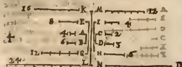
Probatur. Nam si c subsequens primi ordinis, & F subsequens ordinis secundi ex hypothesi bis multiplicant suas partes æquales super sequentes B, & E, quælibet ex illis, veluti F Q, æquabitur suæ sequenti E, & C O suæ item sequenti B. Sed istæ sequentes ex hypothesi quoque sunt æquè multiplices antecedentium A, & D, & quælibet V. g. B multiplicat tot partes æquales super A, quot E multiplicat partes æquales super D. Ergo etiam partes subsequentium C O, & F Q, vtpote sequentibus æquales: Sed aliæ partes residuæ in his lineis subsequentibus C, & F sunt prædictis C O, & F Q æquales. Ergo additæ istis adhuc facient totam lineam, quam complent, æquè multiplicem ex ant. propos. 2. Vnde C toties continebit A, quoties F continebit D; quæ sunt multiplices primæ; & tertiæ; quod erat probandũ.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam: etiam æquè multiplices ipsarum quantitatum iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem; si prout inuicem respondent; ita sumptæ fuerint.

Sint duæ combinationes magnitudinum A C prior, B D posterior, sitque A ad C, vt B ad D; nempe A in C contineatur, veluti continetur B in D. Sitque A prima, C secunda, B tertia, D quarta. Sumãturque horum fundamentorum A, & B æquè multiplices quantitates E, quæ contineat A tricies, & G, quæ contineat B tricies. Terminis quoque C, & D iuxta quamuis multiplicationem à prima fundamentorum diuersam sumantur duæ aliæ æquè multiplices inter se, nimirum I, quæ bis contineat C, & H, quæ bis contineat D. Dicit itaque propositio, *quod, ita multiplices inuicem respondentes dicunt eandem proportionem inter se, quam dicebant quantitates simplices*. Et sic, quod ita referatur E multiplex magnitudinis A, ad I multiplicẽ magnitudinis C veluti multiplex G magnitudinis B refertur ad multiplicẽ H magnitudinis D. Itaq; multiplicia fũdamẽtorũ, vt fũdamẽta referentur ad multiplicia terminorum tanquam terminos. Quod, vt probetur, istis quoque assumendæ sunt æquemultiplices, fundamentis quidem E, & G multiplices K, & L, & terminis H, & I, aliæ æquemultiplices M, & N.

Probatur modo propos. Secundum par combinationum E, & G est æque multiplex fundamẽtis A, B, & I, H est æque multiplex terminis C, & D. Quare ex definitione 9. aut æqualiter crescent, aut æqualiter decrescent, aut æquabuntur; Multiplicia fundamentorum, respectu multiplicium terminorum: Itaque crescente E super I, crescet & G super H: at deficiente E, ab I; deficiet quoque G ab H, & si æquentur E, & I æquabuntur G, & H, eo quia ex hypothesi simplices quantitates, quibus multiplices sunt, inuicem proportionem dicant, & ex def. 9. illæ quantitates, quæ proportionem dicunt, habent suas multiplices hac conditione crementi, decrementi, & æqualitatis præditas.



Tertium verò par K, L est quoque multiplex respectu fundamentorum A, B, & aliud M, & N respectu terminorum C, & D, ex anteced. propos. Quod quælibet linea in his tertijs paribus multiplex sit suæ correspondenti in secundo pari. (& quælibet harum correspondentium secundarum parium sit æque multiplex fundamentis, & terminis sibi correspondentibus. Vnde K erit multiplex A, & L ipsius B, at M ipsius C, tandem N ipsius D.

Propterea que etiam, ipsæ magnitudines tertiæ eam conditionem consequentur crementi, decrementi, vel æqualitatis in omni multiplicatione, quam secundę multiplices E, G, & I, H. Crescenteque N respectu M crescet L super M, & decrescente decrescet, se æquante æquabitur.

Cum itaque ipsę secundę multiplices Sil. fundamenta E, & G termini quoque H, I habeant tertias multiplices K, L fundamentorum, M N terminorum illius conditionis, quæ requiritur in def. 9. ad similitudinem proportionum, crementi, decrementi, æqualitatis, erunt proportionales, & ita erit E ad I, vt G ad H.

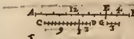
COROLLARIVM

Hinc est quod si quantitatum duæ combinationes dentur, & antecedens A ad sequentem C dicat eam proportionem, quam antecedens B dicit ad sequentem D; quod dicent etiam proportionem è cõtrariò C ad A, vt D ad B. Ratio est: Quia si E, & G multiplices fundamentorum A, & B, vel simul superant, vel simul æquant, vel simul deficiunt, à multiplicibus terminorum iuxta quamuis multiplicationem, & ideo est A ad C, vt B ad D: Pariter quoque multiplices terminorum I, & H simul deficiunt, vel simul æquant, vel simul superant, iuxta quamcumque multiplicationem multiplices fundamentorum E, & G: Vnde eadem ratione C erit ad A, vt D ad B.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ; etiam reliqua reliquæ erit multiplex, vt tota totius.

Sint duæ magnitudines A B maior, & C D minor, a quibus singulis auferantur duæ partes



tes A E, & C F, quæ inuicem eam multiplicitatem dicant, quam totæ inuicem dicebant; Licet cum suis totis non essent illæ partes commensurabiles, aut certè ijsdem partibus non componerentur;

rentur. Multiplicitas enim attendenda est totius partis respectu alterius, sicut, & totius ad aliud totum; non totius respectu partis. Sint itaque ablata pars A E, ita multiplex respectu C F ablatæ, vt est multiplex B A totum respectu C D totius. Asserit propositio. *Quod etiam residuum maioris erit multiplex respectu residui minoris, vt erat totum maius multiplex* A B *respectu totius minoris* C D.

Ad id probandum assumitur aliqua alia quantitas G, cui sit multiplex E B residuum, vt est residuum multiplex maius A E respectu minoris residui C F. Certum est; quod, si addatur hæc quantitas G portioni ablatæ CF totius minoris, ita erit multiplex totum maius A B ad totum hoc compositum denuò, vt est pars ablata maioris A E respectu ablatæ minoris CF. Sed hoc totum maius AB est ex suppositione, ita multiplex ad totum minus C D, vt erat ablata portio A E à maiori toto respectu ablatæ portionis C F à minori. Ergo hoc totum minus C D & rursus eius pars ablata C F associata cum assumpta G, inuicem æquabuntur; vtpote quibus sit totum A B æque multiplex ex 6. pronunc. Aufer itaque ablatã portionẽ CF; & id quod remanet F D, & G quantitates remanebunt æquales, vtpote, quòd ab vtraque eadem C F ablata fuerit, quæ priùs quidem cum C D totum minus integrabat, at cum G associata fuerat.

Sed huic assumptæ G, ita est multiplex residuũ E B totius maioris, vt ablatum A E ad ablatum CF, ex hypothesi. Ergo, & huic residuo D F, ita est multiplex E B residuum maioris, vt ablatum A E ad ablatum C F, & consequenter, vt totum A B ad totum C D.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æquè multiplices, & quædam detracta sint earum æquè multiplices, & reliquæ earundem, aut æquales erunt, aut æquè multiplices.

SI sint duæ magnitudines C B, & E F, quarum prima sit æquè multiplex alicui A, sicut, & altera E F, est multiplex alteri alicui D, V.g. septies. Et auferantur, tum à prima C B, tum ab altera E F æquè multiplices portiones earundem A, & D, nimirum Q B, & P F. Dicit *residua* C Q, *&* E P *eisdem* A, *&* D *remanere, aut æqualia, aut æquemultiplicia, quodlibet sua correspondenti* Q C *ipsi* A, *&* E P *ipsi* D.

Probatur. Quoniam propos. 2. probatum est, quòd si duę æquè multiplices duarum; vt C Q multiplex A, & E P multiplex D, & aliæ duæ Q B, & F P earundem A, & D æquè multiplices componantur duæ, & duæ, quæ respectu eiusdem quantitatis multiplices sunt, etiam compositæ C B, & E F remanebunt æquè multiplices respectu earundem A, & D. Ergo etiam detractæ æquemultiplices Q B, & P F ab æquè multiplicibus totis, quæ remanent erunt æquè multiplices, aut saltem æquales: cum quælibet pars multiplicium sit æqualis eis quantitatibus, quibus sunt multiplices. Vnde detractis æquè multiplicibus Q B, & P F; aut plu-

res partes restabunt in C Q, & E P, ideoque erunt æquè multiplices residuæ E P, & Q C, aut vna, & ideo erunt æquales ipsis A, & D, quibus priùs ante detractionem erant æquè multiplices.

EXPENSIO II.

De proportione ad vnicam quantitatem relata.

HIc agimus de pluribus ad vnicam comparatis, & ipsas quantitates, vt se habent, ad aliquam quantitatem examinamus: Siquidem faciliùs est duarum quantitatum ad vnicam collatio (cùm multiplicitas sæpè sæpiùs confusionem inducat) quam plurium quantorum inuicem comparatio. Agemus autem primò de similitudine deinde de dissimilitudine in duabus quantitatibus ad vnam conferendis, vt magis ex dissimilitudine ipsa similitudo nota euadat.

THEOR. I. PROP. VII.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, & eadem eandem rationem consequitur ad æquales.

SInt A, & B æquales. Dicit *consequi eandem rationem ad aliam* C. Quod vt probet recurrit ad æquè multiplices, quæ V.g. eas contineant ter, vt D, & F. Lineæ verò C assumantur æquè multiplices duæ H, & L, quæ erunt æquales, vtpote eiusdem æquè multiplices, ex pronunc. 6.

Probatur. Nam, cùm multiplices D, & F æqualium sint inuicem æquales simul crescent, decrescent, & æquabuntur respectu multiplicium vnius C secundò assumptarum H, & L inuicem quoque æqualium, & hoc iuxta omnem multiplicationem. Quapropter, quantitates, quibus multiplices sunt, eandem dicent proportionem, & A ad C proportionabitur; vt B ad idem C. Pariterque etiam C ad A eandem habebit rationem, quam idem C ad B; quia eiusdem multiplices H, & L ad multiplices D, & F habent conditionem; quam multiplices quantitatum in proportione similium requirunt, vel æqualitatis simultaneæ, vel diminutionis, vel augmentationis.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

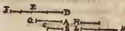
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

MAiorem rationem habere est magis de quantitate æquali alterius quantitatis in se continere, quam de alia V.g. 6. palmi continent 4. palmos, ideoque ad lineam 4. palmorum maiorem proportionem habent, quam ad 5. pal-

mos, cum 4. palmos contineat semel,& dimidio, non autem 5. palmos.

Duas verò partes habet hæc propositio. Prima est: *Si dentur duæ lineæ, quarum vna sit maior vt A alia minor, vt B: & comparentur ad aliam, quamlibet, vt H: Maior dicetur habere maiorem rationem ad eam H, quàm minor B*

Diuidatur A ita vt CA sit æqualis minori quantitati B: Sumaturq; parti minori, siue sit C A, siue reliquum G C, multiplex F E, adeoque replicetur, vt euadat, vel maior, vel saltem æqualis ipsi H, & eidem multiplici F E addatur multiplex D E tot vicibus replicata, quot est ipsa F E, quæ tamen replicet,& multiplicet maiorem partem C E, eritq; D E maior, quam F E, & consequenter maior, quam H, quòd à E ei, vel æqualem fecerimus, vel maiorem. Sumatur verò quantitatis H multiplex talis L M, quæ sit proximè maior, quam E D, ita vt E D, non excedat, nisi ad summum quantitate H; tunc enim M L non poterit superare D E, quia excessus, vel æqualis ipsi H, vel minor non potest superare E B, quæ æquat, vel superat H, & sic D F multiplex E G non erit minor, quam M L, & E D minor, quam M L. Linea D F verò



ex 1. huius est multiplex quantitatis A G; eo quia componatur ex multiplici ipsi CA,& ex multiplici ipsi GC. Sic E D est multiplex quātitatis AC ea effectione, & ideo quantitatis B ei æquali. (Vel si maois F E erit multiplex G C, quæ æquabitur ipsi B; si B fuerit taliter assumpta, quæ relinquat C A maiorem, quàm B.)

Probatur. Multiplex antecedentis A G, nimirum D F excedit multiplicem L M suæ sequentis H in prima combinatione. At multiplex D E antecedentis B multiplicem L M quantitatis H iterum pro sequente sumptæ in posteriori combinatione non excedit. Ergo est maior proportio A G ad H, quam B ad H ex def. II. præc. part. quia contingit aliquando quod multiplex antecedentis AG excedat multiplicē sequētis LM, quādo multiplex ED anteced. B eandē multiplicē non excedit.

Probatur quoque secunda pars; *quòd H dicat maiorem proportionem ad minorem B; quàm ad maiorem A G*, mutando solum combinationem.

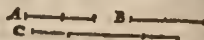
Nam L M multiplex H, vt antecedens sumpta maior est multiplici D E sequentis minoris B, quum eadem multiplex L M eiusdem H, etiam hic pro antecedente sumpta, non sit maior in hac posteriori combinatione multiplici D F sequentis A G. Ergò H dicit maiorem proportionem ad B, quam ad A G ex def. II. præc. part.

THEOR. III. PROPOS. IX.

Quæ ad eandem possident eandem rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem; istæ quoque sunt inter se æquales.

HÆc propositio ostenditur per reductionem ad impossibile, & conuertit vtramque partem Theor. 2. huius.

Assumantur itaque duæ lineæ A, & B, quæ dicant eandem proportionem ad C. Dicit propositio, *quòd A, & B sunt inuicem æquales.*



Quòd, si non sunt æquales:

Sit A maior,& B minor. Erit ergo ex præced. propositione maior proportio maioris A, quàm minoris B ad eandem C contra hypothesim.

Probatur quoque secunda pars. Quoniam, si C respicit per eandem proportionem A, & B, & non sunt æquales: Ergo ex 2. parte præced. prop. C diceret maiorem proportionem ad B, quàm ad A contra hypothesim.

THEOR. IV. PROPOS. X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam verò eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HÆc propos. conuertit duas partes propos. 8. & ipsa quoque probatur per reductionem ad impossibile.

Sit A, quæ maiori ratione referatur ad B, quàm C refertur ad ipsam B, Dicit A esse quoque maiorem; quàm C.

Probatur. Nam, si forent æquales A, & C, haberent ex præmissa propos. eandem rationem ad B, quòd est contra Hypothesim. Si verò A, quæ maiorem rationē habet esset minor, quàm C, consequeretur contra præsuppositum minorē rationem ad B, quàm C ex propos. 8. Ergo erit A maior, quàm C.

Secundò; si eadem B respicit proportione maiori C, quàm A. Dicit esse minorem C, quàm A. Quod ostenditur: Nam non erunt æquales, quoniam B ad easdē ex 9. propos. eandē rationem haberet. Rursus non maior C, quàm A minor; quia tunc ad A minorem quantitatem, maiorem rationem haberet ex 8. propos. quàm ad C: Ergo erit C minor, quàm A: cum non sit, nec æqualis ipsi A, nec maior ipsâ.

EXPENSIO III.

De plurium quantitatum ad plures quantitates dissimili comparatione.

VTilis admodum euadit hæc speculatio ad ostendendos modos argumentandi in omni genere proportionum etiam irrationalium; ita vt huius propositiones sint veluti quædam Lemmata ad propositiones de plurium quantitatum proportionalium similitudine ad aliam item plurium quantitatum proportionalium similitudinem percipiendam, per quam, deinde veritatem, & firmitatem argumentorum Mathematicorum cognoscimus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XI. Eucl. 13.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad ſextam: prima quoque ad ſecundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad ſextam.

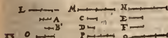
ASſumantur tres combinationes quantitatum A, B, & C, D, & E, F, quarum duæ nimirum A, B, & C, D, dicant proportionem; ita vt A, quæ dicitur prima, & antecedens ad B ſuam ſequentem cóparata, ita ſe gerat in eâ continẽda, vt ſecundę combinationis C antecedens ad D ſequẽtem relata. Hæc verò antecedens ſecundæ combinationis, nimirum C ad ſequentem ſuam D collata maiorem proportionem dicat, quam tertię combinationis antecedens E ad ſequentem ſuam F. Aſſerit, *quòd, & antecedens primæ combinationis A dicet maiorem proportionem ad ſequentem ſuã B, quàm combinationis tertia antecedens E ad ſuam ſequentem F.*

Probatur. Accipiantur multiplices antecedentium, ſeu fundamentorum in ſingulis combinationibus L M N, & multiplices ſequentium idest terminorum O, P, Q, quæ ſingulæ fundamentorum ſint ſibi æquè multiplices; ſicut etiam terminorum ſint ſibi æquè multiplices, licet differant à multiplicitate priorum.

Si itaque antecedens ſecundæ combinationis C ad ſuam ſequentem D dicit eam proportionem, quam primæ combinationis antecedens A dicit ad ſuam ſequentem B; Ergo multiplices earum antecedentium ex 9. defin. pr. p. huius creſcent ſimul ſemper decreſcent, æquabuntur adhibitâ qualibet multiplicatione reſpectu ſequentium; ita vt, cùm ſuperat vna antecedens ſequentem ſuam, ſuperet, & alia antecedens ſequentem ſuam; ſi æquat, æquet; ſi vna deficit, deficiat, & alia.

Sed huius ſecundę combinationis antecedens C ad ſequentem D maiorem proportionem habet; quàm antecedens tertiæ combinationis E ad ſuam ſequentem F: Ergo ex 11. defin. euenire poteſt aliquando; quòd creſcat multiplex M fundamenti C ſecundæ combinationis, & conſequenter cum eo multiplice L ſuæ ſimplicis A prioris combinationis ſe augendo pariter ſuper multiplices terminorum O, & P, & non creſcat tamen N ſuper Q.

Quia ergo non creuit N magis, quàm Q, cum creuit M magis, quã P, at cũ creuit M, magis quam P, creuit ſemper L in priori combinatione magis, quam O, & ſemper L ſequitur M, non autem N: Ergo horum multiplicium ſimplices dicent maiorem proportionem, & ſi dicit maiorem proportionem C ad D, quam E ad F, etiam ex 11. definit. dicet maiorem proportionem A ad B, quam E ad F: quòd multiplex L ſimplicis A ſimul cùm multiplici M ſimplicis C maior inuenta ſit aliquando, quam multiplex O, & P terminorum ſuorum; non autem N multiplex E maior inuenta ſit multiplici Q termini ſui F.



COROLLARIVM

HOc etiam argumentum demonſtrat, quòd ſi ſecundæ combinationis fundamentum C ad terminum D dicat minorem proportionem, quàm dicat E ad F; eam quoque dicere A ad B: cùm ſicut M multiplex minor ſit, quam P, ſic, & L multiplex minor ſit, quam O; cùm tamen N aliquando maior ſit, vel æquet Q.

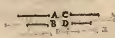
THEOR. II. PROPOS. XII. Eucl. 14.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; Prima verò, quàm tertia ſit maior; etiam ſecunda maior erit, quàm quarta: Quod ſi fuerit æqualis prima tertiæ, erit etiam æqualis ſecunda quartæ, ſi fuerit prima minor, quam tertia erit etiam ſecunda minor, quam quarta.

TRes partes propoſitio enumerat, quæ tamen ſingulæ faciliter probantur. Si ſint duæ combinationes, quarum antecedens A, quam dicit primam ad ſequentem B, quam vocat ſecundam ita compareant in proportione, vt alterius combinationis C tertia ad ſequentem D quartam. Dicit propoſitio; *Quòd qualis altera antecedentiũ fuerit reſpectu alterius antecedentis: Etiam altera ſequentium reſpectu ſua ſequentis* talis erit, ſi maior antecedens A antecedente C; maior erit quoque ſequens B ſequente D, ſi æqualis, æqualis; ſi minor A, quàm C, minor quoque erit B, quàm D.

Quoniã ponitur maior A ãtecedẽs antecedẽte C, erit maior proportio A ad B, quã C ad B. Itaq; ſunt tres cõbinationes quantitatum; prima eſt C ad D, quę ita refertur, vt in ſecũda cõbinatione A ad B: Verùm hæc ſecunda A ad B nõ ita refertur, vt tertia C ad B: ſed maior eſt proportio A ad B ſecundę combinationis; quam C ad B tertiæ, vt in principio dixi: Ergo ex præcedenti maior erit quoque proportio in prima combinatione C ad D; quam in tertia C ad B. Cum ergo eadem C dicat maiorem rationem ad D, quam ad B; ideoque minorem ad B, quàm ad D, Ideo ex 8. propoſ. maior erit B, quàm D.

Probatur ſecunda pars. Quia ponitur æqualis antecedens A antecedenti C, erit eadem proportio A ad B; quam C ad B: Cùm ergo ex hypotheſi ſit A ad B, vt C ad D, erit etiam eadem proportio C ad D; quam C ad B: Ideoque D, & B ex propoſ. 9. inuicem erunt æquales.



Tertia quoque pars patet ex Coroll. propoſ. præced. Nam ſi minor eſt A, quam C; erit minor proportio A ad B, quam C ad B. Itaque inſtituemus tres combinationes: Eritque prima C ad D in eadem proportione, quam A ad B; ſed hæc ſecunda A ad B non erit in eadem proportione, quã in

in tertis C ad B: Verùm minor erit proportio A ad B; quàm C ad B: Ergo ex præced. Coroll. minor quoque erit proportio C ad D, quam C ad B. Ideoque C ad B habebit maiorem proportionem, quàm ad D, quare ex 9. propos. B erit minor quàm D.

COROLLARIVM I.

CLarum autem est ob æqualitatem proportionum; Quod si antecedens A sua sequente B sit maior; quòd etiam antecedens C sua sequente D futura sit maior: Quia alioquin si A esset maior, quàm B, & C minor quam D, aut æqualis ipsi D illa quantitas A diceret proportionem maioris inæqualitatis ad B, at quantitas C diceret ad D proportionem, aut minoris inæqualitatis, aut æqualitatis. Et idem asseras si A sit minor, quàm B, etiam C futuram esse minorem, quàm D, & si æqualia sit A, & B, & alias quoque quantitates C, & D eadem æqualitate potiri.

COROLLARIVM II.

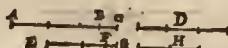
COlligitur quoque. Quod si B, & C sit eadem, vel sint æquales; quòd, si A ponatur maior, quàm C, ipsa C etiam erit maior, quàm D, dummodo sit A ad B, vt C ad D; quia, tùm B sit maior, quam D ex prop. 10. & C sit ei B æqualis, erit etiam ipse C maior, quam D.

THOR. III. PROPOS. XIII. Eucl. 25.

Si quatuòr magnitudines proportionales fuerint, maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

SInt duæ magnitudines A C, & D, quæ se inuicem proportione ea respiciant, quâ aliæ duæ B G, & H. Sitque A C maxima earum, & H minima. Dicit; quod, si istæ simul addantur, facient quantitatem maiorem, quàm reliquæ mediocres simul compositæ, nimirum D, & E G. Nam si ex A C maxima detruncetur pars A B æqualis lineæ D, & ex media E G portio æqualis E F lineæ minimæ H, cùm sint æquales additæ simul A B; cum H pro primo toto, & D cum E F pro secundo toto æqualie erunt. Siquidem ipsi H prioris totius æqualem detruncauimus E F partem additam ipsi D, & ipsi lineæ D posterioris æqualem fecimus B A additam partem ipsi H.

Sed portiones residuæ B C maximæ, & F G mediæ sunt inæquales, maiorque est maximæ residuum, quàm mediæ; Ergo, si hæc residua addantur, residuum nempe B C priori toti A B, & H, & mediæ F G posteriori toti E F & D, maius erit prius compactum ex maximâ, & minimâ, quàm posterius totum compositum ex medijs.



Remanet itaque ostendendum, quod residuum maximæ B C, sit maius, quam mediæ F G. Id verò probatur. Tota A C maxima, est ad suam mediocrem E G, vt D mediocris ad minimam H: Ergo partes ablatæ à maximâ pars A B, & ex mediâ E F eandē dicent proportionē; quia mediocri D, & minimæ H sunt æquales: Quare ex prop. 6. residua B C, & F G eandem dicent proportionem, quàm sua tota. Totum verò A C maius ponitur eò, quod sit maximum; quam E G; ergo, & residuum BC, erit maius, quàm FG. Alloquin si esset æquale, aut minus non diceret B C ad F G eandem proportionem maioris inæqualitatis quam A C ad E G, sed vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis.

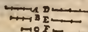
Propositio autem verificatur pro nunc tantùm de proportionalibus multiplicibus ob propos. 6. in qua fundantur; sed infra extendetur ad quascumque proportionales Coroll. propos. 22.

THEOR. IV. PROPOS. XIV. Eucl. 20.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales, numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo verò prima maior fuerit, quàm tertia, etiam quarta maior erit; quam sexta; si fuerit æqualis, erit quoque quarta sextæ æqualis; si fuerit illâ minor, hæc quoque illâ minor erit.

SVmantur tres magnitudines A, & B, & C, & aliæ tres D, E, & F, quarum combinationes in eadem ratione sint A ad B prioris ternarij, vt D ad E posterioris, & B ad C prioris, vt E ad F. posterioris. Dicit primo; quòd si prima A, sit maior tertiæ C in priori ternario, quòd etiam prima D erit maior, quàm tertia F in posteriori.

Probatur. Nam, quòd A ex hypothesi ponatur maior, quàm C, erit ex propos. 8. maior proportio A ad B, quàm C ad B; & quia eadem est proportio B ad C, quàm E ad F, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quam F ad E; dicet quoque A ad B maiorem proportionem, quàm F ad E. Sed A ad B est eadem proportio, quam D ad E ex hyp. Ergo D quoque dicet maiorem proportionem ad E, quàm F ad E: Ergo ex prop. 10. erit maior D, quam F.



Probatur secunda pars: Nempe, si sit æqualis prima A tertiæ B prioris ternarij; quòd etiam talis sit posterioris ternarij prima D ad tertiam F, hoc est æqualem, eodem argumento.

Quoniam sunt æquales A, & C, ex 7. huius A antecedens ad sequentem primi ternarij B erit, vt sequens, & tertiæ C ad ipsam mediam B: sed, vt hæc media B est ad vltimam, & tertiam C; sic est media alterius ternarij E ad suam extremam F, & è contrà ex Coroll. propos. 4. huius, nempe vt C ad B, sit F ad E; Sed dictum est, quòd C ad B, est vt A prima ad B mediam, & ex hypothesi, vt A ad B; ita D posterioris ternarij ad E mediam; Ergo, vt D prima ad E mediam, ita F tertia ad E eandem mediam. Quare ex 9. propos. erit D æqualis ipsi F, quod erat probandum.

Probatur quoque tertia pars, eodem argumento, quo pars prima, nempe si sit minor A, quàm C, futuram esse quoque minorem D, quàm F.

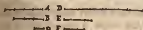
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XV. Eucl. 23.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; fuerit verò perturbata earum proportio; ex æquo autem prima tertiâ maior fuerit, erit quarta maior, quàm sexta; Si æqualis prima tertiæ, etiam quarta sextæ erit æqualis; sin illa minor, & hæc minor erit.

SIt ternarium linearum A, B, C, & aliud ternarium D, E, F; Quarum proportio sit perturbata nimirum relatio, & proportio, quæ intercedit inter primam A, & secundam B prioris ternarij imitetur proportionem, quæ est in posteriori secundæ E ad tertiam F. Quæ verò proportio reperitur inter secundam B, & tertiam C prioris ternarij similis sit proportioni, quam habet D primò posita ad secundam E.

Dico; quòd, si in priori ternario prima maior erit, quàm tertia; etiam in posteriori prima, quã Euclides vocat quartam, maior erit, quàm tertia, quam vocat sextam.



Probatur hæc prima pars: Quoniam maior ponitur A prima, quàm C tertia: Ergo maior erit proportio primæ A ad mediam B, quàm tertiæ C ad eandem mediam B; Sed in eadem proportione reperitur B ad C, in qua D ad E, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quàm E ad D. Ergo maior proportio A ad B, quàm E ad D: vt erat maior quã C ad B. Rursus eadem proportio reperitur A ad B, quã E ad F. Ergo est maior proportio E ad F; quàm E ad D. Igitur ex prp. 10. D erit maior, quã F.

Probatur secunda pars de æqualitate; nempe; si A ponatur æqualis ipsi C, quòd D erit æqualis ipsi F.

Quoniam A, & C sunt æquales: Ergo ex prop. 7. eandem rationem habent A, & C ad B; sed ratio, quã B respicit C, est eadem, quã D respicit E; & ex Coroll. 4. eadem quoque ratio est C ad B, quàm E ad D; igitur eadem ratione A refertur ad B, quã E ad D: Sed rursus A proportionem dicit ad B, vt E ad F. Ergo E refertur ad D eadem proportione, ac ad F: Ergo F, & D erunt æquales, ex propos. 9. huius.

Probatur quoque tertia pars eodem prorsus argumento, quo prima pars ostensa est; Quod scilicet posito A minori, quàm C in priori ternario, minor quoque in posteriori sit D, quàm F. Quia enim minor est A, quàm C dicet minorem proportionem ad B, quàm C ex 8. propos. Sed A ad B est, vt E ad F: Ergo E ad F dicet minorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt est B ad C, ita est D ad E, & ex Coroll prop. 4. C ad B, vt E ad D: Quare erit minor proportio E ad F, quàm E ad D; vnde D erit minor, quàm F.

EXPENSIO IV.

De modis argumentandi; seu similitudine proportionum.

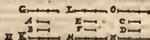
HVcusque comparauimus quantitates secundùm, quòd, aut maiorem, aut minorem proportionem dicebant, & semper dissimilem, & fundamenta proiecimus, quibus modos supra descriptos argumentandi in proportionibus ostendamus optimos, & euidentes: Nunc ad ipsas ostensiones horum modorum animus delegandus.

Obseruandum est. *Conuersionem rationis*, iam supra Coroll. 4. propos. fuisse ostensam: Nam fuit demonstratum; quòd si sint duæ combinationes quantitatum, in quarum prima sit A ad B, vt in secunda C ad D, quòd etiam è conuersò erit B ad A, vt D ad C. Vnde licebit arguere: si est A ad B, vt C ad D; erit etiam D ad C, vt B ad A conuertendo. Hìc itaque alij modi erunt ostendendi.

THEOR. I. PROPOS. XVI. Eucl. 11.

Quæ eidem rationi sunt ædem rationes, & inter se sunt ædem rationes.

SInt proportionales inuicem quantitates A B in prima combinatione, & quantitates E F in secunda. Istisque quantitatibus E F sint item proportionales quantitates tertiæ combinationis C, D, ita vt similitudo proportionum; quæ est inter combinationes primam, & secundam non sit diuersa, sed eadem; quæ est inter proportiones secundæ, & tertiæ combinationis. Dicit propositio; quòd hæ proportiones quantitatum primæ combinationis sint similes proportionibus ter-



tiæ combinationis, & ponitur vniuersale fundamentum, & generale arguendi in proportionibus; siquidem omne efficax argumentum fundatur in hoc, vt proportiones sint similes sicut tertiæ proportioni, ex quo deducitur esse similes inuicem.

Ad id ergo probandum assumantur alia paria combinationum singulis istis combinationibus multiplicium, ita, vt multiplices fundamentorum æquali vicium numero constent; Terminorum quoque licet non cum primis, inuicem tamen sint æquè multiplices, itaque Fundamentorum, seu antecedentium A, E, C, sint æquè multiplices G, L, O, Terminorum verò sint æquè multiplices K, M, N.

Prob. Cum ponamus primam combinationem A, & B dicere proportionem eandem secundæ cõbinationis quantitatibus E, & F: Ergo ex defin. 9. Crescente multiplici aliqua o in omni multiplicatione ipsius fundamenti A super aliam correspondentem multiplicem K termini B, vel decre-

scente

ſcente, vel illi ſe æquante, creſcet decreſcet, æquabitur ſimul, & altera fundamenti E multiplex L ſuper ſuam correſpondentem N termini F.

Verùm, quia ponitur quoque eadem proportio inter quantitates tertiæ combinationis, & ſecundæ; eſtque E, ad F, vt C ad D, multiplices fundamentorum creſcent, decreſcent, æquabuntur pariter reſpectu multiplicium terminorum, & L, V. g. ſuperante multiplicem M, ſuperabit quoque O multiplicem ſuam N, vel hæc æquabitur, illâ ſe æquante, vel defficiet illâ defficiente.

Itaque multiplices O, O fundamentorum A, & C combinationum extremarum concordabunt ſimul in creſcendo, decreſcendo, & ſe æquando reſpectu multiplicium K, N terminorum B, & D: dum concordant in eodem cremento, decremento, & æquatione cum media L multiplici fundamenti E, reſpectu multiplicis M ſui termini F.

Itaque, cùm A, & C fundamenta habeant ſuas multiplices O, & L reſpectu multiplicium K, & N terminorum ſuorum B, & D creſcentes ſimul, ſimulque decreſcentes, & ſimul ſe æquantes, habebunt fundamenta ad ſuos terminos ſimilem proportionem, & A erit ad B, vt C ad D.

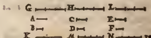
THEOR. II. PROPOS. XVII. Euc.12.

Si ſint magnitudines quotcumque proportionales; quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

IN prima huius demonſtratione hoc Theorema oſtenditur in proportione multiplici; Modo verò hic oſtenditur in proportione quacumque etiam irrationali. Dicitur itaque, quòd ſi dentur tres combinationes, aut etiam plures; quarũ antecedens ad ſequentes ſuas, fundamẽtaq; proportionum terminis eandem obtineant proportionem, & ſit in prima combinatione A ad B, vt in ſecunda C ad D, vt in tertia E ad F, quæ omnes ſimilitudine proportionum correſpondent. Dicit, quòd, ſi omnes antecedentes ſimul accipiantur A, C, E, & comparentur ad omnes ſequentes ſimul B, D, F, omnes antecedentes, ad omnes ſequentes ſimili proportione correſpondebunt, vt aliqua antecedens, ex ipſis V. g. C ad ſuam ſequentem D proportionatur.

Prob. Nam acceptis æquè multiplicibus G, H, L ad omnes antecedentes A, C, E, erunt omnes ſimul æquè multiplices ad omnes antecedentes A, C, E, ſimul ſumptas vt vna ſcilicet G vel earum A ex prima propoſ. huius. Acceptis quoque æquè multiplicibus K, M, N, ſequentium K, D, F, erunt omnes multiplices ſimul collectæ K, M, N, ad omnes ſequentes B D F item ſimul ſumptas, vt vna multiplex K ad vnam ſuã ſequentem B. Sed, & antecedentes ſingulæ proportione conſequuntur eandem ad ſuas ſequentes ex hypotheſi. Ergo ex defin. 9. part. pr. huius æquabitur ſimul, decreſcet creſcetque multiplex vnius antecedentis A reſpectu multiplicis ſuæ ſequentis B cum multiplices omnes G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, in omni multiplicatione conſimili gradu, vel decreſcunt, vel creſcunt, vel æquantur reſpectu multiplicium K, M, N, ſimul ſuarum ſequentium B, D, F.

Si itaque omnes multiplices G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, relatæ ad multiplices omnes K, M, N, omnium ſequentium K, D, F, creſcunt, decreſcunt, æquantur quemadmodum vna V. g. C relata ad ſuã correſpondentem K. Igitur ex definitione 9. omnes antecedentes A, C, E, ſimul iunctæ ad omnes ſequentes B, D, F, ſimul vnitas dicent proportionem eandem, veluti vna antecedens, nempe A ad ſuam ſequentem B comparata. Quod erat probandum.



Hic oſtenditur modus argumentandi, quem addidimus, primus; cum enumeratis multis combinationibus, quæ eandem proportionem habeant, ex inde arguitur omnia fundamenta eſſe ad omnes terminos, vt vnum fundamentum ad ſuum terminum: & eſt Enthimemma, quod alia probatione non indiget, cùm remaneat hic probatum, & redactum ad prima principia, & totalem euidentiam, vt patet.

THEOR. III. PROPOS. XVIII. Euc.15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem ſunt ratione, ſi ſumantur pro vt inuicem reſpondent.

SInt ſuarum partium A B, & L M, æquè multiplices lineæ A D, & L O dico ſingulas eſſe proportionales; inuicem. Si ita ſumantur prout correſpondent, nempe ſi referatur pars ad partem, ita totum, ad totum.

D B A
O L M

Probatur. Nam ſingulę partes lineæ A D ſunt æquales inuicem; Ergo ex 7. propoſ. omnes ad vnam earum V. g. ad A B eandem habent rationem, ſic, & in linea L O omnes, cum ſint æquales, ad vnam eandem earum V. g. ad L M habent eandem rationem.

Igitur, vt ſe habet vna antecedentium A B ad vnam conſequentiũ L M V. g. ita ſe habebunt omnes ſimul antecedentes, ideſt tota linea A D ad omnes conſequentes, nimirum L O, ex pr. 17.

THEOR. IV. PROP. XIX. Eucl. 16.

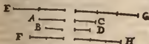
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & viciſſim proportionales erunt.

HIc demonſtratur alterna, ſeu permutata proportio, quæ tradita eſt def. 16. Si namque ſint duæ combinationes, quarum in vna antecedens A ad ſequentem B eam proportionem dicat, quam in ſecunda combinatione antecedens C dicit ad D.

Dico quoque eam proportionem dicere ambo antecedentes inuicem A, & C, quam ſequentes inuicem dicũt B, & D, quod tamen intelligendum, quũ proportiones ſunt in codẽ genere, vt patebit.

Ad

Ad id vero probandum in prima combinatione antecedenti A, & sequenti B sumantur multiplices E F, quæ complectantur numerum partium æqualem, & idem fiat in secunda combinatione assumendo multiplices G, & H, quæ licet non cum primis, adhuc tamen saltem inuicem partes æqualis numeri habeant.



Probatur. Nam antecedentium multiplices E, & G crescunt, æquantur, decrescunt, vt sequentium multiplices F, & H. Ergo ipsæ inuicem antecedentes A, & C proportionem dicunt eam, quam consequentes B, & D. Probatur, quod crescant, decrescant, æquentur multiplices antecedentium, vt multiplices sequentium ex defin. 9. quia dicunt inuicem proportionem. Quòd verò dicant proportionem patet; quia eidem dicant proportionem: nam ex propos. præced. ita proportionatur multiplex E multiplici F sequentis, sicut antecedens A proportionata est ad sequentem B; sed præsupponitur quod antecedens A ad sequentem B in prima combinatione dicant eam proportionem, quam antecedens secundæ combinationis C dicit ad D. Ergo, & multiplex E antecedentis proportionem dicit cum F multiplice sequentis, vt antecedens C secundæ combinationis ad sequentem D.

Sed idem quoque ex præmissa propos. de multiplici G respectu suæ antecedentis C, & de multiplici H respectu suæ sequentis D. In secunda combinatione afferendum nempe, quòd dicant eam proportionem, quæ reperitur inter antecedentem C, & sequentem D huius ipsius secundæ combinationis. Ergo multiplices in prima combinatione inuicem, & multiplices secundæ combinationis inuicem eam proportionem dicunt, quam antecedens C, & sequens D. Quare dicent, ex 16. huius eandem proportionem inter se duæ E ad F, vt duæ G ad H: Æquabuntur, itaque crescent, & decrescent æqualiter ex 12. propos. huius in omni multiplicatione. Vnde, & quantitates, quibus sunt multiplices, nimirum antecedentes A ad C, & sequentes B ad D inuicem dicent eandem proportionem ex defin. 9. part. primæ.

COROLLARIVM I.

VNde colligas posse mutari rationem alternè solum in proportionibus eiusdem generis, quia si essent diuersi generis non possent dici, multiplices primæ combinationis, & secundæ vnquam æquari, vel esse maiores, vel minores; quia quantitates diuersi generis sicut æqualitatem non habent, ita nec possunt dici maiores, vel minores.

COROLLARIVM II.

HInc, & ex propos. 17. illum modum, quem assignauimus supernumerarium, & definit. 20 appellauimus Collectionem probare possumus; Nam dispositis terminis.

2	3	4
6	9	12

Ita vt sit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & 3. ad 4. vt 9. ad 12. erit etiam permutando 2. ad 6. vt 3. ad 9. & 3. ad 9. vt 4. ad 12. Quamobrem ex propos. 17. poterimus colligere omnia fundamenta simul in hac proportione permutata 2. 3. 4. nempe 9. comparando ad omnes terminos simul 6. 9. 12. scilicet 27. & dicere, quòd, ità sit 2. ad 6. vt 9. ad 27. nempe vt fundamentum aliquod 2. ad suum terminum 6. ita omnia fundamenta 9. ad omnes terminos scilicet 27.

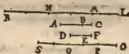
PROB. V. PROPOS. XX. Eucl. 17.

Si Cōpositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoq; diuisæ proportionales erunt.

DEmonstratur his modus argumentandi, in proportionibus, qui dicitur diuisa ratio nis. Namque si tota magnitudo AC, sit proportionata ad suam partem BA, veluti tota DF ad suam partem ED.

Dicit quoq; diuisas eandem seruare rationem, & adhuc esse, vt pars A B ad eiusdem partem alteram B C, ita pars D E ad eiusdem totius partem alteram E F.

Quod vt probetur assumendæ sunt duarum partium A B, & B C æquè inuicem multiplices, quæ erunt L M, & M N. Deinde duarum partium alterius quantitatis D E, & E F æquè multiplices inuicem, & cū primis OP, & PQ. Vbi considerandū est, ex prima prop. huius, quòd istæ multiplices partium simul positæ, vt O Q, & L N, sunt quoque æquè multiplices totorū AC, & DF: Quo notato, rursus accipiantur æquè multiplices partiū AB, & DE, & addantur primis ipsarum met assumptis multiplicibus simul; positæ ex secunda prop. huius erunt adhuc æquè multiplices, nimirum M N B. quantitati AB, & P Q S, quantitati DE.



Quoniam N B prima in priori serie ex multiplex secundæ A B, vt in posteriori Q P est multiplex secundæ D E; & N B. tertia prioris seriei, ita est multiplex suæ secundæ A B, vt tertia Q S in posteriori serie est multiplex suæ secundæ D E; ideo, vt ibi docetur, simul compositæ prima, tertiaque M B. erit etiam ita multiplex secundæ A B prioris seriei, & posterioris prima cum tertia P S suæ secundæ DE.

Quo posito. Assumantur pro prima combinatione totæ quantitates A C, & D F, quæ vt supponitur dicunt similem proportionem cum suis partibus B A, & D E, quæ pro secunda combinatione assumendæ sunt, & ita sit A C tota ad A B partem, vt D F tota ad D E partem; quare earum multiplices simul, æquantur, crescunt simul, atque decrescunt in omni multiplicatione ex 9. defin. nimirū L N & O Q totorum, & fundamentorum respectu M N B, & P Q S, quæ sunt multiplices partium, & terminorum, sed compositæ, vt diximus. Ablatis itaque partibus istis, ex quibus componuntur ab æquè multiplicibus M N hinc & P Q, inde, quæ sunt communes, tum multiplicibus totorum, tum multiplicibus partium; cùm crescunt, crescunt

adhuc

adhuc, cùm deficiunt, deficient quoque, cùm æquantur, similiter æquabantur remanentes multiplices hinc LM, & OP residuę totorum, respectu quantitatum similiter residuarum partium RN, & QS. Sed hæ remanentes sunt etiam multiplices partium, nimirum LM partis CB, & PO partis FE ex hypothesi, in prima combinatione; At in secunda RN ex ostens. est multiplex partis AB, & SQ partis EB. Ergo partes AB ad BC inuicem proportionem dicunt vt DE ad EV, ex 9. defin. cùm earum æquè multiplices simul crescant, decrescant, & æquantur iuxta quamlibet multiplicationem antecedentiũ respectu consequentium.

COROLLARIVM

Colligo hinc posse argumentari, quòd, si pars ad totum proportionem dicit, vt alia pars ad suum totum, etiã pars ad partem, vt altera pars ad alteram partem dicat proportionem, tam rectè, quam conuersè argumentando; nimirum ne dum rectè dicendo, vt AC ad AB, ita DV ad DE: Ergo vt AB ad BC, ita DE ad EF; sed etiam conuersè, ergo, vt CB ad AB ita EV ad DE.

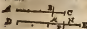
COROLLARIVM.

Deducitur secundò, nihil interesse, quod summantur pro prima combinatione, partes maiores, aut minores; quia æquo modo valet argumentum, vt patet. Nec quòd assumantur priùs maiores partes; vt totis proportionales, ex quo arguatur; quod etiam partes eædem maiores sint residuis partibus proportionales, vt si dicatur vt AB, ad AC; ita DB ad DF. Ergo vt AB ad BC; ita DE ad EF.

THEOR. VI. PROPOS. XXI. Euc. 18.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ erunt proportionales.

Hæc propositio demonstrat illum modum argumentandi in proportionibus esse bonum, quo deducitur vt definitione 24. quòd, si diuisæ magnitudines sint proportionales, coniũctas quoque eandem proportionem seruare, qui modus arguendi appellatur *Compositio rationis*. Si dentur itaque diuisæ magnitudines; nimirum AB, & BC proportionales; vt sunt DF ad FE.



Dico compositas quoq; esse simili proportione correspondentes, & totum AC, ad partem BC referri, vt totum DE ad partem FE.

Probatur. Si enim totum AC non est proportionatum parti suæ BC; vt alterum totum DE suæ parti VE; erit saltem in aliquo toto eorum aliqua pars, cui correspondeat totum suum, vt parti suæ alterum totum refertur.

Assignetur itaque, & sit in linea DE pars N minor, Sitque iuxta aduersarios AC totum ad BC partem, vt DE totum ad NE partem, quò posito sequitur absurdum tali modo.

Si enim est, vt AC totum ad BC partem, ita DE totum ad NE partem: Erit quoque diuidendo AB pars ad BC partem ex præced. vt AN pars ad NE partem: sed ex hypothesi, vt est AB pars ad BC partem; sic quoque est DV pars ad VE partem. Ergo ex 16. propos. huius pars DN ad partem NE assignatam obtinebit eandem proportionem, quã pars DV ad partem VE primo positam: quòd eãrum proportiones sint similes tertię proportioni; nimirum AB ad BC. Sed antecedens DN ponitur maior, quàm antecedens DF; ergo etiam sequens NE erit maior sequente VE ex propos. 13. hoc autem absurdum est, quia ponitur minor ab aduersarijs. Quod si pars EM maior statuatur ipsã VE, & velint aduersarii, quòd ED totũ ad ME partẽ, sit in eadẽ proportione, quã reperitur AC totum ad BC partem, incidimus adhuc in idẽ absurdum: Nam tunc erit minor ME, quam EV, quæ ME est assignata ab ipsis maior.

Et probatur simili argumento. Quoniam enim ex aduersarijs est AC totum ab BC partem; sic DE totum ad ME partem; poterimus diuidere ex anteced. & asserere, quòd AB pars sit ad BC partem; sic DM pars ad ME partem. Verum etiam pars DV est ad partem FE, vt pars AB ad partem BC ex hypothesi: quare de rẽ DM simili proportione consentiet ad ME, ac DV ad VE; quòd eorũ proportiones tertiæ proportioni, quæ militat inter BA, BC sint similes: Sed antecedens DM ponitur minor, quàm antecedens DF: Ergo etiam, & consequens ME minor esset sequente VE, & tamen maior EM ab aduersarijs constituta est quàm EV.

COROLLARIVM I.

Collige, quòd nihil interest; an arguas priùs conuertendo terminos; & vtendo conuersione, V. g. dicendo; si proportionem dicit AB ad sequẽtem partem in prima combinatione BC, quam dicit DF antecedens in secunda combinatione ad suã sequentem FE, igitur conuertendo terminos erit sequens BC ad suam antecedentem AB in prima cõbinatione, vt sequens FE ad antecedentem secundæ combinationis DV. Deinde sequatur in arguendo compositiuus rationis; Ergo, & erit tota AC antecedens ad sequentem AB suam partem vt est antecedens DE tota ad sequentem DF suam partem. Imo possum, & adhuc contrario modo sumere terminos, & arguere sequentem quoque, quæ est pars AB se habere ad totam AC antecedentem, vt pars DF sequens ad antecedentem totam DE.

COROLLARIVM II.

Collige hinc illum modum argumentandi in proportionibus cõfirmari, quo arguitur ex proportionis similitudine, quam habet prior linea AB cùm sua parte BC, comparata proportioni, quam habet tota posterior linea DE, cum sua parte FE, quod etiã tota prior AB ad suam reliquam partem AB simili proportione referatur, quam tota posterior DE ad suam reliquam partem DV. Quod ergo iste modus argumentandi bonus sit.

Probatur. Nam cum tota prior AC se habeat ad suam partem BC, vt posterior DE tota ad suam partem EV, poterit quoque argumentari *diuidendo* ex 20. huius, & assumendo residua pro totis, quare reliqua pars AB, in priori linea erit ad ablatam CB; quo pacto est DV reliqua in posteriori linea ad ablatam FE: Quamobrem, & poterimus conuertere propositionem, & ẽ contra dicere, quod ablata CB in priori linea ad residuum AB est,

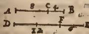
sicut

sicut ablata BF ad residuam OF. Iterumque Componendo ex propos. 21. huius, quòd sicut se habet tota AC prior ad suā partē residuā AB, ita se habeat tota DE posterior ad DF suum residuam partem.

THEOR. VII. PROP. XXII. Eucl. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit.

SVpra id quoque ostensum est ab Eucl. in proportione multiplici, vt quid facilius, licet demonstratio ab illa nullo pacto dependeat, cùm tamen à multis antecedentibus, vel mediatè, vel immediatè dependentiam obtineat. Hic itaque generaliter ostendit, & dilatat propositionem etiam ad proportiones irrationales. Si itaque reperiatur aliqua quantitas AB, quæ tota ad aliam DE similis in proportione sit, vt eius aliqua pars BC, est proportionata alterius parti EF. Dicit quoque reliquum AC ad reliquum DF similem proportionem consequi.



Probatur. Nam ex propos. 16. si in prima cōbinatione tota antecedens prior linea AB ad sequentem posteriorem totam DE, vt pars à priori linea BC antecedens in secunda combinatione ad sequentem EF partem ablatam alterius posterioris, licebit permutare terminos; & affirmare ex propos. 19. *permutando*; Antecedentem quoque totam AB ad antecedentem BC, quæ est sua ablata pars, dicere eam proportionem, quam sequens tota DE dicit ad sequentem EF, quæ est sua à se ablata pars. Iterumque ex propos. 20. poterimus arguere *diuidendo*, & dicere; Quod si eandem proportionē, quam dicit tota antecedens AB, in priori linea ad antecedentem BC, quę est ablata sibi pars, dicit quoque tota sequens DE in posteriori linea ad ablatam sui partem EF; Quod etiam reliqua pars AC prioris lineæ ad BC residuum in eadem proportione sint; quam posterior DF ad posteriorem FE dicebat: Quare rursus *permutando* erit, vt AC fundamentum ad DF fundamentum, vt terminus BC ad terminum FE: hoc est, vt tota AB ad totam DE, quæ ex hypoth. vt BC ad EF comparatur.

COROLLARIVM

HInc apparet propositionem 13. esse intelligendam vniuersaliter; cùm vniuersaliter sit verum, quòd, si sit totum ad totum, vt ablatum ad ablatum; etiam reliquum ad reliquum, ita erit vt totum ad totum; & ideo, quòd, cum sit AC maior, quam EO, quod etiam sit residuum AC minus quam FG adhibita figur. propos. illius.

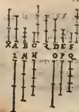
THEOR. VIII. PROPOS. XXIII. Euc. 22.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; quæ binæ in eadem ratione sumantur; etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstrauit superius Euclides in propos. 14. quòd binæ sumptæ in eadem ratione quantitates essent, vel æquales, vel minores, vel maiores alijs quantitatibus sumptis, vt binæ pariter secundum proportionem similem ad primas: nunc demonstrat esse etiam proportionales, ex quo desumitur modus argumētandi ex Æqualitate vocatus.

Sint itaque magnitudines ABC, & alię tres DEF. Sitque prima, & antecedens A ad suam secundam, & sequentem B, in priori ternario, vt in posteriori prima D, & antecedens est ad secundam, & sequentem E. Sit quoque B modo, vt antecedens posita ad tertiam C suam sequentem in priori ternario, vt in posteriori secunda E sumpta, vt antecedens, est ad tertiam F sequentem suam. Dicit *ex æqualitate primā* A *ad tertiam* C in priori ternario *ita referri*, vt in posteriori *prima* D *ad tertiam* F intermissis medijs terminis B, & E.

Quod, vt ostendatur, accipit singulis quantitatibus prioris ternarij singulas lineas L, M, N, quarum quęlibet, ita multiplex suæ cuique lineæ assumantur, vt assumuntur in posteriori ternario multiplices O, P, Q, correspondentibus lineis; Lineæ itaque L, & O, sint æquè multiplices primarum A, & D, V. g. duplæ. M verò, & P sint æquæ multiplices secundarum B, & E, V. g. triplæ: N Q tandem sint æquè multiplices tertiarum V. g. quadruplæ.



Probatur. Nam tum in priori, tum in posteriori ternario primarū multiplices L, O, relatæ ad tertiarum multiplices N, & Q, crescunt decrescunt pariter ad quācumque multiplicationem, vel etiam eis æquātur. Ergo primæ A, & D quibus sunt multiplices ex 9. definitione in eadem proportione erunt respectu tertiarum C, & F.

Remanet antec. probanda. Probatur autem ex 14. propositione huius. Nam multiplices binæ in eadem proportione sumuntur, ita, vt in priori ternario multiplicium, ita respiciat prima multiplex L secundam suam M, sicut in posteriori multiplicium ternario prima multiplex O, respicit suā multiplicē P, & idē dicas de secunda multiplici M relata ad multiplicem tertiā N, quæ ita se habet ad eam, vt in posteriori ternario multiplicium secunda P ad suam tertiam Q comparata.

Ratio huius ex propos. 4. huius desumitur. Quòd multiplices antecedentes ad sequentes suas eam habeant proportionem, quam habent simplices antecedentes, quibus multiplices sunt ad suas sequentes simplices. Quare, cùm antecedens A ad sequentem B in priori simplicium linearum ter-

nario sit, vt in posteriori antecedens D ad sequentem E ea hypothesi, sequitur, vt tali quoque proportionis similitudine afficiantur earum multiplices ita, vt sit L ad M, vt O ad P. Rursus cum pariter ea hypothesi B ad C prioris ternarij sit, vt E ad F; quod earum multiplices quoque in proportione similitudinem dicant ita, vt sit M ad N, vt P ad Q. Cum itaque ita sit L ad M, vt O ad P; & M ad N, vt P ad Q erit perpetuus nexus, & simultas ea propos. 14. huius L, & O in cremento decremento, & æquatione respectu extremarum N, & Q. Quare ea defin. 9. simplices eandem dicent proportionem, & A erit ad C, vt D ad F.

COROLLARIVM I.

QVòd si sint, seu maiores, seu minores eodem pacto probatur V.g. ponamus in priori ternario adesse X, quæ se habeat ad A, vt in posteriori Z ad D, erit quoque ex eodem argumento X sumpta vt prima ad B quæ tunc erit tertia, vt in posteriori Z prima habet ad E, quæ tunc erit tertia, & eodem modo de alijs quibuscumque, vel antecedentibus, vel sequentibus ostendetur.

COROLLARIVM II.

COlligitur secundò esse bonum illum modum arguendi, quo deducitur; quòd ex eo, quia proportionem similem habeant B ad C, vt E ad F, quod etiam similem proportionem linea B ad lineam pũctatam ipsâ C quadruplo, vel vt libet maiorem habebit, ac altera D ad lineam punctatam, quadruplo, vel vt libet æquè maiorem, Maiores enim istæ, cùm sint in proportione multiplici eadem, possunt sumi, vt tertiæ; vnde ex æqualitatis argumentatione licebit inferre earum proportionem, cùm primis, & dicere: ex eo, quod C sit ad B, vt F ad E, multiplicem quoque C esse ad B, vt multiplex ipsius F ad E.

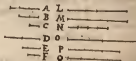
THEOR. IX. PROP. XXIV. Eucl. 23.

Si sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eâdem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstratur hic argumentationem ex æqualitate esse bonam, etiamsi proportio fuerit perturbata: Sic ergo ternarium prius linearum A B C, & aliud posterius D E F, in quorum priori proportio primæ A ad secundam B assimiletur proportioni, quam habet secunda E in posteriori ternario ad tertiam F, ac quàm proportionem habet prima D huius posterioris ternarij ad secundam suam E; habeat quoque secunda B prioris ternarij ad tertiam C. Dicit; *quod prima A ita proportione referetur ad tertiam C in priori ternario; sicut in posteriori prima D ad tertiam F refertur.*

Quòd vt probet, assumit æquè multiplices in singulis ternarijs ita, vt primæ A, & D æquè multiplices habeant L, & O, V.g. duplas; secundæ verò B, & E æquè multiplices obtineant V.g. triplas M, & P: At tertiæ C, & F æquè multiplices nanciscantur N, & Q, V.g. quadruplas.

Probatur ternarium multiplicium cum alio multiplicium ternario in ratione perturbata conuenit; ita vt prioris prima L ad secundam M referatur similiter, ac in secunda P ad tertiam Q in posteriori ternario: huius vero prima O ad secunda P referatur, vt in priori secunda M ad tertiã N.



Sed iam probatum est 15. propos. huius, quòd in ratione perturbata primæ V.g. O, & L, crescunt decrescunt æquantur simul, & vnâ in qualibet multiplicatione & respectu quantitatum N, & Q, inuicem in crescendo, & decrescendo, vel se æquando semper indiuisibiles comites eodem modo se gerunt.

Ergo lineæ simplices nimirum A prima dicet eam proportionem cum tertia C in priori ternario; qualem dicit prima D ad vltimam F in posteriori.

Probandum remanet itaque, quod multiplices tum huius, tum alterius ternarij in ratione perturbata conueniant, ex propos. 18. quia partes cum pariter multiplicibus in eâdem ratione sunt, si sumantur prout inuicem respondent: Cum igitur simplices sint partes multiplicium, quòd earum partibus sint æquales, patet, quòd si simplices in ratione perturbata sibi correspondent, eodem pacto, & multiplices sibi correspondebunt in eadem ratione perturbata: Vnde ita L erit ad M, sicut P ad Q, & O ad P, vt M ad N.

THEOR. X. PROPOS. XXV. Euc. 24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: habuerit autem, & quinta, ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVod demonstratum est 2. propos. de proportione multiplici, modò hic de omni proportione etiam irrationali ostenditur.

Si sint tres magnitudines in priori ternario, quarum prima A ad mediam B eam dicat rationem, quam in posteriori prima D ad secundam E, & rursus ad has medias nimirum ad B in priori ternario tertia C eam proportionem dicat, quam in posteriori tertia F ad mediam E habet: Affirmat *compositas quoque primam A, & tertiam C*, quod in pũctatia captissum est prioris ternarij simili proportione respicere B, sicut compositas primam D & tertiam F posterioris ternarij ipsam E.

Probatur itaque obseruando prius; quòd cùm tertia dicat proportionem ad secundam tum in vno, tum in alio ternario ex hypothesi, *conuersè* arguendo etiam media in quolibet eorũ erit proportionalis tertiæ, ita vt B sit ad C eodem modo,

E est ad F: quia ex hypothesi C est ad B, quemadmodum E est ad F.



Quo supposito, iam possumus arguere ex æqualitate secundùm documenta propos. 23. quia habemus binas in vnoquoque ternario, tum priori, tum posteriori sibi proportione simili respondentes; namque ita est A ad B in priori ternario, vt D est ad E in posteriori, & ita B est ad C in priori, sicut E est ad F in posteriori.

Ergo ex *æqualitate*, ita prima A in priori ternario proportionabitur ad tertiam C, vt in posteriori prima D proportionatur tertiæ F. Et iam poteris arguere *componendo* ex documento prop. 21. & addendo A primæ linea C, quod per punctatam exprimitur, dicere quod tota AP nimirum continua, & C punctata ad C dicat similem proportionem; vt dicit tota DQ nimirū continua cum F punctata ad F.

At ad hoc, vt tandem deueniamus ad conclusionem oportet constituere aliam argumentationem ex æqualitate. Iam enim habemus ex dictis vsque adhuc A primam cum C punctata s. AP proportionatam ad C sicut prima D Q proportionatur ad F; Sed ex hypothesi quoque C est ad B proportionata, vt est F ad E. Ergo ita erit ex æqualitate tota AP, nimirum continua AC cum CP punctata ad B; vt est proportionata tota DQ, nimirum continua DF cum FQ punctata ad E.

COROLLARIVM

Colligit hic Clauius; quod hoc modo argumentandi, quo vsi sumus posse, & demonstrari, id quod ostensum est propos. 6. de proportione multiplici conuenire omni proportioni. Nimirum, quod si duæ magnitudines ad duas eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habent ad easdem eandem proportionem, & reliquas, quę remanent, ad easdem eandem proportionem habituras. Nam positâ eadem figurâ assumes pro prima prioris ternarij totam AC cum pūctata CP, & pro posterioris ternarij prima DF cū punctata FQ; Si ergo auferatur C, & F, & ponantur rursus pro tertijs, ita quod ad secūdas suas B, & E eam habeant proportionem, quam habebant, quando erant coniunctæ. Reliquę AC, & DF ad easdem secundas B, & E eam proportionem habebunt, quam priùs habebant integræ ad B, & E. Pr. Nam C est ad B, vt F, ad E: Ergo conuertendo, vt fecimus priùs, B erit ad C, vt E ad F, Quare ex æqualitate tota ACP erit ad C, vt tota DFQ est ad F; Ergo diuidendo ita est AC ad C, vt DF ad F; Et quia ex hypothesi ita est C ad B, vt F ad E; ideo AC, & DF poterunt poni pro primis C, & F pro medijs, & B, & E pro tertijs, & ex æquali argumentari, ita esse AC ad B, vt DF ad E, quod est propositum.



TRACTATVS X.

IN VI. LIBRVM EVCLIDIS

De proportione quantitatis continuæ.



Isis proportionibus genericis ad particulares descendimus iuxta diuersitatem materiæ, quibus præcipuè applicantur; Nam alia est proportio numerorum, alia est quantitatis continuæ; Quantitatis verò continuæ duplex est, alia rationalis, alia irrationalis. Modò verò agimus de quantitatis continuæ proportione prout præscindit ab irrationali, seu rationali.

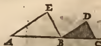
EXPENSIO I.

De principijs huic tractatui spectantibus.

PRincipia, quæ huic expensioni maximè deseruiunt sunt definitiones quædam figurarum, quę proportiones fundant.

DEFINITIO I.

SImiles figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circa angulos æquales proportionalia.



Figuræ illæ similes dicuntur, quæ angulos æquales habent, vt sunt B niger angulo A, & D angulo E, & C angulo B albo, & latera proportionalis circa æquales angulos; ita vt sit trianguli nigri crus C D ad alterum B D eiusdem; Veluti crus B E albi ad crus A E eiusdem, quæ complectuntur angulum B album æqualem angulo D nigro, quem crura prædicta DC, & B D complectuntur, & sic de alijs cruribus. Quapropter quadratum, & figura altera parte longior non sunt similes figurę; quia latera quadrati habent circa quemlibet angulum rectum proportionē æqualitatis; at figuræ altera parte longioris proportionem inęqualitatis, licet aliàquin, tum vnius, tum alterius figuræ, anguli sint æquales, vtpote recti. Vnde etiam constat omnes figuras, quæ rectilineæ sunt, æquilateræ, & æquiangulæ, & numero eodem, tum laterum, tum angulorum constant, esse inuicem similes, licet maximè sint inæquales.

DEFINITIO II.

REciprocæ figuræ sunt, cùm in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini sunt.

Idest, cùm in prima figura fuerit fundamentum proportionis, & in secunda terminus proportionis eiusdem: in eadem verò secunda fundamentum reperiatur alterius proportionis correspondentis, & huius terminus in prima, ita vt duarum proportionum similium nulla sit tota in vnica figura; sed fundamentum sit in vna terminus in alia: hæ dicuntur figuræ reciprocæ. Sic in fig. præced. si sit A E ad B D, vt B C ad B A dicerentur illa duo triangula figuræ reciprocę, quia AE est fundamentum vnius proportionis, & B A terminus alterius in triangulo albo, sic & B D est terminus primæ proportionis, & BC fundamentum secundę proportionis in triangulo nigro.

DEFINITIO III.

SEcundùm extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm vt tota ad maius segmentum, ita maius segmentum fuerit ad minus.

Si linea data A B, ita diuidatur in C, vt correspondeat eadem proportione simili tota ad maius segmentum A C, vt idem maius segmentum A C ad minus C B refertur; tunc dicitur secta in C extrema, & mediâ ratione.

A C B
I———I———I

DEFINITIO IV.

ALtitudo cuiuslibet figuræ est, perpendicularis à vertice ad basim deducta.

Ptolomæus in libro de Analemmate inquit. Mensuram debere esse certam, & determinatam. Propterea, cùm omnes rectæ lineæ; quę à vertice alicuius figuræ ducuntur incertæ sint, & indeterminatæ, meritò sola perpendicularis rationem mensurę sibi vendicat, & altitudinem cuiuslibet figuræ metitur; sic figuræ Q C A P altitudo est PC cadens in latus QA. Potest tamen quodlibet aliud latus constitui pro basi, & linea perpendicularis à remotiori angulo deducta (acumen enim illius



an-

anguli, vertex est) dicitur altitudo figuræ illius, sic V A in latus C Q demissa erit altitudo quoque figuræ. Nota definitione de compositione Rationum, quam ponit hic Euclides esse supra explicatam Tract.9. Exp.5. Def.7. part.1.

DEFINITIO V.

Parallelogrammum secundùm aliquam rectam lineam applicatum deficere dicitur parallelogrammo; quando non occupat totam lineam; Excedere verò quando occupat maiorem lineam, quam sit ea secundùm quam applicatur; ita tamen, vt parallelogrammum, quod deficit, vel excedit illi applicata eandem habeat altitudinem, quam ipsum parallelogrammum applicatum; & constituat cum eo totum vnum parallelogrammum.

Sit data recta linea A B, super quam constituatur parallelogrammum A C D E, cuius latus A C totam longitudinem lineæ A B non æquet, sed desit C B; tunc parallelogrammum A E erit deficiens,



& si interrogetur, quo defectu? hic defectus erit parallelogrammum E B nigrum occupans reliquũ lineæ C B, & eandem altitudinem cum deficiente A E obtinens, & cum eo parallelogrammum vnicum, vt D B constituens. Deinde si lineæ A C, sic ei applicetur parallelogrãmũ maius B D, quod ipsã excedat latere A B io parte C B; tunc parallelogrammum erit abundans, aut excedens; Excessus autem erit parallelogrammum nigrum E B habens eandem altitudinem, cum prædicto B D & cum eo idem parallelogrammum constituens D B.

DEFINITIO VI.

Homologæ sunt quantitates, cùm, vna, fundamenta, & antecedentia proportionem, altera terminos continet, vel consequentes.

Cum itaque aliqua quantitas habet in se fundamenta, & antecedentia rationum: alia terminos correspondentes, illæ quantitates dicuntur homologæ.

V.g in fig.def.1. Si sit latus A B albi ad latus B C alterius nigri, vt A B albi ad B D nigri, dicuntur triangula figuræ homologæ cum fundamenta ambo A B, & A E sint in albo, termini B C, & B D ambo in nigro.

EXPENSIO II.

De proportione laterum triangulorum.

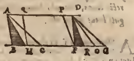
Cvm triangula principium figurarum sint, & ea ex quibus figuræ reliquæ constituuntur: Hinc est, quòd in prima de proportione laterum agatur, quæ ea ambiunt, atque constituunt.

THEOR. I. PROPOS. I. Euc.1.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

Cvm triangula, & parallelogramma ex def.4. habeant altitudinem eandem, cum fuerint constituta inter easdem parallelas, ob eandem perpendicularem, quam consequuntur. Constituantur primo duo triangula nigra inter parallelas A D, & B G. Dicit, quòd hæc triangula proportionem similem ad inuicem possideant, quam bases. Quod vt probetur in parallela, quã bases insunt, assumendæ sunt basibus æquales, alijsrum basi æquales trianguli A H A vna æqualia, quæ sit H C, coniungendæque sunt C, & A, sicque triangulum H A C æquale triangulo nigro sibi contermino ex 1.Coroll. propos. 39. primi.

Rursusque alteri basi F E trianguli nigri assumenda sunt æquales, V. g. duæ E O, & O G, coniungendæque sunt rectis O D, & D G; faciuntque triangula E O D, & O D G ex Coroll. 1. prop. 40 primi æqualia nigro F D E.



Probatur. Bases triangulorum albõrum æquales sunt basibus nigrorum triangulorum; ipsaque triangula suis triangulis conterminis probata sunt ex Coroll. 1. propos. 40 primi æqualia: Ergo sunt æquè multiplicia basis, & triangulum album basi suæ conterminæ, & nigro triangulo B A H pro priori pari. Sicut triangula duo, duæque eorum bases E O, & O G sunt æquè multiplices eiusdem basis F E, & trianguli nigri F D E. pro secundo pari: nimirum bases quidem basibus multiplices, sicut triangula triangula.

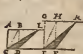
Cum ergo in quacunque multiplicatione basis B H, & trianguli B A H æquè multiplices in primo pari excedant, vel decrescant, vel æquentur pariter relatæ ad æquè inuicem multiplices basis F E, & trianguli nigri F D E. In secundo paris dicendum est ex def. 6. tract. 9. triangulum nigrum B A H ad nigrum F D E eam habere proportionem, quam habet basis B H ad basim F E, & ideo, quòd basium ad bases, & triangulorum ad triangula sit proportio similis.

Probatur quoque de parallelogrãmis. Partes cum pariter multiplicibus in cadem sunt ratione ex 18. lib. 5. Sed triangula sunt dimidia parallelogrammorum ex propos. 39. primi: Ergo cum triangulis in eadem sunt ratione; Sed triangula in eadem sunt ratione, vt bases; Ergo, & parallelogramma. Et erit parallelogrammum B Q ad parallelogrammum E P, vt basis B H ad basim F E.

COROLLARIVM

Colligitur ex Commandino, quòd, si triangula habeant æqualem, vel eandem basim se habent ad inuicem, vt altitudines, V. g. triangulum C D L nigrum, & triangulum K M F nigrum erunt inuicem, vt altitudines, nempe perpendiculares

lares punctatæ A D, & E F; Namque, si trahatur BH, & CA erunt triangula punctata CFD, & HAF, vt altitudines BD, & HF pro basibus vsurpatę, siquidem erunt inter parallelas AC, & DB, & inter EH, & AQ:



Sed triangula punctata sunt æqualia nigris ex prop 39. I. Coroll. vtpote inter easdem parallelas, & super eandē basim constituta: Ergo nigra triangula in eadem proportione sunt, ac altitudines, & vt altitudo AD ad altitudinem EH, sic CDL ad BMF; quòd & dicendum est de parallelogrammis, cùm sint dupla triangulorum, prout in probatione propositionis dictum est.

THEOR. II. PROPOS. II. Eucl. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones iuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

ASserit; quòd, si in aliquo triangulo, vt in triangulo ABC ducatur parallela ad aliquod laterum V.g. DE, *hæc proportionaliter secabit crura reliqua* AB, *&* AC, & hoc pro prima parte.

Ad quod demonstrandum ducit lineas DC, & EB punctatas, quæ faciunt duo triangula minora super eandem basim DE constituta, & inter parallelas BC, & DE, nimirum triangulum DEB, & aliud DEC, quæ ex propos 39 1 Cor. 1 erunt æqualia.

Probatur triangulum nigrum est ad punctatum DEB, vt basis AD ad basim DB.

Rursus idem triangulum nigrum est ad aliud punctatum DEC in eadem proportione velati est basis AE, ad basim EC ex prop. 1. huius.

Sed, vt triangulum nigrum se habet ad vnum ex triangulis punctatis V. g. ADB, ita se habet ad aliud DEC, ex propos. 7. quinti, cum vt dictum est hæc triangula sint æqualia; Ergo vt se habet basis trianguli nigri DA ad basim punctati DB; ita se habet eiusdem trianguli basis AE ad basim punctati EC. Quare crus AB est sectum proportionaliter in D eâ proportione, quâ sectum est crus AC proportionaliter in E.

Secunda verò pars conuertit priorem, & dicit, quod si trianguli latera ABC secta fuerint proportionaliter in D, & E *linea, quæ puncta coniunget erit parallela*.

Probatur verò ex eò, quòd triangula DEC, & DBE sint æqualia; Ergo ex Coroll. 2. propos 39. primi inter easdem parallelas DE, & BC sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem triangulo nigro sunt proportionalia. Sunt etiam proportionalia eidem nigro ex prima huius propos. quia habent bases eiusdē nigri, basibus similiter proportionales, & est DA ad DB, vt AE ad EC ex hyp. & insuper sunt inter easdem parallelas AE, & PB, & inter AC, & DQ; siquidem cum desinant in eundem verticem; etiam inter parallelas easdem erunt. Ergo vt basis DA ad basim DB; sic triangulum nigrum ad triangulum BDE: & vt AE ad EC bases; sic triangulum nigrum ad triangulum DEC: Ergo albi DEC, & BDE erunt inuicem æquales ex 9. quinti. Quare ex Coroll. 2. propos. 39. erunt inter parallelas.

THOR. III. PROPOS. III. Eucl. 3.

Si trianguli angulus bifariam sectus fuerit; secans autem angulum recta linea secuerit, & basim; basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera.

Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem deducitur, bifariam secat ipsum angulum.

SIt triangulum ADC; diuidaturque aliquis angulus eius V. g. A bifariam per rectam AB, affirmat primò, *quod hæc in B puncto secat basim* DC *in duas portiones, quæ inuicem ita proportionatæ sunt, vt sunt connexa sibi crura*, V. g. Ita est DB ad BC, vt DA ad AC. Quòd, vt probet, ad AB à puncto D ducit parallelam DH; deinde prolungat latus AC vsque quo coeat in H. Probat autem coituras has lineas, quia anguli niger, albusque simul ad D, ęqualis angulo A nigro ob parallelas ex prop. 30. & niger ad C ex Coroll 6. prop. 17. sunt minores duobus rectis, (vt in omni triangulo euenit) deberent verò esse æquales ex propos. 29. ad hoc, vt DH, & HC essent parallelę, & ideo non possent coire.



Ad hoc autem, vt propositio immediatè probetur, probandū est prius, quòd crura DA, & AH sint inuicem æqualia.

Id ostenditur ex æqualitate angulorum. Nam, cùm crus DA incidat in parallelas DH, & AB, faciet angulos alternos ęquales; nimirum nigrū ad D, & album cruce signatū ad A ex propos. 30. primi. Rursusque cùm crus HA incidat in easdem parallelas HD, & BA faciet angulum externum nigrum ad A opposito, & interno H æqualem ex propos. 30. primi. Sed angulus niger, & cruce notatus ex hypothesi facti sunt æquales; Ergo, & angulus H, & D niger erunt æquales. Quare ex propos. 15. primi latera hos angulos æquales subtendentia erunt æqualia; Quo supposito probatur propositio.

Eam proportionem, quam habet portio AH ad AC eandem habet, cum sit crus ei æquale, DA ad AC ex propos. 7. quinti. Sed pars basis DB, vtpote inter parallelas DH, & AB intercepta, parti alteri BC simili proportione refertur, quā HA ad AC ex 2. huius propositione. Ergo BD ad CB dicit etiam similem proportionē, quam dicit crus DA ad AC.

Se-

Secunda pars est opposita primæ, diciturque è contrariò, quòd si basis secta sit in partes proportionales eâ proportione, quam latera inter se habent, *quòd angulus A sectus erit bifariam*, suppositaque praxi antecedenti trahendi parallelam HD, & prolungandi latus AH, ita probat. Angulus ad A cruce signatus est æqualis angulo alterno nigro ad D, alterq; niger ad A est æqualis angulo H externus interno ex prop. 30. Sed isti niger D, & H sunt inuicem æquales: Ergo, & angulus cruce signatus; & niger ad A sunt inuicem æquales: Quare angulus ad A trianguli D A C propositi sectus est bifariam. Angulus autem H, (quòd probandum est) æqualis inuenitur angulo nigro ad D ex 14. prop. primi; Quia latera iis subtensa DA, & A H æqualia sunt. Sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem AC eandem dicunt rationem: Eandem verò dicunt rationem ad AC ex 11. quinti; quia dicunt eandem rationem ad A C, quam pars basis D A ad partem B C. & linea D A quidem ex hypothesi, HA vero ex 2. huius, quod sit inter parallelas, vt pars D B; parallelæ enim sunt ex constructione D H, & A B.

THEOR. IV. PROPOS. IV. Euc. 4.

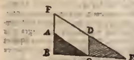
Æquiangulorum triangulorum, proportionalia sunt latera; quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

AD probandam hanc propositionem aliqua priùs in ipso probationis apparatu, & praxi præsupponenda sunt, & etiam probanda. Itaq; si detur duo triãgula nigrũ nigriusq; quę habeant angulos correspondentes æquales. V. g. angulũ ad A nigerrimum angulo ad D nigro, angulum ad C nigerrimum angulo nigro E. angulum verò nigerrimum B angulo nigro ad C. Dicit, quòd *crura, quæ claudunt æquales angulos, sint inuicem proportionalia*, pro prima parte propositionis i. nimirum dicere. V. g. crus B C ad A C similem proportionem, quam dicit quoque C E ad E D; quoniam claudunt æquales angulos nigerrimum ad C & nigrum E, & sic dicas de aliis. Quod, vt ostendatur ponenda sunt duo triangula super vnam rectam BE, & prolunganda sunt latera BA, & DE ad hoc, vt fiat triangulum maius B F E: Bamque supponit necessariò conuenire in F, eo quòd præsupponat angulum B, & angulum E ambos non posse esse rectos, & consequenter ex propos. 29. primi non posse esse parallelas prolongata crura BF, & EF. Anguli verò illi recti ambo esse nequeunt; quia cuiuscunque trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores; si autem B ponatur rectus nigerrimus ad C erit minor recto, & consequenter angulus ei æqualis E.

Sed antequam probetur propositio probandum est primò quoque, rectas AF, & C D esse parallelas. Id verò ostendetur. Si consideretur E C, quæ incidit in eas, & facit angulum DCE nigrum externum angulo ad A nigerrimo interno, & ad easdem partes, vt ex hypothesi constat, æqualem; Quare ex probatis 29. primi BF, & CD parallelæ sunt; cùm incidens in eas BE faciat angulum externum interno, & easdem partes æqualem.

Probandum quoque est secundo lineas A C, & FE esse parallelas ob eandem prorsus causam. Nam eadem linea B E incidens in eas in punctis C, & E facit angulum ACB nigerrimum nigro E æqualem, vt ex hypothesi constat: Vnde spatium illud album F AD C erit parallelogrammum, vtpote parallelis contentum. Quare, & latera correspondentia F D, & A C erunt æqualia ex 34. propos. primi, necnon, & latera FA, & DC.

Progres. 1. Probatur propositio lineæ FB, & DC parallelæ sunt. Ergo ex 2. propos. huius FA antecedens ad D E sequentem, vt C B antecedens ad E C sequentem proportione referuntur. Quare *permutando*, vt ex 19. propos. quinti, vel ex



def. 16. ipsa crura triãguli nigri, quę fecimus antecedentia erunt ad inuicem, vt partes F D, & B C quas posuimus tanquam consequentes, & erit DE ad CE, vt FD ad BC: Sed pars F D æquatur ex prædicta cruri AC: Ergo crus DE erit ad crus C E nigri trianguli, vt crus A C cruri BC nigerrimi, ambientia angulos æquales E nigrum, & C nigerrimum.

Progres. 2. Idem eodem argumento probabitur de cruribus AB, & BC, quæ inuicem eâ proportione consentiant, quâ CD, & CE. Nam A C est parallela ipsi FE: Quare portio cruris CE, vt antecedens ita respondebit proportione ad aliam E C sequentem, vt AF pars alterius cruris, vt antecedens ad aliam partem B A sequentem. Quare *permutando*, ita erunt antecedẽtes inuicem CE ad AF, vt sequentes inuicem B C ad B A: sed AF est æqualis cruri C D: Ergo C E ea proportione respicit C D, quâ BC respicit B A. Et iam de cruribus angulos æquales C nigrum, & B nigerrimum ambientibus propos. ostensa est; probatur tandem de cruribus æquales angulos D, & A ambientibus. Vtendo argumento ex *æqualitate*, quod docet 23. propos. quinti.

Progres. 3. Nam iam habes primam quantitatem cruris D E habere ad secundam CE eam proportionem in priori triangulo nigro, quam habet prima quantitas CA ad secundam B C in secundo triangulo nigerrimo ex primo progressu. Et ex secundo, quòd secunda quantitas primi nigri triãguli CE respicit D C tertiam ea proportione, qua secundi nigerrimi trianguli quantitas lineæ C B respicit tertiam BA. Ergo ex æqualitatis argumento prima cruris quantitas nigri DE, ita refertur ad tertiam DC, vt trianguli nigrioris secundi quantitas AC relationem dicit ad A B.

Secunda verò pars patet ex definitione 6. homologarum quantitatum; nempe similium, similes enim quantitates dicuntur illæ, quæ geminæ in aliqua quantitate possunt sumi; vt antecedentes, vel vt consequentes. Hoc autem habent latera triangulorum æquiangulorum, cum æqualibus angulis subtenduntur. Nam, vt potes considerare in processu probationis, latera, quæ vt antecedentia sumpta, vel consequentia sunt, fuere semper ea, quæ æqualibus angulis subtensa fuere, & ideo crus A C est simile cruri D E; quia considerata fuerunt, vt antecedentia; nempe, vt fundamenta proportionis, quę angulis æqualibus

ad c

ad C nigro, & E subtenduntur. Sic CA, & BC sunt similia, homologa; quia ve sequentia possunt assumi; nempe, vt termini proportionis, sunt autem subtensa angulis A, & D æqualibus, & ita de alijs duobus DC, & AB.

COROLLARIVM I.

Hinc fit. Lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Nam in triangulo EBP, Cùm lineæ PA, & DC parallelæ sint, incidens in eas recta PA faciet angulum nigrum externum D interno P, & ad easdem partes ex 30. I. æqualem. Rursus incidens EB idem præstabit faciendo angulum externum C nigrum æqualem interno A, & ad easdem partes; angulus verò A est communis. Ergo erit æquiangula pars nigra CBE toti triangulo PBE. Quare habebit latera æquales angulos ambientia proportionalia, & proinde ex def. I. huius similia erunt triangula.

COROLLARIVM II.

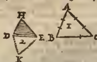
Colligitur quoque: Quod si basi V. g. AB, parallela BO agatur, & ab angulo C, cui subtensa est, V. g. recta ad basim ducatur, quæ parallelam diuidat, & basim; eas diuidere in partes proportionales, esseque DH ad HB, vt PO ad OA. Nam ex præcedenti Coroll. triangulum totum CAP, & triangulum eius pars DAC sunt similia. Rursusque triangula OPC, & pars eius DHC. Et sic triangula HBC, & OAC similia sunt. Itaque ea proportione respiciet CD crus CP, quâ DH refertur ad PO. Rursusque eadem CD ad eandem CP referetur, vt BD ad PA. Itaque ex 16. lib. 5. erit DH ad PO, velut DB ad PA. Quamobrem permutando fundamentum, & pars DH respiciet fundamentum, & totum DB, vt terminus, & pars PO respicit terminum, & totum PA. Quare diuidendo eâdem proportionem, dicet pars DH ad partem HB, vt pars PO, ad partem OA.

THEOR. V. PROPOS. V. Eucl. 5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula quoque erunt, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

Sit triangulum ABC primum. Aliudque DHE nigrum, cuius latera sint lateribus primi proportionalia, idest sit DH ad DE, vt BA ad AC V. g. comprehendant duas tertias partes, quorumlibet correspondentium. Dicit, quod hoc triangulum nigrum erit primo æquiangulum.

Quòd, vt probet facit triangulum punctatum



DEK triangulo primo æquiangulum BAC.

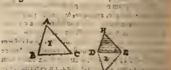
Probatur. Nam crus AB ex 4. huius dicit eam proportionem ad basim BC primi trianguli vt crus punctatum DK ad suam basim DE.

Sed ad eandem basim dicit quoque ex hypothesi eam proportionem, quam BA ad BC crus DH trianguli nigri. Ergo æqualia erunt hæc crura DH, & DK ex 9. quinti. Eodem modo argumentum procedet de crure punctato EK, quod erit æquale cruri HE trianguli nigri; quia dicunt eandem proportionem ad suam basim DE, quam crus CA primi trianguli ad basim suam BC. Ergo ex 8. prop. primi angulus K angulo H est æqualis; siquidem basis est communis, & crura correspondentia æqualia. Quare, & anguli ad basim correspondentes erunt æquales nimirum niger, & albus ad D, & niger, & albus ad E. Sed anguli trianguli punctati ex constructione sunt æquales angulis primi trianguli BAC: nimirum angulus D albus angulo B. Ergo, & angulus correspondês niger D. Item angulus E albus angulo C; Ergo & correspondens niger E eidem erit æqualis. Et tandem K angulo A quare, & angulus H niger eidem A erit æqualis vnde triangulû DHE nigrum angulos primo BAC eos æquos haber, qui homologis cruribus insunt.

THEOR. VI. PROPOS. VI. Eucl. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint; æquiangula erunt triangula, æqualesque angulos habebunt sub quibus homologa latera subtenduntur.

Hoc est quasi idem Theorema, ac antecedens, siquidem eodem argumenti methodo probatur, similique praxi innititur. nihilque aliud diuersi habet, nisi quod diuersam conditionem supponit; nempe vnum angulum vni æqualem, lateraque proportionalia, quæ hunc angulum ambiunt. Sit itaque triangulum BAC primum; & aliud nigrum, quod habeat angulum ad D nigrum angulo primi B æqualem; sintque latera illud concludentia DH, ad DE lateribus, BA, ad BC proportionalia. Dicit reliquos angulos reliquis esse æquales. Nam sic verificabitur quoque secunda pars, nempe similia, & homologa esse illa latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur: nimirum BA, & DH, qui subtendunt angulos æquales E nigrum, & C album esse similes, vt antecedentes proportionum, & BC, & DE bases, quæ angulo A, & H subtenduntur esse quoque similes, V. g. terminos proportionum. Vt autem id probetur, faciendus est punctatis lineis angulus ad D albus æqualis angulo B, & angulus ad E albus æqualis angulo C, vt in præcedêti propos. angulusque K ex Coroll. 2. propos. 17. primi erit æqualis angulo A: Quare triangulum punctatum erit æquiangulum primo triangulo BAC.



Probatur. Nam triangulum punctatum est æquiangulum triangulo primo. Sed triangulo huic

huic punctato est æquiangulum triangulum nigrum; Ergo triangulum nigrū est æquiangulum triangulo primo. Quod autem triangulum nigrum sit æquiangulum triangulo punctato, probatur eundo per singulos angulos sufficienti singulorum enumeratione, angulus ad D niger est ex hypothesi æqualis angulo B primi trianguli; vt eidem angulus albus punctati ad D ex constructione est æqualis; Ergo albus, & niger ad D inuicem æquales sunt. Reliqui verò anguli probabuntur æquales ex æqualitate laterum correspondentium. Nam ex 82. propos. primi, triangula habentia crura duo æqualia ambientia angulum æqualem, æqualia quoque sunt quoad basim, & reliquos angulos. Hæc autem triangula habent duo crura duobus æqualia. Crus enim DE in his triangulis punctato, & nigro est commune; quare remanet solum probandum de crure DK, & DH, quòd sint æqualia.

Probatur verò; quia DK eam proportionem dicit ad DE; quam dicit BA ad BC primi trianguli ex 4. huius propos. cum sint æquiangula ex effectione: Sed eam proportionē, quam dicit BA ad BC, & ideo, quā DK ad DE ex 16. l. 5. imitatur quoq; ex hyp. proportio DH ad DE in nigro triangulo. Ergo ex prop 9 l. 5. æqualia sunt inuicem DH, & DA, vtpote vni basi ED eandem proportionem dicentia.

Quapropter, cùm iam habeamus duo crura punctati; & duo nigri trianguli angulos ad D nigrum, & albū ambientia æqualia, anguli reliqui ad E niger, & albus, & angulus H, & K erunt æquales ex prop 82. primi, & ideo duo triangula nigrum, & punctatum erunt æquiangula.

THEOR. VII. PROPOS. VII. Eucl. 7.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem; circa verò alios angulos latera proportionalia habeant, reliquorum autem simul vtrumque, aut minorem, aut non minorem recto: Æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

DEntur duo triangula semialbum, & nigrum, quę habeant angulos nigros æquales E. g. A, & D, & crura alios angulos C, & G ambientia proportionalia, scilicet BC ad CA in semialbo proportionetur, veluti EG ad GD in nigro. Reliqui verò anguli specie non dissonent, sed sint aut simul minores recto, aut simul non minores.

Idest reliquus angulus albus B sit acutus, si F est acutus; aut si B sit obtusus, talis quoque sit F; aut si B est rectus, talis quoque sit F. Nam si specie dissentiunt, & vnus esset acutus, alter obtusus, hac sola vltima conditione deficiente propositio non verificaretur.

Probatur verò ostendendo datis ijs conditionibus duorum angulorum æqualium, & laterum proportionalium circa alios duos, & speciei eiusdem reliquorum, reliquos specie solum notos esse inuicem æquales, & consequenter ex propos. 27. lib. primi etiam reliquos duos proportionalibus lateribus septos, esse ęquales, & hoc ostendendo alterū eorū, nec maiorē esse posse, nec minorē.

Casus 1. Sit itaque angulus A angulo D æqualis, anguli B, & F specie noti, nimirum minores recto, & angulus C sit clausus cruribus proportionalibus, & sit AC, ad CB, vt anguli G crus DG ad crus FG.



Dico angulū C angulo G esse æqualem. Quod si non credatur: Sit, vt inquiunt aduersarij, semialbus angulus C maior; quam G, qui vt esset æqualis ipsi G, sufficeret para nigra C. Igitur triangula nigra inuicem erunt æquiangula; quod habeant omnes angulos æquales, & quidem A, & D ex hypothesi; anguli verò G, & C ex aduersarijs; anguli H niger, & F ex necessariâ consequentiâ ob prop. 17. l. 1. Cor. 2. Quāobrem habebunt latera proportionalia ex propos. 5. huius, & CA erit ad CH, vt DG ad GF: Sed vt AC ad BC, ita proportionatur ex hypothesi DG ad GF: Ergo ex prop. 16. quinti, vt AC refertur proportione ad CH: Sic idem AC refertur ad BC: Quare ex 9. quinti, cùm eadē eis eandē dicant proportionem, crura HC, & CB erunt æqualia; ideoque ex propos. 14. primi H, & B anguli albi, vtpote æqualibus subtensi cruribus, æquales. Sed angulus B ex hypothesi est minor recto: Ergo H albus erit minor recto, & consequenter niger H maior recto: Sed ostensum est angulum nigrum H esse ęqualē angulo F nigro, & ideo minorē recto. Ergo esset minor, & non minor recto, quod esse nequit.

Casus 2. Sit deinde ABC niger, & angulus A in ipso æqualis angulo D, & sit AC, ad CB; vt DG ad GF, & ponantur, vt priùs H angulus niger, & F, minores recto, & dicatur ab aduersarijs, angulum nigrum C esse minorem angulo G, qui, vt esset æqualis, deberet esse semialbus C. Tunc triangulū BAC semialbū nigro erit æquiangulū, & B angulo F ex prop 17. l. 1. Cor. 2. ob angulos A, & D æquales ex hypothesi, & semialbum C, & nigrum G ex aduersarijs.

Ergo erit ex 5. huius AC, ad BC, vt DG ad GF. Sed ex hypothesi est etiam AC, ad CH; vt DG ad GF: Ergo erit AC ad BC, vt AC ad HC: Erunt itaque æquales ex 9. quinti HC, & BC. Sed angulus H niger est æqualis angulo F minori recto, ex hypothesi; ergo H albus maior recto, & B ei æqualis ob laterum, quibus insistunt æqualitatem ex propos. 14. maior quoque recto contra ostensa: Ostensus est enim æqualis angulo nigro F, qui ponitur minor recto.

Casus 3. Sint deinde angulus B, & angulus F non minores duobus rectis idest, vel sint recti, vel obtusi, & dicatur ab aduersarijs, angulum C semialbum esse maiorem angulo G, qui, vt esset æqualis, deberet esse niger C. Itaque vt priùs triangula nigra erunt æquiangula, ob angulum A ex hypothesi angulo D nigro æqualem, & angulum nigrum C ob dictum aduersariorum angulo G æqualem; & ideo angulus H niger erit æqualis angulo F: lateraque erunt proportionalia, eritque AC ad CH, vt DG ad FG, & ex hypothesi AC ad CB, ita DG ad GF. Igitur erit AC ad CH, ita AC ad CB: ex 16. l. 5. Erunt ergo ęqualea ex prop 9. l. 5. CH, & CB. Ideoque angulus albus H erit æqualis angulo albo B. Sed angulus B ponitur, vel rectus, vel maior recto. Ergo talis esset angulus H albus, & sic cōtra propos. 17. duo anguli trianguli essent æquales duobus rectis, vel eis maiores, & angulus niger H esset minor recto, qui ostensus est maior.

Casus 4. Sic quoque ostendetur propositio; si dicant aduersarij angulum ad c esse minorem angulo c, vt supra ostensum est in simili casu 2.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII. Eucl. 8.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit, quæ fiunt à perpendiculari triangula, tum toti triangulo, tùm ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC angulus BAC sit rectus, à quo ad basim perpendicularis agatur AD. Dicit duo triangula, in quæ à perpendiculari CAB triangulum partitur album, & nigrum *esse similia toti semialbo, & etiam inuicem.*

Probatur. In triangulo toto angulus totus semialbus A rectus est; Et pariter rectus est angulus D albus trianguli penitùs albi: Angulus verò ad B est communis ergo ex Coroll. 2. propos. 17. reliquus niger C albo apud A erit æqualis: Vnde triangulum CAB totum erit æquiangulum suæ parti albæ DAB.

Cùm itaque hæc triangula sint æquiangula; homologa erunt ex propos. 4. huius ea crura, quæ angulis æqualibus subtenduntur. Ideoque sicut est BC basis angulo recto opposita, vt antecedens sumpta ad crus CA in semialbo triangulo: Sic est BA basis albi trianguli angulo recto opposita ad crus DA angulo B oppositum, & sicut BA crus ad AC crus maioris trianguli, sic DA crus ad DA in minori. Quare latera, quæ æqualibus angulis opponuntur erunt homologa. Quia bases angulis rectis oppositæ deseruiunt pro fundamentis, dicitur enim, sic est CB basis ad crus CA, vt basis BA ad crus DA sicut etiam crura pro terminis.

Probatur quoque de parte nigra eodem modo. Nam si in triangulo nigro angulus D niger angulo A semialbo æquatur; cùm ambo recti sint: angulus C niger communis: Ergo reliquus niger apud A reliquo angulo B ex Coroll. 2. prop. 17. erit æqualis. Cum ergo triangulum nigrum, & semialbum totum CAB sint æquiangula; patet esse similia. Vnde, cùm album, & nigrum sint similia semialbo toti; erunt etiam similia inuicem.

COROLLARIVM I.

MAnifestum hinc euadit perpendicularem ab angulo recto in basim cadentē esse mediam proportionalē inter duo basis segmenta, & eā proportionem dicere BD ad AD; quam AD ad CD. Siquidem, qualis est proportio AB ad AC, talis est proportio DB ad DA. Rursusque qualis est proportio BA ad AC, talis reperitur proportio DA ad DC. Ergo ex prop. 16. lib. 5. eadem proportione refertur DB ad DA quâ DA ad DC, & id euenit, quod DA sit crus minus respectu albi, & respectu nigri sit crus maius, & duo munia obeat.

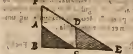
COROLLARIVM II.

FRuitur quoque; Crus quodlibet esse medium proportionale inter totam basim, & illam basis partem, cui vnitur. Nam ostensum est; quòd ita se habet BC basis ad crus BA in triāgulo maiori, vt eadē BA basis in minori ad DB crus. Sic quoq; se habet basis CB ad crus CA, sicut se habet idem crus CA, & basis ad crus CD. Et hoc euenit. Quia CA, AB crura sunt, simul bases, & duplici munere funguntur, ob quod possunt deseruire pro termino, & fundamento.

THEOR. IX. PROPOS. IX. Euc. 32.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, & secundùm vnum angulum componantur, ita vt homologa latera sint etiam parallela, tunc tertium vtriusque latus in rectam lineam coibit.

SIt triangulum propos. 4. BAC nigerrimum, & CDE nigrum, & ita collocentur, vt AB oppositum angulo apud C sit parallelum cruri CD oppositum æquali angulo E: Sic crus AC parallelum



cruri DE, quæ æqualibus angulis nigerrimo apud B, & nigro apud C opponuntur. Et ita erunt crura homologa parallelè posita; quòd crura angulis opposita æqualibus sint proportionum, aut fundamenta, aut termini: Dico crus BC & CE, quæ remanent in vnam rectam extendi, quæ est BE.

Probatur: Angulus apud A nigerrimus, qui æquatur albo apud C, quòd AC incidat in parallelas BF, & CD ex 30. primi. Angulus item apud A nigerrimus, qui nigro apud C æqualis est. Angulus tandem nigerrimus apud C, hi tres faciunt, cū sint anguli eiusdē triāguli duos angulos rectos, ergo nigerrimus apud C, & albus æqualis nigro A, & niger æqualis nigerrimo apud A etiam ipsi erunt æquales duobus rectis. Ergo ex prop. 14. l. 1. lineæ BC, & CE in directum erunt; cum efficiant, cum linea AC, vel CD angulos duobus rectis æquales.

EXPENSIO III.

De reciprocatione laterum in figuris.

LIcet hic solùm Euclides de parallelogrammis, & triangulis agat, cùm tamen sint hæ figuræ omnium figurarum initia, hæc expensio videtur ad omnes posse extendi, vtpote omnium reciprocationem pertractans. Reciprocatio verò est vt diximus, cùm fundamentum proportionis est in vna figura, terminus verò eiusdem in alia, & in hac alia fundamentum similis proportionis reperitur, & terminus in priori, ita vt quælibet combinatio partim in vna figura sit, partim in alia.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 14.

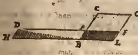
Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos.

Et quorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circum æquales angulos, & vnus angulus alteri æqualis, illa sunt æqualia.

DVas partes habet hęc propositio, & secunda primam conuertit. Prior itaque est; quod si dentur duo parallelogramma æqualia, quę insuper angulum angulo æqualem obtineant, hęc habituri quoque latera, quæ sunt circa æquales angulos reciproca.

Sint itaque rectangula duo albũ AO, & DO semialbum. Dicit latera horum esse reciproca, quæ ambiunt angulos æquales, & ita esse DA huius semialbi ad AF alterius albi, vt alterius latus AC est ad huius latus DA.

Ad probationem verò præsupponendum est, quòd, si duo parallelogramma vniantur in vertice æqualiũ angulorũ, ita poterũt cõstitui; vt latera in vnã rectã coeant, & latus DA v.g. parallelogrãmi DB semialbi vnam rectam faciat cum latere AF alterius albi. Hoc verò colligitur à propos. 15. lib. 1. vbi dicitur lineas rectas angulos æquales ad verticem efficere, cùm vnà coeunt. Ideoque cum anguli albi apud A huius sint æquales tum parallelogrammi DB, tum alterius AO, & latus DA, cum AF penes rectam lineam sit positum, necesse est, vt etiam aliud latus AC in directum sit cum latere AB;



alioquin sequeretur angulos ad verticem apud A esse æquales, & lineas in directum nequaquam positas esse.

Quo supposito, producendum est latus BH vsq; dum occurrat lateri OF producto in L, & iam habemus parallelogrammum nigrum AL.

Et sic Probatur propos. Parallelogrammum nigrum est eiusdem altitudinis, ac album AO. Ergo ex 1. propos. huius erunt Inuicem vt bases, & ita erit parallelogrammum AO ad nigrum, vt AC basis ipsius ad AB basim nigri. & alterius DB communis. Eodem pacto philosophare de semialbo respectu nigri. Nam, cùm sit eiusdem altitudinis cum ipso nigro, respiciet illud, vt sua basis DA, nigri respicit basim albo parallelogrammo communem AF, eritque semialbum ad nigrum, vt D A ad A F.

Sed ex 7. quinti, cùm alba parallelogrãma æqualia sint inuicem, ex hyp. eidẽ nigro eandem dicunt proportionem. Ergo, & basis CA ad basim AB eandem dicet proportionem, quam basis DA ad basim AF. Quare latera reciprocè se respicient.

Secunda pars primam conuertit; asseritque; quòd si latera DA, & AF; sic AC, & AB circa angulos æquales apud A reciproca fuerint in proportione ita vt proportionem, quæ est C A, ad A B imitetur proportio, quæ est DA ad AF, rectangula ipsa fore æqualia. Supponitque probatio eandem constructionem, quæ peracta est.

Probatur ex 9. quinti, si parallelogramma albũ A O, & DB semialbum ad nigrum eandem dicent proportionem, æqualia erunt; sed eam dicunt: Ergo æqualia sunt. *Minor* verò argumenti constat: Quia parallelogramma eiusdem altitudinis eam dicunt proportionem, quam suæ bases ex 1. huius. Ergo parallelogrammum AO album, aliud nigrum eâ proportione spectabit, quã sua basis AC, spectat basim AB nigri cùm sit eiusdem altitudinis, ac nigrum. Ideoque asseras de parallelogrammo semialbo DB, quòd cum sit eiusdem altitudinis cum nigro eodem, eam dicet proporportionem, quam sua basis AD ad basim AF.

Sed basium DA, & AF proportio, quâ se respiciunt ex præsuppositione eadem est, ac basium AC & AB, Ergo, & parallelogramma album AO, & semialbum DB eadem proportione respicient nigrum idem. Quare sunt æqualia ex propos. 9. lib. 5. citata.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, quæ circa æquales angulos.

Et quorum triangulorum, vnum angulum vni æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.

DEntur duo triangula æqualia BEC album, & nigrum ADB habentia angulos, qui ad B æquales; Asserit; & crura fore reciproca in proportione: nimirum esse albi crus EB ad crus nigri BD, vt crus AB eiusdem nigri ad crus BC trianguli albi. Quod, vt probet; collocandi sunt tali modo triangula se in verticibus tangentia, vt crura vnius, cum cruribus alterius vnam rectam efficiant V. g. A B, & B C sicut crus E B, & BD. Hoc autem poterit fieri, vt in precedenti diximus propter angulos æquales ad B album, & nigrum, Coniunganturque D, C, & fiat triangulum nigerrimum DBC.



Probatur. Nam nigrum, & nigerrimum triangulum sunt eiusdem altitudinis, cùm conueniant in vertice D, Ergo ex propos. 1. huius, eam proportionem, quam triangula dicunt ad inuicem nigrum ad nigerrimum; dicent, & bases AB ad BC. Idem dicas de triangulo albo, & nigerrimo sunt enim eiusdem altitudinis, quòd conueniant in puncto C: Quare ex eadem prima huius, basis EB albi ad basim BD nigerrimi eandem dicet proportionem, quam album triangulum ad nigerrimum. Sed tum triangulum album, tum nigrum ex prop. 7. quinti, eo, quòd ex hypothesi sint æqualia eandem dicunt proportionem ad nigerrimum: Ergo,

& crus BE, ad crus DB eandem dicet proportionem, quam AS ad BC.

Secunda verò pars Theorematis est conuersa præcedentis, & dicit; quòd si crus ES ad aliud reciprocum BD, dicat eandem proportionem, quâ refertur AS ad BC, æqualia fore triangula: Nam vt bases ita ex prop. 1. huius erunt quoque triangula album, & nigrum ad nigerrimum, cum sint eiusdem altitudinis: Quare, cum ex prop. 9. quinti, quæ eidem eandem dicant rationem æqualia sint, sequitur vt æqualia quoque sint triangula album, & nigrum cum bases AS ad BC, & BE ad BD ex præsuppositione eandem proportionem dicant.

EXPENSIO IV.

De lineis proportionaliter secandis.

VIdimus primo libro sectionem linearum in partes æquales: modo hic illam intuebimur in partes proportionales; nec tamen sectionum modi omnes hac expensione concludemus; plurimi enim sunt; qui, cum non sint elementarea, & tanquam principia generalia nô se habeant, nec necessarij ad elementa ipsa percipienda sint: imò multorum cognitionem supponant non dum haustam, vt queant intelligi, ideo ea in proprium tractatum reiecimus. Fuit autem necessarium, vt primo lib. fecimus, agere priùs de triangulis; vt hę operationes secandarũ linearũ ostẽderẽtur.

PROB. I. PROPOS. XII. Eucl. 9.

A datâ rectâ lineâ imperatam partem auferre.

IMperetur, vt ex linea AB auferratur, V. g. quinta pars. Ex A ducatur recta AC, vtcunque, quę tamen angulum aliquem efficiat in A, & in hac linea AC tot partes ab A incipiendo signentur æquales assignatæ ad placitum magnitudini, quota pars est ea, quæ desideratur detruncari, vt in proposito exemplo, assumendæ sunt quinque partes, quia quinta detrahenda est, & ab vltima parte C, ducenda est linea, quæ extremum alterius B coniungat, ita vt fiat triangulum ACB. Huic autem à puncto penultimo F parallela agatur FE, eritque; EB pars quinta lineæ AB abscissa.

Probatur. Nam ex propos. 2. huius ea proportione, quâ refertur AE, ad EB; eâ ipsâ AF respicit FC. Ergo componendo, vt docuit argumentari 18. propos. quinti, ita respicis AB tota partem suam BE, sicut AC tota partem suam CF. Sed CF est quinta pars totius AC, Ergo & BE erit quinta pars totius AB.

COROLLARIVM.

HInc deducitur, & à Coroll. 2. prop. 4. Posse quoque ab aliqua V. g. DB partes, quascunque placuerit, auferri, Si lineam ducas ei parallelam maiorem aliquam, quę sit AP, eamque diuidas in partes quascumque, E. g. in duas in O, deinde extrema, & omnia pũcta diuisionum ad idem quodcumque punctum C ducas, quod sit vltra lineam diuidendam minorem DB ita quòd in medio ipsa remaneat, & lineæ in punctum C conuenientes per eam transeant, vt sunt PC, & OC, & AC. Istæ enim diuident lineam propositam DB in partes proportionales ijs partibus, quas in PA fecimus: Eritque DH, & HB in linea DB, vt PO ad AO in linea PA; quod ostenditur in ipso Coroll. 2. propos. 4. cuius figuram hic adhibemus.

PROB. II. PROPOS. XIII. Eu. 10.

Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

HAec ferre est eadem, quæ superiori problemate, Sit recta AB secanda in tot partes, quæ proportionem eam inter se seruent, quam partes alicuius alterius datæ inter se conseruant. Constituatur itaque recta assignata AC tali modo, vt faciat cum diuidenda angulum A, & iunctis extremitatibus linea BC, ad hanc AB à pũctis diuisionũ P, & Q ducantur parallelæ PM, & QN. Nam linea AB erit diuisa, vt propos. reposcit, in partes similes lineæ AC, vtque id probetur, ducatur PO punctata ad AB parallela.

Probatur. Nam ex propos. 2. huius, vt est AP ad PQ, ita se gerit pars AM respectu partis MN, ergo proportionales sunt eadem proportione AM, & MN, quá erant partes AP ad PQ.

Eodem modo valet argumentum de parte PQ, & QC, quæ inuicem eam proportionem seruabunt, quam in linea punctata partes PL, & LO ob eandem propos. huius 2.

Sed partes punctatæ PL, & LO sunt æquales partibus MN, & NB ex propos. 33. primi, quod in parallelis lineis signatæ sint, & à parallelis effectæ. Ergo etiam PQ, & QC ita sunt proportionales, vt MN, & NB.

COROLLARIVM.

COlligitur hoc modo posse secari AB secundum proportionem quamcumque datam: Nimirum, si priùs signemus in AC indeterminata eas partes habentes eam proportionem, quam volumus, & cętera præstentur, vt priùs, quando linea AC vt in propositione, præsupponebatur iã diuisa.

COROLLARIVM.

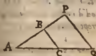
COlligitur quoque lineas duas proportionaliter in geminis punctis diuisas habere quoq; inter medias sectionum proportionales V. g. diuisa AC in Q nimirum in duas tertias partes, & in P nimirum in suam tertiam partem intermedia sectionũ erit PQ, quę eam dicet proportionẽ cum AP, seu QC, quam dicit intermedia sectionum MN ad

ad AM, vel NB, si & AB similiter in easdem proportionales partes secetur in M, & N. Nam iunctis istis lineis, vt faciant angulum in A idem; quod in propositione explicauimus, valebit argumentum, vt patet, cùm sit eadem figura.

PROB. III. PROPOS. XIV. Eucl. 11.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

Sint duæ rectæ AB, & AC, ita dispositæ, vt angulum in A constituant, producaturque ea, quam volumus constituere pro antecedenti V. g. AC, & in parte producta capiatur CQ æqualis alteri AB, quam volumus esse sequentem. Ducta deinde recta ad extremitates BC, ei à puncto Q parallela agatur QP, quæ inueniat in P lineam AB productam. Affirmat propositio, BP *tertiam proportionalem esse*: nimirum eam dicere proportionem AC antecedentem ad AB sequentem quã respicit ipsa AB sequens tertiam subsequentem BP.



Probatur. Nam ex propos. 2. huius; Ita proportione refertur AC antecedens, ad CQ sequentem in priori crure AQ, vt AB ad BP refertur in secundo crure AP; Sed antecedens AC ita refertur proportione ad CQ velut ad AB antecedens in posteriori crure (siquidem AB, & CQ ex constructione sunt æquales) Ergo eam proportionem ex 7. quinti, quam dicit antecedens AC ad AB, sequentem suam dicet quoque AB antecedens etiam ipsa ad BP sequentem, & sic AB erit media proportionalis: Nimirum sequens respectu AC antecedentis, & pariter antecedens respectu subsequẽtis BP. At BP tertia proportionalis erit, vt vul. prop.

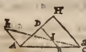
COROLLARIVM.

Collige eodem modo, & quartam proportionalem, & quascunque alias posse inueniri; nimirũ si posterioribus duabus, tertia inueniatur proportionalis regulâ præced. Inuenta enim, cum tribus priùs inuentis, quatuor erunt proportionales, & sic si alias cupias semper eadem praxi vtetis.

PROB. IV. PROPOS. XV. Euc. 12.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

Duas habeas lineas AB, & BC, quas in directum collocabis ita vt vnam rectã constituant AC; reliqua verò AD ita collocetur, vt faciat angulum quemcumque in A cum prima AB. Sit verò reperienda quarta proportionalis ita, quòd, sicut AB proportionẽ habet ad BC, ita reliqua angulum faciens AD, cum aliã reperiendã proportionata existat. Coniunge itaque extremitates D, & B rectã BD, & huic coniungenti à puncto C duc parallelam, quæ occurrat lineæ AD productam in H. Nam DH erit quarta, quæ quæritur ita, vt eodem modo, quo se habet antecedens AB prioris cruris ad sequentem eiusdem BC. Sic referatur antecedens posterioris cruris AD ad sequentem DH in proportione.



Probatur facilliter ex 2. propositione huius: Cùm enim DB sit ex constructione parallela ad CH. Ergo sicut refertur AB ad BC in priori crure; Sic refertur AD ad DH in posteriori.

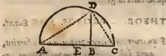
COROLLARIVM.

Collige cum Pappo. Quomodo reperire possis quartam proportionalem; quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam inuerso ordine. Nam inuerso ordine tertia AD erit coniungenda non ad extremum primæ A, sed ad extremum C secundæ, vt per lineas punctatas factum vides, & literis minusculis notatũ; est enim eadem AD, quæ a d. Nam tunc ex eadem propos. 2. sicut antecedens, & prima AB se habet ad BC secundam, ita quarta h, d se habet ad tertiam d a.

PROB. V. PROPOS. XVI. Eucl. 13

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

Sit duæ rectæ AB, & BC, quibus media proportionalis inuenienda sit. Disponantur in directum ita, vt fiant vna linea AC, quam bipartiies in E, & in sectione E facto centro interuallo vsque ad extremitatem alterutrius extenso V. g. A, semicirculus describatur ADC. Deinde super B erigatur perpendicularis BD. Nam hæc erit media proportionalis inter AB, & BC, quod vt probetur ducendæ sunt rectæ AD, & DC, quæ ex propos. 28. tertij facient angulum rectum in D.



Probatur verò propositio ex Coroll. propos. 8. Nam D B cadit super basim angulo recto toti D subtensam: quare inter duas eius portiones AB, & BC erit media proportionalis. Angulus verò D punctatis factum rectus est, quòd in semicirculo ex propos. 28. tertij constat.

COROLLARIVM

Hinc est. Quòd perpendicularis erecta super diametrum à quocunque puncto eius, fit medium proportionale inter duo diametri segmẽta, vt clarè constat, cùm ex propos. 28. tertij semper ADC angulus rectus sit, quoquo punctu circumferentiæ vertex eius, reperiatur.

PROB.

PROB. VI. PROP. XVII. Eucl. 30.

Propositam rectam lineam terminatam extremâ, & mediâ ratione secare.

SIt recta AB; & ex 15. l. 2. sit secta in G ita, vt rectangulum sub totâ AB, & minori segmẽto GB contentum, sit æquale quadrato ex maiori segmento AG erectum. Dico hanc lineam extremâ, & mediâ ratione esse sectam, esseque AB totam ad segmentum maius AG, vt segmentum idem AG ad minus BG in proportione reperitur.



Probatur: Quoniã enim quadratum, seu parallelogrãmum nigrum ex maiore segmento AG est æquale rectangulo nigro ex minore segmento, & tota effectu GD erit BD tota reciprocè ex propos. 10. huius ad GH maius segmentum, vt GA, idest æqualis GH ad GB segmentum minus. Vnde cùm tota ita se habeat ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus, linea AB in G erit secta extremâ, & mediâ ratione ex huius def. 3.

EXPENSIO V.

De æquipotentia proportionalium linearum.

HIc agitur: datis lateribus proportionalibus, vel quatuor, vel tribus, quòd possint duo rectangula æqualia constituere, vel quadratum, & rectangulum licet inuicem sint inæqualia. Pertractatur itaque de linearum proportionalium æquipotentia in genere.

THEOR. I. PROPOS. XVIII. Euc. 16.

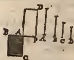
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum est æquale illi, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo.

Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur rectangulo, illæ quatuor rectæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, C, D, Dico primò, si ex A, & D extremis rectangulum componatur, vt est album DA, & ex medijs aliud rectangulum nigrum BC, hæc duo rectangula fore æqualia.

Probatur. Anguli sunt æquales nigri, & albus ad A, vtpote recti latera quoque reciproca proportionalia ex hypothesi, nempe simili proportione refertur ex def. 2. huius PD ad AC, vt BA ad AP, quia sic 10 vtraque figura terminus, & fundamentum relationis est. Ergo ex 10. huius parte 2. rectangula album, & nigrum erunt æqualia.

Probatur secũda pars, quæ est conuersa prioris; nimirum, quòd rectangula æqualia habeant rectas sub quibus continẽtur proportionales. Colligitur verò probatio ex prima parte prop. 10. Nam cum hic habeamus angulos ad A nigrum, & album æquales, & reciproca latera, nimirum se simili proportione respicientia PD lineam AC, vt BA lineam AP; patet lineas esse proportionales, & PD esse ad AC, vt BA ad AP.



THEOR. II. PROPOS. XIX. Eucl. 17.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum, quod sub extremis comprehenditur, æquale est ei quadrato, quod comprehenditur sub media.

Et è contrariò si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fit ei quadrato, quod à media describitur, illæ tres lineæ proportionales erunt.

SInt tres lineæ A, B, C proportionales ita, vt qua proportione respicit A sequentem B, sequens quoque respiciat subsequentem C. Dicit, quòd si ex extremis A, & C fiat rectangulum PC, & ex media C fiat quadratum QB; Quadratum, & rectangulum futura esse æqualia.

Probatur. Quia accipiam punctatam AQ æqualem mediæ B. Quare eam proportionem, quam dicit A ad punctatam, dicet, & B ad C. Cùm ergo sint iã quatuor proportionales, patet ex præcedẽti propositione, rectangulum quadratũ BQ ex punctatã, & lineã B, æqualibus, & medijs constitutum, esse æquale rectangulo ex extremis C, & A constituto ex ant.

Secunda pars enunciat priorem eodem fundamento lineæ punctatæ præsupposita, & eodem argumento, quã secunda pars præced. Theorem. probata est; cum enim æqualia sint quadratum, & rectangulum, erit proportio PA ad punctatam AQ, qualis est BA, ad AC, sed punctata, & BA æquales sunt, ergo erit AP ad BA, vt BA ad CA, nimirum trium proportionalium A, B, C.

EXPENSIO VI.

De proportione duplicata, & composita, quam figuræ inter se possident respectu laterum homologorum.

COmparantur in hac Expensione latera figurarum, tum similium, tum dissimilium inuicem, & quam proportionem obtineant considerator, vt ex inde cognito genere figuræ, & proportione laterum, faciliter etiam innotescat proportio ipsarum figurarum, vel è contrà.

THEO-

THOR. I. PROPOS. XX. Eucl. 19.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

DVo triangula, vel duas figuras habere duplicatam proportionem laterum homologorũ, nihil aliud est, quàm quòd ita sit figura ad figuram proportionata, sicut inter tres lineas proportionales prima linea proportionatur ad tertiã, ita enim proportio duplicatur gemina vice, nam dicitur sicut est antecedens ad sequentem, & ecce prima proportio, ita est sequens ad subsequentem ecce secunda: V. g. si basis, quæ ponitur antecedens triangulorum similium sint vt 1. ad 2. sequentem, triangula erunt inuicem vt 1. ad 4. nimirum repetendo proportionem gemina vice: nam sicut se habet 1. ad 2. ita proportionatur 2. ad 4.

Duplex autem potest esse casus. Nam vel latera homologa sunt æqualia, & sic etiam figuræ erunt æquales, cùm æqualia repetitia proportionibus semper æquo modo se habeant, & si volo reperire alium numerum, qui dicat proportionem, quam dicit 2. ad 2. non possum reperire; nisi 2. at cum proportio est inæqualitatis, tunc difficultas est, & id demonstrare oportet.

Sint ergo duo triangula similia nigrum, & album ADB, abscindaturque ex propos. 14. basibus AB, & LN tertia proportionalis ex latere AB, & sit AC, ducaturque recta DC, eritque triangulum ADC probandum priùs, & demonstrandum æquale triangulo nigro antequam ipsam propositionem probemus.



Probatur. Ex hypothesi, vt est AD ad AB, ita est LM ad LN ergo permutando ex 19. lib. 5. erit fundamentum AD ad fundamentum LM, vt terminus AB ad terminum LN. Sed vt est AB ad LN, ita fecimus LN ad AC proportionalem tertiam. Ergo proportione correspondebit AD ad LM, vt LN ad AC. Ergo hæc triangula NLM, & ADC habebunt latera reciproca. Siquidem fundamentum primæ cõbinationis, & terminus alterius est in vno triangulo AD, & AC, & terminus primæ fundamentumq; secundæ est in alio triangulo, nimirum NL, & LM. Quamobrem ex 11. huius erunt triangula æqualia punctatum, quod æquale fecimus nigro (claritatis gratia) & triangulum ADC: quo supposito ita propositio

Probatur. Tres lineæ, nimirum AB basis, basi LN, & LN basi AC continuam dicunt proportionẽ: Vnde secundum superiùs explicata AB ad AC duplicatam dicet proportionem: Sed triangulum album maius ADB eam ad nigrum refertur proportione, quã basis AB ad basim AC: Ergo duplica ad illud proportione refertur. *Minor vero argumenti* ostenditur, nimirum quod triangulum ADB ad nigrum referatur, vt basis AB ad basim AC. Quia triangulum maius album dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit ad triãgulum ACD; quia cum hæc duo triangula nigrum, & ACD probata sunt æqualia, sed ad triangulum ACD dicit proportionem, quam basis AB, ad basim AC ex prima huius, quod in eundem verticem D finiant. Ergo refertur quoque ad nigrum eã proportione, quã basis AB ad basim AC duplicatã AB ad basim LN.

THEOR. II. PROPOS. XXI. Eucl. 20.

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygona duplicatam habent eam rationem, quam habet latus homologum ad latus homologum.

SInt polygona similia album, & nigrum habentia angulos æquales singula alba singulis nigris, vt A angulo B, & C angulo D, &c. Sic & latera proportionalia circa angulos equales V. g. sit AC, ad BD, vt AQ ad BE. Dicit pro prima parte *hæc duo polygona diuidi in triangula similia, & numero æqualia.* Nam ducantur rectæ ab vno angulo ad alios oppositos, vt ab angulo D lineæ DE, DK, sic ab angulo C rectæ CH & CQ, eruntque triangula numero æqualia, vt patet. Probatur itaque, quòd hæc triangula sint similia: Nam primò DLK nigro est simile triangulum CGH albi polygoni. Ratio est quia angulus L nigri est æqualis albo G, & circa illos latera, ex hypothesi sont proportionalia. Ergo ex prop. 6. & def. 1. triangulum DLK, est simile triangulo CGH. Vnde etiam anguli reliqui erunt equales V. g. apud K, & H in dictis triangulis, & ex propos. 4. huius latera DK, & CH, vtpote angulis æqualibus in æquiangulis triangulis opposita erunt homologa, ideo erit DK ad CH vt LK ad GH. Sed ob similitudinem polygonorum, vt est LK ad GH, ita est KE ad HQ: Ergo ex æquo erit vt DK ad CH, sic KE ad HQ. Sic quoque angulus apud K totus est æqualis angulo toti H; pars quoque anguli K versus L est æqualis parti H versus G. Ergo reliqua pars DKE erit æqualis reliquæ CHQ. Quare ex propos. 6. triangulum DKE nigrũ erit simile albo CHQ: quod angulum apud K habeat æqualem angulo apud H, & latera circa ipsos proportionalia, & sic de reliquis aliis argumentabitur.

Prob. 2. esse homologa totis. Nã triangula nigrum DLK, & CGH album sunt similia inter se, ideoque habebunt duplicatam rationem laterum homologorum DK, & CH ex prec. & etiam eandem habebunt duplicatam rationem triangula similia DEK nigrum, & CQH album, quod eodem latere DK, triangula nigra, & eodem CH triangula alba prædicta inexistant. Quare triangula DLK nigrum ad album CGH eam habebit rationem, quam triangulum nigrum DEK ad album CQH, vtpote eiusdem proportionis lateris ad latus duplicatam vt diximus Tract. 9. Def. 27. in fine, & idem fiet argumentum de reliquis. Cum ergo sint proportionalia triangula polygoni nigri triangulis albi, ita vt omnia fundamenta proportionum, seu antecedentia sint in vno, & consequentia, seu termini in altero. Ex propositione verò 17. quinti, vt est vnum

vnum antecedens ad vnum consequens, sic sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia, erunt omnia triangula nigri polygoni ad omnia albi, nempe totum ad totũ in eadem ratione, vt aliquod nigrum triangulum suo correspondenti albo.

Probatur tandem tertia pars; Quod polygonum ad polygonum sit in duplicata ratione lateris homologi ad latus homologum. Probatur inquam. Quia ita est polygonum nigrum ad album, vt triangulum V. g. DLK nigrum ad album simile CGH: Sed similia triangula laterum homologorum duplicatam habent rationem ex praeced. Quare etiã polygonum nigrum ad album duplicatam habebit rationẽ laterum homologorũ V. g. KL ad GH.

COROLLARIVM

HInc est, quod si fuerint tres lineæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum descriptum simile super secundã ad polygonum super tertiam descriptum, vel polygonum super primam ad polygonum simile super secundam descriptum; quia enim prima linea ad tertiam duplicatam habet secundæ rationem: Polygonum verò super primam delineatum habet duplicatam primæ lineæ rationem ad polygonum super secundam formatum; patet, cùm sit eiusdem proportionis lineæ primæ ad secundam duplicata proportio primæ eiusdem lineæ ad tertiam, & polygoni super primã ad polygonũ super secũdã duplicata quoq; quòd erit eadẽ lineę primę ad lineam tertiam, quam polygoni ad polygonum proportio.

THEOR. III. PROPOS. XXII. Euc. 23.

Æquiangula parallelogramma inter se eam habent rationem, quæ ex proportione laterum componitur.

QVantitas composita respectu alterius habet rationem; cùm non dum illam secundùm vnam proportionem respicit, sed secundùm plures, V. g. linea dicit proportionem ad aliam tanquam 10. ad 5. ita vt minorem superet medietate, Deinde hæc minor ad minorem se, dicit proportionem tanquam 5. ad 3. Illa itaque maior 10. partium ęqualium habet ad lineam trium partium rationem compositam; nimirum eam, quæ est inter 5. & 3. & inter 5. & 10. Ita, vt respiciat illam, ne dum superando eam medietate, vt superat 5. sed insuper eam superando duobus quintis vt 5. superat 3. vt diximus tract. 9. pr. part. def. 7. Dicit itaque Euclides, quòd *parallelogramma æqualium angulorum eam proportionem habent*, quæ ex lateribus componitur: nimirum aream rectilinei AAHE; ne dum esse maiorem rectilineo DC paruo proportione, quæ est inter AA, & AC hoc est dupla: sed & ea, quæ est inter EN, & BD, quæ est E. g. 5. ad 3. Quamobrem, si DC minus rectilineum continet 6. Rhombos, ne dum AB continebit 10. Rhombos, quæ est proportio 5. ad 3. Sed insuper alios 10. nimirum 20. quæ est proportio 2 & 1. Et ita Rhombus AE, dicit proportionem multiplicem, quia bis continet Rhombum DC, & insuper proportionem superparticularem bipartientem sextas, idest semel, & duas eius sex partibus.

Potest etiam fieri comparatio inter AB, & BD latus pro vna proportione, & EB, & AC pro alia, & idem eueniet, vt sunt 20. 8. 6. vel 6. 15. 20. Primi namque proportionem habent, quam 5. ad 2.



& 4. ad 3. secundi vero proportionem habent, quam 2. ad 5. & deinde 3. ad 4. Vt autem propositionem demonstret, coniungit rectilinea ad apicem B, angulorum æqualium, ita vt in rectam vnam conueniant, vt fecimus supra propos. 10. latera reciproca AA, & BC sicut latus BD cum BE: prolungenturque eodem modo latera LC, & HX, donec sibi occurrant in G, & constituatur rectilineum nigrum NG.

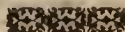
Probatur rectilineum maius ex 1. huius dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit latus AN ad BC. Nigrum vero dicit eam proportionem ad minus, quã dicit EA ad ND, ob eandem altitudinẽ, sed ex pr. p. 5. def. 8. rectilineũ maius ad minus dicit proportionẽ compositam ex sua proportione ad nigrum, & nigri ad minus: Ergo dicit etiam proportionem compositam ex lateribus AB ad BC pro prima proportione componente, EB, ad NN pro secunda.

COROLLARIVM I.

COllige, Quod eadem est ratio in triangulis habentibus vnum angulum alteri æqualem, vt est videre in triangulis BDC, & ABE, cùm enim triangulum sit medietas rectilinei in eadem basi, & eiusdem altitudinis sequitur, vt triangula eundem angulum habentia eodem pacto, ac rectilinea se habeant ad inuicẽ, cùm ita se habeat duplum ad duplum, sicut medietas ad medietatem ex propos. 18. lib. 5.

COROLLARIVM II.

* COlligitur quoq; quòd, cùm triangula omnia eiusdẽ altitudinis, & basis sint æqualia, sicut, & parallelogramma; sequitur quòd triangulum V. g. BCD se habeat ne dum ad triangulum ABE; sed etiam ad quodcunque aliud eiusdem altitudinis, & basis, vtpote illi æqualibus eodem modo; sicut, & quæcunque triangula eiusdem altitudinis, ac triangulum maius ABE, quia sunt ipsi æqualia, respicient BCD triangulum minus, & quòdcunque illi æquale, vt sunt ea omnia, quæ cùm hoc minori eiusdem altitudinis sunt, & basis eâdem ratione: quare verum erit illud, quòd difficiliori argumento demonstrat Commandinus, triangula inter se rationem habere compositam ex proportione basium, & altitudinum, & idem dicas de parallelogrammis.



EXPENSIO VII.

De similium figurarum notione, & effectione.

TOta hæc quæstio de figuris similibus cognoscendis est, & id ex quadruplici principio, seu loco, scilicet, vel ex cognitione laterum; vel ex similia alterius comparatione, quòd duæ alteri sint similes, & ideo inter se; vel quòd para similiter sit descripta, ac suum totum; vel tandem quòd figuræ ipsæ similes efficiuntur, & ideo in primis docet eas efficere, & datam figuram imitari.

THEOR. I. PROPOS. XXIII. Euc. 18.

A data recta linea describere rectilineum simile similiterque positum, ac alterum rectilineum.

SIt rectilineum paruum x, cui oporteat super datam rectam AB describere rectilineum simile, similiterque positum, nimirum quod habeat angulos æquales, & latera proportionalia paruo rectilineo x.

Sic itaque faciendum est: resoluatur figura parua x in triangula nigrior, nigrum, & album, sine etiam in plura, si pluribus lateribus, quàm assignata, constet. Deinde super AB ad A fiat angulus niger æqualis angulo nigro L, similiterque ad B fiat angulus alius nigcr æqualis angulo nigro M, & ex 27. primi angulus E nigor angulo nigro F æqualis erit.

Rursus idem fiat super lineam AE faciendo angulum album ad A angulo albo ad L æqualem. Pariterque angulum album ad E angulo albo ad F æqualem; reliquusque D reliquo N æqualis erit. Tandem idem efficiatur de angulis nigerrimis ad B. & A; quæ sequentur angulis nigerrimis M, P, & C ruenietæqualis angulo N. Et ita rectilineum AB, rectilineo x erit simile, similiterque positum.

Probatur. Nam anguli eodem ordine æquantur, & latera proportionalia sunt. Ergo sunt similia.

Probatur itaque de angulis; quòd æquentur.



Nam para alba ad A parti albæ ad L, sicut nigra alia A, & L nigra æquales sunt; Ergo totus angulus A toti angulo L æqualis erit. Idem philosophare de partibus anguli E, quæ partibus anguli P æquantur, sic de partibus B partibus M æqualibus, & hoc ex constructione: itemque probatum est angulum D angulo O, & angulum C angulo N esse æqualem, quamobrem omnes anguli eodem ordine in vtraque figura æquales sunt.

Probatur quoque de lateribus. Nam æquiangula sunt triangula ex constructione. Ergo, & latera stũt proportionalia ex 4. huius, prout æquales ambiunt angulos. Quapropter, vt se habet in proportione AB ad BE, & BE ad BC, ita se habet in triangulo paruo LM ad MP, & MP ad MN. Vnde ex æquo ita proportionabitur AA ad AC, vt LM ad MN; Et ex 4. huius, vt est BC ad CA, ita MN ad NP: Ergo hæc tria latera AB, & BC. & CE inuicem similiter se habent ac tria correspondentia in figura x, quæ sunt LM, & MN, & NP.

Idẽ autẽ prorsus argumẽtũ valet de aliis tribus AB, & AD, & DE figuræ maioris, quæ eodem situ probabuntur proportionalia tribus figuræ x; nimirum lateribus LM, & LO, & OP; Ergo rectilineũ maius minori est simile, similiterque positum.

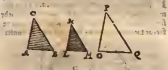
COROLLARIVM

COllige ex Clauio angulos quoque æquales fieri diuidendo figuram in triangula, duo nigra, & album, & productis lineis diuidentibus AC, & AB sicut, & lateribus, anguli A, ea quo prodeunt AD, & AB singulis reliquis lateribus ON, MN, NP parallelas ducẽdo DB, & BC, & CB. Ita enim triangula maiora inclusa, & minoribus (vt ex Coroll. propos. 4. erunt proportionalia V. g. album maius ABD, albo minori, ANM, &c. consequenter tota figura maior constans ex triangulis similibus, similis erit figuræ minori inclusæ.

THEOR. II. PROP. XXIV. Eucl. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

SInt duo rectilinea album, & nigrum nigerrimo LMN similia. Asserit *esse etiam inter se similia.*



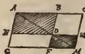
Probatur faciliter. Nam duo anguli correspondentes A, & O sunt æquales angulo L. Ergo & inter se. Item B, & Q angulo M; item C, & P angulo N: vnde & æquales inter se, lateraque angulos æquales amplexantia ex 4 propos. huius erunt proportionalia. Siquidem CA est ad CB, vt LN ad NM, & LN est ad NM, vt PO ad PQ. Ergo ex æquo CA erit ad CB, vt PO ad PQ. Et idem dicas de aliis cruribus; atque adeò per definitionem. Similia erunt triangula nigrum, & album, quòd sint similia nigerrimo LNM.

THEOR. III. PROPOS. XXV. Euc. 24.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti & inter se sunt similia.

ADsit parallelogrammum AUMC, in quo ducatur diameter AM, & per quodlibet eius pun-

punctum D ducantur duæ parallelæ ad latera OM, & MC; quæ sint DF, & HE. *Dicit parallelogramma, quæ circa diametrum sunt nigrum, & nigerrimum esse inter se similia.*

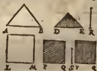


Probatur, quia constituuntur triangulis, quę parallelæ auferunt. Vnde ex Coroll. propos. 4. huius, triangula ea erunt similia triangulis totius, V. g. parallelogrammum maius nigrum constituitur duobus triangulis æqualibus ex prop. 4t. l. t. sed quorū quodlibet, vt ABD est simile vni ex duobus triangulis, ex quibus constituitur totum, idest triangulo ACM ob parallelam BD ipsi CM: triangulum quoque nigerrimum minoris DEM simile est eidem toti triangulo AMC. Ob parallelam DE, ipsi AC, Ergo parallelogramma quoque nigerrimum, & nigrū, vtpote eis triangulis dupla erunt similia toti Quare & similia inter se erūt ex præced. vel ex 16. lib. 5. quæ enim vni tertiæ sunt eędem rationes, & inter se sunt eædem rationes.

THEOR. IV. PROP. XXVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ab eis rectilinea similia, similiterque descripta proportionalia erunt.
Et si à rectis lineis similia, similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint, etiam ipsæ lineæ proportionales erunt.

PRima pars huius Theorematis est. Quod si sint quatuor lineæ, cuius antecedēs AB in prima cōbinatione ad sequentē DE ratione referatur simili rationi, quā in posteriori combinatione refertur LM antecedens ad sequentē PQ, & constituantur super rectas primæ combinationis duo rectilinea inuicem similia, similiterque posita V. g. duo triangula album, & nigrum. Rursusque super rectas secundæ combinationis alia rectilinea diuersi, etiam generis à primis; sed tamen inuicem simi lia, similiterque descripta V g. duo quadrata album, & nigrum. Affirmat, *quod hæc rectilinea erunt proporti. nalia*, ita, vt, sicut triangulum album ad nigrum referatur, ita quadratum album ad nigrum refertur, quod vt probetur.



Inueniend a est tertia proportionalis rectis primæ combinationis, quæ erit R. Sicut, & posterioris combinationis reperienda est tertia proportionalis S, secundum documenta 14. propos. huius hoc posito.

Probatur ex propos. 21. Coroll. vt est basis AB ad tertiam proportionalem R, Ita est triangulum album ad nigrum.

Pariterque vt est latus LM ad tertiam proportionalem S ita ex eodem Coroll. est quadratum album ad nigrum.

Sed basis AB trianguli dicit ad suam proportionalem R similem proportionem, quam dicit LM ad S. Ergo, & triangulum album respicit nigrum eā proportione, quā quadratū albū respicit nigrū.

Minor argumenti constat ex 23. quinti nimirum quod AB sit ad R. veluti LM est ad S. Quoniam, cūm R, & S sint tertiæ proportionales, ex æquo argumentando, eam proportionem, quam dicet AB ad suam proportionalem R, eandem dicet LM ad suam tertiam proportionalem S: Quoniam dicebant eandem proportionem ad suas sequentes DE, & PQ, ex hypothesi.

Secunda vero pars vertit primam, & præsupponit ad probationem inueniendam tribus AB, nimirum DE, & LM quarta proportionalis YZ; super quam constituendum est rectangulum simile, similiterque positum; ac rectilineum LM, de quo probandum est priùs, quòd sit æquale rectilineo PQ, ad hoc, vt conuertatur propositionis prima pars, & probetur, quòd rectilinea rectilineis similibus, & similiter descriptis proportionalia, lineis constent proportionalibus.

Probatur autem, quòd sint æqualia duo quadrata nigra. Quia ad ipsa dicit eandem proportionem quadratum album; quam dicit AB ad DE, & quidem ad quadratum nigrum PQ ex suppositione; ad quadratum v.rò YZ ex eo quod sit super quartam proportionalem YZ. vt ex antecedenti probatione huius propositionis constat, vnde erit triangulum album ad nigrum, ita quadratum album ad nigrum eo quia sit AB ad DE vti LM ad YZ. Quare ex propos. 9. quinti cum eisdem quadratis nigris eandem dicat proportionem album quadratum, erunt æqualia quadrata nigra

Probatur modo secunda pars propos. Duo quadrata nigra sunt in duplicata ratione suorum laterum ex 20. huius; sed hæc probata sunt æqualia; Ergo, & latera PQ. & YZ erunt æqualia. Sed latus LM dicit eandem proportionem ad latus YZ; quam basis AB ad basim BD. Ergo etiam eamdem dicit proportionem latus ML ad latus PQ, quam basis AB ad basim ED.

THEOR. V. PROPOS. XXVII. Euc. 25

Dato rectilineo simile, similiterque positum, rectilineū & alteri dato æquale constituere.

SIt datum rectilineum A V. g. pentagonum, cui constituendum sit rectilineum simile, similiterque positum; sed alteri dato æquale V. g. triangulo B. Itaque secundùm doctrinam propos. 43. primi rectilineum parallelogrammum D C æquale rectilineo A cōstituatur super latus quodlibet eiusdem rectilinei imitandi A, & huic rectilineo parallelogrammo fiat aliud nigrum simile super latus alterum CP idest CH, sed æquale rectilineo B. Inueniatur ergo lateribus DP, & PH parallelogrammorum nigri, & albi, quæ æqualia non sunt, media proportionalis ex propos. 16. huius PV, & super hanc PV rectilineum constituatur nigrum simile priori iuxta regulas propos. 23. & hoc erit illud, quòd quæritur.

Nam pentagonum nigrum, iam fecimus simile,

le, similiterq; constitutũ dato A. Quare solum remanet demonstrandum; quòd triangulo B sit æquale, id verò ostenditur. Nam est æquale rectangulo nigro CH, sed hoc est æquale *prout fecimus* triangulo B. Ergo, & pentagonum nigrum est æquale triangulo B.

Maior probatur. Nam dicit eandem proportionem pentagono A; quam dicit rectilineum CH; quæ verò eidem eandem dicunt proportionem, inuicem æqualis sunt ex propos. 9. quinti.

Quod verò nigrum pentagonum, & nigrum parallelogrammum dicant eandem proportionem pentagono A ostenditur: Nam dicunt eandem proportionem, quam parallelogrammo DC: Sed hoc pentagono A est æquale. Ergo, & pentagono A, ex 7. quinti eandem dicunt proportionem.

Probandum est. Quod parallelogrammo DC eandem dicant proportionem nigrum pentagonũ, & nigrum parallelogrammum. Nigrum parallelogrammum ad parallelogrammum DC ea proportione refertur ex prop. 1. huius, cum sint eiusdem altitudinis, qua bases DP, & PH. Sed ea proportione, quâ referuntur bases DP, & PH, pentagonum nigrum ad idem parallelogrammum refertur: Ergo refertur ad CD proportione eâdem pentagonũ nigrum, qua rectangulum nigrum CH.

Patet hæc *minor* figuræ similes, similiterque positæ super primam, & mediam lineam referuntur, vt refertur prima ad tertiam ex Coroll. prop. 31. Sed pentagonum nigrum est positum super mediam PV: ergó dicit ad pentagonum A, cui simile est, & similiter positum eam proportionem, quam dicit prima PH ad tertiam DP. Sed pentagonum A ex constructione est æquale parallelogrammo DC. Ergo ad hoc parallelogrammum dicit ex 7. quinti eam proportionem, quam prima, quæ est basis HP dicit ad tertiam, quę est basis PD; quod erat tandem probandum. Quare pentagonum nigrum ad parallelogrammum album refertur, vt PH ad DP, sed taliter etiam nigrum parallelogrammum ad albũ maius refertur: Ergo nigro parallelogrammo nigrum pentagonum erit æquale; quare, & ipsi B triangulo.

EXPENSIO VIII.

De similium figurarum additione, & subtractione.

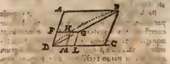
PRimo parallelogrammorum deficientium, vel abundantium proprietates ponit, ex inde docet addere, vel subducere alicui parallelogrammo, & applicare datæ lineæ, vel cum defectu, vel cum excessu, vt placet, deseruitque hæc doctrina maximè lineis irrationalibus, de quibus lib. 10. agit Euclides.

THEOR. I. PROPOS. XXVIII. Euc. 26.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit simile toti, & ei similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circa idem diametrum, sicut totum, consistit.

DIcit: Quod, si à maiori parallelogrammo ABDC auferatur parallelogrammum minus DFGL, quod deinde ipsi accommodetur, vt angulus super æqualem angulum situs sit, vt vides in D. Dicit hoc paruum parallelogrãmum consistere circa diametrum totius DB; quod probat per reductionem ad impossibile.

Nam si dicatur. Quod DG, & GB in vnam re-



ctam non conueniant, & ideo, quòd non possit esse diameter idem trahatur diameter, & sit punctata, quæ transeat non in G, sed per aliquod aliud punctũ. Itaque E.g. trãsibit per H, & tracta HM parallelogrammum FHDM erit simile toti BABC ex 25. huius, quia ex aduersarijs circa diametrum sunt: Quamobrem latera inuicem erunt proportionalia, ita vt quâ proportione DA respicit latus totius DC, sic latus minoris DF respiciat DM: sed & idem latus DF respicit DL eadem proportione, quâ DA respicit DC; quia parallelogrammum FGDL est simile toti ex 25. huius: Ergo cùm ad idem DF eandem dicant proportionem ex 9. quinti essent æquales DM, & DL pars, & totum. quod repugnat.

THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 27.

Omnium parallelogrammorum secundùm eandem rectam lineam applicatorum deficientium figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis, parallelogrammum maximum est id, quod à dimidia describitur, dummodo defectus quorumcunque aliorum similes existant defectui, quo deficit parallelogrammum prædictum à dimidia descriptum.

DEtur recta AB, cui applicetur parallelogrammum nigrum AP deficiens ad complendam, occupandamque totam lineam AB portione PB. Asserit, quod, si huic deficienti PB super dimidiam CB constitutum sit simile parallelogrammum, quale est ex prop. 25. huius RB, cum sit circa diametrum BP deficientis superficiei. Asserit inquam istud parallelogrammum ex dimidia, sed deficienti superficiei simile, esse maius parallelogrammo nigro AP, & quocunque alio cum dictis conditionibus facto.

Probatur pars AS nigri parallelogrammi fig. ad

dexteram est æqualis parti CI parallelogrãmi BR ea medietate descripti BR: Reliqua verò pars CP



parallelogrammi nigri, cùm sit complementum æquatur, & suppletur per aliud complementũ PQ, quod ex prop. 35. l. 1. ei est æquale, ergo rectilineũ ex medietate SB. superat parallelogrammum nigrum AP reliquo parallelogrammo RP. Ita etiam eueniet; si parallelogrammum nigrum AP fieret altius paralelogrãmo ex medietate descripto BR, dummodo hoc parallelogrammum, vt supra dixi, esset simile defectui BP, nempe existens circa diametrum superficiei deficientis nigro rectilineo ad occupandam totam lineam AB, vt potes videre in altera figura.

Probatur eodem modo. Nam AQ est æquale parallelogrammo BQ; ablatis itaque ab vtrisque complementis æqualibus IQ, & SR. remanebunt æquales adhuc residuæ partes, nimirum hinc seminigra BR., inde parallelogrammum AP nigrum adiunctu ei paruo rectilineo PB: Ergo nigrum parallelogrammum AP est minus seminigro BB & deficit ab eius equalitate hac portione ei additâ RP.

PROB. I. PROPOS. XXX. Eucl. 28.

Ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo deficiens tali superficie parallelogrammâ, quæ sit similis alteri parallelogrammo dato. Dummodo datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non sit maius eo, quod à dimidia describi quiret, simile defectui dato.

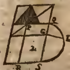
SI tibi exhibeatur recta linea AB, ad quam applicandum sit parallelogrammum æquale triangulo nigro; sed quòd deficiat ad totam lineam cõplendam in sua superficie, portione tali, quæ sit similis alteri datæ D.

Est primo aduertendum, quod hoc triangulum non debet esse maius, quàm illud rectangulum, quod describeretur à medietate; namque deffectus deinde non posset similis rectilineo dato D constitui; quòd, vt probauimus in preced. propos. rectilinea applicata, quæ deficiunt simili defectu rectilineo dato ea, quæ sunt super medietatem, sunt maxima omnium. Vnde si esset rectilineum maius, quàm quod super medietatem posset fieri, deinde deffectus similis non esset rectilineo dato.

Præceptum 1. Describatur itaque super AB rectilineum D, quod sit punctatum AC, tractoq; diametro BA indefinitè, erigatur à puncto medio F parallela lateri punctato CI, quæ occurrat diametro BA in H, fiatque totum rectilineum AFHE super medietatem: de quo primo videndum est: an sit æquale triangulo nigro per operationem, quam vides, & quam docuit Euclides propos. 41. primi. Siquidem facto rectilineo PG in dato angulo A secundùm longitudinem lineæ AF, æquale triangulo nigro, prolungatisque lateribus RP, & QS, transferendum est rectilineum AE ex medietate super illud: nam si excedatur à rectilineo PG, operatio non potest fieri, vt dictum est: si eidem rectilineo commensuretur, & sit ei æquale, nihil aliud exposcitur, factum enim est, quod quærebatur, & defectus EB erit similis rectilineo dato D, at si maius sit rectilineo PG.

Præceptum 2. Tunc ex doct. propos. 27. huius inueniatur excessus inuento GR parallelogrammum æquale EN, & ad id reperiatur inter QR latus rectilinei triangulo æqualis, & latus GS latus excessus media proportionalis GL, super quam translatam in BO fiat parallelogrammum EN simile, similiterque positum, ac defectus NB; producanturque latera ON, & NT. Iamque erit applicatum lineæ AB rectilineum AN æquale triangulo nigro; sed quod deficit rectilineo nigro NB similis rectilineo D.

De quo duo probanda sunt. Primum, quòd sit simile rectilineo D defectus niger NB: secundo, quòd rectilineum AN sit æquale triangulo nigro.





Prog. 1. Similitudo itaque probatur. Quia figura deficiens BB est similis figuræ ex medietate AHEF, quæ est contermina. Sed hæc facta est similis figuræ D, Ergo etiam illa deficiens BB similis erit figuræ D. Sed huic quoque est similis deficiens figura minor inclusa TO, Ergo, & reliqua nigra BN. Patet consequens, quia ex prop. 28. h. est circa idem diametrum totius BE, quæ verò circa diametrum sunt ex propos. 25. huius, & toti, & inter se sunt similia.

Progress. 2. Quod verò parallelogrammum AN, æquale sit triangulo nigro; Probatur. Nam AN est æquale rectilineo PG, in 2. fig. Sed illud PG est æquale triangulo nigro ex constructione: Ergo, & rectilineum AN est æquale triangulo nigro.

Probatur maior propositio. Quòd parallelogrammum AN æquale sit rectilineo PG, nam est æquale gnomoni TBO. Sed hic est æqualis rectilineo PG, quòd sint gnomon TBO, & PG residua ex æqualibus vt ex 1. & 2. præcep. PS, & BB. Ergo AN est quoque ei PG æquale. Quod verò AN sit æquale gnomoni ostenditur. Nam pars FN, cùm sit complementum, est æqualis parti NO, ex prop. 35. primi. Pars autem AT, cum sit super equali basi, & inter easdem parallelas est æqualis ex prop. 37. primi alteri parti TB. Ergo AN æquatur gnomoni TBO. Quapropter, cum AN rectilineum applicatum lineæ AB sit æquale gnomoni TBO; hic verò gnomon TBO sit æqualis rectilineo PG, quòd, vt dixi, ambo residua sint æqualium BN, & GL rectilineorum ab æqualibus EB, & PS ablatorum. Rectilineum verò PG sit æquale ex effectione triangulo nigro; Etiam AN rectilineum erit ei nigro triangulo æquale, applicatum autem erit lineæ AB, & deficiet rectilineo nigro NB simile rectilineo D.

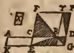
PROB.

PROB. II. PROPOS. XXXI. Euc. 29.

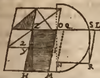
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

Exhibita tibi sit linea AB, ad quam oporteat applicare æquale triangulo feminigro parallelogrammum excedens ipsam figura parallelogramma, nimirum OS, quæ similis sit parallelogrammo alieni dato V. g. X.

Construatur itaque super dimidiam AB, id est CB parallelogrammum CBYS, sed simile parallelogrammo X, similiterque positum; quo facto reperiatur quadratum æquale huic parallelogrammo, simulque triangulo feminigro; quod exequemur, vt videa in secunda figura, primo ex doct. 44. primi constituendo in dato angulo rectilinei X super latus ZO æquale lateri CB rectilineum nigrum ZOIY æquale triangulo feminigro, & iuxta illud ponemus rectilineum THMI simile, & æquale rectilineo CYSB. Hoc enim poterimus facere ex propos. 44. primi propter æqualitatem angulorum correspondentium, & lateris YT, quo facto OM totũ redigemus in rectangulũ, ponẽtũ æquale ex propos. 37. primi, vtpote inter easdem parallelas, & super eandem basim. Huic verò rectangulo faciemus quadratum æquale ONRS ex prop. 14. secundi. Tandemque huic quadrato fiat rursus parallelogrammum æquale ex prop. 37. vel ex prop. 43. primi; sed simile, similiterque positum, ac parallelogrammum X, scilicet QNRL.



Hoc itaque parallelogrammum simile est alteri feminigro CY ex medietate facto simile, similiterque posito, vt X; sed tamen maius, quòd ne dum huic CY rectilineo feminigro, sed etiam triangulo feminigro æquale sit. Quare ob similitudinem, & similem positionem poterit describi super AY; ita vt excessus sit versus Y, & B, & excedat tribus partibus feminigris gnomonis CGY, vt perspicuum est. Tracto itaque latere AK parallelo ipsi AB, & CF producto in E, erit parallelogrammum ED, requisitum; quod erit æquale triangulo feminigro excedens datam lineam AB figura feminigra BG simili rectilineo dato X.



Probatur, vt in anteced. propositione AO rectilineum est æquale gnomoni CGY; quoniam pars EC est æqualis parti EB, vtpote duo dimidię totius KB, & ideo complemento BP æquali ipsi EA. Sed gnomon CGY est æqualis triangulo feminigro: Ergo AG rectilineum est æquale triangulo feminigro.

Quod autem gnomon sit æqualis triangulo feminigro, ostenditur: nam est æqualis rectilineo YO nigro, quod BP, & HO duo tota sint æqualia, & CY, MY duę partes eorũ sint æquales, ex construct. Ergo gnomon CGP, & rectilineum YO partes remanentes ex totis æqualibus erunt æquales. Cum itaque gnomon CGY, & rectilineum YO sint æqualis. Rectilineum verò YO ex constructione sit æquale triangulo feminigro. Ergo, & AG rectilineum applicatum æquale gnomoni, & ideo rectilineo nigro YO erit tandem æquale triangulo feminigro.

Patet autem; quod excedat lineam AB datam, rectilineo BG simile rectilineo X; quod totum EP sit ex constructione simile; ergo talie erunt etiam rectilinea circa diametrum ex propos. 28. huius. Circa verò diametrum reperitur BG rectilineum.

EXPENSIO IX.

De laterum figurarum proportionali potentia.

Licet supra egerimus de potentia proportionalium linearum, quam habene ad constituendum alteri æquale rectilineum; non tamen lineas considerauimus, vt in aliqua figura existentes ad constituendum rectilineum proportionale. Modo hic eas consideramus, vt latera alicuius figurę proportionalis alteri quacumque proportione. Et primo considerabimus, tanquam latera trianguli rectanguli; deinde tanquam latera alicuius quadrati, vt fecimus secundo libro. Euclides quidem hoc 6. libro de solã potentia agit trianguli rectanguli, de potentia verò laterum alicuius quadrati lib. 12 tractat, sed nos existimauimus hic esse propriũ earũ propositionum locum.

THEOR. I. PROPOS. XXXII. Euc. 31.

In rectangulis triangulis figura qualibet à latere angulum rectum subtendente descripta æqualis est figuris sibi ipsi similibus, similiterque positis, quæ à lateribus describuntur.

Triangulum sit rectangulum ABC. Describatur super BC quæcumque figura rectilinea BD, cui similes, similiterque positæ constituantur super cruta AB figura BU, & CA figura CH. Dico figuram BD super basim *esse æqualem figuris super crura BG, & CH.*

Prob. Sicut est ex CA quadratum prima quantitas ad quadratum ex CB secundam quantitatem in prima serie; ita est rectilineum CH prima quantitas ad rectilineum BD secundam quantitatem in posteriori serię (debes autem imaginari super latera rectanguli descripta quadrata l. id. fig. non exprimat.)

Hoc autem patet; quòd similiter quadrata, & figuræ

figuræ se habeant,eo quòd sit ex prop.21. quadratum ad quadratum,vt figura ad figuram; quia sunt eorum proportiones duplicatæ eiusdem proportionis laterum AC ad CB. Et ob hanc eandem rationem quadratum ex BA in prima serie tertia quantitas ad quadratum ex BC in eadem serie secundã quantitatẽ est, sicut rectilineum BO tertia quãtitas seriei posterioris ad BD rectilineum item secundam quantitatem eiusdem seriei posterioris. Quapropter ex propos. 25. lib. 5. Composita prima quantitas cum tertia prioris seriei, nempe quadrata ex CA, & BA erit ad secundam: nimirum quadratum ex BC, vt in posteriori serie prima quãtitas rectilineum CH cum tertia quantitate e rectilineo AG simul sumpta ad rectilineum AD. Sed quadrata ex BA, & AC dicunt proportionem æqualitatis quadrato ex BC ex 11. l. 2. Ergo etiã rectilinea BG, & CH dicent proportionem ęqualitatis rectilineo BD ex BC.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duabus lineis inæqualibus reperire, quid possit plus maior, quam minor in ordine ad similes figuras constituendas.

DEntur duę lineæ A maior,& B minor. Accipiatur alia quędã dupla maioris, vt CD, & eã diuisã per medium in E, eo in puncto centro facto, interuallo eius medietatis ED, ducatur semicirculus. Inde à centro E mensuratæ longitudine minoris datæ B vsque ad G, ibi erigatur perpendicularis, & deducatur vsque ad circumferentiam, & punctum contactus H centro E rectã EH coniungatur. Dico enim, quòd si fiat figura ex GH similis figuræ ex A effectæ *illud est spatium, quò figura ipsa ex A effecta superat figurã sibi similem ex linea B tractam*, & ideo quod A est in potentia maiori, quàm B ad quamcunque figuram constituendam cuiuscunque formæ, seu magnitudinis tota linea GH.

Probatur ex propos. præced. Subtensa angulo recto G, scilicet HE, est æqualis lineæ datæ A, ideo quòd singulæ sint æquales radio EC, & A quidem ex constructione; HE verò, quòd sit radius. Quare eius figura similis, similiterque posita, erit æqualis duobus figuris similibus, similiterque positis ex EH, & ex EG. Quamobrem figura ex A æqualis figuræ ex EH similis, similiterque posita erit maior figurã ex EG, & ideo ex B sibi æquali totã figurã ex GH simili, similiterque posita; quod erat probandum.

THOR. III. PROPOS. XXXIV. Eu.13.

Si recta linea secetur secundùm mediam, & extremam rationem, maius segmentum, cum dimidio totius iunctum, quintuplum potest efficere quadratum maius, quàm à dimidia totius describitur.

SEcetur recta AB in C media, & extrema ratione. Sitque maius segmentum BC; Prolongetur in D, & sit BD dimidia totius AB. Dico quadratum ex CD; nimirum CE *ex maiori segmento, & dimidio totius esse quintuplum maius, quam quadratum ex sola dimidia* BD, *quod est* BF.

a Probatur, Quadratum AG, ex AB totã effectum; & ideo dupla lineæ BD, est quadruplum quadrati ex ipsa dimidia BO, ex propos.6. l.2. Huic quadrato æqualia sunt rectangula duo, vnum AH sub tota, & minore segmento: alterum CO ex tota, & maiore segmento ex prop.4. l.2.

Primo quidem rectangulo AH, vel AP ex tota, & minore segmento ęquale est quadratũ ex maiore segmento CB, quòd est CL, vel AI ex propos.15. l.2. Alteri verò rectangulo CO, ex tota,& maiore segmento sunt æqualia duo rectangula ex CB, & BD qualia sunt BA, & AO ex maiori segmento, & dimidiã totius effecta; & ideo æqualia inuicem. Loco tamen rectanguli KB substituamus æquale FI, quòd sit complementum rectanguli BK in quad, GF & ideo ex prop.35. l.1 ei æquale,& hinc ęquale, rectangulo KC. Igitur quadratum AG ex tota est æquale rectangulis duobus ex maiore segmento; & dimidia BK, & FI, & quadrato CL, idest æquali KI ex segmento maiori. Ideo hæc omnia erunt quadruplicia quadrato ex dimidia BF, vt est ostensum; tale esse quadratum AG, cui ęquantur. Addę omnibus istis simul rectangulis BK, & FI, & quadro KE quadratũ BF ipsum ex dimidia BD,& omnia erunt quintuplicia ipsius quadrati BF. Hæc autem omnia simul, nempe duo rectangula cum duobus quadratis, ex dimidia, & ex maiore segmento faciunt ex 6. l. 2. quadratum ex CD, idest CE effectum super segmento maiori CB, & addita medietate BD; hoc est super CD: Ergo hoc quadratum erit quintuplum quadrati BD.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV. En.3.l.11.

Si recta linea secundùm mediam, & extremam rationem sit secta, minus segmentum dimidio maioris additum, quintuplum potest eius, quod à dimidio maioris segmenti describitur.

SIt data recta AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C; Sitque minus segmentū AC, cui adijciatur dimidium DA maioris CB. Dico DC posse efficere quadratum quintuplo maius, quàm AD.



* Probatur. Ita proportionatur tota AB ad CB maius segmentum, vt CB ipsum ad AC.

Quare de re ex 18.l.5 etiam medietas totius ad medietatem segmenti maioris se habebit, vt segmentum maius CB ad minus CA. & ideo conuertendo minus CA ad maius CB segmentum se habebit, vt dimidiū AD segmenti maioris ad dimidium AE totius AB. Vnde ex 17.lib.5. minus CA cum dimidio maioris segmenti se habebit eodem modo ad maius CB cum dimidio AE totius AB, vt segmenti maioris dimidiū AD ad dimidium totius, AE. Ideoque etiam quadrata harum linearum taliter se habebunt ex prop. 26.h. Atq; adeo erit quadratum segmenti minoris simul, cum dimidio maioris segmenti, tanquam vna linea, & latere ad quadratum maioris segmenti cum dimidio totius lineæ, AB tanquā vno latere, vt quadratum dimidij DA segmenti maioris ad quadratū dimidiæ totius AE. Ergo etiā permutando erit quadratum minoris segmenti cum dimidio maioris, tanquam vno latere, ad quadratum dimidij segmenti maioris, vt quadratum maioris segmenti cum dimidio totius, tanquam vno latere ad quadratum dimidiæ totius: sed hoc quadratum ex præcedenti est quintuplum quadrati dimidiæ totius. Ergo etiam quadratū ex DC minore segmento, & dimidio maioris effectum erit quintuplum quadrato segmenti D A dimidij maioris, quod erat probandum.

THEOR. V. PROPOS. XXXVI. En.4 l.11.

Si recta linea secetur secundùm extremam, & mediam rationem; Quod à tota, quodque à minore segmento vtraque simul quadrata tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrato.

SIt AC secta secundum mediam, & extremam rationem in B. Dico quadratum AG totius AC, & quadratum BL minoris segmenti esse tripla quadrato EF maioris segmenti.



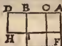
Probatur. Nam ex 15. lib.8. Rectangulum sub tota AC, & minore segmento BC, nimirum AL, est æquale quadrato maioris segmenti IF. Itaque IF, vtpote pars quadrati AG iam æquat semet, vtpote quadratum maioris segmenti, & insuper quadratum AG ea tota continet rectangulum AL ex tota, & minore segmento ipsi IF quadrato maioris segmenti æquale. Et insuper FL rectāgulum, cui, si addas quadratum minoris segmenti BL, erit æquale rectangulo AL, & consequenter AG quadratum cum BL iam tertio æquat quadratū IF maioris segmenti. Vnde quadratum totius CA cum quadrato BL minoris triplum faciunt quadrati à maiore segmento descripti, quòd propositum fuit.

THEOR. VI. PROP. XXXVII.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur. Apponaturque ei æqualis maiori segmento; hoc fit minus segmentum respectu totius maioris, quo modo se habet tanquam maius segmentum.

SIt AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C; addaturque ei DB æqualis maiori segmento. Dico quod DA est secta quoque secundùm mediam, & extremam rationem in B: estque minus segmentum DB; maius verò BA.

Prob. Rectangulum IF contentum sub tota, & minore segmento ex 15.l. 8 est æquale quadrato DI maioris segmenti DB additi. Adde itaque vtrique spatium, quod eis est commune: Fiuntq; æqualia rectāgulum AH, & quadratum BF. Rectangulum verò continetur sub tota D A, & maiore segmento DA addito. At quadratum est lineæ BA, quæ erat à principio. Ergo ex 17 l huius ita erit DA ad BA, vt BA ad BD; ideoque DA erit secta extremâ, & mediâ ratione.



COROLLARIVM

QVare ita potens erit AB, cum dimidio DA ad quintuplum quadrati dimidij DA ex pr. 34. huius, & ex propos.35. dimidium AB cum DB simul quintuplum poterit dimidij AB, & ex præced. DA, & BD distinctæ poterunt duo quadrata simul triplum quadrati ex BA.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVIII.

Si recta linea media, & extrema ratione secetur, & ei adiatur minus segmentum; Quod tota cum hac additione potest efficere quadratum, quintuplum est eius, quod à maiore segmento efficitur.

SIt linea AB secta in C secundùm mediam, & extremam rationem, & addatur ei minus segmentum DB. Dico totum DA quintuplo maius efficere quadratum, quàm C A maius segmentum.

Probatur. Quadratum AQ, vt sæpius dixi, ex maiore segmento, & rectangulum CX ex tota BA, & minore segmento BC æquantur inuicem. Hoc autem

autem rectangulum ter sumptum, vt CX, & XI, & PR cum quadrato AQ quater æquant AQ; adde tandem rectangulum ML cum quadrato PX, & addes æquale vni ex prædictis partibus CX: Cùm LM æquet RQ, rectangulum, & PX quadratum XQ: vnde totum erit æquale rectangulo toti CX ex tota, & minore segmento: & propterà quinta quantitas erit æqualis quadrato QA: Sed hæc omnia rectangula cum duobus quadratis æquant quadratũ AP totius AD, vt constat ex propos. 10. lib. 2. Ergo quadratum ex DA quintuplum est quadrati ex CA.



EXPENSIO VIII.

De proportionibus circuli, & partibus ipsius.

QVamuis Euclides vnicam propositionem de Circulo solùm adferat, adhuc plures, illasque elementares esse necessarias, experimentum docet. Cum & ea, quæ de parallelis in Cosmographia, & de figuris Isoperimetris, & multa alia, hæc fundamenta exposcant. Et sanè cùm 3. lib. multa de æqualibus circulis, angulis, figurisq; circulo inscriptis dictæ sint, hic etiam de proportionalibus circuli partibus lautiùs agendum videbatur.

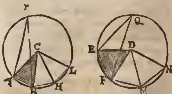
THEOR. I. PROPOS. XXXIX. Eucl. 33.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias constituti sint. Insuper, & sectores.

SInt duo circuli æquales, quorum centra C, & D, sintque in ipsis duo anguli nigri ad cētra subtendentes arcus, AB, & EF; sectoresque ACB, & BFD. Dicoque itaque *ita esse angulum nigrum apud C, ad angulum nigrum apud D, vt arcus AB ad arcum EF, & vt sector ACB, ad sectorem EDF.* Ducantur AB, & BF rectæ & in circulo vtroque aliæ istis subtensis æquales accommodentur in circulo C lineæ BH, & HL, &c. vsque dum placet, & in circulo D, aliæ tot numero, ac præcedentes; sed æquales EF, eruntque arcus subtensi, circuli quidem C æquales arcui AB ex 32. tertij, & ex 26 anguli quoque albi apud C nigro C, vt singuli albi circuli D erunt æquales nigro, D necnō, & arcus subtensi FM, & MN erunt æquales arcui EF.

Probatur itaque propos. Quam multiplex est aggregatum angulorum apud C, quod est ACL a anguli nigri C, tã multiplex est arcus AL, arcus AB, & sector ACL sectoris nigri. Item quam multiplex est aggregatum angulorum EDN anguli nigri D in circulo D, tã multiplex est arcus EN arcus EF, & sector EDN sectoris nigri.

Quare, si angulus ACL sit æqualis angulo nigro, etiam arcus subtensus AL arcui AB æqualis erit, si major angulus, maior erit arcus, si minor angulus minor quoque arcus. Et ita dicas de angulo EDN, & arcu EN; si enim angulus EDN æquet nigrũ angulum D, arcus EN æquabit EF arcum, si minor sit, erit minor, excedet si excedat, vnde ex def. 9. Tract. 9 si angulus nig. C ponatur prima quãtitas, & D secunda & terminus in priori combinatione: At in posteriori, Arcus AB circuli C pro fundamento, & arcus EF circuli D pro termino: fundamenta, nempe angulus, & arcus circuli C, æquali passu excedent terminos, idest angulum, & arcum circuli D: æquabuntur, vel deficient, & hoc iuxta quamlibet multiplicationem. Quare ex illa definitione sicut est prima magnitudo ad secundam, nempe angulus niger apud C ad nigrum apud D, ita est arcus AB, ad arcum EF.



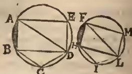
Et eodem argumento probabitur de sectoribus, quòd ita sit sector ACB, ad sectorem EDF, vt angulus niger in C ad angulum nigrum apud D quod vt faciunt arcus, vnà cum angulis crescant, decrescant, & æquentur. Et quia anguli ad circumferentias dimidij sunt angulorum ad centrum, ex prop. 9. tertij ita erit ex 17. quinti, angulus ad circumferentiam P ad angulum ad circumferentiam Q; vt arcus AB, ad arcum EF, &c.

THEOR. II. PROPOS. XL.

Quæ in circulis similia polygona inter se sunt, vt à diametris quadrata.

SInt Polygonum in circulo ABCDE, & FHILM in minori circulo; Dico *ita esse polygonum* super AB ad polygonum super FH, vt quadratum ex diametro AD, ad quadratum ex diametro LF.

Ducto enim diametro AD, & FL, nec non, &



BD subtensã, & HL, erunt triangula BDA, & FHL similia, cùm sint in similibus segmentis ob similitudinē præsuppositam polygonorum. Quare BA erit ad AD diametrum ex 4. sexti, vt FH, ad FL; & permutando erit BA ad FH, vt diameter AD ad diametrũ FL, sed ex prop. 26. h cùm basium proportionem duplicatam habeant, vt est basis ad basim; ita polygona similia ex ijs basibus constituta: Vnde ita erit polygonum super BA ad polygonum super FH, vt quadratum ex AD, ad quadratũ ex FL.

COROLLARIVM

Hinc ellicies idem dicendum de quocumque alio latere comparatum ad aliud sibi correspondens AB V.g. ad FM.

THEOR. III. PROPOS. XLI.

Circuli inter se sunt, vt ex diametris quadrata.

* PRobatur. Nam si polygona similis in circulis BCA, & FLM præced. propos. multiplicentur, vsque dum queant multiplicari, semper eorum latera æquè multiplicando erunt ad inuicem, vt quadrata diametrorum: sed circulus polygonum, cuius latera multiplicata sint quousque multiplicari queant, non excedit Nam si excederet, adhuc in segmẽto circuli, vt est pars nigra, BA. & HF possent latera delineari. Ergo erit etiã circulus BACDE, ad circulum FHILM, vt quadratũ ex diametro AD ad quadratum ex diametro FL.

THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Ambitus similis Polygoni circulo inscripti est ad ambitum alterius, vt diameter vnius ad diametrum alterius.

* PRobatur vtendo eadem fig. Nam BA prima quãtitas est ad AD secũdã; vt FH tertia ad FL quartam. Habet autem quinta BC ad secundam AD eandem proportionem; quam HI sexta ad FL quartam. Ergo ex propos. 25. quinti composita quoque BA prima cum quinta BC habebit eandem proportionem ad AD secundam, quam tertia FH cum sexta HI ad quartam FL, & ita dicas de omnibus alijs lateribus replicando idem argumentum. Sic quia quantitas prima ABC habet eandem rationem ad AD secundam, & diametrum; vt FHI tertia ad quartam, nempe diametrum FL: habet autem CD quinta eandem proportionem ad diametrum AD, nempe ad secundam quantitatem, quam IL, sexta ad quartam nempe ad diametrum FL: habebit etiam quantitas composita prima cum quinta ABC, & CD, ad diametrũ AD; nempe ad secundã eandem rationẽ quã IFH, & IL sexta cũ tertia ad quartam, nempe ad diametrum FL, & sic de ceteris lateribus argumẽtũ vrgebit donec totus ãbitus sit cõpletus. Cùm ergo ambitus poligoni sit ad diametrum circuli, in quo est, vt ambitus alterius ad suum diametrum; erit etiam *conuertendo* Ambitus polygoni circulo inscripti ad ambitum polygoni similis in alio circulo inscripti, vt diameter ad diametrum.



THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Circulorum circumferentiæ inter se sunt, vt diametri.

* PRobatur. Nam si polygona similia in circulis fig. prop. 40. ABCDE, & FHILM multiplicentur, vsque dum multiplicari possunt; semper eorum latera similiter numero augendo erunt ad inuicem ex præced. vt diametri: Sed polygonus multiplicatus in suis lateribus, vsque dum multiplicari potest, æquat ambitum circuli: nam si non æquaret in segmentis circuli, quibus excedit polignnum, alius polygonus posset inscribi pluribus lateribus præditus contra hypothesim; quæ supponit vltimum, qui possit inscribi esse inscriptum: Ergo ambitus circuli ad ambitum alterius circuli est, vt diameter ad diametrum.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Chorda vnius circuli ad chordam similem alius alterius circuli est, vt diameter ad diametrum.

PRobatur ea prop. proximè pręced. 40. Nam ibi probatum est AB esse ad FH, vt diameter AD ad diametrum FL ob similitudinem triangulorum ABD, FHL.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Arcus cuiuslibet circuli ad arcum similem alterius circuli eandem habent proportionem; quam chorda ad chordam: Et è contra.

* PRobatur. Qua vt in fig. propos. 40. arcus sunt similes: Erit arcus BA ad arcum HF, vt circumferentia ABCDE ad circumferentiã FHILM: Sed circumferentia ABCDE ad circumferentiam FHILM est, vt diameter AD ad diametrum FL ex prop. huius 43.: & chorda AB est ad chordam FH, vt diameter AD ad diametrum FL ex propos. 44. Ergo ex æquo erit, vt arcus BA ad arcum HF, ita chorda subtensa arcui BA ad chordã subtẽsam arcui HF; Quod argumentum facilè etiam ad probandum proportionem conuersam valebit.

COROLLARIVM

SEquitur hinc si arcus non sint similes, eos non habere inuicem, eandẽ proportionẽ: Si namq; eam haberent essent similes; *conuertendo*, vt chorda ad diametrum, ita arcus ad circumferentiam.



V TRAC-

TRACTATVS XI.

IN VII. LIBRVM EVCLIDIS PARS PRIMA.

De proportionibus Numerorum in genere.



Ic agit Euclides de numeris. Diuiditurque in tres Expensiones: In prima agit de fundamento proportionis in numeris, quæ est ratio mutua mensuræ, & mensurati; Secunda agit de proportione numerorum, in qua modi argumentandi etiam in numeris veri demonstrantur, qui veri vniuersaliter demonstrati sunt lib. 5. Tertia agit de numeris minimis primis inter se, & hoc vt octauo libro, deinde agat de proportionibus numerorum primorum, sicut eodem libro agit de proportionibus planorum numerorum, & solidorum, quibus primi numeri sunt radices.

EXPENSIO I.

De principijs.

PAuca hìc principia ponenda sunt, cùm ferè omnia apposuerimus tract. 8. quãdo de Arithmetica simplici egimus, & ea, quæ specialiter ad hunc tractatum spectant sunt sequentia.

DEFINITIO I.

PRoportio numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alium secundùm quòd contineat, vel contineatur, vel semel, vel aliquoties, & insuper aliquam illius partem vel partes.

Supra tract. 8. def. 17. breuiùs proportionem numerorum definiuimus dicendo esse habitudinem numerorum in ratione mensurantis, & mensurati. Verùm hæc definitio per omnia genera proportionum accuratiùs in ratione quâque mensurantis, seu mensurati progrediens, cum specialiùs specie. Eas verò species proportionum exponit, de quibus supra egimus tract. 9. expen. 2. cor. 3.

Cùm dicit *contineat, vel contineatur*, explicat proportionem maioris, & minoris inæqualitatis, si adsit.

Cùm dicit *semel* explicat proportionem æqualitatis; cùm dicit *aliquoties* explicat proportionem multiplicem.

Cùm dicit, *& insuper aliquam eius partem* explicat super, vel subparticularem etiam multiplicẽ, secũdùm quòd cõtinet, & cõtinetur, vel semel, vel aliquoties, & insuper aliquam contenti partem.

Cùm verò dicit *partes* explicat proportionem superpartientem, vel subpartientem etiam multiplicem: nam si semel, & insuper aliquas partes est superpartiens, & si contineatur subpartiens: quòd si aliquoties, & insuper aliquas partes, tunc est super, vel subpartiens multiplex.

DEFINITIO II.

TErmini, seu radices proportionis sunt duo numeri, quibus in illa proportione minores sumi nequeunt.

DEFINITIO III.

CVm tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur, primi ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint primus ad quartum triplicatam rationem habere dicitur primi ad secundum, & semper deinceps vno amplius, quam diu proportio extiterit.

Hæc definitio explicata est supra tract. 9. par. 1. def. 7.

Itaque si sint tres numeri eadem proportione gaudentes V. g. 2. 4. 8. proportio 2. ad 8. est duplicata proportionis 2. ad 4. & si sint quatuor est triplicata, V. g. 2. 4. 8. 16: numerus 2. ad 16. habet proportionem triplicatam, 2. ad 4. & sic consequenter si sint quinque, V. g. 2. 4. 8. 16. 32. numerus 2. ad 32. quadruplicatam proportionem habet eius, quam 2. ad 4. quod & intelligitur inuersè, quod numerus maior vltimus ad primum habeat proportionem repetitam, & replicatam, quam secundus ad primum. V. g. 32. ad 2. est quadruplicata eius, quæ 4. ad 2.

DEFINITIO IV.

QVotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum; & ita deinceps, donec intermedij extiterint numeri.

Hæc quoque definitio explicata est par. 1. def. 8. tract. 9. Vnde breuiter; si ponantur ordine numeri crescentes, quoquo placuerit augmento V. g. 2. 8. 7. 9. 12. 16 vltimus 16. componitur ex proportionibus primi 2. ad secundum 8. & secundi 8. ad tertium 7. & tertij 7. ad quartum 9.

&

& quarti 9. ad quintum 12. Et si inter istos libeat interponere numerum vel plures, V. g. 8. inter 7. & 9. dicetur quoque 16. ad 9. noviter appositis proportionibus componi.

AXIOMATA:

NVmerus metiens totum, & ablatum, metitur, & reliquum.

Sit V. g. numerus 9. qui metiatur 45. & ablatum 27. Dico, quòd metiatur, & reliquum 18. Nam cùm metiatur totum diuidi poterit totum in partes ipsi 9. æquales; nempe in quinque nouenarios. Cumque metiatur ablatum quoque, hoc ablatum 27. diuidi poterit in partes ipsi 9. æquales, nempe in tres nouenarios, & remanebunt duos nouenarios ad æquandum totum: Ergo duo nouenarij mensurant reliquum vsque ad complementum totius 45. nempe 18.

Axiomata reliqua tract. 8. habentur.

EXPENSIO II.

De partibus numerorum alterum mensurantium.

AD hoc, vt sternat iter ad numericas proportiones intelligendas Euclides incipit agere de partibus numerorum, quæ alium numerum possint mensurare, vtpote quòd in hac mutua mensura, vel totius, vel aliquius partis proportio eorum consistat.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duobus numeris inæqualibus detrahatur semper minor à maiore alterna quadam detractione, & semper superstit aliquid, donec perueniat ad vnitatem: Numeri primo assumpti primi inter se erunt.

17. 6.

SIt propositus numerus 17. maior, 6. minor, qui detrahatur à priori quoties fieri potest, nempe duplici vice, deinde alia detractione residuum à quo 6. auferri nequeat, V. g. 5. detrahatur vicissim à 6. & remaneat vnitas sola, vt hic se habet. Dicit propositio, *quòd de his numeris, & omnibus alijs simili in proportionem habentibus, pronunciandum sit, quòd sint inuicem primi, idest, quòd solam vnitatem pro communi mensura possideant.*

Progress. 1. Probatur. Nam si aliam obtinerent; hæc esset numerus maior vnitate, qui metiretur vtrosque nempe totum maius 17. & ablatum minus 6. sed ex axiom. 12. numerus metiens totum, & ablatum; metitur quoque reliquum. Ille ergo numerus maior vnitate metietur residuum 5.

Progress. 2. Et rursus eodem sitis argumentis; quia 5. secunda detractione ablatum est à 6. & ex primo progress. numerus ille maior vnitate metiens totum 6. & ablatum 5. metietur, & reliquum 1. Ergo numerus maior vnitate ipsam vnitatem metietur, quòd est absurdum. Vnde communis mensura nulla 17. & 6. numeris erit, nisi vnitas; Ergo erunt inuicem primi ex def. 12. tract. 8.

PROBL. I. PROPOS. II.

Duobus numeris datis non primis inter se maximam eorum communem mensuram reperire.

6. 22.

DEntur duo numeri, vt 6. & 22. Detrahatur que minor à maiore quoties fieri potest; remanebunt 4. Detrahatur rursus secunda detractione 4. à minore 6. & remanet 2. Detrahatur rursus tertia detractione 2. à 4. & nihil reliqui remanet. *Dico 2. esse communem amborum mensuram.* Quod, si esset necesse aliam, & aliam detractionem reiterare, id fiat, donec nihil remaneat. Ille enim postremus numerus, à cuius detractione nihil remanebit, erit communis assignatorum numerorum mensura maxima.

Progress. 1. Probatur primò; Quod hæc sit communis mensura V. g. 22. numeri 6. & numeri 22. ex prænund. tract. 8. Nam numerus numerum metiens metietur quoque omnem numerum, quem ille metitur; sed numerus 2. vltimo remanens metitur 4. cùm nihil ex eo, facta detractione, quoties fieri potest, remanserit. Ergo metitur quoque partes eius æquales, quibus numerus idem ex per detractionem abstulit à numero maiori. Ergo metietur quoque numerum maiorem 6. qui ex ijs partibus constabat, & sic vltimo residuo V. g. 4.

Progress. 2. Sed numerus 6. & 4. metiuntur numerum primum 22; cùm 6. superat pluribus detractionibus nempe tribus vicibus numerum 6. & 4. superetur residuo 2. Ergo vltimum residuum 2. metitur quoque numerum primo propositum.

Patet consequ. quia metitur ex primo progr. 4. & 6. qui numeri integrant numerum primo positum 22.

Probatur secundò; Quod hæc sit mensura maxima. Nam si hic numerus 2. maxima mensura non est; erit aliquis maior quam 2. qui metietur vtrosque 22. & 6. Qui ex prim. huius metietur quoque primum residuum 4. qui metitur totum 22. & ablatum 6. Sed eadem paritate, quia metitur totum 6. & ablatum 4. metietur quoque residuum 2. Maior ergo numerus, quam 2. commensurabitur numero 2. Quod est absurdum.

Quod si datis duobus numeris, & facta detractione nihil remaneat, numerus minor erit communis maxima mensura maioris, vt est 6. numeri 18. cum metiatur sua quantitate, & numerum maiorem sui replicatione.

COROLLARIVM

HInc manifestum est numerum metientem duos numeros, metiri quoque eorum communem maximam mensuram. Nam aut hic numerus est æqualis, aut minor. (maior enim esse non potest, cùm ijdem duo numeri duas maximas inæquales mensuras habere non possint) Ergo ille numerus, si est æqualis, metietur quoque communem mensuram, cui æquatur; si est minor, idem valebit argumentum: nam maxima mensura est residuum vltimum: quare si metitur totum, & ablatum; metietur etiam omnia residua successiue remanentia, & tandem maximam quoque commu-

munem mensuram; Sic 6. est maxima mensura, & simul residuum numeri 42. & 12. quos si numerus 3. mensuraret; dū quaterdecies in numero 36 sexties in 18. inest, mensurabit quoque 6. quòd eorum residuum existat.

PROB. II. PROPOS. III.

Tribus numeris datis non primis inter se eorum communem mensuram reperire.

42. 18. 8. mensura 2.

DEntur tres numeri 42. 18. & 8. quorum communis mensura reperiri debeat.

Inueniatur primo maxima mensura duorum maiorum V. g. 42. & 18. ex 2. propos. quæ sit 6. si ergo hæc maxima mensura capiat in tertio numero ex æquo, ita, quod nihil remaneat; hæc erit maxima omnium communis mensura. At si aliquid remaneat exerceatur per mutuam detractionem regula tradita præc. propos. quoties opus est; detrahaturque E. g. 6. ab 8. quoties fieri potest. Remanebunt 2. rursus si 2. ex 6. subducatur, nihil remanet.

Pronuncio itaque 2. esse trium numerorum 42. 18. & 8. communem mensuram maximam.

Probatur, quod sit trium communis mensura ex præc. prop. Postremum residuum 2. est maxima mensura numeri tertij 8. & maximæ mensuræ 6. duorum primo assumptorum numerorum. Ergo etiam ipsorum est mensura ex pronunciato 1. huius.

Probatur quoque secunda pars; Quod sit omnium trium maxima mensura. Nam, si non est, erit aliquis numerus maior V. g. Numorum, qui cum metiatur duos numeros primo propositos 42. & 18. metietur quoque eorum communem mensuram 6. ex Coroll. præcedenti; sed ex hypothesi metitur quoque tertium numerum 8. Numerus ille Numorum tū ex aduersarijs dicatur triū datorum numerorum communis mensura. Ergo metitur totum nempe 8. & ablatum 6. Quare metietur quoque reliquum 2. Sed ille Numorum numerus ponebatur maior, quam 2. Ergo numerus maior, quam 2. ipsum metietur, quod est absurdum.

COROLLARIVM

HInc elicies idem, quod in præced. Coroll. numerum metientem tres numeros metiri etiam maximam eorum mensuram; Nam maior esse non potest ipsâ maximâ mensurâ; si sit æqualis clarum est cum numerus omnis se per vnitates suas metiatur. Si sit minor eodem modo, quo supra probatur. Quoniam maxima mensura est reliquorum trium numerorum, Ergo ea mensura minor, quæ metitur tres numeros, nempe totum primū, & ablatos reliquos per mutuam subtractionem, metitur etiam vltimum residuum, nempe omnium trium maximam communem mensuram.

COROLLARIVM II.

SI verò aliquis cupiat plurium numerorū, quàm trium communem mensuram, idem præstandum erit, & inuenta trium mensuræ quartū, per mutuam detractionem inuentæ mensuræ ab ipsa mensura maxima inuenietur; illa erit quatuor numerorum mensura communis.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Omnis numerus est cuiuslibet dati numeri, aut pars, aut partes

PRobatur. Vel sunt primi inuicem, vt 7. & 5. & sic numerus minor est partes numeri maioris; Quia tot habet vnitates V. g. 5. quæ sunt partes maioris numeri, ex quibus, additis alijs, 2. componitur.

Vel duo numeri non sunt inuicem primi, & sic si minor maiorem metiatur, vt 4. metitur 8. tunc 4. est pars, vt per se patet, numeri 8. Quod si non metitur, reperiatur eorum communis mensura, qualis est 3. numeri 6. & 9. Assumanturque à minori numero el communi mensuræ tot partes æquales; quot possunt semi V. g. 3. & 3. Iam numerus minor est partes numeri maioris; quia eius plures partes comprehendit; cùm 3. 3. integrent numerum 6.

THEOR. III. PROPOS. V.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars, & simul vterque vtriusque eadem pars erit, quæ est vnus vnius.

HÆc propos. est l. 5. propos. 1. vniuersaliter proposita; modo hic in numeris ostenditur.

Partes	3.	2.	compositi 5
Integri	12.	8.	20

Dentur plures numeri, sed facilitatis g. duo, vt 2. & 3. quorū primus 2. diuidat 8. In tot numero partes V. g. in 4. in quot 3. diuidit 12.

Dico, quod compositi 2. & 3. diuisores, vt faciant 5. diuident quoque compositos numeros 8. & 12. nempe 20. in tot numero partes, vt priùs diuidebant.

Probatur, Diuide numeros metitos 8. & 12. in partes æquales metientibus numeris 2. & 3. habebisque ex hypothesi æqualem numerum partium ex singulis metitis numeris, vt ex 8. erues 4. duenarios, ex 12. verò 4. ternarios. Adde itaque singulos duenarios æquales 2. metienti

2	3
8	12
2222	3333
5555	
20	

ternarijs æqualibus metienti 3. efficiesque 4. quinarios æquales metientibus 2. & 3. simul additis. Ergo reperitur quinarius metiens in simul additis quinarijs, nempe vicenario 4. quinarios, idest singulas partes cuiuscunque metiti 12. & 8. simul additas.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & simul vterq; vtriusque eædem partes erit, quæ vnus vnius.

HÆc propositio eadem est, ac antecedens; solùmque vult, quòd numerus metiens comprehendat non vnam partem, sed plures partes metiti. Sint ergo plures numeri, sed pro nunc duo V.g. 6. metiens numerum 8. cuius comprehendat 3. duenarios ex quatuor quibus 8. constat, & 9. metiens 12. comprehendat quoque ex eo 3. ternarios ex 4. quibus constat:

Partes	6.	9	compositi	15
Integri	8.	12		20

Dico: Quod, si componantur 6. & 9. & fiant 15. eadem tres partes comprehendent ex 8. & 12. simul additis, nempe Vicenario, vt prius simplices faciebant qualibet ex suo numero metita.

6	9
222	333
8	12
2222	3333

555
15
5555
20

Probatur. Diuide numeros metientes in partes, secundùm quas metiuntur suos metitos V.g. 6. in 3. duenarios, & 9. in 3. ternarios, quas simul addes idest duenarios cum ternarijs vt fiant 3. quinarij: Ergo metientes compositi, nempe 15. comprehendet tres quinarios. Sic est faciendum de metitis singuli enim distribui in partes metitas V.g. 8. in duenarios, & 12. in ternarios ex hypothesi, tum duenarij, tum ternarij æquales numero erunt, nempe 4 qui simul additi erunt quinarij 4: prout numeri metiti constabant singuli, vel 8. ex 4. duenarijs, vel 12 ex 4. ternarijs. Cum ergo, tum metiti compositi eundem numerum partium 4. quinarios, & metientes 3. quinarios, secundum quem in mensura priùs correspondebant, integrent; patet, quod etiam compositi alter alterius eædem partes erunt. Idē autem etiam eueniet, si aut fractus assumas, aut si plures.

THEOR. V. PROPOS. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, vt ablatus ablati: & reliquus reliqui eadem pars erit.

SIt numerus integer 5. eadem pars numeri 20. quæ pars est ablati 2. numeri 8. ablati, hic à 20. ille à 5.

Pars	2	compars	3	totum	5
Pars	8	compars	12	totum	20

Dico reliquum 3. ex 5. esse eadem partem residui 12. ex numero 20.

Prob. Assume probationis gr. quemcumque numerum incognitum *Equorum*, cui residuum 3. sit eadem pars, nempe tot viribus insit, quæ est ablati 2. ablato 8. & consequenter, quæ est totius 5. toti 20. idest quatuor viribus ex hypothesi. Ergo metientes 3 & 2. simul vt faciant 5. inuenient tot partes ex 5. propos. huius in metitis 8. & numero *Equorum* incognito simul vnitis, quot 2 ablatus, & metitor, in 8. ablato, & 5. totum in toto 20. Ergo illi compositi numerus 8. & numerus *Equorum* facient 20. hoc enim aggregatum metitur eadem mensura 5. nempe 2 & 3. compositi per vices 4. replicatas easdem, quibus metiebatur mensura 5. totum 20. Quare incognitus Equorum numerus erit 12. nempe residuum numeri 8. ex 20. quem metietur residuum 3. vt 2. ablatus, ablatum 8. & 5. totus totum 20.

COROLLARIVM

COllige, quod idem intelligitur in numeris fractis, & etiam de numero maiori, & multiplici respectu minoris. Sic si 8. ablatū sit tot vicibus numero 2. ablato, quot 20. totus numero 5. toti, erit etiam residuum 12. tot vicibus maior numero residuo 3. vt patet, cùm sit eadem ratio.

THOR. VI. PROPOS. VIII.

Si numerus numeri partes fuerint, quales ablatus ablati, & reliquus reliqui eadem partes erit, vt totus totius.

Partes	6	9	compars	15	totum
Partes	8	12	compars	20	totum

SIt numerus 6. ablatus à 15. eadem pars numeri 8. ablati à 20. scilicet eius tot vices contineat V.g. tot duenarios, quot 15. integer minoris numeri continet vices numeri 20. integri maioris V.g. quinarios.

Dico, quod residuum 9. integri 15. cum numerus 8. fuerit ablatus, est eadem partes, nempe tot vicibus contineatur aliqua eius pars in numero 12. residuo maioris numeri 20. quot 6. in 8. vel 15. in 20.

Probatur. Assumatur aliquis alius *Equorum*, qui tot vices contineat numeri 12. quot ablatus 6. ablati 8. vel integer 15. numeri 20. Coniungaturq; iste numerus *Equorum*, cum residuo 6. Ac 12. residuum cum ablato 8. Isti vtique, vt priùs, facient 20. V.g. *Homines*. Ergo ille numerus *Equorum* iunctus cum 6. faciet 15. Nam, cùm incognitus Equorum numerus sit eædem partes 12. vt 6. numeri 8. Ergo etiam iuncti 6. & incognitus ex propos. 6. huius erit eædem partes numeri 8. & 12. coniunctorum, ac vnus vnius V g. 6. respectu numeri 8. Sed numerus, qui sit ad 20. vt 6. ad 8 alius non est; nisi 15. Ergo iste numerus *Equorum* cum numero 6. iunctus faciet 15. Ergo erit ille numerus *Equorum* 9. nempe residuum numeri 15. ablato 6. qui ita est ad 12. residuum numeri 20. vt ablatum 6. ablato 8. vel totus 15. toti 20. Quod & de numeris quibuscumque fractis intelligitur.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; Et vicissem, quæ pars est vel partes primus tertij, eadem pars erit, vel eadem partes secundus quarti,

I. 2. Hominum	II. 8. Lapidum		
III. 3. Equorum	IV. 12. Nummorum		
333	222		

SIt primus numerus. V. g. 2. *Hominum* numeri 8. secundi *Lapidum* eadem pars, quæ est 3. *Equorum* numeri tertij 12. *Nummorum*. *Dico, quod Hominum numerus numero Equorum eadem pars est, vel partes; quæ numerus Lapidum numero Nummorum.*

Probator. Nam diuisis *Lapidibus* 8. secundum vices, quas *Hominum* continet, V.g in duenarios, & numerus *Nũmorum* secondum vices, quas continet *Equorum*. V. g. in tot ternarios, erunt ternarij *Nũmorum* tot vices, quot duenarij *Lapidum* ex hypothesi. Sed insuper erunt omnes duenarij eædem partes respectu ternariorum. Cum enim omnes tum duenarij inuicem, tum ternarij inuicem sint æquales fit, vt duenarius tot vnitates habeat respectu vnius ternarij, quot alius duenaris respectu alios ternarij. Ergo si coniunguntur omnes duenarij simul, vt fiant 8. vt priùs numerum *Lapidum*, & ternarij quoque simul vniantur, vt fiant 12. *Nũmorum*, vt prius eadem pars, seu partes eædem manebunt ex 5. propos. & 6. huius, quæ vnus vnius, nempe quæ duenarij *Hominum* respectu ternarij Equorum.

THEOR. VIII. PROPOS. X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes, & vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars, aut partes est secundus quarti.

SIt primus numerus *Hominum* 6. qui sit partes secundi numeri 9., Sitque alter tertius numerus 8. *Equorum*, qui sit partes num. 12. quarti.

I. 6. Hominum	II. 9.		
III. 8. Equorom	IV. 12.		

Dico. Quod primus numerus Hominum tertio Equorum eadem pars est, seu partes, quæ 9. secundus numerus numeri 12. quarti.

Probatur. Nam diuisus in suas partes 6. numerus *Hominum* iuxta quas capit in 9. nempe in 2. ternarios, & 8. *Equorum* iuxta quas capit in 12. nempe in 2. quaternarios singulæ erunt sui totius pars, quia 6. *Hominum* numerum habet tot ternarios, quot *Equorum* 8. quaternarios, Et insuper erunt eadem pars, tam ternarius numeri 9. quam quaternarius numeri 12. ex hyp. Vicissim ergo ex anteced. eadem pars, vel partes duenarius erit quaternarij, quæ 9. numeri 12. Ergo si iterum iungas duos ternarios *Hominum*, vt sint 6. similique iungas duos quaternarios *Equorum*, vt sint 8. vt priùs ita erunt ex 5. & 6. prop. hu. iuncti ternarij 6. ad iunctos quaternarios 8. vt vnus 3. ad vnum 4. & ideo, vt 9. ad 12.

Nam, vt ibi si numerus numeri fuerit pars, aut partes, & alter alterius eadẽ pars, seu partes simul vterque vtriusque eadem pars erit, vel partes, quæ vnus vnius.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum.

LIcet modi argumentandi vniuersaliter supra ostẽsi sint l.5. Quia tamẽ in quãtitate discreta specialibus rationibus comprobari poterant, noluit Euclides eos prætereire: quippe, cum proprietates quãtitatis discretę ostendere apud se cõstitutum habuerit, & illi præcipuum locum inter passiones numerorum inueniant, ad eas penitùs ostendendas etiam modos ipsos demonstrationibus quantitatis discretæ naturæ addictos proseaqui necessarium fuit.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIt numerus aliquis totus 21. ad 24. vt 14. ablatum à 21. ad 16. ablatum à 24.

Totus 21. ad totum 24.
Vt ablatum 14. ad ablat. 16.
Reliquum 7. ad reliq. 8.

Dico, quòd reliquum 7. erit in eadem proportione ad reliquum 8. vt 14. ad 16.

Probatur. Nam ex definitione erit totus pars, vel partes totius, vt ablatus ablati. Ergo, & reliquus reliqui ex 7. & 8. prop. erit pars eadem, aut partes ablatus ablati, vt totum totius. Ergo dicent eandem proportionem; cùm proportio numerics in eo consistat, quòd vnus respectu alterius sit eadem pars, vel partes, & cęt. vt ex definit. 2. constat.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si sint quicumque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Series I.	3	2	5	collecti	10
Series II.	9	6	15	numeri	30

SInt duę numerorũ series, quorum numeri sint proportionales ex ordine V. g. in prima serie 3. 2. 5. in secunda 9. 6. 15. ita vt primus 3. referatur primo 9. vt secundus 2. secundo 6. & tertius 5. tertio 15.

Dico collectos numeros primæ seriei numeris collectis secundæ seriei eadem proportione referri, quam vnus eorum ad alium possidet.

Probatur. Numeri, qui dicunt proportionem sunt eædem partes, vel eadem pars ad inuicem, vt sunt numeri primę seriei, cum numeris secundæ sed ex 5. & 6. propos. numeri, qui sibi inuicem sunt eadem pars, vel eædem partes, si vniantur, & colligantur, sunt etiã eadẽ pars, vel eadem par-

tes

tes vnũ ad alterum fit collecti, vt erat vnua vnius: Ergo 10. numeri primę feriei collecti erũt eadem para, feu partes numerorũ 30. fecundæ feriei collectorum, vt vnus 3. primæ feriei ad alterũ correfpondetem 9 in fecunda. Igitur cum adhuc perfeuerent eædem partes, feu para collecti eadem proportione, quâ finguli fe refpicient.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si quatuor numeri proportionales fuerint; & vicissem proportionales erunt.

4 6
8 12

Sit 4. ad 6. quemadmodum 8. ad 12. *Dico eos inuicem fore proportiales.*

Probatur, ex huius 9. vel 10. propof. Quia primæ combinationis antecedens numerus 4. & fundamentum relationis eft eadem para, feu partes ac 8. in fecunda combinatione fundamentum itẽ, & antecedens; ficut terminus, & confequens in prima combinatione 6. eft ad terminum, & confequentem 12. in fecunda combinatione. Sed qui funt viciffem eadem para, feu partes dicunt proportionem ex definit. 1. Ergo eum fine viciffem eadem partes viciffem erant proportionales, viciffem vero fignificat, quod fundamenta relationum dicant eam proportionem inuicem, quam termini.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si fint quotcunque numeri, & alij ijs æquales multitudine, qui bini fumantur, & in eadem ratione, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Series I.	3	5	4	Ergo vt	5	ad	4
Series II.	9	15	12		9	ad	12

Sint duæ feries numerorum prima 3. 5. 4. Secunda 9. 15. 12. qui bini, & in eadem ratione fumantur, nempe primus 3. ad fecundum 5. fit in prima ferie, veluti 9. ad 15. in fecunda feriei Sit in prima ferie, fit 5. ad 4. vt in fecunda eft 15. ad 12. Dicit, *quòd etiam extremi, tum prima, tum fecunda feriei in eadem ratione erunt.* Primufque 3. tertium numerum 4. eadem proportione refpiciet, quà 9. refpicit 12.

Progreff. 1. Nam ex hypothefi, vt primus 3. in prima ferie ad fecundum 5. fic in fecũda primus 9. ad fecundum 15. & vt 5. ad 4. fic ponitur 15. ad 12. Ergo permutando 3. erit ad 9. vt 5 ad 15. Rurfufque vt 5. ad 15. fic 4. erit ad 12. Ergo ex 5. & 6. propof. erunt etiam eadem para, vel partes 3. numeri 9. quæ 5. numeri 15. Sic quoque eadem para, vel partes 5. numeri 15. quæ 4. numeri 12. Quapropter eadem para, vel partes erit 3. numeri 9. quas 4. numeri 12. Siquidem funt eadem pars, vel partes alter refpectu alterius fimiliter, ac eft 5. numeri 15. Propterea etiam fimiliter erit para, vel partes 3. numeri 9 ficut 4. numeri 12.

Cum ergo fint inuicem numer a 3. eadem para, vel partes numeri 9. quæ 4. numeri 12. fequitur ex definitione 1. quod 3. fit ad 9. vt 4. ad 12.

Progreff. 2. Cum itaque 3 refpondeat proportione ad 9. eadem, quà 4. refpicit 12. Ergo rurfus permutando 3. erit ad 4. vt 9. erit ad 12.

COROLLARIVM

IN numeris itaque licebit argumentari ex æquo, & pofitis tribus numeris, vel pluribus, qui in eadem ratione bini, & bini; ac alij tres, feu plures fumantur, poterit argui effe primum proportionis fundamentum ad vltimum terminum in prima ferie, vt primum fundamentum ad vltimum terminum in fecunda ferie in proportione refpondet.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Si vnitas numerum quempiam metiatur: æquè autem alter numerus alterum quẽdam numerum metiatur, & viciſſim vnitas tertium numerum metietur, ac fecundus quartum.

LIcet vnitas numerus non fit fecundùm multos, eafdem tamen proprietates, ac numerus præter pluralitatem poffidet; & maximè, quòd fit pars alterius numeri V.g. . quemadmodum alter numerus 4. pars erit numeri 12. Quare idem verificabitur de vnitate, quod dictum eft propof. 9. & 13. de numeris, abfque eo quod eandem demonftrationem hic repetamus, & hoc modum intelligendam in hac propof. Sed in aliud alia, vbi fit comparatio numeri ad numerum: Nam quilibet numerus numeri menfurati fit vnitas: V. g. 3. numeri 9. ficut tres ternarij, ficut in ipfo 3. funt tres vnitates. Dicit itaque Euclides, quod fi 1. metiatur 3. ficut 4. metitur 12. quòd vnitas quoq; metietur 4. ficut 3. metitur 12. Quod eft dicere, quod fi fit 1. ad 3. vt 4. ad 12. quòd etiam erit viciffim 1. ad 4. vt 3. ad 12. ex propof. 13.

THEOR. VI. PROP. XVI.

Si duo numeri mutuò fe fe multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex ipfis æquales inter fe erunt.

6 4
24

DVo numeri 6. & 4. fe fe mutuò multiplicantes faciant aliquem.

Dico, *quòd fiue 4 multiplicet ipfum 6. fiue ipfe numerus 6. multiplicet 4.* numerum eundem prodire, vel duos numeros æquales V. g. 24 & 24.

Probatur. Tot erunt in producto 24. quaternarij, fi 6. multiplicet 4 quot in numero 6. vnitates ex def. 15. tr 8. & ita vnitas metietur 6. ficut 4. metitur productum 24. Quare viciffim ex præc. ita vnitas metietur 4 ficut 6. numerum productũ 24 Quia verò etiam 4. multiplicat 6. Ergo productus numerus V.g. Ouium cõtinebit 6. quoties funt in 4. vnitates; cùm ergo in hoc pofteriori producto Ouium genito à 4. multiplicatore numeri 6. toties contineatur fenarius, quot in 4. vnitates, & cùm 6. multiplicabat 4. fenarius quoq; continebatur toties in producto 24. quoties in 4. erant vnitates, vt oftenfum eft; Ergo fenarius per æquales vices menfurat productum 24. & hoc productum Ouium: Quapropter hoc productum Ouium erit 24. ex pr. 3. tr. 8. THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

	Est 6	ad	8
Multiplicans		4	
	Vt 24	ad	32

Sit numerus 4. qui multiplicet 6. & multiplicet 8.

Dico, quod producti 24. & 32. ita sunt inuicem in proportione, vt 6. ad 8. multiplicati, quos 4. multiplicat.

Probatur. Nam 6. continetur tot vicibus in 24. quot 8. in 32. cum tot vicibus contineatur, quot vnitates sunt in 4. ex hypothesi. Ergo ex defin. 1. dicent multiplicati cũ suis productis proportionem eandem cum sint productorum eædem partes, & erit 6. ad 24. vt 8. ad 32. Ergo ex 13. propos. & ad inuicem, vicissemque dicent proportionem, & ita erit 6. ad 8. multiplicati, sicut producti 24. ad 32.

THEOR. VIII. PROP. XVIII.

Si duo numeri numerum quendam multiplicando fecerint aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

	Ita	6	8
Multiplicatus		4	
	Vt	24	32

Sit numerus 6. qui multiplicet 4. quem & 8. multiplicet.

Dico 24. & 32. productas esse ita ad inuicem, vt 6. & 8. qui multiplicauere numerum 4.

Probatur. Quia ex 16. h. producti erunt ęquales etiam si 6. & 8. non essent multiplicatores sed 4. eos multiplicaret, sed ex anteced. si vnus numerus duos multiplicat productus ad productum; ita est vt multiplicatus ad multiplicatum. Ergo idem sequetur, si duo numeri vnum eundemque multiplicent, ideoque 6. erit ad 8. vt 24. ad 32.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & vltimo fit numerus æqualis est ei, qui fit à medijs.

Vel si numerus, qui emergit ex multiplicatione primi cum vltimo fit æqualis producto ex medijs, illi numeri erunt proportionales.

Sit numerus 2. ad numerum 3. vt numerus 4. ad numerum 6. in proportione refertur.

Dico primò; quod multiplicatus primus 2. cum vltimo 6. generat numerum æqualem genito ex multiplicatione mediorum 3. & 4.

2. ad 3. vt 4. ad 6. Genitus 12.

Id verò demonstratur. Etenim primus numerus 2. multiplicet 4. medium, & faciat numerum quendam *Ouium* V. g. 8. Cum ergo idem numerus multiplicet quoque extremum 6. ex hypothesi & generet V. g. numerum *Hominum* 12. erit genitus *Ouium* 8. ad genitum *Hominum* 12. ex prop. 17. huius, vt generantes 4. & 6. per eundem numerum 2. multiplicati, & ideo etiam vt 2. ad 3. cum ex hypothesi sit eadem ratio.

Rursus: quia ex hypothesi 4. multiplicat 3. & generat numerum *Equorum*, ex effectione autem 4. etiam multiplicat 2. & producit numerum *Ouium* 8 Ergo 8. dicet eadem proportionem ad numerum *Equorum*, ac generantes 2. & 3. ideoque vt 2. ad 3. ita 8. ad numerum *Equorum*. Cum numerus *Ouium* 8. dicat proportionem ad numerum *Equorum*, & *Hominum*, quam 2. ad 3. seu 4. ad 6. quæ ex hypothesi est eadem proportio. Et ideo, cùm dicat idem numerus ad eos proportionem eandem, erit eorũ, vel pars, vel partes eædẽ: Quare geniti erunt æquales, ex 3. pr. tr. 8. cùmque genitus ex 2. & 6. sit 12. numerus *Hominum*, etiam numerus *Equorum* ex 3. & 4. genitus erit 12. cui est eædem partes numerus 8. *Ouium*.

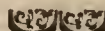
Dico 2. Quod, si numerus productus à primo, & vltimo sit æqualis producto ex medijs, *eos producentes numeros fore proportionales, & multiplicantes esse inuicem, vt multiplicati*. Sic numeri Hominum, & *Equorum*, si sint æquales, erit 2. numerus multiplicans in genito *Hominum* ad multiplicantem 3. in numero *Equorum*, vt multiplicatus 4. in eodem ad multiplicatum 6. in numero Hominum ita, vt reciproca sit relatio.

Probatur. Nam idem numerus *Ouium* ad eosdem numerum inquam *Hominum*. & *Equorum*, vtpote ad æquales eandem dicit proportionem, & eam ipsam ex propos. 16. quam multiplicantes ad multiplicatos. quare ita erit 8. ad numerum 12. Hominum, vel Equorum, vt 2. ad 3. per numerum 4. generantes 8. Ouium, & Hominum numerum 12. vel vt 4. ad 6. per numerum 2. generantes 8. *Ouium*, & 12. *Equorum* numerum: Quare cum 2. ad 3. sit in eadem proportione, ac *Oues* ad *Homines*, & in ipsâ eâdem sit 4. ad 6 etiam inuicem erit eorũ eadẽ proportio ex prop. 16. l. 5. h. & ita erunt 2. ad 3. multiplicantes, vt 4. ad 6. multiplicati.

THEOR. X. PROPOS. XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui sub extremis continetur æqualis est ei, qui à medio efficitur.

Sit 2. ad 4. vt 4. ad 12. Medius numerus est 4. qui vt duplex æqualis vsurpatur. Vnde hæc est eadem propositio, vt prior eademque paritas. Nam in alio non differt; nisi quod medij numeri hic sunt æquales vt 4. & 4. ibi vero inæquales.



THEOR.

THEOR. XI. PROPOS. XXI. Eucl. 22.

Si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales; qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

	2	3	4	Ergo		2 ad 4	
6	8	12			vt	6 ad 12	

Sint duæ series numerorum Vna 2. 3. 4 & altera 6. 8. 12. quarum numeri bini sumantur: Reperiaturque eorum proportionem esse perturbatam: nimirum primos binos 2. ad 3. prioris seriei dicere inuicem eam proportionem, quam 8. ad 12. bini extremi secundæ seriei, & extremos binos prioris seriei 3. ad 4. dicere eam proportionem, quam duo primi 6. ad 8. posterioris seriei

Dico, quòd ex æqualitate in eadem ratione existunt.

Progress. 1 Probatur. Ponitur ex hypothesi 2. ad 3. vt 8. ad 12. Ergo ex 19. propositione, si multiplicentur inuicem extremi numeri 2. & 12. & medij 3. & 8. dabunt genitos æquales 24 & 24.

Progress. 2. Sic quia in hypothesi ponitur 3. ad 4 vt 6 ad 8. si eadem multiplicatio fiat extremorum 3 & 8. & mediorum 4. & 6. prodibunt numeri geniti æquales inter se. Ergo etiam cum priùs genitis.

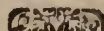
Siquidem etiam hic inuicem se multiplicant 3. & 8. in vna multiplicatione sicut progressu primo. Quare sicut ibi producebant 24. sic, & hic producent, cui genitus numerus ex 4. & 6. erit æqualis, & consequenter genito primo ex numero 2. & 12. Ergo ex 19. propositionis parte secunda dicent proportionem ad inuicem generantes numeri, quæ vocatur ex æqualitate, & ita respondebit proportione 2. ad 4 in prima serie, vt 6 ad 12. in secunda medijs numeris posthabitis 3. & 8.

Quod si fuerint plures numeri, quàm tres V. g. 2. 3. 4. 8. pro vna serie, & 3. 6. 8. 12. ita vt sint etiam 4. ad 8. vltimi vt 3. ad 6. primi, idem prorsus sequetur: Nam cùm sit ostensum; ita esse 2. ad 4. vt 6. ad 12 relictis medijs 3. & 8. consequenter erunt solum tres numeri pro vna serie 2. 4. 8. & pro altera 3. 6. 12. quorum proportio perturbata erit 2. ad 4. vt 6. ad 12. & 4. ad 8. vt 3. ad 6.

2. 4. 8.
3. 6. 12.

Vnde eadem, quæ superiùs valebit demonstratio: Idem etiam ostendetur in quinque numeris, ac in quatuor etiam si numeri fiant fracti.

Et hæc Euclides de proportionibus numerorum. Verum adsunt etiam proportiones, quas libro 7. vniuersaliter probat de quacunque quantitate, & quas ex intimis principijs Arithmeticis Clauius hic adducit, qui modi. cùm fundent argumenta, quæ ex proportionibus petuntur ob eorum vtilitatem, visum est non prætetire.



THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si quatuor numeri proportionales sint, & conuertendo proportionales erunt.

Nam detur 4. qui sit ad 10. vt 12. est ad 30.

	4 ad 10		Ergo		10 ad 4		
vt	12 ad 30			vt	30 ad 12		

Dico, Quod conuertendo 10. erit in eadem proportione ad 4. vt 30. ad 12.

Probatur. Ponitur 4 ad 10 in eadem proportione, quâ 12. refertur ad 30. Ergo ex 13. propos. & vicissim proportionales erunt. Eritq; 4. ad 12. vt 10. ad 30. Quia itaque refertur 10. ad 30. & 4 ad 12. Ergo rursus vicissim proportionales erunt; eritque 10 ad 4. vt 30 ad 12. Ita enim proportionem conuertimus: dum terminos pro fundamentis relationum sumimus, & consequentis pro antecedentibus.

THEOR. XIII. PROP. XXIII.

Si compositi numeri proportionales fuerint, & diuisi proportionales erunt.

Compositi numeri proportionales sunt; cùm totum refertur ad partem suam, vt aliud totum ad aliam partem suam. Sit ergo 9. qui referatur ad suam partem 3. vt 15. refertur ad suam partem 5. diuidantur isti numeri per easdem partes suas, auferanturque partes 3. à 9. & erit 6. Rursus 5. à 15. & erit 10.

	9 totum ad 3 partem		vt compars 6 ad 3
Vt		Ergo	
	15 totum ad 5 partem		sic compars 10 ad 5

Dico, quod pars 3. refertur ad reliquum 6. vt pars altera 5. refertur ad reliquum suum 10.

Probatur. Quia ex prop. 11. si totum ad totum se gerat vt ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit. Sed numeri V. gr. 3 & 5. sunt ablata 6. & 10. sunt reliqua: Ergo se habent prorsùs eodem pacto vnum ad aliud correspondens, 3 nimirum ad 5. & 6. ad 10. vt totum 9. ad totum 15. ergo, & inter se eodem pacto se habent, vt cum toto; quia quæ sunt eadem vni tertio sunt eadem inter se.

THEOR. XIV. PROP. XXIV.

Si diuisi numeri proportionales sint. Hi quoque compositi proportionales erunt.

Vt	pars 7	ad	compartem	3
Ita	pars 14	ad	compartem	6
Ergo vt	pars 14	ad	totum	20
Sic	pars 7	ad	totum	10

Dentur numeri quatuor partes duorum integrorum V. g. 7. pars prioris totius 10. qui sit ad suam compartem 3. vt alterius totius 20. pars 14. est ad suam compartem 6.

Dico; quod etiam tota sibi inuicem proportionalia sint ea proportione, qua partes, & quod componendo, si erit, vt 7. ad suam compartem 3. sic 14. ad suam compartem 6. hinc etiam erit consequenter to-

tum 10. ad 7. partem, vt totum 30. ad 14. partem.

Prob. Ponitur proportio 7. partis ad 3. compartem prioris totius vt pars 14. ad 6. compartem in posteriori toto. Ergo ex propos. 13. huius erunt, & vicissim, eritque 7. pars ad 14. partem fundamenta, vt 3. compars ad 6. compartem terminus: Quare etiam ex propos. 12. huius, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, & sic, vt 7. antecedens ad 14. consequens, sic omnes antecedentes 7. & 3. nempe totum 10. ad omnes consequentes 14. & 6. simul, hoc est totum 20. propterea que ex propos. 13. rursus vicissim erit 7. antecedens ad 10. antecedentem, vt 14. consequens ad 20. consequentem; nimirum pars ad suum totum, vt alia pars ad suum totum eadem proportione refertur; ex eo quod fuerit pars ad suam compartem, vt alia pars ad suam compartem, quod est arguere componendo ex definit. 25. lib. 5.

THEOR. XV. PROPOS. XXV.

Si compositi numeri proportionales fuerint; hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

Conuersioni rationis locus datur, cùm totum refertur ad partem, vt aliud totum ad suam partem: Nam tunc potest argui; quòd, & altera pars sit ad totum vt alia pars ad suum totum. V. g. sit 9. pars numeri 15. & 12. pars numeri 20. & 9. referatur simili proportione ad 15. vt 12. ad 20.

Dicit, quod ita quoque refertur reliquum 6. ad 15. totum, vt reliquum 8. refertur ad 20. totum suum.

Vt pars 9 ad 15 totum.
Sic pars 12 ad 20 totum.
Ergo compars 6 ad 15 totum.
Vt alia compars 8 ad 20 totum.

Probatur. Nam si est pars 9. fundamentum relationum ad 15. totum, & ad terminum, vt 12. pars, & fundamentum ad 20. terminum, & totum. Ergo ex propos. 13. & vicissim fundamenta 9 & 12. & partes dicent eandem proportionem, quam termini 15. & 20. tota. Quamobrem si est totus 15. ad totum 20. vt ablatus 9. ad ablatum 12. etiam reliquus 6. totius 15. ad reliquum 8. totius 20. ex 11. propos. erit, vt totus 15. ad totum 20. Si itaq; pars 6. vt fundamentum respicit relatione proportionis terminum, & partem 8. vt totum 15. tanquam fundamentum, totum 20. vt terminum: Ergo rursus vicissim ex 13. propor. inuicem fundamenta eandem proportionem dicent, quam termini inuicem, & ita respiciet totum 15. reliquum 6. ambo fundamenta; sicut respicit totum 20. reliquum 8. ambo termini.

E X P E N S I O IV.

De minimis, primisque numeris.

THEOR. I. PROPOS. XXVI. Eucl. 23.

Primi inter se numeri sunt minimi, qui eandem proportionem obtineant.

Sit 7. & 4. primi numeri ad inuicem: *Dico eos minimos esse eorum numerorum, qui proportionem similem habeat, ac in 4. ad 7.*

Probatur. Nam si alius reperitur minor, quam 7. & 4 Sit ille *quorum* quidam numerus, qui præsupponatur minor quam 7. & *Leonum*, qui dicatur ab aduersarijs, minor, quàm 4. dicentes tamen proportionem, quam 4. ad 7. Cum itaque proportio numerorum in eo sita sit, vt numerus numeri sit eadem pars, vel partes, quam alter similis eis in proportione est pars, vel partes alterius; sequitur, vt debeat dari aliquis numerus, qui metiatur *Equos*, & *Leones* toties, quoties metitur 4 & 7. Vel ergo ille numerus est vnitas, & ita cum vnitas toties capiat in 7. quot sunt *Equi*, & toties in 4 quot sunt *Leones*, erunt *Equi* septem, & *Leones* 4. nempe idem numerus, qui 4. & 7. non autem minor, vt volebant aduersarij. Quod si non sit vnitas; sed aliquis alius numerus, qui 4. & 7. metiatur, sicut *Equos*, & *Leones*; iam 4. & 7. non erunt inter se primi; nam primi numeri inter se sunt: quorum communis mensura est non numerus, sed tantum vnitas.

THEOR. II. PROPOS. XXVII. Euc. 24.

Minimi numeri omnium eorum, qui habent cum ipsis communem rationem primi quoque sunt inter se.

Si dentur 7. & 4. qui dicantur minimi ex omnibus, qui proportionem habent, quam 7. ad 4. *Dicit quod isti quoque erunt inter se primi.*

Probaturque reducendo propositionem ad impossibile. Nam, si non sunt primi, erit aliquis numerus V. g. *Hominum* communis mensura; ita quod numerus ille *Hominum* capiet toties in 7. quot in stabulo sunt *Equi*, & toties in 4. quot in sylua sunt *Leones*. Ergo si multiplicetur numerus *Hominum*, per numerum *Equorum* producet numerum 7. & si multiplicetur idem numerus *Hominum* per *Leonum* numerũ producet 4. Quamobrem ex propos. 17. numerus *Leonum* minor, quam 4. & *Equorum* minor quam 7. (cum multiplicati faciant 7. & 4) dicent inuicẽ proportionẽ eandẽ, quam 7 ad 4. Vnde 7. & 4. nõ erunt minimi omnium proportionem dicentium, quam 7. ad 4. quòd *Leonum*, & *Equorum* minores numeri eandem proportionem dicant, quod est contra præsuppositum.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII. Euc. 25.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum eorum metitur, numerus ad reliquum primus erit.

Dentur numeri 8. & 9. qui inuicem primi sint, & 4. metiatur 8. *Dicit quod 4. ad reliquum 9. primus erit.*

Primi 8 9
4

Probatur. Quia. Si 4 non est primus ad numerum 9. metietur eos aliqua communis mensura præter vnitatem. Sit hæc mensura aliquis numerus *Hominum*, quæ metiatur 4. & 9 Hæc etiam ex 12. pronunc. metietur 8. quoniam 4. ex hypothesi metitur 8., qui numerus 4. à numero *Hominum* metitur: quare numerus *Hominum* erit mensura numeri 9. ex præsupposito, & numeri 8,

vt

vt probaui; vnde 9. & 8. non erunt inter se primi; cùm habeant aliquem numerum *Hominum* prçter vnitatem communi ipsorum mensuram, quod est absurdum; cùm præsupponamus 7. & 9. primos inuicem.

THEOR. IV. P R O P O S. XXIX. Eu. 22.

Minimi numeri omnium in sua proportione æquè metiuntur alios maiores eandem proportionem habentes, minor quidem minorem, & maior maiorem.

DEntur duo numeri 2 & 3. minimi inuicem, alijque duo maiores 4. & 6. eandem proportionem habentes. *Dicit quod 2. minor æquè metitur 4. minorem, sicut 3. maior quam 2. æquè metitur 6. maiorem, quam 4.*

Probatur. Quoniam ponitur, vt 2. ad 3. ita 4. ad 6 ea prop. 13. vicissim proportionales erunt; nempe fundamenta proportionis dicent eam proportionem, quam termini, & ita erit quoque 2. ad 4: vt 3. ad 6. Quamobrem iuxta 1. definitionem erunt numeri minores 2 & 3. eadem pars, vel partes maiorum 4. & 6. Vnde eos metientur.

Probatur etiam, quod çquè. Quia non possunt esse eædem partes: Nam si dicatur, quod hoc euenire possit, diuidantur in eas partes, quas conficit 2. numeri 3. & sint tot, quot *Equi* sunt in agro, & 4. numeri 6. & sint tot, quot *Oues* sunt in stabulo. Itaque erit numerus 2. iuxta 1. definitionem ad numerum *Equorum* similis in proportione, quam 4. ad numerum *Ouium*. Quamobrem ex 13. propos. & vicissim ita erit numerus *Equorum* ad numerum *Ouium*, vt 2. ad 4. minor autem vterque est *Equorum* numerus, quam 2. & *Ouium* quam 4. quod sint pars, vel partes horum numerorum; eo quod sint multiplicatores partium eos componentium, & ideo necessario minores; quod est absurdum, cùm 2. & 4. ex hypothesi sint minimi in hac proportione. Quare 2. erit medietas numeri 4. vel si aliquis alius numerus loco exempli substituatur, erit eius, vel pars tertia, vel quarta, non autem plures partes numeri 4. continebit. Sicut nec 3. numeri 6. alioquin necessariò darentur partes minores, quæ eandem rationem possiderent contra Hypothesim.

THEOR. V. PROPOS. XXX. Eucl. 26.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex ijs genitus ad eundem primus erit.

POnantur duo numeri 7. & 4. qui sint primi ad 9. inuicemque multiplicentur 7. & 4. & fiat numerus 28. *Dicit quòd, & numerus* 28. *erit primus ad* 9.

Probatur reducendo ad impossibile. Nam, si 28. & 9. non sunt inter se primi, metiatur eos aliquis numerus *Hominũ*, et 28. toties, quot sũt *Leones* in campo. Itaque numerus *Leonum* multiplicatus per numerum *Hominum*, vel è contra producet 28. qui numerus producitur etiam à 4 & 7. Vnde ex 19. propos. reciprocè proportionales erunt, & 4. ad numerũ *Hominũ* erit, vt numerus *Leonũ* ad 7. Progress. 2. Quoniam autem 4 & 9: ex hypothesi sunt inuicem primi, & numerus *Hominum* metitur 9. ex præsupposito, sequetur iuxta propos. 28. quòd etiam numerus *Hominum* sit primus ad numerum 4. & ideo, quòd sit minimus in sua proportione iuxta propos. 26. Et hinc, quòd in hac proportione sint numeri maiores 7. & numerus *Leonum*. qui hanc ipsam dicunt proportionem, ex progressu 1. Et iuxta propos. anteced. quod çquè metiatur 4. numerum *Leonum* sicut numerus *Hominum* numerum 7. Cum autem numerus *Hominum* metiatur 9. vt ex hypothesi, & 7. vt modo; sequeretur, quòd 7. & 9. non essent inuicem primi; quòd communi mensura præter vnitatem metiantur contra hypothesim.

THEOR. VI. PROPOS. XXXI. Eu. 28.

Si duo numeri ad duos numeros, quisq; ad vtrosque primus sit: Etiam geniti ex primis duobus erunt primi ad genitos ex postremis duobus numeris.

	2	3		15
Primi			Geniti	
	4	5		8

DEntur 2. & 4. primùm, & deinde 3 & 5. Sitque primus 2. ad vtrosque 3. & 5 sicut, & 4. ad eosdem vtrosque 3. & 5. primus existat. Multiplicentur simul 2 cum 4 vt fiant 8. & 3. cum 5. vt euadant 15. D*icit, quod etiam* 8. *&* 15. *geniti, erunt primi inuicem.*

Probatur. Nam 2. ponitur primus ad 3. & 5. Ergo ea præced. etiam genitus 15. erit primus ad eundem 2. Item, quia 4. est primus ad 3, & 5. etiam 4. erit primus ea præced. propos. ad 15. Cùm igitur numerus 15. sit primus ad 2 & 4. Ergo ea præced. etiam erit primus ad genitum ex ipsis 8. & ita 8. ad 15. primus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XXXII. Eu. 29.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque seipsum, fecerit aliquem; Geniti ex illa multiplicatione primi inter se erunt. Et si rursùs ijdem multiplicent hos Genitos, & alios numeros efficiant. Isti denuò refecti erunt primi inuicem: Et semper circa extremos hoc eueniet.

	2. 3.	9		27
Primi		Geniti	& rursùs Geniti	
	2. 3.	4		8

SInt 2. & 3. qui se multiplicent, & 3. faciat 9. & 2. faciat 4. D*ico primò* 4. *&* 9. *esse primos inuicem.*

Probatur. Quoniam 2. & 2. sunt primi ad 3. Ergo ea 30. propos. huius, etiam ex illis genitus 4. ad eundem 3. primus erit. Cum ergo sit 4 primus ad 3. & ideo quoque ad aliud 3. Ergo si 3 & 3. se multiplicent; 9. Genitus ex propos. 30. primus erit ad 4.

Dico 2. Quod si rursus 2. multiplicet 4. & faciat 8. & 3. multiplicet 9. & faciat 27. eodem mo-

do sint primi inuicem.

	2		9		27
Primi		ad		Geniti	
	3		4		8

Probatur. Nam 2. est primus ad 3. ex hypothesi & 9 est primus ad 2. Siquidem 3. & 3 sunt primi ad 2. Ergo ex propos. 30. 9. genitus erit etiam primus ad 2. Sic vt diximus supra 4 est primus ad 3. & 9. Quare habemus duos numeros, quorum quisque ad duos alios primus est, nempe 2. ad 9. & 3. & 4. ad 9. & 3. Ergo ex preced. geniti ex ipsis nempe 8. ex 4. & 2. sic 27. ex 3. & 9. erũt inuicẽ primi, & sic dicendum, etiamsi 2. multiplicet 8. & 3. 27. & sic eodem modo res succedet, cùm semper sit eadem ratio.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXIII.

Omnem compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

PRobatur. Quia dato numero aliquo, V. g. 24. & datâ eius aliquâ mensurâ, vt 8. vel iste 8; est primus, & iam habemus intentum, vel compositus; Si est compositus, metiatur eum numerus V. g. 2. qui similiter, vel erit primus, vel compositus, quod, si primus, habemus id, quòd volumus, si non primus metietur eum aliquis alius numerus; cùmque in numeris diminuendo non possimus progredi in infinitum; tandem in aliquo numero primo quiescendum erit, vt est 2. respectu numeri 24.

THEOR. IX. PROPOS. XXXIV.

Omnis numerus, vel est primus, vel eum aliquis primus numerus metitur.

PRobatur ex antecedenti, quia si non est primus erit compositus, & ideo aliqua mensura primi alicuius numeri tandem mensurabitur.

PROBL. I. PROPOS. XXXV.

Numeris datis quotcunque reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SInt, quotcunque numeri 6. 9. 15. habentes quascumque proportiones, siue sit eadem proportio, quæ 6. ad 9 & quæ 9. ad 15 siue non: Isti, vel erunt inter se primi, & sic erunt etiam minimi in ea proportione iuxta propos 26; vel compositi, & sic iuxta 2. propos. reperiemus maximam communem mensuram 3. quæ metiatur eos primum geminus vice secundum tricies, tertium quinquies *Dico, quod duenarius ternarius, & quinquenarius sunt numeri inuicem primi in ea proportione.*

Probatur itaque primò, quod eam proportionem possideant.

Quoniam numeri 2. 3. 5. multiplicati per 3. faciunt numeros prædictos 6. 9. & 15. Sequitur ex propos. 18. quod habeant geniti qui sunt 6. 9. & 15. eandem rationem, ac multiplicati 2. 3. 5.

Probatur quoque quod sint minimi in ea proportione, si enim tales non sunt dabuntur aliqui ipsis minores. Sint itaque tales numerus *Hominum*, *Equorum*, & *Ouium*, qui iuxta propos. 28. metietur ipsos 6. 9. & 15. æquè, & ideo per numerum aliquem V. g. *Leonum*. Quapropter numerus *Leonum* multiplicans numerum *Hominum* faciet 6. multiplicans autem numerum *Equorum* faciet 9. & tandem numerum *Ouium* generabit 15. Itaque ex 19. propos. h. quoniam duenarius multiplicatus per numerum 3. generat 6. & numerus *Hominum* multiplicatus per numerum *Leonum* generat item 6. Proportionales erunt inuicem hi numeri, & se gerent multiplicantes, vt multiplicati reciprocè, & erit 3. multiplicans ad *Leones* numerum multiplicantem, vt *Homines* ad 2. multiplicati, sed *Homines* ex hypothesi sunt minus, quàm 2. numerus. Ergo ex prop. 29. etiã 3. numerus erit minor, quã *Leones*, qui numerus *Leonum* metitur 6. 9. & 15. propositos per numeros *Hominum*, *Equorum*, & *Ouium*. Quare numerus *Leonum* erit communis mensura illorum numerorum 6. 9. 15. & maior, quàm eorundem communis mensura 3. contra hypothesim, quæ maxima supponitur. Itaq; alij numeri minores ipsis, nempe duenario, ternario, & quinario, qui eadem proportione potiantur, quam 6. 9. & 15. non poterunt dari.

PROB. II. PROPOS. XXXVI.

Duobus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIt primo exquirendus minimus numerus omnium, quem duo numeri primi inuicem, nempe 3. & 4. metiantur. Multiplicentur inuicem, & procreatus, puta 12. erit numerus, quem metiuntur. Nam toties capiet 3. in 12. [illegible] vnitates sunt in 4 & 4 in 12. quot vnitates sunt in 3. Quod verò 12. sit minimus omnium, quem dati numeri metiantur.

Probatur. Nam, si fieri potest, aliquem [illegible] numerum minorem V. g *Equorum* mensi[illegible], & numerus quidem 3. toties, quot *Oues* sunt [illegible], campo numerus verò 4. eundem nume[illegible] *Equorum* metiatur toties quot *Canes* sunt in [illegible]. Itaq; multiplicatus 3. per numerum *Ouium* producet numerum *Equorum*, & hunc eundem numerum producet 4 multiplicatus per numerum *Canum*. Vnde ex 19. pr. reciprocè relationem dicẽt multiplicati 3. ad 4 quam multiplicantes numerus *Ouium* ad numerum *Canum*, & quia etiam 4 & 3. minimi ponuntur in hac proportione metietur quoque 3. numerum *Ouium*, & 4. numerum *Canum* ex 19. propos.

Progress. 2. Considerandum autem est rursus, quòd numeros 3. multiplicans numerum 4. facit 12. & 4. multiplicans ex hypothesi numerũ *Ouium* facit numerum *Equorum*; erit ex 17. pr. eadem proportio 4 ad numerum *Ouium*, quam 12. ad numerum *Equorum*. Sed ex primo progressu 4. metitur numerum *Ouium*. Ergo, & 12. metietur numerum *Equorum*, quem posuimus minorem, quam 12. quod est absurdum.

Sint secundo dati numeri non primi inter se, vt 8. 12. inueniantur que ex prop. 33. h. minimi in ea proportione, vt sit 2. ad [illegible], vt 8. ad 12. multiplicenturque iuxta 9. p[illegible]s. extrema proportionum inuicem nempe 2 & 12. rursusque media, vt 3. & 8. fiet idem numerus 24. *Dico, quod iste numerus est minimus, quem dati numeri metiantur.*

Quòd

Quòd autem 8 & 12. mensurent 24. clarum est cum multiplicati per 3.& 2. ipsum producant.

Quòd verò 24 sit minimus omnium, quem mẽsurent, probatur eodem tenore argumenti vt supra. Nam si non est minimus dabitur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor ipso, quem mensurabunt 8. toties, quot *Oues* sunt in campo, & 12. toties, quot *Canes* sunt in platea: Quapropter idẽ numerus fiet *Equorum*, si numerus *Canum* multiplicet 12. sicut si numerus *Ouium* multiplicet 8. Itaque dicent eamdem proportionem ex 19. propos. multiplicantes inuicem, quam multiplicati, reciprocè, & ita erit 8. ad 12. vt ad numerum *Ouium* numerus Canum, & ita pariter erit 2. ad 3. vt numerus *Canum* ad numerum *Ouium* cum 2. ad 3. dicant eandem proportionem, quam 8. ad 12. Quare 2.& 3. (cum positi sint minimi in ea proportione) mensurabunt quoque æquè numerus quidem 2. numerum *Canum*, & 3. numerum *Ouium*.

Progress. 2. Obseruandum rursus est, quod 8. multiplicans 3. producit 24. Sicut, & numerus idem 8. multiplicans numerum *Ouium* producit numerum *Equorum*: Quare ita 3. erit ad numerum *Ouium* ex propos. 17. sicut 24. ad numerum *Equorum*.

Propterea; cùm ex progr. primo 3. mensuret numerum *Ouium*, mensurabit quoque ex propos. 19. numerus 24. numerum *Equorum*, Qui positus est minor; itaque maior metiretur minorem, quod est absurdum.

COROLLARIVM

HInc fit; quòd si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, producit minimum numerum, quem illi mensurant. Nam demonstratum est; quòd, si primus maior 3. multiplicans 8. compositum minorem, & 2. primus minor multiplicans 12. compositum maiorem faciunt 24. numerum minimum, quem 8. & 12. metiantur.

THEOR. X. PROPOS. XXXVII.

Si duo numeri numerum quendam mensurent, minimus quoque numerus mensuratus ab ipsis numerum illum mensurabit.

SIt 4. & numerus 6. qui mensurent 36 & numerus minimus mensuratus ab ipsis 12. (Nã 4. & 6. multiplicati per 2. & 3. primos, & minimos in eadem proportione faciunt 12. Dico, *quod hic numerus* 12. *metitur quoque numerum* 36.

Probatur. Nam, si non ita est; auferatur à 36. numerus 12. quoties fieri potest, & sit pars ablata numerus, quidam *Hominum*, qui 12. ex æquò continebit, per hanc ablationem necessariò superabit aliquid, quod erit minus, quã 12. ex aduersarijs: Hoc ergo reliquum sit quidam numerus *Ouium*. Cum itaque 4. & 6. mensurent 12. etiam mensurabũt ablatum *Hominũ*, ex numero 36.&(vt præsupponitur) cũ mẽsurent quoq; totũ 36 mensurabunt, & reliquum numerum *Ouium* ex propos. prima 8 itaque numerus 12. contra hypothesim, non erit minimus, quem 4. & 6. metiantur; cùm metiantur quoq; & reliquũ *Ouium* minus, quàm 12.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

3. 4. 6. metitur 12.

SIt inueniendus minimus numerus, quèm dati tres numeri 3. 4. 6. metiantur. Inueniatur ex propos. 36. minimus, quem 4.& 3. metiantur, & sit 12. quem etiam 6. metitur. *Dico, quod* 12. *est minimus numerus, quem* 3. 4. *&* 6. *metiantur.* Si enim esset aliquis minor, is esset V. g. quidam Hominum, ergo numerus Hominum minor, quã 12. mensuraretur quoque à numero 3. & 4. Quare 12. non esset minimus, quem 3. & 4. vt repertum fuit, mensurarent.

Verùm si occurrat. Quòd minimus numerus, quem duo numeri mensurant, non mensuretur à tertio, vt est 16. qui mensuratur à 4. & 8. sed non mensuratur à 6. tertio numero. Inueniatur minimus numerus, quem 16. & 12. metiantur, sitq; 48. *Dico, quod iste est numerus, quem tres* 4. 8. *&* 12. *metiantur.*

metitus primus 16.

4. 8. 12.

metitus secundus 48.

Probatur primò. Quod metiantur. Nam 4. & 8. mensurãt 16 hic 16. verò mẽsurat 48. Ergo, & 4. & 8. mensurant 48. ex propos. 10 huius.

Probatur secundò Quod sit minimus omniũ eorum, quos 4. 8. & 12 mensurant. Nam, si datur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor, quam 48. quem 4. 8. & 12. mensurent. Sequitur, & quòd eum mensurent 12. & 16. siquidem 16. mensuratur à 4. & 8. Quare ex prop. præc. num. *Equorũ* mensurabitur quoque à 16. minimo, quem illi mẽsurẽt. Ergo 48. non erit minimus, quẽ 12. & 16. mensurent contra hypothesim, cũ 16. ex probatione mensuret numerum *Equorum* minorem, quã 48. & 12. eundẽ mensuret, vtpote tertius numerus eorũ, qui numerũ *Equorũ* ex aduersarijs mẽsurãt.

COROLLARIVM

SI tres numeri numerum quempiam metiantur, etiam minimum; quem, illi metiuntur, eundem mensurare. Nam si numerus 12. & 16. mensurant numerum Equorum etiam numerus 48. ex præced. propos. debebit illum mensurare. Cùm à minimis numeris numerus mensuratus, mẽsuret omnem numerum ab illis minimis mensuratum.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIX.

Si quispiam numerus numerum metiatur, mensuratus habebit partem, vel partes à mensurante denominatas.

MEnsuret numerus 3. numerum 12. *Dico numerum* 12. *habere partes, vel partem à* 3. *denominatam*; nempe habere tertiam partem.

Ostenditur. Nam 3. metiatur 12. toties, quot vnitates sunt in 4. Ergo vt Vnitas metitur 4. sic 3 metitur 12. Quare ex propos. 13. ita quoque

vicissim. Vnitas metietur 3. vt 4. 12. Et ideo eadem pars erit Vnitas ipsius 3. quæ 4. ipsius 12. Sed Vnitas est pars ipsius 3. à 3 denominata. Ergo etiam 12 habebit partes ab ipso 3. denominatas; nempe partem tertiam, vel duas tertias partes, & cęt.

THEOR. XII. PROPOS. XL.

Si numerus partem habuerit quamlibet, metitur illum numerus à parte denominatus.

HAbeat numerus 15. partem 5. quæ denominetur à 3. ita, quòd 5. fit tertia pars numeri 15. Dico, quod 5. mensurabit 15.

Probatur. Nam quot vnitates erunt in 3. tot erunt quinquenarij in numero 15. Ergo numerus quinquenarius à parte tertia denominatus metietur numerum 15.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Numerum reperire, qui minimus cùm sit habeat datas partes.

SInt datæ partes tertia, quarta, quinta, quas inueniendus aliquis minimus numerus possidere debeat. Reperiatur aliquis minimus numerus, quem numerent 3. 4. & 5. iuxta partium datarum denominationem, qui erit 60. Dico numerum 60. esse minimum eorum, qui tertiam, quartam, & quintam partem habent.

Probatur. Nam quia 3. 4. & 5. metiuntur numerum 60. clarum est, quod numerus 60. ex præced. propos. habet partes à 3. 4. & 5. denominatas.

Quod verò sit minimus eorum, qui tales partes habent.

Probatur. Nam si dicatur esse numerum aliquem Hominum minorem, qui tertiam, quartam, quintam partem habeat, metietur eum numerus 3. 4. & 5. & sic non erit 60. minimus numerus, quem 3. 4. & 5. mensuret. Cum mensurent quoque numerum Hominum minorem numero 60.

THEOR. XIII. PROPOS. XLII.

Primis quibuscumque numeris propositis semper plures vltra propositos poterunt inueniri.

SInt propositi numeri 2. 3. 5. primi inuicem. *Dico quòd vltra ipsos inuenietur aliquis alius.* Nam sit numerus metitus à propositis 30. & addatur vnitas, & fiant 31. Iste numerus, vel est primus cùm propositis; vel non. Si est primus habemus, quod volumus; inueniri nempe alium aliquem primum numerum præter propositos, Si non est primus ex propos. 33. eum aliquis primus numerus metietur. Mensuret eum numerus Equotum. Iste, vel est idem cum primis, & est, vel 2. vel 3. vel 5. & sic mensurabit totum 31. ex hypotesi, & ablatum 30. vt vnus ex dictis. Ergo & reliquum 1. quòd est absurdum cum numerus vnitatem non metiatur, vel est diuersus à prædictis, & iam intentum habemus,

COROLLARIVM

FAcilis modum reperiendi numeros primos; Silicet reperiendo primum numerum, quem dati numeri metiatur, & illi reperto addendo vnitatem, nam ille erit primus ad inuentos.

TRACTATVS XI. IN VIII. LIBRVM EVCLIDIS

PARS SECVNDA.

De speciali Numerorum proportione.


Ic liber agit iam non de proportionibus numericis in vniuersali; sed de ipsis in particulari: E primò de proportionibus numerorum simplicium. Secundò de proportionibus numerorum figuratorum, quorum inquam vnitates si ordine disponantur, figuram constituant. Vnde operæ pretium erit priùs horum numerorum perfectam habere notionem.

EXPENSIO I.

De principijs.

DEFINITIO I.

CVm duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitus numerus planus apellabitur, numeri verò hunc generantes latera dicentur.

Planus dicitur numerus ortus ex duorum multiplicatione; quia secundùm suas vnitates ordine dispositas parallelogrammum constituit, vt 3. & 4. faciunt 12. Potest verò idem, & vnus numerus plura habere latera; cùm ex pluribus multiplicationibus generari queat, vt 12. habet latera 3. & 4. sic 2. & 6. vt ex asterismis ordinatis constat.

* * * *
* * * *
* * * *

DEFINITIO II.

Cvm verò tres numeri mutuò se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatur, erit solidus dicetur, & generantes tres numeri latera dicentur.

Quia nimirum, si vnitates eius disponantur, vel sumantur tanquam partes solidæ alicuius solidi, solidum constituent, V. g. si 2. multiplicet 2. facient 4. & si 4. multiplicet 3. facit 12. quæ vnitates solidum constituunt, vt hìc videre est.



DEFINITIO III.

Qvadratus numerus est, qui æqualiter æqualis, vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

Nam eius vnitates in longum, latumque disposite quadratum constituunt. Sic numerus 25. ex 5. in 5. procreatus, dicitur numerus quadratus.

Numerus vero generans, dicitur latus, seu radix quadrata, quæ, vt exquiratur, suo loco ostendendum erit.

DEFINITIO IV.

Cvbus numerus est, qui æqualiter æqualis æqualiter, vel qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

V. g. 125. qui sub tribus 5. se multiplicantibus continetur: sic 5. in 5. producit 25. & rursus 5. in 25 producit 125. qui numerus cubus appellatur, & numeri producentes dicuntur latera, seu radix cubica, de qua suo loco agendum.

DEFINITIO V.

Similes solidi numeri, & plani sunt, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero similis sit, non requiritur, quòd omnia eius latera, ex quorum multiplicatione generatur sint proportionalia omnibus lateribus, ex quibus alius generari potest sic 6. & 24 sunt proportionales; quòd ita sit 2. ad 3. latera numeri 6. vt 4 ad 6 latera numeri 24. licet numerus 24. habeat alia latera, nempe 2. & 12. sic 3. & 8. quæ lateribus 2. & 3. non proportionantur. Sic etiam solidus solido similis erit; si aliqua latera vnius, lateribus alterius proportione respondeant, licet alia inueniri possint, quæ talia non sint; sic 24. & 192, similes sunt, quòd latera 24. numeri sint 2. 3. 4. quæ ita sunt inuicem, vt 4. 6. 8. latera numeri 192. licet adsint alia latera numeri V. g. 192. quæ non ita se habeant; vt 6. 8. 4.

EXPENSIO II.

De minimorum numerorum proportionibus.

Qvia omnes numeri licet ratione non tamen proportione correspondent. Ideo primo videndum quinam numeri inter se primi sint, quibus possint inueniri numeri proportionales, & etiam tradere modum illos inueniendi, quod in hac Expensione opere demandatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales: extremi verò ipsorum primi inter se fuerint, ipsi omnes minimi in ea proportione erunt.

Sint numerorum deinceps proportionalium nempe continuè 8. 12, 18. 27. Dico quòd si extremi 8. & 27. sunt primi inuicem; quòd etiam erunt dati omnes numeri minimi in ea proportione.

Probatur. Nam dentur 4 numeri minores ipsis, si id esse potest *Hominum*, *Equorum*, *Ouium*, & *Leonum*. Nam cum dicant eandem proportionem inuicem etiam extrema eorum ex propos. 14. sept. ex æqualitate in eadem ratione erunt, & ita erit numerus *Hominum* ad numerum *Leonum*, vt 8. ad 27. Quare cum 8. & 27. sint primi inuicem ex hypothesi mensurabunt ex 20. propos. sept. 8. quidem *Homines*, & numerus 27. *Leones*; nempe maior, vt ponitur 8. *Homines* numero minores, & 27. maior *Leones*, qui supponuntur pauciores.

PROBL. I. PROPOS. II.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos in datâ ratione, quotcunque iusserit quispiam.

Sit data ratio, quam habet 2. ad 3. Et iubemur primo inuenire tres numeros minimos successiuè proportionales in illâ datâ proportione. Numerus 2. multiplicetur in se, & fiat 4. Deinde cum numero 3 & fiant 6, tandem 3. in se, & fiat 9 Dico 4 6. 9. esse minimos in ea proportione.

Probatur autem primò. Quòd sint proportionales. Nam, cum numerus 2. multiplicet se, & 3. ex propos. 17. sept, erit, vt ipse 2 ad 3. ita producti 4. ad 6. Item cum numerus 3. multiplicet 2. & se erit vt 2. ad 3. multiplicantes, ita in proportione erunt producti 6. & 9.

Probatur secundò. Quod etiam sint inuicem primi ex propos. 32. lib. sept. Nam extremi 4. & 9. procreati sunt ex numeris primis inuicem cum minimi sint in ea proportione multiplicati in se. Ergo, & extremi 4. & 9. erunt primi, & ideo minimi in ea proportione. ex propos. ant. Quare etiam medij erunt minimi in ea proportione ex eadem propos. anteced.

Iubeamur secundo ex ijs repertis, inuenire alios minimos in ea proportione fiant ex 2. in tres inuentos 4. 6. 9. multiplicato, numeris 8. 12,

& 18 Deinde ex 3. in vltimum 9. fiat 27. Dico *cursus* 8. 12. 18 27 *esse minimos in ea proportione*.

Probatur primò. Quod sint proportionales. Nam ex propos. 17. septimi, numerus 2. multiplicans 4 6. & 9. facit aliquos 8 12. 18. Ipsi geniti in eadem ratione erunt, quam 4. ad 6. & 6. ad 9. quæ quoque est eadem, quam dicit 2. ad 3. Sic pariter 3. multiplicans 9 fecit 27. & 2. multiplicans item 9. fecit 18. ex eadem propos. 18. & 27. in eadem ratione erunt, quam 2. ad 3. Ergo omnes quatuor numeri nuper reperti 8. 12. 18. 27. in eadem ratione sunt, quam 2. ad 3.

Probatur secundo quod minimi, quoque sint. Nam 2. & 3 cum sint primi, minimi sunt in ea proportione, & in eadem extremi sunt, 8 & 27. geniti ex 2 & 3 gemina vice in se. Quare ex pr. 32. sept. erunt quoque primi. Quare erunt minimi in ea proportione ex propos. ant. quam 2. ad 3. & sic semper succedet, si in infinitum sequeris.

COROLLARIVM I.

HInc deducitur. Quòd si tres numeri minimi sint continuè proportionales extremos quadratos esse. Nam sunt ex definitione 18 æqualiter æquales, siquidem extremi, vt 4. & 9. sunt facti, ex multiplicatione minimorum 2. & 3. in se.

COROLLARIVM II.

DEducitur quoque quatuor numerorum inuentorum, si minimi sint, extremos cubos esse, nempe 8. & 27. Nam 8. fit ex multiplicatione 2. in 2 & rursus ex multiplicatione 2. in genitū 4. Sic 27. fit ex multiplicatione 3 in 3. & rursus ex multiplicatione 3. in genitum 9. Quarè 8. & 27. sunt numeri æqualiter æquales æqualiter. Si verò essent quinque, extremi essent quadrati quadratorum, & alij qui in Algebra explicantur.

COROLLARIVM III.

EXtremi quoque secundùm hanc regulam inuenti, vt 4. & 9. sic 8 & 27. sunt primi inuicem, vt ex 32. propos. lib sept. constat. Nam consurgit 4. ex multiplicatione numeri 2. in se. Sic 9. ex multiplicatione 3. in se. Quare erunt primi ad inuicem. Sic 8. & 27. consurgunt ex multiplicatione 2. rursus in 4 & 3. rursus in 9.

COROLLARIVM IV.

COnstat etiam duos minimos numeros in aliquâ ratione metiri alios quoscunque in eadem ratione. Quia scilicet producuntur ex eorum multiplicatione.

PROBL. II. PROPOS. III. Euc. 4.

Rationibus datis quotcumque in minimis numeris reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SInt datæ duæ rationes 2. ad 3. & 5. ad 6. Oporteatque reperire tres numeros minimos deinceps proportionales in datis rationibus, quod scilicet primus ad secundum sit, vt 2. est ad 3. & secundus ad tertium, vt 5. est ad 6. Ita fiet. Reperiatur minimus numerus ex propos. 36. sept. quem metiuntur 3 & 5. secundus, & tertius, & sit 15. exortus ex multiplicatione 3 cum 5. quia sunt primi inuicem; at si non essent primi, esset operandum, vt in secunda parte eiusdem propos. iubemur.

Rationes 2. 3. 5. 6.
Continuè in illis 10. 15. 18. Proportionales.

Deinde tertius 5. multiplicet primum 2. & fiunt 10. sicut secundus 3. multiplicet vltimum 6 & fiunt 18. *Dico tres inuentos* 10. 15. 18. *esse in ea proportione, quam possidet* 2. *ad* 3. *&* 5. *ad* 6. *nimirum esse* 10. *ad* 15. *vt* 2. *ad* 3. *&* 15. *ad* 18. *vt* 5. *ad* 6.

Probatur primo, quod eandem proportionem dicant. Nam numerus 2. & 3. multiplicando 5. fecerunt aliquos; nempe 2. ex 5. numerum 10. sicut 3. ex 5. numerum 15 Ergo ex prop. 17. sept. erunt in eadem proportione 2 ad 3 vt 10. ad 15. sic numerus 5. & 6. multiplicando 3. fecerunt 15. & 18. Ergo erunt in eadem proportione, ex eadem propositione, 5. ad 6. vt 15. ad 18.

Probatur secundò. Quod *sint minimi in datis rationibus*. Nam progress. primo si non sunt minimi erunt aliqui numeri minores singuli, singulis. Qui in datis rationibus existant. Sit ergo numerus *Equorum* minor, quam 10., qui sit ad numerum *Ouium*, minorem quam 15. vt 2. ad 3. cum ergo 2. & 3. ex hypothesi minimi sint in ea proportione ex prop 20. sept. metietur 2. numerum *Equorum* sicut 3 numerum *Ouium*.

Progress. 2 Pariter dabitur quoque numerus *Ouium* minor, quam 15. & numerus *Leonum* minor, quam 18 qui sint in eadem proportione, qua 5. ad 6. Quare 5. metietur *Oues* & 6 *Leones* ex eadem prop. 20. sept. Vnde 5. & 3. metientur numerum *Ouium* minorem quam 15. numerus quidem 5. vt modo probauimus: numerus verò 3. ex præc. progressu.

Quamobrem cùm 5 & 3 mensurent quoque 15. minimum, quem metiuntur. Sequetur quòd numerus 15. ex propos. 37 metietur numerum Ouium minorem: quam 15. Cùm 15. sit minimus eorum ex effectione; quem 5. & 3. mensurent. Quòd verò numerus maior metiatur minorem, hoc esse nequit.

Sint deinde secundo easn tres rationes in minimis numeris 3. ad 4. prima, secunda 5 ad 6 tertia 2. ad 7. Et sint inueniendi quatuor numeri in datis rationibus deinceps, idest continuè proportionales.

Rationes 3. 4. 5. 6. 2. 7.
Continuè proport. 15. 20. 24. 84.
Equi, Boues, Leones n. minores

Inueniatur minimus numerus, quem mensuret numerus secundus 4. & tertius 5 & erit 20. Deinde multiplicetur tertius 5. cùm primo 3. nempe per vices, iuxta quas 4. capit in 20. & gignetur numerus 15. Rursus multiplicetur 4. cum quarto 6. nempe per easdem vices, penes quas 5. capit in 20. & producetur numerus 24 Erunt itaque 15 20. 24. tres numeri in data ratione continuè proportionales. Videatur igitur, an quintus numerus 2. mensuret 24. Quod si metiatur, vt facit 2. propositus, qui capit 12. vicibus in 24. per has vices multiplicetur 7. & erunt 84. Dico itaque. quod 15. 20. 24. 84. habent datas rationes.

Probatur primò. Quod sint in datis rationibus,

bus, & quidem de tribus primis 15. 20. 24. constat, eum eodem modo executioni problema mandatum sit, ac in primo casu. De tertio verò, qui sit, ad quartum vt 2. ad 7. sic constat. Nam 2. metitur 24. tot vicibus, quot 7. metitur 84. cum ambo multiplicati per 12. eos gignant. Ergo 24. & 84. ex propos. 18. septimi erunt in iisdem rationibus 2. ad 7.

Probatur secundo. Quod sint minimi, & etiam de tribus primis res constat ex primo casu. De numeris verò 24. & 84. tertiam proportionem facientibus clarum est, quia minor numerus dari nequit, quàm 84. qui capiat 12. vicibus 7. vt 24. capit 12. vicibus 2.

Nam si 20. 24. & 84. non sunt minimi in datis rationibus 5. ad 6. & 2. ad 7. Dabitur itaque numerus quidam *Equorum*, qui sit ad *Bouum* numerũ vt 5. ad 6. & sit numerus Bouum ad Leones, vt 2. ad 7. qui tamen singuli essent minores, quam 20. 24. 84. Quare ex propos. 29 septimi 5. metietur *Equos*, & 6. *Boues*. Et ex eadem 29 propos. 2. metietur quoque *Boues*, vt 7. *Leones*. Quia dati numeri 2. 7. & 5. 6. minimi sunt in datis rationibus. At 2. & 6. mensurant quoque 24. ex effectione minimum, quem possint metiri: ergo 24. mensurabit quoque *Boues* numerum se minorem ex propos. 37. septimi, quod est absurdum.

Tertius casus est, si quintus numerus non caperet æquè in 24. vt si esset tertia proposita proportio A 5. ad 7. reperiatur *minimus numerus*, quem A 5. & 24. metiuntur, & sit 120. Quoties ergo 24. metitur 120. quæ vices sunt 5. toties 15. primus numerus metiatur alium numerum nempe multiplicetur 5. per 15 & fiet 75. Item quoties 24. metitur 120. totien 20. secundus numerus alium numerum multiplicatus per eas vices, quæ sunt quinque, metiatur, & erit 100. At quoties 5. metitur 120. quæ sunt 24 toties 7. alium numerum metiatur, & ita 7. multiplicatus per 24. producet 168. Itaque 75. 100. 120. 168. erunt minimi in datis rationibus. Quod enim habeant datas rationes ostenditur. Quia enim 15. 20. 24. metiuntur 75. 100. 120. per eundem numerum A 5. erit eadem proportio inter hos quoque, quæ erat inter illos. Illi autem 15. 20. 24. eas rationes habebant, quæ 3. ad 4. & 5. ad 6. Ergo easdem habebunt 75. 100. & 120

Deinde, vt 5. metitur 120. vicibus viginti quatuor, ita & 7. metitur 168. Ergo inter 120. & 168. erit eadem proportio, quæ inter 5. & 7.

Prob. 2. Quod sint minimi. Nam Progr. 1. si non sunt tales. Dabitur aliquis numerus *Equorum* minor, quam 100. *Bouum* minor, quam 120. & *Leonum* minor, quam 168. qui tamen habebunt datas rationes.

			A
Rationes	3. 4.	5. 6.	5. 7.
Continuè Prop.	15.	20. 24.	
Continuè Prop.	75.	100. 120.	168.
secundo inuenti	Equi, Boues, Leones n. minores, quam immediatè ipsis superpositi.		

Numerus *Equorum* est ad numerum *Bouum*, vt 5. ad 6. & ideo 5. metietur numerum *Equorum* ex propos. 29. & quia & 5. & 4. metitur 20. minimum, quem possent metiri ea effectione, metietur quoque 20. ex propos. 37. septimi numerum *Equorum*.

Progress. 2. Quia verò ostensum est, quod sicut 20. est ad 24. sic 100. ad 120. Et ita quoque ex adversariis *Equi* sunt ad *Boues*, vt 100. ad 120. Ergo ex *Æquo*, vt 20. ad 24. sic *Equi* ad *Boues*. Quare permutando, vt 20. ad *Equos*, sic numerus 24. ad *Boues*. Quare sicut ex 1. Progressu 20. metitur *Equos* sic 24. metietur *Boues*.

Sed 5. mensurat etiam ipsos Boues, eo quod præsupponatur ab adversariis, quod ita sit 5. ad 7. sicut *Boues* ad *Leones* iuxta propos. 29. sept. Cùm itaque 24. & 5. mensurent *Boues* mensurabit quoque & numerus 120. ex propos. 37. sept. quem illi minimum mensurant numerum (qualem reperimus ipsũ 120. ab initio) ipsos *Boues*: At *Boues* dicũtur minus esse numero, quàm 120. Ergò numerus maior 120. metietur minorem *Bouum*, quod esse nequit.

THEOR. III. PROP. IV. Eu. 16. l. 9.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint primi inter se 6. & 7. Dico, quod non potest esse, vt 6. ad 7. ita 7. referatur ad alium quempiam V.g. ad numerum *Ouium*.

6	vt	7
7		Oues

Probatur. Quia ex propos 29. sept. Si 6. esset ad 7. vt 7. ad numerum Ouium oporteret, quod 6. metiretur 7. æquè. vtpote fundamentum secundæ proportionis 7. quẽadmodum idem 7. terminus primæ metiretur numerum Ouium, quòd esse nequit, cùm 6. & 7. sint inuicem primi.

THEOR. III. PROPOS. V. Euc. 17. l. 9.

Si sint quocumque numeri deinceps proportionales: Extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; non erit, vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

4	9
ad 6	Equos

Dentur 4. 6. 9. continuè proportionales quorum extremi 4. & 9 primi sint inuicem. Dico, quòd non est, vt 4. ad 6. ita 9. ad alium quempiam. V. g. numerum *Equorum*.

Probatur. Nam si ita esset 4. ad 6., sic, 9. ad numerum *Equorum* permutando esset quoque 4. ad 9. vt 6. ad numerum *Equorum*. Quare, cùm 4. & 9. sint primi inuicem in ea proportione 4. æquè metiretur 6 ex propos. 29. sept & 9. Equos. Quia ergo 4. mensurat 6. & ponitur, vt 4. ad 6. ita 6. ad 9. metietur quoque 4. ipsum 9. æquè ex propos. 18. tr. 8. quod est absurdum.

PROBL. III. PROP. VI. Euc. 18. l. 9.

Duobus numeris datis considerare; an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

Sint dati numeri 4. & 7. Videndum est; si sint primi inuicem, si primi sunt, vt assignati. Ex propos. 4. huius euidens est, quod illis tertius proportionalis nequeat inueniri.

Quod si non sint primi, vt 4. & 6. multiplicetur in se numerus secundus, vt 6. & fiant 36. Videaturque an numerus primus 4. mensuret 36. si mensuret, vt assignatus 4. qui metitur 36. per 9. dicendum est; quòd habeat tertium proportionalem, & quod iste sit numerus ille 9. per quem primus 4. mensurat genitum 36. ex multiplicatione numeri 6. in se.

Probatur, quod ille 9. sit tertius proportionalis ex propos. 20. sept. Nam idem numerus 36. producitur, tam ex multiplicatione numeri medij 6. in se, quam ex multiplicatione 4. & 9. inuicem, qui sunt numeri extremi: siquidem, vt supponitur 4. per 9. mensurat 36. Vnde ex illa propos. 20. erit, vt 4. ad 6. sic 6. ad 9. Quod si non mensuret genitum ex multiplicatione secundi in se numerus primus, vt si dati fuissent 2. & 3. & genitus ex 3. esset 9. quem 2. non mensurat, dicendum; tertium proportionalem non posse illi inueniri.

Probatur. Nam si ille esset. Esset V. g. numerus *Equorum*: Quare cum ponatur, vt 2. ad 3. ita 3. ad *Equos*, ex propos. 20 producetur idem numerus ex multiplicatione 3. in se, nimirum 9. & ex multiplicatione 2. per numerum *Equorum*. Quamobrem 2. metiretur 9. mediante numero *Equorum*; quod esse nequit, cùm ponatur non metiri 2. ipsum 9.

PROBL. IV. PROP. VII. Euc. 19. l. 9.

Tribus numeris datis considerare, an possit illi quartus proportionalis inueniri.

Sint dati 3. numeri, quorum extremi, si sunt primi: Iam nequit quartus proportionalis inueniri ex propos. 5.

8. 12. 18. 27.

Si verò non sint primi, vt 8. 12. 18. multiplicandi sunt 12. & 18. vt fiant 216. & diuidendus est numerus 216. per 8. vt videamus; an ex æquo mensuret 8. primus numerus numerum 216. genitum ex medijs; Si mensurat, vt in assignato exemplo; videndum, per quem numerum id fiat, V. g. per 27. Et tunc dicendum: tribus numeris 8. 12. 18. quartum proportionalem inueniri posse; ipsumq; esse numerum 27.

Probatur ex propos. 19. sept. Nam idem numerus fit ex multiplicatione mediorum 12. & 18. qui ex multiplicatione extremorum 8. & 27. cùm 8. multiplicando 27. generet 216. siquidem 8. ipsum metitur per 27. ex pronunc. 7. tr. 8.

Quare 8, 12. 18, 27. erunt inuicem proportionales.

Si verò primus datus numerus non mensuret genitum ex medijs, vt si essent dati 3, 4. 10. Nam 3. primus numerus non mensurat ex æquo 40. numerum ortum à multiplicatione numerorum reliquorũ 4. & 10. Tunc dicendum quartum proportionalem prædictis numeris inueniri nequaquam posse.

Probatur. Quoniam, si inuenitur, sit illis numerus *Ouium*, quartus proportionalis. Numerus 3. 4. 10. & numerus *Ouium* sunt proportionales: Ergo ex 19. propos. sept. medij 4. & 10. producerent inuicem multiplicati 40. Et idem numerus produceretur ex multiplicatione extremorum 3. & Ouium numero; Quare 3. per numerum Ouium metiretur 40. quod est absurdum cùm ponamus 3. non metiri 40.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum non primorum.

Aliqua etiam de quibuscunque numerorum proportionibus sunt delibanda, eaque, quę elementi vim habeant, deseruiantque cęteris, de quibus agendum est.

THEOR. I. PROPOS. VIII. Euc. 8.

Si inter duos numeros medij continua proportione numeri cadant; etiam inter alios eandem rationem cum ipsis habentes totidem continua proportione cadunt numeri.

Dentur 10. & 80. inter quos medij continua proportione cadant 20. & 40. ita, quòd sint continuè proportionales 10. 20. 40. 80. Sintque alij duo numeri, qui eandem proportionem dicant 6. & 48. quam 10. ad 80. Dico, *quò sicut inter 10. & 80. cadunt duo medij proportionales 20. & 40. ita cadere inter 6. & 48.*

10. 20. 40. 80.

Quod, vt ostendatur, assumantur minimi, quatuor numeri in ea proportione, in qua sunt 10. 20. 40. 80. & sint 1. 2. 4. 8. eritque, vt 10. ad 20. ita 1. ad 2. & sicut 20. ad 40. ita 2. ad 4. & sicut 40. ad 80. ita 4. ad 8. Quare ex *Æquo*, vt 10. ad 80. sic 1. ad 8. & ita 6. ad 48.

Cumque sint 1. & 8. minimi in ea proportione, ita mensurabit 1. numerum 10. sicut metitur 8. numerum 80. ex propos. 29. l. sept. & ex eadem propos. metietur etiam numeros 6. & 48. habentes eandem proportionem cum ipsis.

Quoties igitur 1. metitur numerum 6. & 8. numerum 48. toties intermedij minimi numeri 2. & 4. metiantur aliquos alios, & quia 1. metitur 6. sex vicibus, & 8. numerum 48. vicibus item sex, producet 2. intermedius minimus multiplicatus per easdẽ vices numerũ 12. & 4. alter intermedius, item per 6. ductus numerum 24. Quamobrem geniti in eadem proportione erunt ex propos. 17. sept. ac generantes per eundem numerum senarium multiplicatos, & ita erit 12. ad 24. vt 2. ad 4. quæ eadem est, ac 1. ad 2. & quæ 4. ad 8. Erunt itaque continuè proportionales 6. 12. 24. 48. vt sunt 1. 2. 4. 8. & ideo, vt sunt 10. 20. 40. 80. Cumque multitudo numerorum intermediantium, qui reperti sunt 12. & 24. sit æqualis multitudini numerorum mediantium 20. & 40. patet propositum: Quod tot numeri medij proportionales cadent inter duos numeros 6. & 48. quot inter 10. & 80. eandem proportionem cum eis habentes.

COROLLARIVM

Hinc est, quod neque inter numeros duplæ proportionis, neque superparticularis, neque superbipartientis possit cadere medius proportionalis, quia caderet etiam inter numeros minimos similis proportionis. Illi autem medium proportionalem recipere nequeunt. Nam dupla proportio minimorum est inter 1. & 2. superparticularis verò inter numeros sola vnitate distitos, inter quos nullus numerus cadit, vt 2. & 3. su-

5. superbipartiens verò inter numeros, qui dualitate differunt, vt 5. & 7. inter quos sola vnitas intercipitur, qua esse nequit medius proportionalis.

Nam sint 3. & 5. minimi in aliqua proportione superbipartiente, & sit numerus inter eos 4. qui dicatur medius proportionalis. Ergo erit 3. ad 4. vt 4. ad 5. quare ex pr. 22. l. 5. & 3. ablatus à 4. ita erit ad 4. ablatum à 5. vt residuum 1. à 4. ad residuum 1. à 5. & ideo 3. esset ad 4. vt vnitas ad vnitatem, quod est falsum, quia esset vt inæqualis ad inæqualem, ita æqualis ad æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IX. Euc. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continua proportione ceciderint numeri; quot inter ipsos, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri totidem, & inter ipsos medij continua proportione cadent.

16. 40. 100. 250. 625.
8. 20. 50. 125.
4. 10. 25.
2. 5.
5.

Sint numeri proportionales 16. & 625. & inter primum, & vnitatem tres medij proportionales cadant 2. & 4. & 8. sicut, & inter secundum 625. & vnitatem cadant tres medij proportionales 5. & 25. & 125. *Dico, quòd, & inter ipsos tres pariter medij proportionales inuenientur.*

Num duo minores numeri interpositi 2. & 5. se mutuò multiplicēt, procreabunt 10. minor autem eorum 2. multiplicet tum modo factum 10. & faciet 20. tum medioctem alterius seriei, nimirum 25. & faciet 50. Tandem idem numerus 2. multiplicet hos factos nimirum factum 20. & faciet 40. sic, & factum 50. faciet 100. & tandem maiorem alterius seriei 125. & faciet 250. *Dico hos postremo factos esse inter datos 16. & 625. medij tres proportionales.*

Obseruandum verò est in primis. Cùm 1. 2. 4. 8. & cęt. sicut 1. 5. 25. 125. dicuntur proportionales ab vnitate, quòd sicut vnitas metitur bis 2. sic 2. metitur 4. & 4. 8 & cęt. sicque vnitas metitur 5. quinq; vicibus, vt 5. 25. & 25. metitur 125. & cęt. Quia ita ponitur 1. ad 2. vt 2. ad 4. & sic ponitur 1. ad 5. vt 5. ad 25. & cęt.

Probatur. Quia omnes 16. 40. 100. 250. & 625. habent eandem proportionem, quam 2. ad 5. Ergo sunt continuè proportionales. Quod verò eam proportionem habeant, quam 2. ad 5. Patet nam 16. 40 100. & 250. eandem proportionem habent ex propos. 17. quam multiplicati ex quibus prodiere 8. 20. 50. cùm fuerint multiplicati per eundem numerum 2. Isti verò 8. 20. 50. eandem habent ob eandem rationem, quam 4. & 10. cum fuerint multiplicati per eundem 2. Et rursus isti 4. & 10. eundem, quam 2 & 5. quod hi per 2. fuerint multiplicatores, ex 18. propos. Et ob eandem rationem quoque 250. & 625. quem primo posthabuimus, erunt in eadem proportione, quam 2. ad 5 cum 125 multiplicatus per 2. fecerit 250. minorem, & multiplicatus per 5. fecerit 625. Vnde omnes quinque 16. 40. 100. 250. & 625. erunt continuè proportionales, nimirum in eadem proportione, quā 2. ad 5.

EXPENSIO IV.

De numeris planis, & solidis.

Cum numeri plani, & solidi multas insignes proprietates consequantur, quę maximè deseruiunt in Arithmeticis operationibus, & lib. 10. necessarię sint, ad cognoscendam diuersitatem quantitatis discretę à continua hinc, est quod visis proportionibus numerorum simplicium; hìc debeamus agere de numeris figuratis, nempe planis, vel solidis, & eorum proportiones agnoscere.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 5.

Plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam.

Plani	8	15
Latera	2. 4	3. 5

Sint duo numeri plani 8. & 15. & latera primi 2. & 4. secundi 3. & 5. *Dico proportionem 8. ad 15. esse compositam ex proportione laterum.*

Prob. Faciant latus primi 2. & latus secundi 3. numerum 6. se mutuò multiplicando. Itaque habemus, quod numerus 2. multiplicando 4. fecit planum 8. & multiplicando 3. latus alterius plani, numeri 15. facit 6. & ideo ex propos. 17. l. sept. Ita erit 4. ad 3. vt 8. ad 6.

Progress. 1. Eadem quoque ratione, quam 3. multiplicans 2. facit 6. & multiplicans 5. facit 15. erit eadem ratio ex cit. propos. 2. ad 5. qua 6. ad 15. refertur. Quare 8. 6. 15. sunt deinde proportionales in proportionibus, quibus refertur 4. ad 3. & 2. ad 5. Nam tribus ijs numeris ordine positis, ita refertur 8. ad 6. vt latus 4. ad latus 3. & ita respondet in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5.

Plani numeri	8		15
Latera	4. 2		3. 5
		6	numerus ex 2 & 3

Ita refertur 4 ad 3 & 2 ad 5.
Vt 8 ad 6 & 6 ad 15

Sed si ordo laterum inuertatur, & disponatur hoc ordine.

Plani	8		15
Latera	2. 4	&	5. 3
		20	

Vt refertur 2 ad 5, & 4 ad 3
sic 8 ad 20, vt 20 ad 15

Erit adhuc eadem ratio 8, ad 20. quæ est 2, ad 5. & 4. ad 3. quæ est 20. ad 15. Ita si quocunque alio ordine ea latera colloces V. g. 4. 2. 5. 3., aut 2. 4. & 3. 5. Nam 10. aut 12. producti ex medijs laterū numeris erunt ad extremos proportionales velut latera, & ita referretur 4. ad 5. vt 8. ad 10. & 10. ad 15. vt 2. ad 3. Sic referretur 2. ad 3. vt 8 ad 12. & 12. ad 15. vt 4 ad 5. Ergo, cùm proportio 8. ad 15. sit effecta ex proportione V. g. 8. ad 12. & 12. ad 15. aut ea proportione 8. ad 10. & 10. ad 15. aut ex proportione 8. ad 20. & 20. ad 15. aut ex 8. ad 6. & 6. ad 15. & hæ omnes sint proportiones laterum diuersimodè collatorum; patet ex def. 8. tract. 9. part. 1. proportionem planorum 8. ad 15. componi ex proportione laterum, quod, & de omnibus alijs planis valet.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus, & planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

Sint duo plani numeri similes, scilicet habentes latera proportionalia aliqua. V. g. 6. & 24. Nam latera aliqua numeri 6. quę sunt 2. & 3. sunt proportionalia aliquibus lateribus numeri 24. nempe 4. & 6. licet, & alij sint numeri, qui ex mutua multiplicatione producunt 6 & 24. qui proportionem non dicunt, vt essent 2. & 12. aut 3. & 8. latera quoque numeri 24.

Plani similes. 6. 24. Medius 12.
Latera 2. 3. 4. 6.

Latera itaque numeri 6. sunt 2. & 3. & numeri 24 sunt 4. & 6. & eadem proportione gaudet 2. ad 3. vt 4. ad 6.

Dico, quòd inter 6. & 24. cadit medius proportionalis numerus aliquis. Nam multiplicentur terminus 3. primæ combinationis extremus, cum 4. alterius proportionis, producetur 12. *Dico hunc esse proportionalem medium.*

Probatur. Progressu 1. Quoniam ita refertur 2. ad 3. vt 4. ad 6. permutando ita quoque erit 2. ad 4. vt 3. ad 6.

Progressu 2. Quoniam 3. multiplicans 2. fecit 6. & 4. fecit 12. erit eadem proportio 2. ad 4. quam 6. ad 12. & sic quia 4 multiplicans 3. fecit 12. & multiplicando 6. fecit 24. erit eadem proportio 3. ad 6. quæ 12. ad 24. Quare proportionales sunt numeri 6. 12. & 24. Ergo 12. est medius proportionalis.

Probatur secundo: Quòd habeat 6. ad 24. duplicatam lateris homologi ad latus homologum rationem. Latera homologa illa sunt, quæ vtraque in eadem quantitate sunt, fundamenta proportionis, vel termini; ita erunt in hac 2. & 4. fundamenta, & 3. & 6. ambo termini; patet autem ex prima probatione, quod ita est 6. ad 12. vt 2. ad 4. & 12. ad 24. vt 3. ad 6. Quare cum 6. ad 24. eam proportionem obtineat, quæ est 6. ad 12. & 12. ad 24. est duplicata cum gemina vice repetatur eadem proportio, & est etiam ea, quæ laterum homologorum 2. ad 4. vt 3. ad 6. Possent tamen etiam alio pacto disponi latera, vt in præc.

THEOR. III. PROPOS. XII. Euc. 19.

Duorum similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri; & solidus ad solidum triplicatam habet rationem, quam habet latus homologum ad aliud latus homologum.

Solidi 48. & 162.
Latera 2. 4. 6. & 3. 6. 9.

Sint duo numeri solidi similes 48. & 162. & primi latera sint 2. 4. & 6. Secundi verò 3. 6. 9. sunt autem similes, quod latus 2. ita refertur ad 4. primi, vt latus secundi 3. refertur ad 6. & ita latus 4. primi referatur ad 6. vt latus 6. secundi refertur ad 9. *Dico, quod inter hos numeros solidos 48. & 162. duo medij proportionales cadunt numeri.*

Notandum verò est in primis; quod quia ponitur 2. ad 4. vt 3. ad 6. erit etiam permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6. & quia ponitur 4. ad 6. latus primi solidi, vt 6. ad 9. latus secundi, erit etiam permutando 4. ad 6. vt 6. ad 9. quare erit eadem proportio, vel 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. nimirum latera vnius solidi ad latera alterius solidi collata, cùm conueniant in intermedia proportione 4. ad 6.

Nunc, vt probetur propos. disponantur latera in ordinem, vt placet, dummodo proportiones similes in loco correspondente sint, vt vides,

8 48
2 4 6 72
12
3 6 9 108
18 162

Deinde multiplicandi sunt 2. cum 4. latera primi sicut 8. sicut 3. cum 6. latera secundi, & fient 18. plani numeri. Deinde terminus primi, vel consequens 4. multiplicandus est cum fundamento relationis, vel cum antecedente secundi, qui est 3. & fient 12. Tandem 6. primi, & 9. Secundi hunc 12. multiplicent, & facient 72. & 108.

Probatur itaque primo: Quod hi numeri 72. & 108. sint duo medij proportionales inter 48. & 162.

Progress. 1. Quoniam itaque 4. multiplicauit 2. & 3. sequitur ex propos. 17. septimi: quod eadem proportio sit inter genitos 8. & 12. quæ est inter multiplicatos 2. & 3.

Progress. 2. Iterum, quia 3. multiplicauit 4. & 6. sequitur ex eadem propos. quòd sint, quæ 4. & 6. multiplicati sicut 12. & 18. geniti. Quare 8. 12. & 18. sunt continuè proportionales.

Progress. 3. Solidus quoque numerus 48. resultauit ex multiplicatione 2. in 4. ex qua prodijt numerus 8. & rursus ex multiplicatione 6. in 8. Vnde factus est numerus ipse solidus 48. Sic dicendum est de numero solido 162.

Progress. 4. Numerus itaque 6. latus primi solidi multiplicans ex effectione 12. fecit 72. Itaque ex citata propos. 17. ita erit 48. ad 72. geniti, quæ est 8. ad 12. quæ est ex 1. progressu 2. & 3.

Progress. 5. Sic quia numerus 9. latus tertium secundi solidi multiplicauit ex 3. progr. 18. & fecit 162. & ex effectione multiplicans 12. fecit 108. fit vt eadem proportio sit inter multiplicatos 12. & 18. quæ inter genitos 108. & 162. quæ vero est inter 12. & 18. est illa, quę est inter 4. & 6. ex 2. progressu.

Progressu 6. Tandem, quia latus tertium 6 primi solidi 6. & 9. latus tertium secundi solidi multiplicando 12. fecerunt 72. & 108. Sequitur ex cit. propos. 17. quod eadem proportio sit inter 6. & 9. quæ est inter 72. & 108. Quamobrem

Concluditur: Quod ita sit in proportione solidus primus 48. ad 72. quæ est 2. latus prioris solidi ad 3. latus posterioris ex 4. progressu. Et quod 72. ad 108. sit in eandem proportione, quam habet 6. latus tertium primi solidi ad 9. latus tertium secundi solidi ex 6. Progr. Tandem quod 108. sit ad 162. solidum posterius, quæ est inter 4. latus secundum primi solidi ad 6. latus secundum posterioris solidi ex Progr. 5. quare continuam proportionem habebunt 48. ad 72. & hic ad 108. & iste ad 162. quam habet 2. ad 3. & 6. ad 9. & 4. ad 6. nimirum laterum vnius ad latera alterius,

quæ

quæ vt prænotauimus est eadem proportio.

Probatur secundò. Quòd sit proportio triplicata inter solidos 48. & 162. nam vt probatum est, eadem proportio 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. repetita in quatuor numeris 48. 72. 108. & 162. triplicatur, & ita est 48. ad 72. vt 72. ad 108. & 108. ad 162.

PROBL. III. PROPOS. XIII. En. 20.

Si inter duos numeros cadat vnus medius proportionalis numerus, similes plani erunt illi numeri.

CAdat inter 18. & 32. numerus medius proportionalis 24. *Dico 18. & 32. esse similes planos numeros.*

Prog. 1. Sumantur duo numeri minimi in ratione, qua refertur 18. ad 24. aut quæ est eadem 24. ad 32. ex propos. 35. & sint 3. & 4. ex propos. 29. sept.

18 24 32

3 4 6 8

3. & 4. metientur 18. & 24. æquè, idest per æqualem numerum; metiantur per 6: ideoque 3. & 6. erunt latera numeri 18.

Progress. 2. Sic quoq; 3. 4. metientur ex eadem propos. numeros 24. & 32. æquè, idest per æqualem numerum 8. ideoque 4. & 8. erunt latera numeri 32.

Obseruandum est autem quod idem numerus 4. in primo progr. multiplicans 6 fecit 24. & ex 2 pe idē 4. multiplicans 8. fecit 32. Vnde 6. & 8. habebunt eandem rationem, quam 24. ad 32. quæ est 3. ad 4. ex 17. septimi. Poterimus itaque vti permutatione. Cumque sit 3. ad 4. vt 6. ad 8. etiam erit 3. ad 6. vt 4. ad 8. Iam ergo patet numeros 18. & 32 esse similes planos. Planos quidem; quia habent latera 3. 4. & 6. 8: similes verò, quia latera, vt requirit def. 21. li. planorum numerorum; sunt proportionalia, & est 3. ad 6. latera plani 18. vt 4. ad 8. plani 32.

THEOR. XI. PROPOS. XIV. Enc. 21.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales numeri, similes solidi sunt illi numeri.

8 12 18 27

4 6 9

22 A 2 33 B 3

CAdant inter 8 & 27. duo numeri proportionales 12. & 18. *Dico 8: & 27. solidos esse.* Sumantur tres numeri minimi in ratione 8. ad 12. vel quæ eadem sunt 12. ad 18. vel 18. ad 27. ex propos. 35. septimi, & sint 4. 6. 9.

Progress. 1. Quia itaque inter 4. 9. assumptos numeros minimos cadit vnus medius proportionalis 6. erunt 4. & 9 assumpti minimi in ea proportione ex præced. prop. plani. Latera que eorum erunt scilicet 2. & 2. latera numeri 4. & 3. 3. latera numeri 9.

Progress. 2. Quia 4 6. 9. assumpti minimi sunt in ea proportione metientur ex propos. 29. numeros primò propositos 8. 12. 18. 27. qui habent eandem rationem cum ipsis, & numeri quibus metiuntur erunt A 2. & B 3. Itaque 4. & 6. mensurabunt 8. & 12. per A 2. eos multiplicando & 6. cum 9. mensurabunt 18. & 27. per B 3. eos multiplicando.

Progress. 3. Sed 2. 2. latera numeri 4. plani se se multiplicando faciunt 4. rursus 4. per A 2. ex secundo progressu multiplicando 4. facit 8. cùm, vt ibi 4. metitur 8. multiplicatus per A 2. Itaque 8. numerus solidus erit, cuius latera erunt 22. & A 2. Sic, & 27. Nam 9. per B 3. multiplicatus ex secundo progress. producit 27. Ac ipse 9. numerus planus producitur ex multiplicatione suorum laterum 3. & 3. Ergo 27. erit, solidus ex definitione 2. h. cuius latera erunt 3. 3. & B 3.

Probatur verò; Quod sint solidi similes. Nam illi sunt solidi similes, quorum vnius latera tria tribus alterius sunt proportionalia.

Sed talia sunt 2. 2. 2. respectu laterum 3. 3. 3. Ergo solidi similes erunt.

Progress. 4. Quod verò talia sint. Probatur. Nam ex 2. progr. A 2. multiplicans 6. produxit 12. & B 3. multiplicans 6. item produxit 18. Ergo erit 2. ad 3. vt 12. ad 18.

Progress. 5. 12. verò, & 18. sunt in eadem ratione, quæ 4. & 6. quia multiplicati per 3. fecerunt ipsos 12. & 18. & ideo, vt A 2. ad B 3.

Progress. 6. Quia verò assumpti minimi sunt extremi eorum 4. & 9. erunt quadrati ex Coroll. 1. 2. propos. huius, & ideo plani similes, & hinc ex propos. 9. cadet inter illos medius proportionalis in proportione laterum homologorum.

Propterea latus 2. primi solidi 4 & aliud latus 2. eiusdē dicent eandem rationem ad 3. & 3. latera secundi solidi 9. vt 4 ad 6. quæ eadem ex 5. progr. quæ 2. A ad B 3. numeros mensurantes, & latera tertia solidorum. Quamobrem si est 2. ad 3. vt 2. ad 3. vt 2. A ad B 3. poterimus vti Permutatione, & dicere, quod erit latus 2. primi solidi ad 2. vt latus 3. ad latus 3. secundi; & ita latus 2. ad A 2. tertium latus eiusdem primi solidi, vt latus 3. ad latus tertium B 3. secundi solidi; quapropter similes erunt isti solidi.

Non potuimus autem assumere minimos 4. 6. 9. in proportionibus numerorū 8. 12. 18. 27. nisi extremi essent quadrati; quia trium minimorum numerorum in eadem proportione continuantium extrema quadrata sunt ex Coroll. 1. propos. 2. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam quadratus numerus aliquis ad aliquem quadratum numerum.

DEntur duo plani similes 8. & 18. *Dico, quod sicut est 8. ad 18. ita sit aliquis quadratus ad aliquem alium quadratum.*

Probatur. Nam 8. & 18. sunt plani similes ex hypothesi, Quare mediabit inter eos aliquis numerus proportionalis. Iste medius, & sit 12. Reperiaturque minimi in eadem proportione, & sint 4. 6. 9. Horum extremi ex Coroll. 1. prop. 2. h quadrati erunt. Quamobrem erit, vt quadratus 4 ad quadratum 9. ita 8. ad 18.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVI. Eu. 27.

Similes solidi inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

PRobatur. Nam inter 16. & 54. vtpote inter solidos numeros similes interponantur duo medij proportionales ex propos. 12. huius. Eruntq; V. g. 24. & 36. Sumptis ergo quatuor numeris minimis in ea proportione, quę est 16. ad 24. item 24. ad 36. & tandem 36. ad 54. qui sint 8. 12. 18. 27. vt ex Coroll. 2. propos. 2. huius habemus, 8. & 27. Cubi erunt. Igitur 16. ad 54. solidi numeri habebunt eandem rationem; quam Cubus 8. ad Cubum 27.

COROLLARIVM I.

COlligitur ex prædictis omnibus. Nullus numeros esse planos, vel solidos similes, inter quos medius proportionalis cadere nequeat. Quare nulli numeri primi V. g. 12. & 13. possunt esse solidi similes; Quia latera non obtinent, prætes vnitatem, & se ipsum (quia V. g. ex 1. & 11. fit 11. quæ latua non sunt; nisi impropriè, nec inter eos medius proportionalis cadere potest. Sic nec numeri inter se primi; qui quadrati non sint, aut cubi similes sunt. Quòd, si dicantur esse planos similes, cadet inter eos medius proportionalis, vel vnus, vel duo Quare cum sint primi inuicem, & sint tres, vel quatuor continua proportione hi erunt. Quadrati, vel Cubi ex Coroll. 1. vel 2. propos. 2. huius, quod est contra positionem.

COROLLARIVM II.

SIc nec numeros, quorum minor primus sit, qui ab vnitate solùm mensuretur, vt 3. 5. vel 7. non posse esse planos, vel solidos similes, nisi minor mensuret maiorem; Nam, si non mensuret essent primi inuicem, & ideo non possent esse plani, vel solidi similes ex præced. Coroll.

COROLLARIVM III.

SIc, neque plani similes possunt esse ij, quorum vnus Quadratus. vel Cubus sit alter nequaquam, vt 4. & 5. vel 16. & 20. aut 8. & 10. Nam, si essent plani similes haberent proportionem, quam quadratus, vel cubus numerus ad Quadratum, vel Cubum numerum. ex propos. 11. quod est contra hypothesim.

COROLLARIVM IV.

VNde facilis est inuentio numerorum non similium. Nam omnes numeri primi in se vt 3. 5. 7. 11. Sic numeri primi inuicem 2. & 3. Sic, & numeri, quorum vnus primus est, & alium non metitur, vt 5. & 8. Sic, & numeri quorum vnus Cubus sit, vel Quadratus, alter verò nequaquã, non possunt esse, aut plani, aut solidi similes.



PROBL. I. PROPOS. XVII.

Duos numeros planos similes inuenire.

ACcipiantur quatuor numeri proportionales, & sit 2. ad 5. vt 8. ad 20. seque multiplicent fundamenta cum terminis proportionum: 2. cum 5. & procreent 10. & 20. cum 8. & producant 80. *Dico hos esse planos similes.*

Probatur, quia illi sunt similes, qui habent latera proportionalia ex defin. talia verò sunt ex constructione 10. & 80.

EXPENSIO V.

De Quadratis, & Cubis.

NVmeri Cubici, & Quadrati quædam species sunt numerorum similium planorum, & solidorum. Vnde visis eorum genericis proprietatibus, nunc etiam species ipsorum considerandæ.

THOR. I. PROPOS. XVIII. Eucl. 11.

Duorum Quadratorum numerorum vnus proportionalis numerus medius est, & Quadratus ad Quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SInt duo Quadrata 9. & 49. quorum latera sint 3. & 7. Dico primo *inter eos cadere aliquem numerum medium proportionalem.*

* Probatur. Nam duo Quadrata sunt duo solidi similes; siquidem eorum latera 3. 3. & 7. 7. sunt ęqualia: Vnde eadẽ proportio est 3. ad 3. quę alterius laterũ 7. ad aliud latus 7. Ergo ex prop. 5. inter eos aliquis medius proportionalis cadit.

Quadratum quoque duplicatam habet lateris ad latus rationem. Nam ea proportio, quæ inter 3. & 7. gemina vice in vno quoque quadrato repetitur, ob multiplicationem laterum in se.

THEOR. II. PROPOS. XIX. Eu. 28.

Duorum Cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, & Cubus ad Cubum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

* PRobatur. Nam duo Cubi sunt duo solidi similes ob laterum suorum æqualitatem. Sic Cubi 27 latera 3. 3. 3. ad Cubi 64. latera 4. 4. 4. eadem proportione referuntur, & est primus 3. ad secundum 3. & primus 4. ad secundum 4. & secundus 3. ad tertium 3. vt 4 ad 4. sed inter solidos similes ex propos. 6. duo medij proportionales numeri cadunt. Ergo etiam inter Cubos.

Solidi quoque habent duplicatam lateris ad latus rationem. Quare etiam Cubi eo, quòd sint solidi similes. Sic 27. & 64. habent duos medios proportionales 36 & 48. & latus 3. cubi 27. prius in se; deinde in productũ 9. ductus facit 27. Sicut, & latus 4. cubi 64. priùs in se, deinde in productum 16. ductus facit 64. Vnde proportio, quæ est inter 27. & 64. est illa ipsa, quæ est inter 3. & 4. sed triplici vice repetita.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XX. Eucl. 22.

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

SInt 9. 36. 144. continuè proportionales. *Dico quod si 9. est quadratus, & tertium 144. esse quadratum.*

Quia cum inter 9. & 144. cadat vnus medius proportionalis erunt plani similes ex propos. 11. huius, & ita ex definitione proportionalia habebunt latera: Quare ita erit 3. ad 3. vt latus alius 144. ad sui Ipsius alterum latus: sed 3. & 3. sunt æquales: Ergo, & latera numeri alius 144. erunt æqualia 12. & 12., quare quadratus erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXI. Eu. 23.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, & primus sit Cubus: quartus etiam Cubus erit.

SInt quatuor numeri 27. 45. 75. & 125. continuè proportionales. Dico, *quod si primus sit Cubus, & vltimum quoque cubum esse.*

Probatur. Nam erunt similes solidi primus 27 & quartus 125 eo quòd inter eos duo medij proportionales numeri intercipiantur ex prop. 12. Quare ex definitione ita erit 3. ad 3. & hic ad 3. vt latus primum ad latus secundum, & hoc ad latus tertium numeri 125. Sed 33. & 3. sunt numeri æquales. Vnde latera numeri 125. erunt inuicem æqualiter æqualia, quare cubus erit.

THEOR. V. PROPOS. XXII. Euc. 24.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam quadratus ad quadratum, si primus quadratus sit, etiam secundus talis erit.

SI sit 36. quadratum ad 64. numerum, vt quadratum 9. ad quadratum 16. *Dico etiam numerum 64. esse quadratum.*

Probatur. Quia inter quadratos 9. & 16. cadit vnus proportionalis numerus V.g. 12. ex propos. 11. huius, sed ita est quadratus 36. ad numerum 64. Ergo ex propos. 18. etiam inter 36. & 64. cadet vnus medius proportionalis, Videlicet 48. Ergo ex propos. 20. huius. Si 36. est numerusquadratus, talis erit, & 64.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII. Eu. 25.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, si primus sit cubus, talis quoque erit secundus.

SInt 64. & 216. numeri, qui habeant rationem eam inter se, quam 8. obtinet comparatus ad numerum 27. ambo cubos. *Dico, si 64. est Cubus, quòd talis quoque erit 216*

Probatur, quia inter 8. & 27. vtpote inter numeros Cubos ex propos. 19. huius duo proportionales cadunt numeri: Quapropter ex propos. 8. cadent quoque tales numeri duo proportionales inter 64. & 219. Quare ex propos. 21. cum 64. Cubus ponatur, talis quoque erit numerus 216.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps sint proportionales. Tertius ab vnitate quadratus erit, & vno intermisso quilibet sequens. Quartus autem Cubus, & duobus intermissis quilibet alius, Septimus autem Cubus simul, & quadratus, & quinque intermissis omnes alij.

SInt ab vnitate continuè proportionales

A	B		C		D			E
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

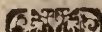
1024. 2048. 4096. F

Primò *Dico tertium 4. esse quadratum, & intermisso vno, sextum 16. esse quoque quadratum, & intermisso vno, octauum 64. esse quadratum,* & sic sequendo.

Probatur. Nam: Quod 4. sit Quadratus numerus, inde patet: quia sub duobus æqualibus numeris 2. & 2. continetur ex definit. 4. Siquidem Vnitas est ad 2. vt 2. est ad 4. sed vnitas metitur 2. per se ipsam, ergo, & metietur numerus 2. numerum 4. per se ipsum, nempe per 2. Quod autem, & alij, qui intermisso vno succedunt sint quadrati, etiam patet ex propos. 20. eò quia intermediet inter vtrumque medius proportionalis V.g. inter 4. & 16. numerus 8. At 4 est Quadratus quapropter, & 16. erit quadratus ex pa. 22. h.

Secundo Dico, quod quartus ab vnitate Cubus sit: Nam Vnitas est ad 2. vt 4. ad 8. eodemque modo vnitas mensurabit 2. vt 4. numerũ 8. Sed iam ex primę partis probatione 2. multiplicans 2. & per se ipsum generat 4. Ergo etiam modo 2 multiplicans 4. faciet 8. Ergo 8. Cubus erit. Quod autem intermissis duobus, omnes alij sint Cubi, patet ex 19. propos. quia inter 8. & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur.

Tertiò Septimus ab vnitate ostensus est cubus, vt patet ex numero D, quia occupat eum locum post primum cubum intermissis duobus: Est quoque Quadratus: quia post primum, & secundum Quadratum intermisso vno occurrit: Ergo simul erit Cubus, & Quadratus.



THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si ab vnitate quotcumque numeri proportionales deinceps fuerint; qui verò post vnitatem Quadratus sit, & reliqui omnes Quadrati erunt, & si qui post vnitatem sit Cubus, & reliqui omnes Cubi erunt.

SI sint ab vnitate continuè proportionales numeri 2. 4. 16 64. 256. 1024. & primus 4. sit Quadratus. *Dicit reliquos omnes esse quadratos.* Probatur. Quia; cùm sint tres proportionales 4. 16. 64. primusque 4. sit quadratus, & tertius quadratus erit; Eodem modo, cum 16. 64. & 256. sint continuè tres proportionales, & 16. sit quadratus ergo ex propos. 20. huius, & 256. erit quadratus, & sic de reliquis. Nam numerus 4. ex hypothesi, numerus verò 16. quadratus eo, quòd ex prop. præc. sit quintus ab vnitate.

Probatur quoque de cubis eodem modo. Nam si sint 8. 64. 512. 4096. 32768. 262144. (2. 3. 4. 5. 6 7) quartus ab vnitate 512. Cubus erit ex propos. anteced. & duobus intermissis ex propos. 19. 262144. erit quoq; Cubus. Sic quia primus 8. ex hypothesi est Cubus: Ergo ex prop. 29. numerus quoq; 4096. Cubus erit ob duos proportionales intermedios 64. & 512. Cum autem 512. quartus, & quintus 4906. sint cubi, & ita sit tertius 64. ad quartum 512. vt 512. ad 4096. ex propos. 21. huius, tertius quoque 64. erit Cubus. Cùm verò tertius 64. sit cubus, etiam ob duos proportionales intermedios. Sextus 32768. & sic de reliquis.

TRACTATVS XI. IN IX. LIBRVM EVCLIDIS

PARS TERTIA.

De Planorum, Solidorumque generatione, & inuentione.



HIc agit Euclides de planis, solidisque numeris inueniendis, etiam Quadratis, & Cubis; & quærit, qui numerus multiplicans alium Cubum, vel Quadratum efficiat, aut etiam numerum solidum aut planum: Reliqua verò de quibus pertractat de numeris paribus, & imparibus, & de perfectis, & imperfectis, non putauimus inter elementa necessariò collocanda. Cùm nomen vix consequantur in alijs partibus mathematicis; substituimus autem Expensionem de æquipotentia numerorum, & inuentione Quadratorum, qui tractatus lib. 10. deseruiunt, & absolutè necessarij sunt.

EXPENSIO I.

De numerorum æquipotentia ad gignendos æquales planos.

SIcut lineas lib. 2. Euclidis ostendimus æquipotentes, & in diuersas partes sectas, posse æquiualere quadrato totius. Sic nunc idem videndum est de numeris. Cû Euclides de his non agat; sed acutissimè Clauios, verùm cum eius ostensiones visæ nobis sint difficiles, alias attulimus, quæ faciliori pede percurri possint.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si numerus aliquis in duas partes secetur Planus numerus totius, partisque multiplicatione consurgens æquatur quadrato, eiusdem partis, partiumque plano.

		7	
	3		4
12	9		21

* SIt numerus 7. qui diuidatur in duas partes in 3. & 4. multiplicetur que totus per 3. & fiant 21. deinde ducatur 3 in se, & fiat quadratum 9. in alteramque partem, & fiet 12. *Dico, quòd planus numerus 12. & quadratus 9. æquantur plano* 21.

Probatur. 3. multiplicauit 4. & fecit planum 12. & se, & fecit 9. Ergo ex propos. 17. sept. ita erit 3. ad 4. vt 9. ad 12. Rursos idem 3. multiplicauit se, & fecit 9. multiplicauit quoque 7. & fecit 21. Ergo ex eâdem, ita se habet 3. ad 7. vt 9. ad 21. Quia ergo est 3. ad 4. vt 9. ad 12. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, vt 9. ad 9 & 12. simul; sed eadem proportio est 3. ad 3. & 4. simul, quæ 3. ad 7. & eadem proportio, quæ est 3. ad 7. vt dixi est 9. ad 21. Ergo eadem proportio erit 9. ad 9. & 12. quæ 9. ad 21. quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æquales inter se 9. & 12. simul, ac 21. quod eidem 9. eandem dicant proportionem: hæc propos. ostenditur de lineis propos. 4. l. 2.

COROLLARIVM I.

* HInc educitur: quod idem dicendum de alia parte. Nam totus 7. multiplicatus per 4. nempe 28. æquabitur quadrato ipsius 4. nempe numero 16. & plano partium hoc est, numero 12. In quo considerandum est, quod partiũ numerus est in vtroque idem, nempe 12. quoniam partes sunt ædem 3. & 4. quæ se inuicem multiplicant.

COROLLARIVM II.

* HInc etiam est, quòd si assumatur aliquis alius numerus præter partes, & ipsæ partes; totumque multiplicetur; planus numerus partium, per illum, alium numerum multiplicatus æquabitur totius plano ex eo alio numero consurgente; Sic 3. & 4. partes numeri 7. si multiplicentur per 5. alium numerum, dabunt planos numeros 15. & 20. simul æquales plano 35. ex 5. per 7. genito: Ratio verò est eadem. Nam ita est 15. ad 20. vt 3. ad 4 ob numerum 5. multiplicantem & 15. ad 35. vt 3. ad 7. ob eundem 5. multiplicantem ex 17. septimi. Quaderè, si est 15. ad 10. vt 3. ad 4. erit etiam componendo 15. ad 15., & 20. simul, vt 3. ad 3. & 4 simul; sed 3. ad 3. & 4 simul est eadem, quam 3 ad 7. & 3. ad 7. eadem, quæ 15. ad 35. vt dixi. Ergo proportio 15. ad 15. & 20. simul erit eadem, quæ 15. ad 35. Ideoque ex prop. 9 lib. 5. æquales erunt numeri 15. & 20. simul, ac 35. cum ad eosdem, 15. numerus eandem dicat proportionem. Hoc etiam ostenditur de lineis lib. 2. propos. 4.

COROLLARIVM III.

ELlicito. Quod etiam si numerus in plures partes, quam 2. secetur, idem tamen erit, vt si 7. secetur in 3. 2. & 2. Nam totus numerus per aliquam partem V. g. 3. vel aliquem alium numerum multiplicatus, æquabitur singulis partibus per eundem numerum multiplicatis; & simul sumptis eadem ratione, sic si 3. 2. & 2. multiplicentur per 3. hi facient 9. 6. & 6. qui æquabunt 21, numerum consurgentem ex 7. in 3. ducto.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si numerus in duas partes diuidatur, plani duo sub partibus, & toto comprehensi æquantur quadrato totius.

SIt numerus 7. diuisus in duas partes 3. & 4. & ex toto 7. & 3. fiat planus 21. & ex 7. & 4. planus 28. *Dico hæc duo plana æquari totius quadrato* 49.

7
3 7 4
21 49 28

* PRobatur. Nam quia 7. multiplicat 7. & 3. & facit 49. & 21. erit 3. ad 7. vt 21. ad 49. Sic quis multiplicat se, & 4. erit 4. ad 7. vt 28. ad 49. ex propos. 17. l. oct. cumque 7. multiplicet 3. & 4. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 21. ad 28. Ergo componendo erit 3. ad 3 & 4. simul, quæ 21. ad 21. & 28. simul. Sed proportio 3. ad 3. & 4. simul est eadem; quæ 3. ad 7. & 3. ad 7. quæ 21. ad 49. ergo ita erit 21. ad 21. & 28. simul vt 21. ad 49. quare ex propos. 9. l. 5. erunt æquales 21. & 28. simul ipsi 49. Id ostend. propos. 3. l. 2. de lineis.

THEOR. III. PROPOS. III.

Duo quadrata, cum duobus numeris planis, ex lateribus eorum effecta, æquantur quadrato, ex duobus lateribus tanquam vno assumptis.

* SIt quadratum 16. & quadratum 9. quorum latera sint 4. & 3. & duo plani ex eorum lateribus 4. & 3. effecti, qui erunt 12. & 12.

3 4
21 7 28
9 12 12 16
49

Dico, *quod hæc omnia simul æquentur quadrato totius numeri* 3. & 4. vt vno latere assumpti nempe 7. cuius quadratum est 49.

Probatur. Duo plani ex toto 7. & partibus 3. & 4 producti nempe 21. & 28. ex præced æquantur quadrato totius 7. Sed ex 1. huius planus numerus sub toto comprehensus, & parte, vt 21 & 28, æquatur quadrato ex parte illa comprehendẽte, & plano numero à partibus comprehenso, & ideo planũ 21. æquatur quadrato 9. ex 3 & plano numero 12. ex 3. & 4 multiplicatione effecto, sicut planus 28. æquatur quadrato 16. ex 4. & plano eidẽ 12. Ergo quadratum 16. & 9. cum planis numeris 12, & 12. ex lateribus eorum 3. & 4 æquabunt quadratum ex ijs lateribus, vt vno hoc est 7. quod est 49 cùm æquent planos 21. & 28 æquantes simul quadratum totius 7. Ostenditur de lineis propos. 6.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si numerus bifariam sectus sit, & quidam numerus ei additus. Quadratum dimidij cum numero adiecto æquat planum numerum ex toto, & adiecto per adiectum multiplicato, & quadratum dimidij.

8
4 4 3

* SIt numerus 8. & diuidatur bifariam, & sit 4. addaturque 3 & sint 7. & 3. cum 8 toto sint 11. ex quo 11. toto cũ addito 3. fiat planus numerus 33. Inde ex dimidio 4 fiat quadratum 16. *Dico, quod planus numerus 33. & quadratum 16. æquant 49. quadratum lateris 7. dimidij 4. cum adiecto 3.* Quod, & ostenditur propos. 8. de lineis l. 2.

Probatur. Nam planus ex 11. & 3. æquat ex Coroll. 3. propos. 1. duos planos sub medietate duplici 4 & 4. & 3. adiectâ comprehensos; nempe 12. & 12. & quadratum ex 3. nempe 9. Si ergo addamus etiam quadratum ex 4. hoc est 16. habebimus duos planos numeros ex lateribus quadratorum, & duo quadrata. Sed duo quadrata, & duo plani ex lateribus quadratorum æquant quadratum ex lateribus pro vno latere sumptis ex 3. pro-

pos. huius. Quare æquabunt quadratum 49. ex dimidio cum adiecto numero: Siquidem duo plani ex lateribus, non ex toto numero, & uno 8. sed ex dimidio, eius facti sunt, vt duo esse possint. & ideo hi plani obtinent latera ex dimidio numeri 4. pro latere, & pro alio ex adiecto 3. constituta, quæ simul addita vt fiot 7. faciunt quadratum 49. cui duo quadrata 16. & 9. & duo plani ex ipsorum lateribus 12. & 12. æquantur ex propos. 3. huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si numerus secetur in partes æquales, & inæqualis numerus planus sub partibus inæqualibus contentus vna cum quadrato, quo maior pars dimidiam superat, æquatur quadrato, qui ex dimidio enascitur.

*SIt numerus 10 & secetur in partes æquales in 5. & 5. & inæquales in 7. & 3. & numerus, quo 7. maior pars superat dimidiam 5. sit 2. *Dico, quod planus numerus 21. ex 3 & 7. productus* vnà cum quadrato ex 2. hoc est 4. æquat quadratum 25. ex medietate numeri 10. hoc est 5.

* Probatur. Quia ex 1. huius Coroll. 3. planus numerus 21. ex 3 & 7. inæqualibus partibus, æquat duos planos numeros, ex 2. & 2. per 3. genitos, nempe 6. & 6. & quadratum 9. ex 3. productum, si ergo addamus quadratum 4. ex 2. erunt duo quadrata 4. & 9. cum duobus planis 6 & 6. æqualia quadrato 25. ex eorum lateribus consurgente, vt vno sumpto ex prop. 3. quæ sunt 2. & 3. & faciunt 5. Quod verò planus numerus 21. ex 3. & 7. genitus duos planos 6 & 6. cum quadrato 9. ex 3. exequet; patet ex Coroll. 3. propos. 1. nam 7. in tot partes diuidi potest, hoc est in partem, quâ medietatem superat 2. & in partem, quâ medietas superat minorem 2. & in ipsam minorem 3. siquidem tanto deficit minor pars à medietate, quanto maior super medietatem augescit, & 7. maior est medietate numero 2. sicut 3. est minor medietate eodem numero 2. Ostenditur prop. 7. lib. 2. de lineis.

EXPENSIO II.

De Planorum, Solidorum, Quadratorum, & Cuborum generatione.

MVltiplicatio est illa, quæ generat numeros planos, vel solidos. Vnde hic quæritur; quinam numeri inuicem multiplicati, Quadratos, & Cubos, seu Planos, Solidosque numeros efficere possint.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Si duo plani similes numeri multiplicantes se mutuò, fecerint quendam numerus productus Quadratus erit.

SInt duo plani similes 6. & 24. qui se mutuò multiplicent, & generent 144. Dico *hunc numerum esse quadratum*. Quod, vt ostendatur, multiplicandus est numerus 6. in se, & faciet 36. & sic 6. numerus multiplicabit se, & numerum 24. vnde ex propos. 17. ita erunt multiplicatores 6. ad 24. vt geniti 36. ad 144. sed ex propos. 18. lib. 8. inter planos similes vnus medius proportionalis cadit numerus V. g. Inter 6. & 24. cadit 12. Ergo etiam ex propos. 8. lib. 8. cadet inter genitos, & eâdem proportione gaudentes 36. & 144. Cadat igitur, & sit 72. Cum igitur 36. 72. & 144. sint tres continuè proportionales, primusque 36. sit quadratus ex propos. 20. lib. 8. & secundus 144. quadratus erit, quod oportebat ostendere.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Si duo numeri se se mutuò multiplicantes faciant quadratum, similes plani erunt.

SInt 6. & 24. qui faciant se inuicem multiplicantes quadratum 144. Dico, *quod isti numeri 6. & 24. similes plani erunt*. Nam primus 6. multiplicet se, & faciat 36. Erunt duo numeri quadrati 144. & 36 inter quos interueniet aliquis proportionalis numerus medius ex propos. 18. l. 8. Et quia 6. multiplicando se, & 24 facit 36. & 144. erunt in eadem proportione geniti, & generantes 6 & 24. Vnde etiam inter istos cadet ex propos. 8. lib 8. aliquis proportionalis numerus 12. Quapropter ex propos. 18. erunt similes plani 6. & 24.

COROLLARIVM I.

ELicitur. Quod si duo numeri quadrati etiam æquales faciant quendam, iste factus erit quadratus. Quòd duo quadrati facientes sint plani similes, eo quia quadrati ponantur, vt diximus in ostensione propos. 18. l. 8.

COROLLARIVM II.

ELicitur quoque quod, si quis numerus quadratus alium multiplicans faciat quadratum, iste alius multiplicatus quadratus erit. Erunt enim ex hac 7. propos. plani similes. Vnde inter eos medius proportionalis cadet aliquis numerus; quâ ex re ex propos. 20. lib. 8. si primus sit quadratus, & secundus quadratus erit.

THEOR. III. PROP. VIII.

Si compositus numerus aliquem multiplicans creet aliquem alium, productus solidus erit.

NVmerus compositus 6. multiplicans quemlibet alium numerum 4. faciet alium aliquem putà 24. *Dico genitum 24. esse Solidum.*

Probatur numerus 6. dicitur compositus. Itaq; metietur eum aliquis numerus præter vnitatem. Sit ergo 2. qui metiatur 6. per 3. idest ter replicatus. Propterea que 2. multiplicans 3. facit 6. & 6. multiplicans 4. procreat 24. cùm ergo 24. consurgat à multiplicatione trium numerorum 2. 3. 4. ex definitione 4. lib. 8. factus 24. solidus numerus erit.

THEOR.

THEOR. IV. PROP. IX.

Si Cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

NVmerus Cubus 64. se multiplicando procreet aliquem nempe 4096. Dico *hunc quoque esse Cubum*. Repertum sit latus Cubi 64. quod est 4. & ex hoc 4. in se fiet 16. & deinde 16. multiplicetur per 4. erunt 64.

Progress. 1. Idem 4. se multiplicando fecit 16. & multiplicando 16. generauit 64. Quapropter ex prop. 17. sept. eadem proportio erit inter 4. & 16. quæ est inter 16. & 64. Sed vt 4. metitur 16. per 4. & 16. 64 ita vnitas metitur 4. per 4. idest vnitas quater accepta facit 4. sicut 4. quater acceptus componit numerum 16. & 16. numerum 64. Quamobrem eadem pars erit vnitas numeri 4. quæ 4 numeri 16. & quæ 16. numeri 64. Vnde inter vnitatem, & numerum 64. duo medij proportionales cadunt numeri 4 & 16.

Progress. 2. Considerandum verò est, esse ita vnitatem ad 64 vt 64. ad 4096 Quoniã 64. multiplicando se, idest sexaginta quatuor vicibus acceptus generat 4096. sicut vnitas 64. vicibus accepta facit 64 Quare eadem proportio erit inter vnitatem, & 64. quæ est inter 64 & 4096.

Sed ex primo prog inter vnitatem, & 64 duo medij proportionales numeri intercipiuntur; Ergo quoque ex propos. 8. lib. oct. cadent inter 64. & 4096. etiam duo proportionales numeri intermedij Quadere ex prop. 21. I. oct. cum 64. sit Cubus, talis quoque erit numerus 4096.

THEOR. V. PROPOS. X.

Si Cubus numerus Cubum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

SIt Cubus 8. qui multiplicet Cubum 27. & faciat 216. Dico *hunc quoque esse Cubum*.

Probatur. Nam si 8. multiplicet se productus cubus erit ex præced. & quia 8. multiplicauit duos numeros 8. & 27. & generauit 64. & 216. eadem proportio erit ex 17. l. sept. inter genitos 64. & 216. quæ est inter generantes 8. & 27. sed inter istos duo medij proportionales cadunt numeri, cùm sint cubi ex propos. 19. i. oct. Ergo ex propos. 8. inter 64. & 216. Quapropter ex prop. 21. i. oct. cum primus 64. ex præced. sit Cubus etiam secundus 216. Cubus erit.

THEOR. VI. PROP. XI.

Si Cubus numerum aliquem multiplicans faciat Cubum, ille multiplicatus Cubus erit.

CVbus numerus 27. multiplicans aliquem v.g. 8. faciat Cubum 216. Dico 8. *quoque Cubum esse*.

Probatur eodem argumenti methodo: Nam 27. multiplicet se; & faciat 729. Itaque, quia 27. multiplicauit 27. & 8. generantes, & protulit genitos 729. & 216. eadem proportio erit ex propos. 17. sept. inter 27. & 8. quæ reperitur inter 729. & 216. Verùm 729. & 216. sunt Cubi; hic quidem ex hypothesi, ille autem ex propos 9. & hac de causa ex propos. 19. lib. oct. inter eos duo medij proportionales interponuntur. Ergo etiam ex 8. lib. 8. inter 27. & 8. Vnde ex propos. 21. l. 8. cum primus 27. ex hypothesi sit cubus, etiam secundus 8. cubus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XII.

Si numerus quispiam se multiplicet, & genitus sit Cubus, generans quoque Cubus erit.

SI 64. genitus ex multiplicatione 8. in se Cubus est. Dico, *& numerum 8. qui fuit in se multiplicatus Cubum esse*.

Multiplicetur rursus 64. per 8. & fiant 512. qui cubus erit; quia est productus ex multiplicatione numeri 8. in se, rursus numeri 8. in productum 64 ex sui multiplicatione exortum. Qua ex re, cùm numerus 64. numerum aliquem multiplicans generet Cubum, multiplicatus 8. ex præc. propos. Cubus erit.

EXPENSIO III.

De numeris quadratis inueniendis.

AD libri 9. demonstrandas propositiones ista omninò Expensio est necessaria, cùm enim ibi agatur de inuentione irrationalium multarum, inter eas quædam sunt, quarum Inuentio in inuentione numerorum, qui cum alijs numeris, vel quadratum efficiant, vel etiam non efficiant, prout res postulauerit, consistit.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus quoque sit.

EX propos. 17. lib. 8. reperiantur duo numeri plani similes, quorum vterque, vel par sit, vel impar V. g 10. & 40. detrahaturque minor à maiore, & reliquus par erit, nam etiam detracto impare, ab impari residuus numerus par reperitur, quia auferendo impar aufertur differentia vnitatis, quà differebat maior à pari, & sic relinquitur par. Quare cum residuum sit par f. 30. diuidatur per medium, vt sit 15. Si ergo 40. planus numerus maior multiplicet minorem planum 10. fiet numerus quadratus 400. ex 6 propos h. Deinde multiplicetur 15. in se, medietas residui, & fiet quadratus 225. Dico igitur, quod si duo hęc quadrata addantur simul, *Quod fiet numerus quadratus, qualis est 625.*

40 ablatus 10. Resid. 30. med. 15.
10. in 40. dat 400. 15. in 15. dat 225.
Additi 225. & 400. Sunt 625. quad.
cuius radix 25. idest 10. & 15.

Prob. ex propos. 4. huius. Nam ibi ostendimus, quod si aliquis numerus dimidius sit, cui addatur aliquis numerus, & summa in se multiplicata faciat quadratum, quod hoc erit æquale quaquadrato ex ipsius dimidio, sine adiectione sumpto, & plano numero consurgenti ex summa

addiecti, & totius pro vno latere, & adiecti tantùm pro alio.

Sic itaque hic fecimus. Sumpsimus numerum 30. addidimusque 10. planum numerum, & fecimus planum 40. constitutumque est ex 10. ipso adiecto, & multiplicato in 40. (nempe in totum 30. cum adiecto 10.) numerum 400. Deinde assumpta est medietas 15. numeri 30. & factum est quadratum 225. Quare, si addamus 400. & 225. fiet quadratus numerus; Erit enim ille numerus æqualis quadrato ex medietatis 15. & adiecti 10. summâ 25. in se multiplicata consurgens, qui est 625. Numeri verò coniuncti simul 400. & 225. sunt quadrati, & 225. quidem ex effectione, & 400. ex 6. huius; quòd duos numeros ex quorum multiplicatione generatur, assumpserimus planos similes.

PROB. II. PROPOS. XIV.

Numerum quadratum inuenire, qui subductus ab altero quadrato, relinquat quoque quadratum numerum.

Construantur omnia, vt supra, nimirum assumantur duo plani similes 10. & 40. pares ambo, vel ambo impares, & subducatur alter 10. ab altero 40. & residuum 30. bifariam secetur, & fit medietas 15. & habebimus duos numeros requisitos 15. nimirum medietas, & 25. eadem numeri 30. medietas cum addito 10. multiplicentur in se numeri 15. & 25. & fiunt 225. & 625. genici. Dico, *quòd si minor 225. subducatur à maiore 625. relinquet 400. qui est numerus quadratus.*

Prob. Nam subducto quadrato 225. à quadrato 625. relinquitur planus numerus ex toto 30. cũ addito 10. & additi 10. multiplicatione generatus f. 400. ex præc. Sed totus, cum addito nempe 40. & additus 10. fuerunt duo plani similes ex constructione, ergo planus numerus ex eorum multiplicatione progeneratus erit quadratus ex 6. huius.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Inuenire duos numeros quadratos, quorum excessus non sit quadratus.

Elige duos planos non similes, V g. 8. & 30. nempe totum 22. cum addito 8. qui multiplicati inuicem dabunt numerum planum non quadratum 240. medietas verò numeri 22. nempe 11. multiplicetur in se, fiet numerus quadratus 121. qui simul additi, vt fiat 361. ex propos. 7. huius, erunt æquales quadrato ex medietate 11. & addito 8 nempe numero 19. quod quadratum est 361. Ergo 361. & 121. erunt duo quadrati numeri, quorum minor subductus à maiore relinquet pro excessu numerum non quadratum 240.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

Duos numeros quadratos inuenire ita, vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

18. Ablat. 8. Resid. 10. Med. 5.
8. in 18. dat 144. * 5. in 5. dat 25.
Additi 144. & 25. dant Quad. 169.
Cuius radix 13. idest 5, & 8.

Præceptum 1. Eadem constructio fiat, quæ priùs & assumptis duobus planis similibus paribus, vel imparibus, vt 8. & 18. quorum latera sunt proportionalia 2. & 4. primi, & 3. atq; 6. secundi. Subducaturq; alter ab altero, & residuetur 10. qui diuidatur per medium, & fit medietas numerus 5. Eritque quadratum 25. ex multiplicatione numeri 5. in se, simulque planus numerus 144. ex 8. in 18. æqualis quadrato ex summa 13. numerorum 5. & 8. qui est 169. quadratus.

Auferatur deinde ex latere 5. vnitas, & relinquuntur 4. fiatque quadratum A 16. Dico, *quod hic numerus 16. compositus cum quadrato 144. non facit numerum quadratum, nimirum eorum quadratorum summam 160. non esse quadratum.*

Totum D 16. Ablat. 8. B. Resid. 8. 2 Med. 4.
B 8. in D 16. dat G 128. * 4. in 4. dat 16. Quad.
Additi 128. & 16. æquant Quad. 144. C.
Cuius Radix 12. idest B 8. & 4.

Præceptum 2. probationis gratiâ. Assumatur duplum numeri 4. & fiant 8. & iuxta constructionem præcedentem adiciatur numerus 8. vt priùs, & fiat totum D 16. Itaque habemus numerum totum 16. D. idest B 8. cum adiecto 8, B. Diuidantur per medium B 8. & fit 4. Deinde multiplicetur 4. in se, & fit quadratus 16. & multiplicetur postea totus numerus B 8. & B 8. adiectus in vnam summam redacti hoc est 16. D. per ipsum B 8. adiectum, & erunt G 128. qui duo numeri quadratus 16. & 128. planus numerus ex 6. huius æquabunt quadratum 144. C numerum, ex summa dimidij 4. & adiecti B 8. nempe 12. se multiplicantis, qui quadratus numerus 144 C appelletur ob distinctionem quadrati item 144. prioris præcepti.

Itaque aduertendum est quadratum 16. coniunctum cum plano secundi præcepti G 128. minore, vtpote à minori latere 16. per multiplicationẽ 8. producto æquat quadratum C 144. & coniunctus cum plano maiore 144. primi præcepti effecto, qui à lateribus 8. & 18. prouenit æquat numerum 160.

Obseruandum quoque est, quod quadratum 144. C & anteced. præc. 169. habent latera, quæ sola vnitate differunt nimirum 12. & 13.

Prob. Nunc propos. Itaque numerus A 16. est quadratus, vtpote ex 2. præc. productus ex multiplicatione 4 in se, sic 144. quadratus est, quòd sit productus ex duobus numeris planis ex propos. 6. huius, qui simul additi faciunt numerum 160. non quadratum. Si enim numerus 160. quadratus, foret aut esset æqualis quadrato 169. prioris præcep. aut eo maior. Seu esset æqualis quadrato posterioris præcepti C 144. aut ipso minor, aut esset quadratum quoddam inter hos numeros quadratos medium: sed neutrum ex istis esse potest; Ergo non erit quadratum.

Singulæ itaq; propositiones ostenduntur. Non potest esse æqualis quadrato 169. vel ipso maior, eo quod ex 1. præcept. planum ex lateribus 8. & 18. consurgens 144. & quadratum 25. nascens ex latere 5. ei fit æquale. Hic verò numerus 160. generatus est à dicto plano, sed quadrato 16. cuius latus est tantummodo 4. & ideo minor, quam quadratus 25. cuius latus est 5.

Non potest esse minor hic numerus 160. quadrato C 144. nec ei æqualis; Eo quia huic numero est æquale planum 128. à lateribus 8. & 16. exurgens ex posteriori præcept. vna cum quadrato 16. cuius latus est 4. hic verò numerus 160. nascitur

à dicto

à dicto quadrato 16. Sed plano 144. cuius latera sunt maiora 8. & 18. & ideo etiam ipsum 160. necesse est, quòd sit maius.

Tandem. Non potest esse quid medium. Quoniam si esset quadratum medium inter quadrata 169. prioris præcepti, & quadratum c 144. posterioris præcepti consequeretur latera media inter latus huius, & latus alterius. Sed id non potest esse: Idcirco neque potest esse quadratus numerus medius. Quod ostenditur: Nam vt præaduertimus, latera horum duorum quadratorum 169. & c 144. sunt 13. & 12. qui sola vnitate ex constructione differunt: Vnde nullus numerus inter eos intercipi potest. ex quo consurgat tanquam à latere medio quadratum 160. Quamobrem non erit quadratum.

COROLLARIVM

EDucitur hinc compositum hoc modo ad illos duos quadratos non habere proportionem, quam quadratus ad quadratum; Quia ex propos. 22. lib. 8. cùm componentes sint quadrati, ob proportionem eam quadrati ad quadratum ipse quoque compositus quadratus esset.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Numeros non quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis sit quadratus.

SEcetur numerus quadratus in duas partes non quadratas, & erit factum, quod quæris; siquidem illæ duæ partes non quadratæ erunt tales, quæ compositæ rursùs numerum quadratum efficient.

PROBL. VI. PROPOS. XVIII.

Inuenire numerum, qui ad numerum quadratum, & ad alterum non quadratum, non habeat proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

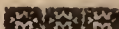
NVmero non quadrato addenda est vnitas, ita tamen, vt per hanc vnitatis additionem nô reddatur numerus quadratus, vt si sint 4. quadratus, & 5. non quadratus, adde vnitatem numero 5. & fiant 6. & quia 6. non est quadratus habebis numerum, quem quæris: si quidem neque ad 5. neque ad 4. proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. At si daretur numerus talis, cui addita vnitas faceret quadratum, vt 8. cui additus 1. facit 9. tunc deme vnitatem, vt sit 7. & obtinebis, quod desideras. Dico itaque; quod iste numerus 6. aut 7. proportionem non habet cum numero 4. & 5. quam quadratus ad *quadratum numerum*.

Nam talem non habet respectu numeri non quadrati; quoniam non potest cadere inter eos aliquis numerus, qui sit medius proportionalis; cùm sola vnitate differant; & ideo nullus numerus inter eos cadere possit; sed nec cùm numero quadrato 4. hac de causa; quod si cõsequeretur eam proportionem, cum primus 4. sit quadratus ex 22. propos. lib. 8. esset quoque quadratus ipse, seu 6. seu 7.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Duos numeros non quadratos inuenire, vt compositus ex ipsis non sit quadratus, neque cum ipsis proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ID facillime fit, si diuidatur numerus quilibet non quadratus, vt 14. in duos numeros inter se primos 3. & 11. & erunt numeri quæsiti. Nam cũ primi sint inter se proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum numerum, & cum numerus 14. ex quo per diuisionem euenere non sit quadratus; neque ipsi sunt; aut possunt esse quadrati; ideoq; nec ad eos habere proportionem quadrati ad quadratum.





TRACTA-



TRACTATVS XII.

IN X. LIBRVM EVCLIDIS

De Lineis irrationalibus.



VT Tractatus linearum irrationalium intelligeretur, necesse fuit priùs aliqua saltem de numeris cognoscere. Vnde tres de numeris libri huic libro præmittendi fuerunt; nulloque modo fieri potuit, vt immediatè hæc tractatio succederet, aut sexto libro, aut præcedentibus. Cognitio verò harum linearum est etiam elementaris. Siquidem cũ sint complurimę magnitudines latera irrationabilia obtinentes, tàm planę, quàm solidæ; multoties, quis errorem acciperet, dum putat lineam, seu latus alicuius figuræ se posse numeris exprimere, quòd inexprimibile est; & quia insuper ostendit Euclides spatia quædam æqualia quadratis irrationabilibus, V. g. parallelogramma applicata lineæ rationali alterum latus irrationale efficere talis, vel talis rationis: nos illam cognitionem tanquam minus necessariam ab elementis ablegauimus sola generica cognitione contenti.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam ipsum de incommensurabilibus librum aggrediamur, quædam principia ad eum spectantia præcognoscere oportet: hæc autem sunt.

DEFINITIO I.

COmmensurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

Sint lineæ altera quatuor palmorum, altera septem palmorum; quia palmus metitur vtrasque commensurabiles appellantur.

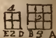
DEFINITIO II.

INcommensurabiles verò, quarum nulla communis mensura contigit reperiri. Ergo duę lineæ tales essent, quarũ vna sex palmos contineret, altera verò, nec palmo ex æquo mensurari posset quantumcumque multiplicatis ipsius partibus aliquotis, nec semipalmo, nec quarta palmi, nec septima, nec octaua, nec decima, nec quæcunque alia; illa linea irrationalis respectu lineæ sex palmorum appellatur; cum tamen respectu alterius lineæ, rationalis esse queat. Vnde irrationabilitas alicuius lineæ, seu quantitatis semper respectiuè sumitur.

DEFINITIO III.

REcta lineæ potentia commensurabiles sunt; cum quadrata earum idem planum metitur.

Sint duo quadrata primum AB, quod capiat nouem quadrata, alterum BD quatuor, hæc quadrata dicentur commensurabilia, & latera eorum, potentiâ commensurabilia. Sunt verò lineæ, vt infra ostendam, quæ longitudine, & potentiâ commensurabiles sunt; aliæ solum potentiâ, quòd quidem earum quadrata aliquâ communi mensurâ dimetiri possint; sed non ipsę lineæ, & istæ vocantur potentiâ tantùm commensurabiles.



DEFINITIO IV.

INcommensurabiles lineæ potentia sunt, cum quadrata earum nulla communi plana mensura mensurantur.

DEFINITIO V.

ALicui lineæ, aliquæ erunt longitudine commensurabiles; aliæ potentia tantùm; aliæ erunt quoque incommensurabiles omninò.

Hæc itaque linea, cui aliæ secundùm commensurabilitatem, & incommensurabilitatem comparantur, dicenda est *Rationalis*, Itaque tota rationalitas, & irrationalitas sumitur relatiuè ad aliquam lineam propositam; cùm alioquì etiam irrationales illi propositæ, alijs lineis ab illis diuersis, rationales dici possint.

DEFINITIO VI.

ET huic commensurabiles, siue longitudine, siue potentia tantùm, Rationales dicantur.

DE-

DEFINITIO VII.

VT illi omninò incommensurabiles, irrationales. Nimirum tum potentiâ, tum longitudine.

DEFINITIO VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta linea fit, dicatur Rationale.

Quemadmodum linea dicitur Rationalis, quæ notæ quantitatis est, sic quadratum ab ea descriptum rationale dicitur, & respectu eius cæteræ planities commensurabiles, seu Incommensurabiles dicuntur, si nulla planitie, quæ communis mensura sit tum propositæ planitiei, tum alterius reperiatur.

DEFINITIO IX.

ET quadrata huic commensurabilia rationalia.

DEFINITIO X.

ET huic incommensurabilia pariter irrationalia appellantur, siue sint quadrata, siue alicuius alterius figuræ.

DEFINITIO XI.

REcta verò, quæ illis quadratis irrationalibus latera sunt, vel quadratis quibuscumque æqualibus spatiis irrationali cuiuscumque figura sit, illæ dicantur irrationales.

Si spatia itaque incommensurabilia fuerint, quadrata; latus illorum irrationalis est linea, si quadrata non fuerint, tunc illis figuris irrationalibus quadratum æquale, habebit latus, quod linea irrationalis appellanda est.

AXIOMATA I.

MAgnitudo quamcumque magnitudinem mensurans, etiam compositam ex ipsis magnitudinibus mensuratis, mensurat.

II.

Magnitudo mensurans, aliquam, mensurat quoque omnem aliam, quam illa mensurata mensurat.

III.

Magnitudo mensurans totam, & ablatam; mensurat quoque reliquam magnitudinem.

EXPENSIO II.

De commensurabilibus quantitatibus.

VT irrationales quantitates euidentiùs innotescant, prius de rationabilibus, & earum commensurabilitate agendum, & ad numeros habitudine. Quare id præsenti expensione præstabimus.

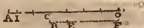
PROBL. I. PROP. I. Euc. 2.

Duabus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram reperire.

DVÆ magnitudines dentur, quæ sint commensurabiles, quarum oporteat maximam mensuram reperire.

Linea detur punctata BF, & alia continua linea OAI Detrahaturque minor punctata à maiore, quoties fieri potest, & remaneat AC, quæ iterum subducatur à punctata FB, quoties fieri potest, vel totam auferet, & sic AC, erit maxima communis mensura, vel non, sed remanebit aliquid s. EB: Hoc iterum subducatur ab AC, & remaneat IA: Iam tandem, cùm sit, commensurabilis, aliquod residuum adæquatè mensurabit præcedentē magnitudinem; Et sic *hæc erit maxima communis mensura, qualis est in datis lineis* IA, quæ mensurat EB diuidens eam in duas partes nihilo remanente.

Probatur primò, quòd IA metiatur vtramque. Nam IA metitur BE, sed EB metitur IC: Ergo, & IA metitur IC ex 3. Axiomate. Rursus IC metitur EF; Sed IA, vt modo probatum est, metitur IC; Ergo ex eodem principio metitur quoque IA partem EF; Sed metiebatur EB quoque alteram partem, ergo totam BF metitur. Sed hæc partem CO in linea continua metitur; Ergo, & IA metitur CO. Sed metiebatur etiam CI compartem, & IA se ipsam, quæ simul componunt totam AO. Ergo IA totam lineam continuam metitur; igitur AI totum BF, & totum AO metietur.



Probatur quoque, quòd sit maxima communis mensura: Nam si adesset alia maior: hæc metietur IA minorem, quòd fieri nequit; Nam metietur AO, & BF, hæc autem metitur CO, ergo hæc assignata metiretur CO; sed metiebatur ex supposito totam AO; Ergo, & residuum CA ex 3. princ. Sed residuū CA s. IA, & IC mensurat FB; Ergo hæc assignata metiretur quoque BF; quare, & residuum EB; sed EB mensurabat CI, Igitur EB metiretur CI; quare, & residuum IA; ergo illa maior, quæ assignaretur, mensura metiretur tandem IA minorem, quod esse nequit.

COROLLARIVM

HInc patet. Quod magnitudo aliqua metiens duas magnitudines, metitur etiam earum communem mensuram: Nam assignata illa maior, ad hoc, vt ambas totas posset mensurare, debebat, & earum maximam communem mensuram tandem mensurare; vt in demonstratione ostensum fuit.

Non ponimus hic duas primas propositiones Euclidis: Quoniam sine ipsis possumus omnia ostendere, quæ in hoc libro assumpsimus ostendenda; & alioquin in secunda proposit. ponit id, quod fieri posse, aliqui dubitent, nempe perpetuam detractionem ab aliqua quantitate. Illam autem ponimus alibi ex Ambrosio à Sancto Vincentio

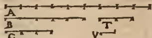
centio

centio efficatiùs demonstratam Tract. de progressionibus linearum.

PROBL. II. PROPOS. II.

Tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

SInt datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C. Sitq; ex præced. 1. propos. reperta maxima mensura duarum A, & B, quæ sit T, si ergo T metiatur quoque C; habebimus maximam mensuram omnium trium A, B, & C; quòd si non metiatur saltem B, & T ex præced. Coroll. commensurabiles erunt, & dabitur aliqua magnitudo, quæ mensurabit A, B, & E cum sint commensurabiles; Quamobrem & mensurabit quoque T duarum A, & B maximam communem mensuram. Inueniatur ergo èx præced. propos. maxima mensura ipsarum C, & T, & sit V. Dico *magnitudinem* V *esse trium* A, B, C *maximam communem mensuram.*



Probatur, quod sit mensura: Nam V est mensura magnitudinis T, & C; Ergo ex 3. pron. & magnitudinum B, & A, quas T mensurat.

Probatur quoque: Quòd ea sit maxima; Nam assignata quædam V. g. palmus, vel quælibet alia; quæ maior dicatur, quam V. Mensurabit B, & A; Quare, & maximā earum mensuram T ex Coroll. præced. Metitur quoque C. Quare, & earum T, & C mensuram communem V. Ergo palmus maior, quam V, metiretur lineam V; quod fieri nequit.

COROLLARIVM

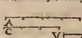
COlligitur hinc quoque; Quòd magnitudo metiens tres magnitudines, & earum maximam communem mensuram metitur. Nam palmus, si metiretur tres A, B, C, metiretur quoque mensuram communem V. Quod si darentur quatuor magnitudines, Repertā trium ex præced. probl. communi mensurā maximā; deinde huius mensuræ repertæ, & quartæ maxima communis mensura reperiri deberet, quæ esset omnium quatuor maxima mensura communis, & sic de alijs pluribus in infinitum.

THEOR. I. PROPOS. III. Eucl. 5.

Commensurabiles magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum: Et si hanc obtineant commensurabiles erunt.

Sicut incommensurabiles proportionem non habent, quam numerus ad numerum; Et si hanc non habeant, incommensurabiles erunt.

PRobatur prima pars. Nam si A, & C sunt commensurabiles. Inueniatur earum communis mensura V, Quoties que ea repetita metitur A toties vnitas repetatur, & faciat numerum æqualem numero V. g. 4 partium; idemq; fiat mensurando C, & faciat 3. Tot itaque mensuras continet A, quot vnitates sunt in numero 4. & tot C, quot vnitates in numero 3. Cum ergo æquè vnitas mensuret



numerum 4. & 3. vt V metitur A, & C proportionem eandem habebit A ad C, quam 4. ad 3. & ideo, quam numerus ad numerum.

Probatur secunda pars. Nam si duæ magnitudines A, & C, proportionem habeant, quam 4. numerus ad numerum 3. quot vnitates sunt in 4. in tot partes æquales sit diuisa magnitudo A, quarum vna sit V; Erit itaque magnitudo A ad V, vt numerus 4. ad vnitatem; Sed vt 4 ad 3 ita ponitur A ad C. Ergo C tot partes obtinebit ex ijs, quibus constat A, nempe ex partibus V, quot vnitates sunt in 3. Nam mensura communis mensurans 4 & 3. iuxta quam proportionem dicunt, est vnitas. Ergo etiam erit V communis mensura, iuxta, quam A, & C proportionem dicunt.

Probatur tertia pars. Nam, si aliquæ quantitates, quæ dicuntur incommensurabiles, proportionem haberent, quam numerus ad numerum ex probatione secundæ partis, commensurabiles essent.

Probatur quarta pars. Nam si proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, & tamen commensurabiles credantur; ex primæ partis probatione habebunt quoq; proportionem, quam numerus ad numerum contra Hypothesim.

THEOR. II. PROPOS. IV. Eu. 9.

Quæ à rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, inter se proportionem habent, quam quadratus ad quadratum numerum.

Et quadrata proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine, commensurabilia.

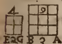
Quæ verò à rectis lineis longitudine non commensurabilibus fiunt quadrata, non habent inuicem proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sicut quadrata proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nec latera habebunt longitudine commensurabilia.

PRobatur prima pars; Nam lineæ commensurabiles proportionem habent, quam numeri: Sed ex 18. lib. 8. numerorum quadrata sunt in duplicata proportione laterum. Sic quoque linearum quadrata sunt in duplicata ratione suorum laterum ex 20 sexti libri. Ergo quadrata linearum, & quadrata numerorum sunt in duplicata proportione laterum; Quare sunt in simili proportione

portione, nempe duplicata laterum suorum.

Probatur secunda pars. Nam ex ijsdem citatis propositionibus est quadratum numerorum, sicut & linearum in duplicata proportione laterum: Sed numerorum quadratorum latera sunt numeris exprimibilis; Ergo, & partes linearum, quæ latera ijs quadratis contexunt: vt o B, & A B tales erunt.



Probatur tertia pars. Nam si lineæ sunt incommensurabiles; quadrata earum non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Siquidem ex prima probatione quadrata, quæ proportionem obtinent, quam quadratus numerus ad quadratum, latera quoque obtinent longitudine commensurabilia; & ideo illæ lineæ contra Thesim essent commensurabiles.

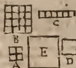
Probatur quoque 4. pars eodem tenore. Nam quadrata, quæ referuntur ad aliud vt quadratus numerus ad quadratum numerum, latera obtinent commensurabilia; & ideo illa quadrata, quæ non referuntur proportione eâ, vt quadratus numerus ad quadratum numerum longitudine latera incommensurabilia possidebunt. Alioquin si latera essent commensurabilia, & ipsa quadrata se haberent; vt quadratus ad quadratum numerum contra hypothesim.

COROLLARIVM

SEquitur. Lineas longitudine commensurabiles tales quoque esse potentiâ: Nam possunt constituere quadrata inuicem commensurabilia.

Lineas verò potentiâ commensurabiles, nimirum quorum quadrata commensurabilia sunt, posse quidem, & longitudine esse commensurabiles, sed non semper. Nam potest V. g. dari quadratum, quod sit tertia pars alterius, & proportionē habeat, quam numerus ad numerum, vt 1 ad 3: quorum latera erunt incommensurabilia omnino cum quadrata non sint inuicem, vt numerus quadratus ad quadratum. Si verò detur quadratum, quòd ad aliud proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, illud semper ex propos. præced. habebit latera commensurabilia respectu alterius. Lineas verò longitudine incommensurabiles, quandoque esse, & potentiâ incommensurabiles, quandoque verò nequaquam: Quia eorum quadrata poterunt habere proportionem V. g. quod vnum sit duplum alterius, nimirum, quam numerus ad numerum, vt 4. ad 9. vel 10 ad 11. licet non eam, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quæ requiritur, vt etiam latera sint commensurabilia. Lineas verò incommensurabiles potentiâ, longitudine quoque semper esse incommensurabiles. Verùm dices. Cùm omnes numeri plani, & solidi proportionē consequuntur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ex propos. 12. l. 8. vt 6. & 24. qui proportionem habent, quam 1. ad 4. vel 4. ad 16.

An hæc quadrata, quæ inuicem hanc proportionem dicunt, imitantur quoque lateribus longitudine commensurabilibus, & Resp. affirmatiuè; Licet enim non possent diuidi in eas partes, in quas latus quadrati 4. & 16. diuiditur; possent tamen diuidi in alias partes V. g. si latus quadrati 6. diuiditur in duas partes latus quadrati 24. posset diuidi in quatuor. Nam cùm quadrata sint in duplicata proportione suorum laterū, si se habent quadrata, vt 1 ad 4. latera erant, vt 1 ad 2. & sicut latus sic, & quadrata ipsa poterunt diuidi: vnum quidem in 4 alterum verò in 16. partes, non tamen commensurabiles illis, quæ 6. plana similia, & 24. constituunt.



Sic si sit quadratum partium quatuor A, & aliud partium 16. vt B, & parallelogrammum 6. ex dictis partibus complectens; cui ex documentis primi libri fiat quadratum æquale D, & huic quadrato E fiat quadratum quadruplo maius, & Quadratum D erit 6. partium respectu quadrati A, & B, & parallelogrammi C, cum huic sit æquale, & quadratum E consequenter partium 24. & ideo latera horum quadratorum; si sumantur, vt constituta partibus 6. & 24 nullis numeris effari possunt, cùm non sint 6. & 24. numeri quadrati; Verùm absolutè, cùm ex alijs partibus quadrata D, & E constitui possint V. g. D ex 4. & E ex 16. erunt eorum latera commensurabilia. Vnde colligitur omne quadratum, quod proportionē obtineat, quam similes numeri plani, habere latera longitudine commensurabilia: Si quidem ex propos. 12. l. 8. omnes numeri similes proportionem inuicem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

EXPENSIO III.

De comparatione linearum rationalium, & irrationalium.

DOcet hæc expensio modum argumentandi in lineis rationalibus, & irrationalibus; & quomodo argumenta valeant, & deductiones de commensurabilibus, vel è contrà. Vnde sine has expensione Irrationales magnitudines impossibile est cognoscere in spetie.

THEOR. I. PROPOS. V.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & fundamentum primæ combinationis suo termino sit commensurabile; fundamentum quoque secundæ combinationis suo termino erit commensurabile, & si è contra fundamentum illud primæ suo termino sit incommensurabile; tale quoque erit fundamentum secundæ combinationis respectu sui termini.

SInt quatuor magnitudines proportionales, ita quod sit A ad B, vt C ad D; sit A fundamentorum primæ combinationis sit ad suum terminum B, vt

 suu-

fundamentum C ad terminum D. Dico, *quod si fundamentum A commensuraretur termino B; fundamentum quoque alterum C suo termino D commensurabile esse.*

Probatur. Erit enim A ad B in proportione, vt numerus V g. 2. ad numerum 4 ex propositione 3. huius, sed eandem proportionem dicit quoque C ad D; quare ex eadem propositione erit quoque commensurabilis C cum suo termino D, cum sit, vt A ad B, & ideo vt 2. ad 4 hoc est, vt numerus ad numerum.

Si verò sit incommensurabilis A fundamentum respectu termini B. Dico, *etc esse commensurabilis magnitud. B & fundamentum C respectu termini D.*

Probatur quoque ex eadem propositione sic. Nam si A est incommensurabilis ipsi B. Ergo non dicet proportionem, quam numerus ad numerum. Sed tali quoque in proportione est magnitudo C respectu magnitudinis D; ergo neque ipsa dicet proportionem, quam numerus ad numerum, ideoque incommensurabilis erit C ipsi D.

Hoc autem intelligitur non de commensurabilitate longitudinis tantùm, sed etiam potentiæ tantùm. Nam sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus 2. ad numerum 4. quia ponitur A ad B, vt C ad D, & ideo ob similitudinem figurarum ex propositione 26. l. 6. vt quadratum ex A ad quadratum ex B, sic quadratum ex C ad quadratum ex D; erunt quoque, vt 2. ad 4. sic quadratum ex C ad quadratum ex D, quare cum quadrata linearum C, & D sint vt numerus ad numerum erunt ipsę potentiâ tantùm commensurabiles ex pr. 4. huius.

THEOR. II. PROPOS. VI. Euc. 18.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

DEtur magnitudo A, & B, quæ magnitudini C commensurabilis existat. Dico, *eas magnitudines inuicem esse commensurabiles.*

Probatur. Nam cum magnitudo A ponatur commensurabilis magnitudini C, erit, vt numerus V. g 10 ad numerum 15. Et eadem ratione, quia magnitudo B ponitur quoque commensurabilis magnitudini eidem C, erit ad magnitudinem eam C vt numerus aliquis V. g. 28. ad 7. & ideo conuertendo C erit ad B, vt numerus 7. ad alium 28. Reperiantur itaque tres numeri continuè proportionales in datis rationibus 10 ad 15. & 7 ad 28. ex propositione 3. l. 8. & sint 2.3. 12. ita quod linea A se habeat ad C, vt 2. ad 3 & C ad B, vt 3. ad 12.

Quo posito erit quoque ex æquo A ad B, vt 2. ad 12 & ideo A erit commensurabilis ipsi B, quia se geret A magnitudo ad B magnitudinem, vt numerus ad numerum.

Quod & intelligitur, si duæ A, & B sint solum commensurabiles, cuidam tertiæ potentiâ. Nam tunc erit V. g. quadratum ex A ad quadratum ex C, vt numerus 10. ad numerum 15. & quadratum ex B ad quadratum ex C, vt 28. ad 7. Repertis ergo tribus numeris 2.3. 12. in continua proportione ex 3. lib. erit quadratum ex A ad quadratum ex C, vt 2 ad 3. & quadratum ex C idem ad quadratum ex B, vt 3. ad 12. ideoque ex æquo erit, vt 2 ad 12. sic quadratum ex A ad quadratum ex B: cum quæ sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum; ipsæ lineæ ex 4. huius erunt tantùm potentiâ commensurabiles.

THEOR. III. PROPOS. VII. Euc. 13.

Sint duæ magnitudines; & altera quidem sit commensurabilis cuidam tertiæ, altera verò incommensurabilis; illæ magnitudines inuicem erunt incommensurabiles.

SIt A lineæ C commensurabilis, seu longitudine, seu potentiâ, & eidem C linea altera D incommensurabilis. Dico *eas nempe A, & D esse inuicem incommensurabiles.*

Probatur. Nam si D est commensurabilis magnitudini A, cum eidem quoque A ponatur commensurabilis C; Sequeretur, quòd, cùm D, & C vni tertiæ A sint cōmēsurabiles ex propos. antec. contrà Thesim inuicem cōmensurationem haberent, seu longitudine, seu potentiâ.

THEOR. IV. PROPOS. VIII. Eu. 14.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles: altera verò ipsarum cuidam incommensurabilis sit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

PRob. eodem argumēto, ac præcedens, quia magnitudo A potēt â tantū, seu lōgitudine, & B cōmēsurabiles essent inuicē, & tamen A existente cum aliâ magnitudine, quapiam C incommensurabili esset nihilominus magnitudo B eidem ipsi C commensurabilis.

Iam magnitudo A, & magnitudo C magnitudini B essent commensurabiles. Quamobrem ex proposit. 6. huius inter se quoque A, & C essent commensurabiles contra id, quod præsupponitur.

COROLLARIVM

QVæ incommensurabilibus inuicem sunt commensurabiles, sunt inter se etiam incommensurabiles, quia eadem militat ratio de duabus, aut pluribus, & de vna, vt patet.

THEOR. V. PROPOS. IX. Eucl. 17.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique earum commensurabilis erit.

Quòd, si tota magnitudo vni earum commensurabilis sit, & magnitudines, quæ compositæ à principio fuerunt, commensurabiles erunt.

DEntur A B, & B C magnitudines, quæ compo-

ponantur in B; *Dico eas, vt priùs, licet composita sint, esse commensurabiles.*

A Nam eadem communis mensura D metitur vtrasque diuisas. Ergo etiam compositas metietur ex pronunciato 1. Quare cum diuisæ, & compositæ habeant eandem communem mensuram erunt AB, BC, & tota AC commensurabiles.

Probatur secunda pars, quia si tota AC commensurabilis erit vni ipsarum V. g. magnitudini BC, ergo eadem communis mensura D, metietur totam, & ablatam BC: Quare, & reliquam BA ex 3. pronunc. & ideo BA erit commensurabilis toti AC.

COROLLARIVM.

Hinc sequitur. Quod si tota magnitudo ex duabus composita cõmensurabilis fit vni ex suis partibus; quòd etiam reliquæ cõmensurabilis sit: Nam mensura, quæ metitur totum, & ablatum metitur, & reliquum ex pronunc. 3.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Si duæ magnitudines inuicem incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit, & quæ à principio compositæ magnitudines, inuicem erunt incommensurabiles.

Probatur prima pars. Quia si detur aliqua mensura metiens totam AC, & ablatam AB. in schemate præced. propos. metiretur quoque, & reliquam BC, ex pronunc. 3. quòd est contra hypoth. ponuntur enim AB, & BC incommensurabiles.

Probatur secunda pars; Quia si ab initio magnitudines, quæ fuere compositæ dicantur commensurabiles; sequitur, quod si tota magnitudo AC vni ipsarum fit commensurabilis, quod etiam sit alteri, ex propos. præced. contra Thesim.

COROLLARIVM

Hinc sequitur. Quòd, si tota magnitudo ex duabus composita sit incommensurabilis alteri partium componentium, hæc etiam erit incommensurabilis reliquæ; Nam ex Coroll. præc. si esset commensurabilis vni esset, & alteri.

Magnitudines autem, quæ componuntur, debent esse re ipsá commensurabiles, quæ nempe possint dimetiri communi mensura maxima; alioquin ratio non valeret, quæ à communi mensura desumitur, vnde non intelligitur de lineis potentiá commensurabilibus.

EXPENSIO IV.

De inuentione linearum rationalium.

Antequam irrationales inueniantur, priùs de inuentione rationalium agendum est; ex harum enim cognitione gradus fleruntur ad irrationales diuersas inueniendas. Vnde in primis diuersas species harum linearum, vt singulas deinde doceamus inuenire; distinguere opus est.

Rationales inuicem lineæ in plura genera seiunguntur secundùm diuersam comparationem, quã cum lineis aliqua tertiã conferuntur, quæ dicitur ob id Rationalis; nempe illa, ex qua cæterarum mensuræ æstimantur, & est velut Cubitus, seu Pes in vsitata rerum vendibilium mensuratione. Nam aut hæ lineæ comparatæ cum illã sunt inuicem longitudine commensurab les, quatenùs ex eius partibus, vel vna, vel ambæ integratæ inuicem quoque consentiunt longitudine vel non, sed solùm potentiã. Si longitudine commensurab les, tunc potest accidere, quòd vna ex istis sit Rationali æqualis; & ecce *primum genus*, quòd si omnes sint inæquales illi, sed solum secundum partes in linea Rationali existentium longitudine commensurarentur. Erit *secundum genus*: Si verò inuicem sunt solùm potentiã commensurabiles, tunc altera ex istis potest reperiri, vel æqualis, vel saltem commensurabilis lineæ Rationali, si æqualis reperitur erit *tertium genus*, si inæqualis, sed tamen commensurabilis erit *quartum genus*. At si ne dum inuicem; sed etiam cùm linea Rationali comparatæ sunt, tantùm potentia commensurabiles erit *quintum genus*. Et tandem potest accidere, quod hæ lineæ sint commensurabiles inuicem, sed cum linea Rationali comparatæ, illi solùm sint potentia commensurabiles, & erit *sextum genus*.

Primum genus, vt docebimus reperitur ex Corollario propos. 11. sicut, & secundum.

Tertium verò genus, & quartum reperitur, si primo inueniatur rationali alicui commensurabilis aliqua, vel æqualis ex propos. 11. sequentis Corollario, & huic reperiatur alia potentiá tantum commensurabilis, ex propos. 12. nam duæ repertæ erunt inuicem potentiá tantùm commensurabiles, sed altera ex istis erit lineę Rationali cõmẽsurab lis, altera verò potentia tantũ, ex prop. 7.

Quintum genus repetitur ex propos. 12. si nempe exposita Rationali A inueniatur aliqua potentia tantum commensurabilis B. & huic inuentæ alia item reperiatur potentiã tantum commensurabilis C, nam, cum rationalis A, & hæc secundo inuenta C primo inuentæ B sint potentiã tantum commensurabiles erunt, inuicem potentiã tantùm cõmensurabiles ex propos. 6.

Sextum verò genus reperitur ex Corollario propos. 12.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Inuenire rectam, ad cuius quadratum, ita se habeat quadratum alterius, vt numerus ad numerum.

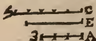
Sint duo numeri 3. & 5. & linea A. Debeamusque inuenire lineam aliquam, cuius quadratum, ita sit in proportione, cum lineæ A quadrato, vt est numerus 3. ad numerum 5.

Diuidatur linea A in tot partes, quot habet numerus oblatus 3. V. g. In tres partes; deinde assumatur linea C, quæ quinque partes æquales illas, obtineat, eritque linea A, ad lineam C, vt numerus 3. ad 5.

Inter istas autem lineas media proportionalis inueniatur ex 16. propos. lib. 6. quæ sit B. Dico quadratũ ex A ad quadratum ex B esse sicut 3 ad 5.

Probatur ex Corollario propos. 21. lib. 6. Nam

A, E, C. tres lineæ sunt continuæ proportionales, & ideo, cum quadrata omnia sint similia, similiter;



quæ descripta erit, vt latus A ad latus C, ita quadratum factum ex A ad quadratum factum ex E ob proportionem laterum duplicatam; Sed A se habet ad C, vt 3. ad 5. Ergo, & quadratum ex A ad quadratum ex E se habebit in proportione, vt 3. ad 5.

COROLLARIVM

HInc enascitur modus inueniendi lineas longitudine alteri commensurabiles. Nam nihil aliud agendum, quam diuidere datam A, (quæ quoniam ab ea cæterarum mensuræ desumūtur, vocatur Rationalis,) in partes, quas voles, & ex illis partibus alias componere lineas, siue alias æquales Rationali in diuersas partes diuidere, & eas partes, tanquam lineas assumere, omnes enim datæ Rationali A, erunt similiter Rationales.

PROB. II. PROPOS. XII.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentiâ.

SIt recta proposita A, cui inuenienda primo sit linea incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur duo numeri proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum V. g. 10. & 11. ex propos. 19. lib. 9. vel ex 16. pr. Coroll. 4. l. 8. Deinde ex præced. Inueniatur linea, cuius quadrato ita se gerat in proportione quadratum ex C confectum, vt 10. ad 11. numeri, vel vt linea A ad O lineam. *Dico esse C lineam lineæ A incommensurabilem potentia tantùm.*

Probatur primo, quod sit incommensurabilis longitudine. Nam eu quadrata habent etiam latera longitudine cōmensurabilia, quæ proportionem habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum ex propos. 4. huius, Sed quadratum factum ex A ad quadratum ex C, illam non habet proportionem, cùm sit solùm proportio, quam habet numerus 10. ad numerum 11. non quadratos; Ergo eorum latera, nempe lineæ A, & C, erunt incommensurabilis.

Probatur secunda pars, nempe quod sit tantùm longitudine incommensurabilis. Nam earum quadrata commensurantur, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum.

Secundò sit inuenienda altera linea D, quæ sit quoque potentiâ incommensurabilis. Inueniatur linea D inter duas A, & C longitudine incommensurabiles media proportionalis ex 13. lib. 6. *Dico D esse incommensurabilem, tum longitudine, tum potentia lineæ A primo positæ.*

Probatur ex propositione 21. lib. 6. Nam ea proportio intermediat, inter quadratum ex A factum, & quadratum ex D, quæ est inter lineas, & latera A, & C. Sed illæ sunt incommensurabiles. Ergo etiam quadrata ex propos. 5. huius erunt incommensurabilia, & ideo ipsę rectę incommensurabiles erunt potentiâ; Vnde, & longitudine ex prop. 4. huius.

COROLLARIVM

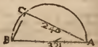
COllige modum, quo, & plures lineæ inueniantur datæ rationali potentiâ tantùm incommensurabiles. Nam sufficit huic inuentæ C reperire alias longitudine commensurabiles V. g. R, vel S ex Corollario præcedenti: Nam erunt etiam datæ Rationali potentiâ tantùm commensurabiles.

Siquidem A est longitudine incommensurabilis C, cui tertiæ sunt commensurabiles lineæ inuentæ R, & S; Quare ex propos. 7. linea Rationalis A, & inuentę R, aut S erunt inuicem incommensurabiles.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Inuenire duas rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior possit efficere quadratum maius, quàm lineæ minoris, quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine commensurabile.

PRoponatur aliqua linea Rationalis AB, & inueniantur ex propos. 15. lib. 9. duo numeri quadrati, quorum excessus non sit quadratus, vt 361. & 121. quorum excessus 240. non est quadratus. Deinde ex propos. 11. reperiantur duæ lineæ AB, & CB potentiâ tantùm commensurabiles, quorum nimirum quadrata se habeant, vt numerus 361. quadratus, ad numerum non quadratum 240. Deinde super maiori AB fiat semicirculus, alteraque AC accommodetur in semicirculo, connectaturq; recta CB. *Dico AB plùs posse, quam AC, ambæ ex* constitutione potentiâ tantùm commensurabiles, quadrato rectę lineæ CB, quæ ipsi AB longitudine est commensurabilis.



Probatur. Nam quadrata linearum AB, & AC sunt æqualia quadrato ex linea AB confecto ex propositione 11. lib. 2. sed vt numerus 361. ad 240. ita est quadratum lateris AB ad quadratum lateris AC. Ergo *per conuersionem rationis* erit 361. ad 121. complementum numeri 240. vt sit æqualis numero 361. ita quadratum ex latere AB ad quadratum ex latere CB, quod cum quadrato AC, sit æqualis quadrato ex latere AB, sed quadrata numerorum 361. & 121. habent latera commensurabilia, alioquin non essent numeri quadrati, ergo,

&

& latus AB, cùm latere CB erit commensurabile ex propos. 5. huius.

PROBL. IV. PROPOS. XIV.

Inuenire duas rectas potentiâ tantùm commensurabiles, quarum maior possit efficere quadratum maius, quàm efficiat minor; quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine incommensurabile.

SIt linea rationalis AB, inueniantne ex propos. 16. lib 9. duo numeri quadrati 16. & 144. ita quod compositus ex ipsis, nempe 160. non sit quadratus. Fiatque, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum V. g. 144. Ita linea AB ad aliam AC, ex propos.11. huius. Deinde super maiorem AB fiat semicirculus, accommodeturque AC in eo à puncto A, connectaturque recta CB. Dico CB esse lineam lineæ BA longitudine incommensurabilem latus quadrati, quo A superat AC quad.



Probatur. Quia BA est ad AC, vt non quadratus numerus 160. ad quadratum 144. Ergo quadratum ex BC, erit ad AB, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum numerum 16. per conuersionem rationis. Quoniam quadrata duo ex BC, & CA ex propos. 11. lib.2. æquant quadratum ex BA, sicut quadratus numerus 144. & 16. æquant numerum 160. quare ita se habebit, vt numerus 160. ad 16. ita BA ad BC. Sed 160. ad 16. cum non sit quadratus, nõ habet proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo neque latera BA, & CB ex propos. 11. huius, & ideo non erunt cõmensurabilia. Quare quadratum ex BA superabit AC quadratum, & excessus quadrati latus BC incommensurabile erit.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Si quatuor lineæ sint proportionales, & fundamentum relationis, seu antecedens in prima combinatione superet consequentem, & terminum quoad potentiam quadrato, cuius latus sit fundamento illi commensurabile: Alterum quoque proportionis fundamentum in secunda combinatione eodem excessu superabit suum terminum: At si excessus primæ combinationis fuerit lateris incommensurabilis, talis quoque erit excessus in altera combinatione fundamenti respectu sui termini.

SIt BA ad BC, vt DF ad DG. Dico, quod si quadratum BA superet quadratum BC, & excessus, seu gnomon niger sit tale spatium, quòd in quadratum redactum latus eius fundamento lineæque maiori BA sit commensurabile; talequoque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF. Quòd illud quadratũ si gnomoni nigro in AB quadrato æquale, habeat latus incommensurabile ipsi BA, tale quoque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DF.

Probatur, vt est BA ad BC, ita DF ad DG. Ergo ex 26 lib.6. vt est quadratum ex BA ad quadratum ex BC, ita assimilatur in proportione ob similitudinem figurarum, (quia omnia sunt quadrata,) quadratum ex DF ad quadratum ex DG. Ergo conuertendo erit etiam totum quadratũ ex BA ad aliam compartem, nempe gnomonẽ nigrum, & excessum suum HA, sic quadratum ex DF ad aliam compartem, & excessum suum gnomonem nigrum FI; Ergo, & ad quadrata gnomonibus æqualis, eritque quadratum ex BA ad quadratum nigrum BL æquale gnomoni nigro AH, vt quadratum ex DF ad quadratum nigrum DM æquale gnomoni nigro FI, Ideoque erit quoque latus BA ad latus BL illius quadrati nigri, vt latus DF ad latus DM huius quadrati nigri ex 26 lib.6. si ergo BA, & LB sint lineæ commensurabiles, tales quoque erunt DF, & DM; quod si fuerint incommensurabiles longitudine BA, & BL tales quoque erunt DF, & DM longitudine incommensurabiles ex propos. 5. huius.



EXPENSIO V.

De Binomijs.

AGitur de compositione linearum potentiâ tantùm commensurabilium in vnam lineam coalescentium, ex quarum compositione resultat linea tota, quæ Binomium appellatur, vel ex Binis nominibus: eo quia resultet à compositione duarum linearum potentiâ commensurabilium: Est quæ primum genus linearum irrationalium. In quatuor enim genera secedunt irrationales lineæ. Aliæ enim exoriuntur ex cõpositione, vt prędictę. Aliæ à subtractione, vt Apotoma, duarum linearum potentiâ tantùm commensurabiliam. Alię irrationales procedunt à proportionali interpositione mediæ alicuius proportionalis inter duas commensurabiles potentiâ tantùm. Et vocantur Mediæ; Aliæ tandem ex diuisione lineę in partes irrationales, & ab irrationalibus simpliciter exoriuntur, quæ postrema duo genera, & per subductionem alias producunt pariter irrationalęs. Agemus autem primo de Binomijs, vtpote de facilioribus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si duæ rationales potentiâ tantùm inuicem commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex Binis Nominibus.

COmponantur duæ rationales AB, & BC potentiâ tantùm inuicem commensurabiles ex propos.

propos. 12. huius inuentæ. Dico *totam* AC *irrationalem esse*.

Probatur. Quoniam enim ex propos. 1. lib. 6. rectangulum sub AB, & BC; quale est album ad quadratum BC nigrum se habet, veluti respicit basis AB basim BC: Quoniam ea rectangula sunt eiusdem altitudinis: sequitur, quòd sint incommensurabilia, qualiter sunt ipsæ bases. Addatur rectangulo eius duplum, quòd certè ei commensuratur, & fient duo rectangula æqualia alba. Addatur quoque quadrato nigro aliud nigrum ex AB, eruntque quadrata inuicem commensurabilia; quòd lineæ AB, & BC ex hypothesi sint inuicem potentiâ commensurabiles. Nam factâ hac compositione ex propos. 10. duo rectangula à duobus quadratis incommensurabilitate dissidebunt; quia magnitudinibus, quæ priùs erant incommensurabiles, vt rectãgulo albo, & quadrato nigro commensurabiles; quælibet suę magnitudines addidimus, quadrato quidem nigro quadratum aliud nigrum sibi cõmensurabile, rectangulo verò aliud rectangulum sibi æquale. Sed componantur simul hæc duo rectangula, quæ incommensurabilis sunt quadratis, & ipsa duo quadrata; ex propos. 10. tota magnitudo CB incommensurabilis erit, cum alterâ magnitudine partium incommensurabilium; & ideo rectangola alba, cum duobus quadratis nigris simul erunt incommensurabilia ipsis met quadratis nigris seorsim sumptis.



Verùm duo rectangula prædicta cùm duobus quadratis nigris ex propos. 6. lib. 2. sunt æqualia quadrato ea tota AC, tanquam vna linea. Hoc itaque quadratum maximum ex tota AC erit incõmensurabilé duobus quadratis altero ea AB, altero ea BC: cum ergo quadratum ex tota AC ex duabus AB, & BC coalitũ sit Irrationale quadratis ipsarum componentium AB, & BC; etiam ipsa tota AC erit irrationalis ex propos. 9. huius, ipsis partibus componentibus AB, & BC. Cuius nomen erit Binomium, quia ex duabus integratur.

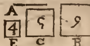
Quod præcedenti propos. explicauimus Binomium, est genus quoddam, quod sex differentias Binomiorum sub se complectitur. Illæ verò exoriuntur à comparatione duarum, ex quibus componuntur potentiâ tantùm sibi inuicem commensurabilium comparatarum lineæ Rationali, respectu, cuius dicuntur rationales, seu longitudine, seu potentiâ; & quia in superioribus vidimus duas differentias linearum commensurabilium potentiâ tantùm, primam propos. 13., nempe, cùm maior excedit minorem in quadrato suo constituendo spatio tali, quòd si in quadratum redigatur, latus eius sit longitudine maiori commensurabile; inde est, quòd, si hoc primum genus lineæ Rationali comparetur, & maior illi Rationali sit longitudine commensurabilis hinc prima differentia constituatur; Quod si minor sit Rationali commensurabilis iam secundam differentiam obtineamus. Quod si, nec maior, nec minor, sed sicut sunt incommensurabiles inuicem, ita quoque sint Rationali, & tertia differẽtia habetur.

Secundum verò genus linearum sibi inuicem incommensurabilium est; quando vna alteram excedit tali spatio quadrato, quod habeat latus eidem maiori incommensurabile ex propos. 14. & eodem ordine dat tria alia Binomia: Nam vel maior linea, seu Nomen est commensurabile datę Rationali, & ecce. Quartũ, vel minor ei commensuratur, & ecce Quintum; vel neutra incommensurabilium, ei commensuratur, & ecce. Sextum. Docebimus itaque modum in sequentibus reperiendi hæc omnia Binomia, ob quæ necessarium est priùs refricare memoriam eorum, quæ diximus lib. 9. Expens. vltima.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Inuenire ex Binis Nominibus primam.

Oportet primò reperire duas lineas longitudine commensurabiles A, & a ex Corollario propos. 11. huius, quarum prima A statuatur pro Rationali. Alteri verò a inueniatur altera C longitudine solùm incommensurabilis, & gaudeat conditionibus, quas assignauimus propos. 13. hu. nempe repertis duobus numeris quadratis 4. & 9.



quorum excessus 5. non sit quadratus. Maioris B quadratum obtineat ad minoris C quadratum eam proportionem, quam maior quadratus numerus 9. ad excessũ 5. non quadratũ. Nã si duę istæ potentiâ tantùm commensurabiles componantur; linea tota ex illis duabus coalescens, erit primum Binomium.

Probatur. Nam potitur duabus conditionibus ad primum Binomium requisitis. Prima est, quòd rationali A sit maius nomen B commensurabile, vt ea constructione constat.

Secunda est, quòd est de genere illarum linearum potentiâ tantùm commensurabilium, quarum quadratum, quod potest efficere, maior B excedit minoris C quadratum excessu quodam quadrato, quòd habet latus commensurabile ipsi maiori, cùm eius B quadratum, quod est, vt numerus 9. sit ad quadratum minoris C, vt numerus 5. ex propos. 11. huius, & ideo excessus B sit vt 4. numerus quadratus ad ipsum 9. numerum quadratum. Vnde latus illius excessus, in quadratum redacti ad quadratum ipsius B maioris erit commensurabile ex propos. 4. huius. Si ergo B, & C componantur ex 16. efficient Binomium, quod ex dictis requisitis erit primum.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Inuenire ex Binis Nominibus secundam.

Sit Schema præcedens; Et sumantur, vt priùs duæ commensurabiles A, C, & A statuatur pro Rationali; huic verò C inueniatur potentiâ tantũ commensurabilis B eadem arte, ac modo, quo propos. 13. huius; sed cum hac differentiâ ab anteced. quod vt excessus numeri 5. non quadratos, ad quadratum numerum maiorẽ 9. sic quadratum ea C minori, & commensurabili linea ipsi Rationali ad quadratum ex B maiori erectum. *Latera enim horum quadratorum in vnam lineam composi-*

ta

exhibebunt Binomium secundum.

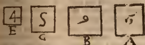
Probatur. Nam minus nomen, nempe latus minoris quadrati c est ex constructione commensurabile Rationali datæ A, est autem minus latere B, quod sit quadratum ex c ad quadratum ex A, vt excessus non quadratus, & reliquus 5. ad numerum excedentem, & totum 9. & ideo ad maiorem. Quare, & latus c, vtpote quadrati minoris erit minus latere B.

Secundam verò conditionem ex effectione propos. 13. adipiscitur, cùm non obtineant proportionē earū quadrata, vt numerus quadratus ad numerū quadratū. Et quadratū maius B superet c quadrato E sibi B in latere commensurabili, vt propos. 13. ostensum est; Vnde si componantur B, & c ex 16. efficient Binomium, quòd erit ex dictis secundum.

PROBL. III. PROPOS. XIX.

Inuenire tertium Binomium.

PRæcept. 1. Inuentis duobus numeris quadratis 4 & 9. eā conditione, qua propos. 13. vt excessus 5. non sit quadratus; Sumatur ex prop. 18. 9. numerus alius, qui ad neutrū eorum 5. & 9. proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, qui sit 6. Deinde vt est numerus non quadratus 6. ad quadratum 9. sic quadratum Rationalis A ad quadratum, cuius latus B: nec sit quadratum Rationalis A proportionatum ad quadratum ex B, vt quadratus numerus ad numerum quadratum. Ideoque licet quadrata sint rationalia; quia sunt, vt numerus ad numerum; ipsa tamen latera A, & B potentiâ tantùm erunt commensurabilia, non longitudine ex propos. 4. huius.



Præcept. 2. Deinde fiat iuxta propos. 13. huius vt quadratus numerus 9. ad suum excessum 5. non quadratum: ita quadratum eiusdem rationis, cuius latus B, ad aliud quadratum ex propos. 11. huius, & sic huius quadrati latus c. Dico, *quod si c & B componantur erit Binomium tertium.*

Prob. Progr. 1. Quoniam primam conditionē genericam consequitur ex constructione. Quia quadratum B superat quadratum c quadrato quodam E, cuius latus est maiori B commensurabile, quia est vt 9. ad 5. cuius residuum vsque ad 9. est 4. numerus quadratus, & ideo etiam quadratum c habet residuum, cum quo æquat quadratum B, vt numerus quadratus 4 & 5. numerum quadratum 9. ex propos. 13. Vnde ex propos. 4. latus excessus E erit commensurabile lateri B.

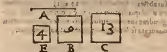
Progress. 2. Habet quoque conditionem specificam nempe, quod ambæ B, & c sint incommensurabiles Rationali A: Et B quidem ex Præcept. 1. id consequitur. De linea verò c ostenditur; Quadratum ex A est ad quadratum ex B, vt 6. ad 9 ex effectione, nempe non dicit proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: At quadratum ex B dicit proportionem ad quadratum ex c, quam 9. ad 5. s. non eam quam quadrati numeri ad numerum quadratum. Ergo ex æquo erit vt 6. ad 5. ita quadratum ex A ad quadratum ex c, & ideo non erit illa, quam quadrati numeri ad quadratum numerum. Vnde nec lineæ A, & c inuicem commensurabilitatem consequentur. Cum ergo B, & c ad Rationalem A sint incommensurabiles, maiorque B superet minorem c quadrato E, sibi maiori commensurabilis lateris, facient, si componantur Binomium quod ex 16. propos. huius, & ex alijs conditionibus erit tertium.

PROBL. IV. PROP. XX.

Inuenire ex Binis Nominibus quartam.

VSque adhuc vsi sumus pro fundamento Binomiorum propos. 13. huius: nunc vtendum est propos. 14. iuxtaque ipsius documenta duo numeri quadrati assumendi sunt, ita quòd compositus ex ipsis non sit quadratus, vt 4. & 9. cuius compositum est 13. non quadratus; Ideoque nec proportionem dicit, quam quadratus ad numerum quadratum ex prop 16. lib. 9. Deinde reperiatur A Rationalis, & c ei commensurabilis. Fiatque vt compositus non quadratus 13. ad quadratum alterum ex componentibus, puta 9. ex propos. 11. huius; ita quadratum commensurabilis c ad quadratum alterius B, componaturque B, & c, *& erit Binomium quartum.*

Probatur. Nam B, & c sunt commensurabiles solùm potentiâ, cùm eorum quadrata se habeant, vt numerus ad numerum.



Sibi verò vindicant conditionem genericam Binomiorum; Quoniam maius Nomen c, vtpote latus maioris quadrati suo quadrato superat quadratum minoris lateris B quadrato quodam sibi longitudine incommensurabili, vt ostenditur citata propos. 14.

Obtinent quoque requisitum specificum; Etenim c maius nomen acceptum est ex effectione commensurabile Rationali A. Cum ergo c sit commensurabilis rationali A & potentiâ tantùm commensurabilis respectu B, quem superat suo quadrato, excessu tali quadrato E, cuius latus sibi est longitudine incommensurabile, sed solùm potentiâ: Si hæ duæ lineæ B, & c coniungantur, efficient ex propos. 16. Binomium, & hoc ex requisitis præallegatis erit quartum.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Inuenire ex Binis Nominibus quintam.

ADhibeatur idem Schema, & repertis duobus numeris; vt priùs, eadem fiat constructio numerica, vt in antecedenti, vel 14. prop. h. Deinde accepta quadam Rationali A ipsi commensurabilis inueniatur B; fiatque deinde, vt numerus quadratus V. g. 9 ad compositum ex duobus quadratis non quadratum 13. sic ex propos. 11. huius quadratum ex B, quod erit minus ad quadratum alterum, cuius latus c, quod erit maius, vt numerus quadratus est minor compositorum quadrato, *& B, & c latera in vnam lineam conflata faciat Binomium quintam.*

Pro-

Probatur. Quoniam obtinent conditionem genericam Binomij: quia eadem constructio facta est, quæ propos. 14. & ideò B superat C quadrato quodam E, cuius latus sibi maiori B est longitudine incommensurabile: Lineæ quoque B, & C sunt potentiâ tantùm commẽsurabiles; eò quòd earum quadrata sint, vt numerus ad numerum, hoc est, vt 9. ad 13.

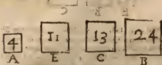
Et tandem obtineat conditionem specificam: nã, & Minus Nomen B est ipsi Rationali A ex constructione commensurabile, ideoque B, & C compositæ facient Binomium, ex 16.b. & hoc quintum erit.

PROBL. VI. PROPOS. XXII.

Inuenire sextam ex Binis Nominibus.

REperiendi sunt duo numeri non quadrati ex propos. 16. lib. 9. V. g. 11. & 13. qui compositi faciant numerum non quadratum 24. Idcircoque, nec cum eo, quòd componunt, nec inuicem dicant proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Assumaturque quilibet numerus, qui ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus numerus, ad quadratum numerum, vt est quilibet quadratus. V. g 4. Sumatur deinde Rationalis A, & vt 4. ad 24 sic fiat quadratum ex A ad quadratum ex alia aliqua V. g. B ex propos. 11. huius: eruntque B, & A tantùm potentiâ commẽsurabiles. Deinde fiat, vt 24 ad 13. ita quadratum ex B ad quadratum ex alia C: eruntq; latera longitudine incommensurabilia B, & C; quia eorum quadrata se habeant, vt numerus ad numerum.



Ita quoque se habent incommensurabiliter cum Rationali A: & quidem B, vt diximus: Linea verò C ex hac ratione. Nam vt 4. ad 24. sic A, quadratum Rationalis ad quadratum B, & vt 24. ad 13. ita quadratum B ad quadratum C. Ergo ex æquo, vt 4. ad 13. ita quadratum A ad quadratum C, nimirum, vt numerus ad numerum, & ideo linea Rationalis A, & C erunt inuicem incommensurabiles, & hæc est conditio specifica harum linearum B, & C ad Binomium requisita. Obtinent quoque conditionem genericam. Nam quadratum ex B quadratum ex C superat quadrato quodam E, quod est, vt 11. ad 24. tanquam numerus ad numerum, ideoque sibi maiori B longitudine incommensurabile. Quare si B, & C componantur ex propos. 16. facient Binomium, quod ex prædictis conditionibus erit sextum.

EXPENSIO VI.

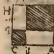
De lineis Apotomis.

COmposuimus vsque adhuc lineas irrationales addendo inuicem duas rationales potentiâ tantũ commensurabiles. nunc verò auferendo vnam ab aliâ generabũtur irrationales eodem ordine, ac in præced. Expensione.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentiâ tantum commensurabilis existens toti; reliqua irrationalis erit, vocatur autem Apotome.

DEtrahatur à Rationali AC Rationalis BC, quæ ipsi AC toti potentiâ tantùm sit commensurabilis. Dico reliquam AB esse irrationalem respectu linearum AC, & BC.



Probatur ferè eodem argumento, quo propos. 16. Rectangulum AI sub AC, & BC contentum, cùm AC, & CB ponantur longitudine incommensurabiles ex 1. l. 6. erit incommensurabile quadrato nigro, ex eo constituto; etenim cum sint eiusdem altitudinis, sunt inuicem, vt bases.

Progress. 2. Addatur rectangulo eiusdem AI seminigro duplum, & sint duo rectangula seminigra AI, & BH æqualia, & ideo inuicem sibi commensurabilia pro vna parte. Pro alia verò addatur quadrato nigro ex BC aliud quadratum AH ex totâ AC, quod est vtique est commensurabile, cum lineæ ipsæ ponantur commensurabiles potentiâ. Factaque hac additione ex propos. 8. huius manebunt duo rectangula seminigra sumpta, vt vna quantitas, & duo quadrata nigrum ex CB, & AC ex tota pariter vt vnum quid sumpta inuicem incommensurabilia, vt erant prius.

Progress. 3. Addatur cursus rectangulis quadratum nigrum ex AB: Efficietmusque magnitudinem ex totâ AC, & ex quadrato nigro BC, ex 9. l. 2. quare magnitudo tota ex rectangulis seminigris duobus, & quadrato nigro BA erit tunc commensurabilis, vtpote illi æqualis, quantitati ex duobus quadratis nempe ex tota AC, & parte BC constitutis, & ideo cum illa ex progr. 2. sit rectangulis incommensurabilis etiam hæc incommensurabilis parti componenti, nempe rectangulis ijsdem duobus seminigris erit. Cum itaque tota magnitudo ex rectangulis composita, & quadrato AB nigro sit incommensurabilis vni parti componenti: nempe rectangulis duobus seminigris; erit etiam incommensurabilis alteri ex Coroll. propos. 10. huius, scilicet quadrato ex AB. Et ideo etiam quadratum ex tota AC, & quadratum ex parte BC æqualia rectangulis, & quadrato alteri ex AB, erunt eidem nigro ex BA incommensurabilia, & insuper cum quadrata AC, & ex parte BC ex hypothesi sint inuicem commensurabilia, quòd lineæ AC, & BC sint potentia commensurabiles, & ideo etiam toti ex propos. 9. huius, erit etiam vnumquodque eorum eidem quadrato ex BA incommensurabile ex prop. 8. h.

Igitur

Igitur, cùm quadrata ex BC, & AC ſint incommenſurabilia, quadratu ex AB; Lineæ ipſæ, & latera erunt irrationalia ex propoſ. 4. huius. Vnde ablata BC ex AC relinquet reſiduum AB incommenſurabile, & toti AC, & ablatæ BC, & ideo dicetur Apotome.

Sex ſpecies Apotomarum, quæ exoriuntur à lineis potentiâ tantùm commenſurabilibus, vt Binomiorum, reperiuntur.

Nam, vel maior plùs poteſt, quàm minor linearum potentiâ tantùm commenſurabilium, & differentia potentialis eſt quadratum, cuius latus maiori eſt commenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum, prout comparantur cum aliquâ quadam Rationali. Nam ſi maior ſit Rationali commenſurabilis eſt prima Apotome, ſi minor exoritur ſecunda Apotome, ſi nec vna, nec altera oritur tertia Apotome dummodo minor harum linearum ad Rationalem comparatarum auferatur à maiore, vt Reliqua Apotome ſit.

Secundum genus linearum potentiâ tantùm commenſurabilium explicatum propoſ. 14 es illud, quarum vna poteſt magis, quàm alia, & differentia eſt quadratum quoddam, cuius latus eſt maiori incommenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum eodem ordine. Nam vel maior eſt commenſurabilis expoſitæ Rationali, & obtinemus quartam ſpeciem, vel minor, & conſequimur quintam, vel nulla Rationali commenſuratur, & ſextam Apotome habebimus.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Apotomum ſex ſpecies reperiuntur.

REperiuntur eodem modo, ac Binomia, ſolumque in hoc differenti; quòd repertis lineis duabus nempe maiori, & minori Nomine; deinde, vt Binomium efficiatur, coniunguntur ſimul. Hic verò minor linea, quæ dicitur Congruens, ſubducitur à maiori, quæ dicitur Tota, & quod reſtat, vocatur Apotome, ſeu Reliquum. Ita primum Binomium pariter per coniunctionem duarum linearum ex propoſ 17. quarum minor, ſi ſubducatur à maiori efficitur Apotome prima, & ſi duæ lineæ repertæ propoſ. 18. coniunctæ faciunt Binomium ſecundum, ſi minor earum ſubducatur à maiori faciet Apotomem ſecundam. Sic dicas de alijs: Vnde ſingulas propoſitiones non replicabimus; ſed propoſ. 19. dabit Apotomem tertiam, propoſ. 20. Apotomem quartam. prop. 22. Apotomem quintam. Tandem propoſ. 21. Apotomem ſextam docebit inuenire.

EXPENSIO VII.

De Irrationalibus Medijs.

HIc agimus de lineis Irrationalibus, quæ reſultant per relationem ad alias, & proportionem, & in duplici genere ſunt. Vel enim ad lineas, quæ potentiâ tantùm ſunt inuicem commenſurabiles referuntur, & vocantur mediæ, eò quòd ſint medium proportionale inter duas potêtiâ tantùm commenſurabiles. Vel non ſunt mediæ inter duas incommenſurabiles, ſed naſcuntur per æquipotentiam ad ſpatia irrationalia; & hoc ſecundum eſt genus, quod ſub ſe habet ſpecies de quibus infra. Porrò Mediæ in duplicem ſpeciem ſecernuntur, Aliæ enim ſunt; quarum duæ ſumptę faciunt rectangulum ſub ipſis contentum Rationale, licet ſingularũ quadrata ſint irrationalia Quadrato Expoſitæ Rationalis, quas explicamus 29. & alię quarum rectangulum eſt irrationale, quas docemus inuenire propoſ. 30.

THEOR. I. PROPOS. XXV.

Recta linea potens quadratum irrationale, irrationalis eſt.

POſſit recta AB quadratum ABCD, ſcilicet ex ea fiat, vel factum ſupponatur, & hoc ſit irrationale ſcilicet comparatum, cum quadrato alicuius lineæ EF, ſit irrationale, nullâque communi menſurâ dimetiri poſſit. *Dico, quod etiam linea* AB *ſit irrationalis comparata cum linea* EF.

E F D C B A

Probatur: Nam ſi dicitur rationalis eius quadratum erit rationale ex propoſ. 4. huius, quòd eſt contrà Theſim.

THEOR. II. PROP. XXVI.

Quod ſub rationalibus potentiâ ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt, & recta linea ipſum potens; nempe potens efficere quadratum illi æquale, irrationalis. Vocatur autem Media.

SIt data rationalis A, cui adſint duæ aliæ potentia tantùm commenſurabiles BC, & CD, ex quibus rectãgulum nigrum componitur. Dico, *quod hoc rectangulum eſt irrationale comparatum cum quadrato lineæ* A. Inſuper, & aſſero, quòd, ſi fiat quadratum H æquale dicto rectangulo, *linea recta latus huius quadrati erit irrationalis reſpectu lineæ* A, & quòd vocanda ſit *Media*.

H A D E C B

Probatur prima pars. Nam deſcripto quadrato ex altera illarum, & ex DC, quod erit rationale, & quadrato lineæ A commenſurabile; cum lineę datę BC, & CD ſint ei potentiâ commenſurabiles; ideſt earum quadrata ſint commenſurabilia, eritque inſuper eiuſdem altitudinis ob latus idem CD, quare ex 1. lib. 6. erunt in eadem proportione ita latera, vt quadrata, & eodem modo referentur latus cũ lateri BC, vel æquali DC, vt rectangulum nigrum ad quadratum album; ſed hæ lineę, lateraque ſunt incommenſurabilia. Idcircò etiam incommenſurabilia erunt rectangula album, & nigrum ex propoſ. 5 huius. Sed quadratum DE album eſt commenſurabile quadrato ex Rationali A conſtructo; Ergo rectangulum nigrum erit eidem quadrato Rationalis incommenſurabile ex propoſ. 7. huius.

Probatur ſecunda pars. Nam cum rectangulum nigrum fuerit oſtenſum irrationale, etiam quadratum H; quod ei ſupponitur æquale, erit irrationale comparatũ quadrato Rationalis, & ideo latus eius ex anteced. propoſ. erit irrationale.

Probatur tandem latus huius quadrati H ſit vocandum Linea Media. Nam ex propoſ. 19. lib. 6. illa linea media proportionalis eſt inter alias duas, cuius quadratum eſt æquale rectangulo ab illis duabus conſtituto. Quare cum quadratum H ſit æquale rectangulo nigro lineis BC, & CD conſtituto, erit latus eius media proportionalis, inter huius rectanguli latera BC, & CD.

COROLLARIVM I.

HInc videre eſt ſpatium medio ſpatio commenſurabile medium eſſe, ideſt irrationale. Nam poſtquam demonſtratum eſt ſpatium DA incommenſurabile eſſe ſpatio DB; oſtenſum quoque eſt medium eſſe, cum ipſum potens ſit medis ſcilicet latus quadrati H.

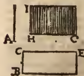
COROLLARIVM II.

HInc quoque educes omnia ſpatia ſub irrationalibus duabus, ſeu longitudine, ſeu potentiá contenta eſſe vni earum quadrato incommenſurabilia, & irrationalia, quod ita ſint quadratum DB ad rectangulum DA, vt ipſæ lineæ BC ad CD; ſed ipſæ ponuntur irrationales. Quare etiam rectangulum nigrum albo quadrato erit irrationale.

THEOR. III. PROP. XXVII.

Si ex Rationali fiat rectangulum æquale quadrato Mediæ; alterum latus erit ei Rationali potentiâ tantùm commenſurabile.

SIt data Media A, & Rationalis BC, ſiue longitudine, ſiue tantùm potentiá, ex qua tanquàm ex vno latere, vel per propoſ. 43. lib. 1. vel reperiendo extremam BC, & A lineis proportionalem CE. Nam rectangulum ex 9. lib. 6. ex extremis CE, & CB conſtitutum erit æquale quadrato mediæ A. Dico, *quod hæc tertia proportionalis* CE *eſt Rationalis potentia tantum Rationali* BC *commenſurabilis*.



Probatur. Nam quadratum ex Media eſt æquale rectangulo ſub duabus rectis lineis potentiá tantùm commenſurabilibus comprehenſo, vt ex propoſ. ant. Sit ergo illud GI habens lateri CB, latus HI potentiá tantùm cõmenſurabile. Modo ſic arguo. Rectangula AE, & GI ſunt æqualia, vtpote vni tertio æqualia; nimirum quadrato ex media A. Ergo habebunt latera ex propoſ. 10. l. 6. reciprocè proportionalia. Quare eandem proportionẽ dicet HI ad CB, quã CE ad GH: Sed HI, & CB ſunt potentiá tantùm commenſurabiles: Ergo etiam GH, & CE ex 5. h. Sed HI cõmenſoratur ipſi HG ex Theſi. Ergo ex 6. h. inuicem IH, & CE: ſed CB cõmenſuratur eodẽ modo HI, & CB quoq; Ergo, & inter ſe.

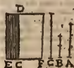
THEOR. VI. PROP. XXVIII.

Mediæ commenſurabilis media eſt.

SIt recta A media B commenſurabilis, Dico, & B *mediam eſſe* ideſt *incommenſurabilem*.

Detur itaque Rationalis, reſpectu cuius B media eſt, & ſit C. Applicetur q; ei C, vel quod idẽ eſt, fiat ex eá, tanquám ex vno latere rectangulum nigrum A D, quod ſit æquale quadrato mediæ B ex propoſ. 45. lib. 1. Et ex præced. AC erit Rationalis potentiá tantùm commenſurabilis. Deinde ex Rationali C; tanquam ex vno latere ex eadem propoſ. 43. lib. 1. fiat rectangulum æquale quadrato datæ A. Cum ergo media B, & A recta data ponantur commenſurabiles, earum quadrata erunt commenſurabilia ex propoſ. 4. huius; quamobrem rectangula quoque quadratis æqualia erunt commenſurabilia, quibus ſuppoſitis.

Probatur. Rectangula DE, & DF ob eandem Rationalem DC, quæ vtriuſque latus contexit, ſunt eiuſdem altitudinis: Ergo ex propoſ. 1. lib. 6. ſe habebunt inuicem, vt Baſes EC, & CF; cum ergo Rectangula album, & nigrum ſint cõmenſurabilia ex hypotheſi; baſes quoque erunt inuicem cõmenſurabiles EC, & CF. Sed EC Rationali DC eſt incommenſurabilis longitudine; ſed ſolum potentiá, vt dictum eſt ex præc. propoſ. Ergo etiam talis erit CF ex propoſ. 8. h. Sunt ergo hæc duo rectangula nigrum, & album contenta ſub incommenſurabilibus longitudine, quia EC eſt incommenſurabilis ipſi C, & eidem quoque CF oſtenſa eſt incommenſurabilis: Quare & rectæ lineæ, quę quadrata æqualia iſtis rectãgulis efficere poſſunt, ex propoſ. 25. huius. Sed talis eſt A, Quoniam fecimus rectangulum album, illius quadrato æquale: Ergo erit Media.



COROLLARIVM

HInc educitur ſpatium quoque medio ſpatio commenſurabile medium. Quia rectangula nigrum, & album ponuntur commenſurabilia, & tamen probantur media, dum oſtenditur contineri ſub lineis potentia tantum commenſurabilibus. Vnde ex propoſ. 25. erit ſpatium irrationale, & linea ipſum potens media, & conſequenter appellabitur ſpatium medium ab ipſa linea, quæ ipſum poteſt accipiendo denominationem.

PROBL. I. PROP. XXIX.

Medias inuenire potentiâ tantùm commenſurabiles, quæ rationale contineant.

SInt duæ potentiá tantùm commenſurabiles ex propoſition. 12. huius A, & B, inter quas media proportionalis ſumatur C, ex propoſ. 16. lib. 6. & ex propoſ. 15. lib. 6. reperiatur huic quarta proportionalis D; ita quod ita ſit in proportione A ad B, vt C ad D. Dico C, & D *eſſe medias potentia tantùm commenſurabiles*. Secundò, *quòd ſi fiat ex eis rectangulum, illud erit rationale*.

Probatur prima pars. Nam A, & B potentiá tantùm

tantùm sunt commensurabiles. Ergo, cùm eandem proportionem dicant A ad B, vt C ad D, erunt etiam C, & D inuicem commensurabiles ex prop. 5. huius solùm potentia.

Probatur secunda pars: Nam fundamentum proportionis A est ad suum terminum B, ex construct. vt fundamentum C ad terminum D: Ergo *permutando* refertur fundamentum A ad fundamentum C, vt terminus B ad terminum D.



Sed ex constructione, cùm C sit media proportionalis, ita est A ad C, vt C ad B. Ergo etiam erit, vt C fundamentū ad B terminū, ita B ad terminum D, quòd sit eadem proportio C ad B, quæ A ad C, & quæ A ad C eadem, talis sit B ad D ex ostensione superiori Et ideo etiam B erit media proportionalis inter C, & D; Propterea que eius quadratum erit æquale rectangulo ex C, & D ex 19. propos. lib. 6. Est autem quadratum ex linea B constructum Rationale cum B sit Rationalis potentiâ tantum commensurabilis: Ergo, & rectangulum, ex rectis C, & D, tanquam lateribus compactum erit Rationale.

COROLLARIVM.

SI A, & B sint lineæ tales potentiâ commensurabiles; ita quòd quadratum maioris superet quadratum minoris spatio quodam, quod in quadratum redactum habeat latus commensurabile ipsi maiori, vt docemus propos. 13 Etiam mediæ adiumento earum repertæ simili conditione gaudebunt, & C maior poterit plùs, quam D minor quadrato lineæ rectæ maiori commensurabilis. Nam ita est A ad B, vt C ad D; potest verò A plusquam B quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Ergo etiam C plus, quam D eodem genere quadrati potetit, vt ex propos. 15. huius Reperientur autem duæ cum hac conditione ex prop. 13. huius.

PROBL. II. PROPOS. XXX.

Medias inuenire potentiâ tantùm commensurabiles, quæ spatium irrationale contineant.

SInt tres Rationales potentia tantùm commensurabiles A, B, C, & inter A, & B media D proportionalis inueniatur ex propos. 16. lib. 6. Deinde reperiatur ipsi D quarta proportionalis E ex propos. 15. sexti; ita quòd, sicut B refertur ad C lineam, tali quoque proportione D referatur ad lineam E. Dico D, & B *esse medias proportionales potentia tantùm commensurabiles.* Secundo Dico; *quòd spatium irrationale contineant, quòd appellatur medium.*

Probatur A, & B sunt lineæ ex hypothesi potentiâ tantùm commensurabiles. Ergo rectangulum factum ex ipsis ex propos. 26. huius erit medium, Sed D est inter easdem A, & B media proportionalis: Ergo ex propos. 19. l b. 6. eius quadratum rectangulo ex lineis A, & B facto erit æquale, & etiam quadratum ex D erit medium, & irrationale, & D media. Quippe quod rectangulo irrationali sit æquale.

Sed B refertur ad C, vt D ad E. Ilizque B, & C sunt potentiâ tantùm commensurabiles; Quamobrem, & E ipsi D erit potentiâ tantùm commensurabilis ex propos. 5 huius. Propterea erit quoque E media ex propos. 28. huius. Ergo D, & E mediæ sunt potentiâ tantùm commensurabiles.



Probatur quoque 2. pars. Nempe quòd, si ex E, D lineis fiat rectangulū, illud fit mediū. Fundamentum B refertur ad terminum C, vt fundamentum D refertur ad terminum E, ex constructione. Vnde *permutando*, ita erit fundamentum B ad fundamentum D, vt terminus C ad terminum E. Sed D est media proportionalis inter A, & B. Quare erit A ad D, sic erit D ad B in proportione. & *inuertendo* eâ proportione respiciet B ipsum D sicut D ipsum A. Cum itaque sit B ad D, vt D ad A: Ergo etiam referetur terminus C ad terminum E, vt D refertur ad A æqualis est ipsorum D, & A proportio eadem, quæ fundamenti B ad fundamentum D, & ideo eadem, quæ termini C ad terminum E.

Cum ergo istæ quatuor lineæ sint proportionales, & D sit ad A; vt C ad E; rectangulum ex propos. 18. l. 6. quod continetur sub extremis D, & E erit æquale rectangulo à medijs contento A, & C: sed rectangulum hoc ex lineis C, & A est medium ex propos. 26 huius. Ergo etiam rectangulum factum ex lineis E, & D ei æquale.

COROLLARIVM.

HInc nascitur, quod si maior B plus possit quā C quadrato habente latus commensurabile ipsi maiori vt quod etiam sic se habebit D ad E, & suo quadrato superabit quadratum ipsius E quadrato tali, quod habebit latus sibi commensurabile Ratioque est eadem, quæ praeced. Coroll. quia ponitur, sic esse B ad C, vt D ad E in proportione. Potest verò B plus, quam C quadrato rectæ lineæ sibi maiori incommensurabili: ergo etiam D plus poterit; quam E eodem genere quadrati, ex 15. huius. Porrò reperientur duæ B, & C cum ea conditione ex propos. 14. huius.

EXPENSIO VIII.

De irrationalibus, quæ nascuntur à medijs.

MEdiæ licet respectu Rationalis irrationales sint, inuicem tamen commensurabiles sunt, ex propos. 28. huius. Idcirco penes diuersos respectus & relationes possunt dici, & rationales, & irrationales; irrationales quidem respectu Rationalis expositæ, at rationales inuicem: De istis verò duo genera assignauimus; Primum propos. 29. quæ rationale spatium continent: Secundum propos. 30. quæ medium spatium amplectuntur. Nunc ex isto duplici genere mediarum; Quatuor species oriuntur Irrationalium linearum; duæ per compositionem, duæ per subtractionem, vt supra ex rationalibus potentia tantùm Binomia, & Apotomes nascebantur. Si ergo potentiâ commensurabilis mediæ, ei addatur; quæ ambæ rationale spatium contineant, vocabitur ex Binis Medijs prima, seu primum Binomium Medium. Si verò vna subducatur ab aliâ, vocabitur media Apo-

Apotume prima. Si verò due mediæ inuicem potentia commensurabiles medium contineant spatium, & vna addatur alteri vocabitur ex binis medijs secunda; seu Binomium Medium secundum: Si verò vna subducatur ab alia, dicitur media Apotome secunda.

THOR. I. PROPOS. XXXI.

Si duæ mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota irrationalis erit, quæ vocatur ex Binis Medijs Prima.

COmponantur duæ Mediæ PA, & PB superiùs inuentæ propos. 29. quæ rationale rectangulum contineant. *Dico totam irrationalem esse.*

Probatur. Nam rectangulum album AF ex medijs AP, & PB ita refertur ad quadratum nigrum ex BP ex 1. l. 6. cum sit eiusdem altitudinis, vt bases; Sed bases sunt incommensurabiles: Ergo etiam Rectangulum AF album est incommensurabile quadrato nigro PH.



Addatur rectangulo aliud æquale FD, & ideo sibi commensurabili: Quadrato verò PH nigro ex PB, quadratum nigrum OF ex AP, quod vtique ei erit commensurabile; cùm mediæ inuicem ponantur potentiâ commensurabiles. Illa duo rectangula alba AF, & FD adhuc erunt incommensurabilia quadratis nigris, ex propos. 8. huius.

Verùm si omnia hæc aggregentur simul, duo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris, ex propos. 10. hoc aggregatum ex magnitudinibus irrationalibus vtrique parti aggregatæ irrationale erit, & signanter duobus rectangulis albis, quæ magnitudo est vna pars aggregata.

Tota autem hæc magnitudo irrationalis, nempe duo rectangula alba, & duo quadrata nigra æquant ex propos. 6. l. 2. quadratum AD ex tota AB; Ergo hoc quadratum AD ex tota AB erit irrationale respectu rectangulorum alborum, quæ sunt rationalia, & ideo etiam respectu quadrati Rationalis. Quare etiam ipsa tota AB, latus ipsius, erit incommensurabilis lineæ Rationali.

Vocatur autem *Binomium medium*; quod componatur ex duabus medijs, & *primum* ad differentiam secundi.

THEOR. II. PROPOS. XXXII.

Si à media media auferatur potentiâ tantùm ei commensurabilis, quæ rationale contineant, Reliqua irrationalis erit; vocatur autem Media Apotome prima.

ACcipiantur duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles, quę spatium rationale contineant inuentæ propos. 32. huius, CB, & AC, & minor BC subducatur à maiori AC. *Dico residuum AB esse lineam irrationalem.*

Probatur. Rectangulum AI sub maiori AC, & minori BC est rationale: Quare etiam duplicatum erit rationale, vt sunt AI, & BH. Quadrata verò nigra ex medijs AH, & EI irrationalia respectu Rationalis quadrati, licet inuicem rationalia, & ideo etiam irrationalia respectu rectangulorum AI, & BH, vtpote illi quadrato Rationalis commensurabilium ex Thesi.

Si verò totum ex duobus quadratis AH, & EI sumatur erit vtique singulis quadratis commensurabile: cum partes ipsæ nempe quadrata sint inuicem commensurabilia, & ideò respectu rectangulorum AI, & BH erit totum irrationale ex propos. 8. huius.

Verùm, si rectangulis duobus addatur quadratum ex AB, ex 9. secundi fit magnitudo æqualis magnitudini duorum quadratorum EI, & AH; Ideoque sicut duo quadrata AH, & EI sunt rectangulis ostensa incommensurabilia, sic erit hoc aggregatum ex rectangulis, & quadrato BA ipsis AH, & EI nigris quadratis æquale, rectangulis eisdem AI, & BH seorsim sumptis erit irrationale.

Cùm itaque tota magnitudo ex rectangulis, & quadrato ex AB sit incommensurabilis suæ parti, nempe rectangulis seorsim; Erit etiam incommensurabilis reliquæ parti nempe quadrato nigro ex AB ex parte 2. propos. 10. Quare Quadratum ex AB erit incommensurabile Rectangulis ipsis; sed rectangula ponuntur rationalia respectu Quadrati lineæ Rationalis: Quare etiam quadratum ex AB erit irrationale ex propos. 8. respectu quadrati lineæ Rationalis; Et idcirco etiam ipsa AB ipsi Rationali, irrationalis erit.

THEOR. III. PROPOS. XXXIII.

Si duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles componantur, quæ medium contineant, tota irrationalis erit; Vocatur autem ex Binis Medijs Secunda.

COmponantur duæ mediæ potentiâ tantùm inuicem commensurabiles AB, & BC, quæ medium spatium contineant. *Dico totam AC irrationalem esse.*

Præassumptum. Vt propos. ostendatur presupponendum est, Duo rectangula alba inuicem æqualia esse media; quia alterum ex ipsis sub AB, & BO ex Thesi est medium, & ideo eius duplum, eique commensurabile, medium est ex Coroll. propos. 30.

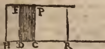
Sic quoque quòd quadrata nigra sunt media, quia lineæ AB. & BO eorum latera continentes ex Thesi sunt mediæ respectu rationalis, licet inuicem comparatæ commensurabiles sint potentiâ; Ideoque eorum quadrata inuicem sibi erunt commensurabilia, & hinc compositum ex ipsis ex propos. 10. erit medium, & irrationale, sicut ipsa seorsim irrationalia sunt.

Deinde Rationali ED expositæ applicandum est rectangulum EH, scilicet ex eâ, tanquam ex vno latere, efficiendum est EH ex propos. 43. primi; quod rectangulum sit æquale duobus medijs rectangulis albis, & eidem aliud rectangulum FD applicandum est, quod sit æquale duobus quadratis nigris item medija.

Primo itaque est ostendendum spatium totum

PH

PH esse irrationale respectu quadrati lineę Rationalis; & hoc demonstrabitur ex eò, quòd conti-



neatur sub CD, & DH, quę ostendētur potentiâ tantùm commensurabiles, quæ compositæ facient ex propos. 16. h. lineam irrationalem CH: linea verò DE, vel æqualis CP Rationalis est. Ideoque spatium PH erit irrationale, vt ostendetur: Quibus omnibus suppositis, cum spatium PH Irrationale, sit æquale quadratis nigris, & albis rectangulis, ex effectione, quæ ex propos. 6. lib. 2. faciunt quadratum ex tota AO, erit quadratum AE ex tota AO irrationale: Quamobrem etiam latus, & tota AO erit irrationale.

Primo itaque progressu ostendendum est duas CD, & DH esse rationales potentiâ tantùm commensurabiles, & ostendetur primo esse incommensurabiles longitudine. Nam in figura primò proposita rectangulum AI ex AB, & BO album quadrato nigro ex BO incommensurabile est; quòd ex 1. lib. 6. rectangulum sit ad quadratum eiusdem altitudinis, vt basis AB ad basim BO; ideoque cum bases sint incommensurabiles, etiam rectangulum AI album ex AB, & BO erit nigro quadrato ex BO incommensurabile. Ideoque etiam duo rectangula duobus quadratis erunt incommensurabilia, quia rectangulum rectangulo æquali. Quadratumq; quadrato commensuratur ad præassump. Ideoque spatium quoque nigrum PD æquale quadratis erit incommensurabile spatio albo EH æquale rectangulis. Ipsæ ergo lineæ erunt incommensurabiles, cum sit rectangulum nigrum ad rectangulum album, vt basis ad basim ex 1. l. 6.

Probatur deinde 2. Progr. Quod etiam sint potentiâ commensurabiles. Nam spatium nigrum PD est medium, vtpote æquale quadratis nigris medijs ex præassumpt. & DE Rationalis. Ergo alterum latus CD erit Rationale saltem potentiâ, ex propos. 27. Et ex eadem cum spatium album EH sit medium, vtpote medijs rectangulis albis AI, & IH æquale, latus eius alterum HD erit potentiâ commensurabile; quia ED Rationalis est; itaque lineæ CD, & DH sunt incommensurabiles longitudine quidem, vt supra ostensum est: Verùm, vt modo ostendimus, commensurabiles potentiâ, compositę facient lineam CH irrationalem ex propos. 16. huius, Ideoque spatium PH conclusum sub rationali DE, vel CP, & sub irrationali CH erit irrationale: Quod consequens modo demonstrandum est.

Progress. 3. Si spatium CH esset rationale spatium, latus quoque CH esset rationale, & sic rationale, & irrationale; quod repugnat. Irrationale quidem, vt probatum est progress. 2. Rationale verò, vt ostenderetur ex sententiâ aduersariorũ, si spatium ex CH asserant rationale. Nam facto quadrato PR ex Rationali CP, ita erit quadratum PR ad rectangulum HP, vt RC ad CH: sed rectangulum HP comparatum quadrato PR. ex aduersarijs est rationale: Ergo latus RC, vel æquale DE respectu lateris CH ob eandem altitudinem CP erit rationale, contra quòd ostensum est progress. 2. cum itaque hoc spatium PH sit irrationale, & sit æquale quadrato AK etiam quadratum illud erit irrationale, & linea AC irrationalis erit respectu rationalis DE, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM

Hinc est, quod medium spatium non superet medium spatium spatio rationali: sed irrationali spatio. Siquidem quadratum AK est irrationale, & medium, cui æquatur rectangulum PH & ideo irrationale est. Rectangulum quoque nigrum PD est irrationale, & medium, quòd superatur à rectangulo PH spatio AH, quòd ostensum est irrationale, siquidem si spatium EH esset Rationale, etiam rectangula AI, & IH æqualia essent rationalia.

THEOR. IV. PROP. XXXIV.

Si à mediâ media auferatur potentiâ tantùm commensurabilis existens toti, quæ cum tota medium contineat reliqua irrationalis erit, vocatur verò mediæ Apotome secunda.

Detrahatur à media AC media BC, ei AC tantùm potentiâ commensurabilis; quæ cum tota AC medium rectangulum contineant, *Dico reliquam BA irrationalem esse lineam alicui expositæ Rationali, cui BC, & AC mediæ sunt.*

Probatur. Nam, cum latera AC, & BC potentiâ tantum sint commensurabilia, efficient sua quadrata commensurabilia: Quare etiam cōposita ex 9. huius, magnitudo ex compositione resultans vtrisque seorsim commensurabilis erit. Quamobrem, cùm ea quadrata ex hypothesi media sint, tota magnitudo eis commensurabilis media erit ex propos. 9. huius.

Progress. 2. Rursùs, quia rectangulum sub AC, & BC medium, & irrationale est ex Thesi; si accipiantur duo ex ipsis AI, & EH; Tota quoque magnitudo media erit ob eandem rationem, quòd dupla sit singulis partibus, & duplum suæ parti dimidiæ commensurabile sit.

Progress. 3. Sciendum verò est ex 8. lib. 2. Duo quadrata, totum ex AC, & nigrum ex CB prædicta esse æqualia duobus rectangulis AI, & EH addito eis quadrato ex BA: Spatium itaque medium ex 1. progr. nempe duo quadrata superant spatium medium ex 2. proge. nempe duo rectangula, quadrato ex BA; sed ex præc. Coroll. medium non superat medium, nisi spatio medio: Ergo illud spatium reliquum quadratum ex AB erit medium, & irrationale; & linea AB; quæ eius latus contexit, erit irrationalis, quæ vocanda est media Apotome secunda.

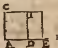
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

A mediâ infinitæ irrationales fiunt, & nulli antecedentium est eadem.

SIt media DA. Dico ex ea fieri irrationeles infinitas, quæ nulli ex prima factis eadem sint.

Exposita enim Rationali AC. Contineatur sub rationali AC, & mediâ AD spatium DC: hoc erit irrationale. Possit illud recta DE, idest sit latus quadrati illi spatio æqualis; hoc erit rursus irrationale quadratum, & DE erit media inter DA & AC ex prop. 19 lib.6. Addatur DE ipsi Rationali, vel æquali DI, & fiat spatium EI, hoc iterum erit irrationale cum conlocatur sub media ED & rationali DI. Possit illud EF, quæ rursùs erit media proportionalis inter ED & rationalem DI, & sic in infinitum.



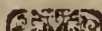
Quod vero ED non sit eadē, ac AD patet, quia ET est rectangulum, linea verò ED est latus quadrati ei rectangulo æqualis, sic EF est latus quadrati rectangulo EI æqualis: vnde EF non potest æquari ipsi AD, sed nec ipsi DA; cum semper proportio, vel crescat, vel diminuatur. Est enim rectangulum ED minus, quam DA ob latus minus ED altero DI semper eodem persistente, & sic de alijs in infinitum.

Quòd verò rectangulum sub rationali, & irrationali contentum sit irrationale patet. Nam rectangulum ex media AD; & AC Rationali est ad quadratum ipsius Rationalis AC ob tandem altitudinem, quam ipsa Rationalis præstat; vt basis AD ad latus AC: sed ex Thesi sunt irrationales, ergo etiam ipsum spatium erit irrationale quadrato Rationalis, & sic dicas de omnibus alijs.

EXPENSIO IX.

De lineis in partes commensurabiles, seu incommensurabiles, & omninò irrationales secandis.

VIsis inuentionibus linearum potentiâ incōmensurabilium; modo docere oportet, quomodo in qualibet exhibitâ lineâ partes commensurabiles, seu incommensurabiles reperiatur pro qua indagine necessaria est propos.30.& 31.lib.6. in qua docemus applicare rectangulum æquale dato rectilineo alicui lineæ, quòd ad implendam totam eius longitudinē figurâ quadratâ deficiat. Verùm quia propositio, vtpote vniuersalis est difficilior, nos verò solum indigemus applicatione ad lineam datam rectanguli tantum æqualis quadrato; inde ponemus Lemma facilius ad institutum deseruiens

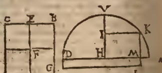


LEMMA I. PROP. XXXVI.

Datæ rectæ maiori rectangulum applicare æquale quartæ parti quadrati à minore descripti: sed taliter, vt per totam non se extendat; sed spatium relinquat, cui quadratum applicari possit.

SIt linea maior AD, minor CE, quæ diuisa bifariam in E; quadratum ex medietate CE descriptum, vt CF erit quarta pars quadrati è tota descripti CG, ex propos.6. secundi Coroll. Huic ergo quartæ parti CE sit applicandum ad lineam AD maiorem æquale parallelogrammum.

Secetur AD bifariam in H, & deducta perpendiculari ad AD, quæ sit HV à puncto H detruncetur æqualis ipsi CE, & centro H interuallo HD medietate ducto semicirculo AKVD ab I ducatur IK perpendicularis ipsi HF, & eo puncto, quo secat semicirculum in K, deducatur alia perpendicularis ad AD, quę secet eam in M; segmentoque AM æqualis fiat reliqua ML, & tandem perficiatur rectangulum LD.



Dico hoc parallelogrammum LD applicatum rectæ AD esse æquale quadrato CF, & deficere figura quadrata AL vsque ad occupandam totam lineam AD.

Probatur ex propos. 16.l.6. MK est media proportionalis inter MD, & MA. Ergo eius quadratum ex propos. 19. eiusdem est æquale parallelogrammo LD ex lineis MD, & ML confecto: sed huius KM quadratum est æquale quadrato CE, quod sit MK latus æquale ipsius lateri CE ex effectione. Ergo rectangulum DL est æquale quadrato CF: patet verò deficere figura quadrata ad occupandam lineam AD; quia latus LM est æquale segmento MA.

THEOR. I. PROPOS. XXXVII.

Si recta secetur in partes inæquales, & ab eadem detrahatur pars æqualis parti minori: si illæ partes fuere commensurabiles, reliquum erit commensurabile toti; sin minus, reliquum erit toti incommensurabile.

SIt recta AD, cui detrahatur minor pars AB, & rursùs huic æqualis pars CD. Dico reliquum BC commensurabile esse ipsi primitiæ AD; si tamen partes primo factæ AB, & BD ab initio fuere commensurabiles.

Pro-

Probatur: Quoniam partes AB, & BD ponuntur primo commensurabiles suo toti AD: Etiam tota linea AD vtrique ipsarũ cõmensurabilis erit ex propos. 9. Componantur AB, & æqualis CD: eritque composita commensurabilis suæ parti dimidiæ AB, & ideo tota AD etiam huic toti ablato AB, & CD commensurabilis erit. Quare totũ AD, etiam reliquo commensurabilis erit ex Coroll. prop. 9.

D C B A

Probatur secundus casus eodem genere argumenti. Nam, si pars AB est incommensurabilis parti BD, eritque composita ex tota AD ex propos. 17. incommensurabilis singulis suis partibus AB, & BD. Addatur parti AB pars æqualis CD, vt ideo ei commensurabilis, & huic toti adhuc erit incommensurabilis tota BD ex propos. 8. & ideo ex Coroll. propos. 10. erit quoque incommensurabilis residuũ BC.

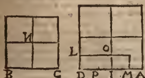
COROLLARIVM

DEducitur. Conuersam huius propositionis quoad vtrasque partes esse quoque veram: nempe, quòd si BC ponatur commensurabilis ipsi toti DA, etiam BS, vel CD, vel vtrasque simul commẽsurabiles, ipsi DA futuras; quoniã si tales nõ assent, deberet dici, quòd essent incommensurabiles BS, seu CD ipsi DA: quare sequeretur quoque iuxta præced. BC esse incommensurabilem ipsi AB contra Thesim. Similiter si CB incommensurabilis ponatur ipsi DA: Erit etiam BA, vel CA, vel vtraque simul incommensurabiles ipsi AD ob eandem rationem; quia si essent commensurabiles sequeretur contra Thesim iuxta anteced. ostensionem, BC non esse incommensurabilem.

THEOR. II. PROPOS. XXXVIII.

Si fuerit linea quædam maior, cui fuerit applicatum rectangulum æquale quartæ parti quadrati à minore descripti, &c. secet lineam in partes inæquales; excessus, seu differentia, qua maius segmentum superat medietatem, erit latus quadrati, cuius quadruplum est excessus quadrati lineæ totius maioris super quadratum minoris.

SIt linea AD, cui fuerit applicatum ex Lemmate præcedenti rectangulum ML æquale quartæ parti CN quadrati à minore CB descripti. Dico, *quod differentia MI erit latus quadrati, cuius quadruplum æquat excessum, quo quadratum lineæ AD superat quadratum lineæ CB.*



Quòd, vt probetur; diuidatur maior AD bifariã in I, & ex ea sumatur DP æqualis lineæ, & segmento AM, quo facto cum AI, & IO sint medietates, & ideo æquales, & MA, & PD ablatæ æquales; reliquæ MI, & IP æquales remanebunt.

Progr. 1. Recta AD est diuisa bifariam in I, & & non bifariam in M: Quare ex propos. 7. lib. 2. rectangulum ML sub MA, & MD contentum vnà cùm quadrato ex MI erecto erit æquale quadrato ex medietate IA descripto.

Progr. 2. Sed rectangulum hoc ex hypothesi, & constructione est æquale quartæ parti hoc est CN quadrati ex minore CB descripti, Ergo hoc rectangulum ML quater acceptum æquabit totum quadratum ex CB descriptum. Et quadratum ex MI, vt ex Coroll. propos. 6. lib. 2 constat æquabit quadratum ex MP quater acceptum, quòd supra MI, & IP ostensæ sint æquales.

Progress. 3. Sed quadratum ex AI æquat rectangulum ML simul cum quadrato ex MI, & dixi progress. 1. & hoc quadratum quater acceptum æquat quadratum totius AD ex Coroll. propos. 6. lib. 2. Ergo etiam rectangulum ML ex segmentis, & quadratum MI quater accepta æquabunt quadratum ex linea tota AD descriptum.

Progress. 4. Sed ex secundo progr. Rectangula quatuor sunt æqualia quadrato ex CB, & hæc eadem simul cum quatuor quadratis ex 3. progress. æquant quadratum ex AD: Ergo AD quadratum excedet quadratum ex CB quatuor quadratis ex MI differentiæ, quod erat probandum. Quatuor autem quadrata ex MI æquant quadratum ex MP, vt progress. 2. dictum est.

PROBL. I. PROPOS. XXXIX.

Diuidere datam lineam in partes incommensurabiles.

SIt data recta AD in præced. schemate, quam oporteat diuidere in partes incommensurabiles. Huic primò reperiatur alia tantùm potentiã commensurabilis minor CB, qua minori possit efficere ipsa data maior AD quadratum maius tali excessu quadrato, qui habeat latus sibi maiori incommensurabile ex propos. 14. huius. Applicetur autem rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex minore CB descripti, quòd deficiat ad eius longitudinem occupandam figurã quadratã, & sit ML. Dico MD esse partem in linea AD incommensurabilem ipsi AD, & etiam compartem AM talem esse ipsi AD actu, & potentia, sed insuper inuicem esse incommensurabiles.

* Probatur. Quia ex præced. MI, qua maior pars superat medietatem est quarta pars quadrati, quo linea AD suo quadrato superat quadratũ lineæ CB. Ideoque MP erit linea subtendens totum quadratum, quò maioris AD superat minoris CB quadratum: Ergo MP erit incommensurabilis, quia ex hypothesi excessus iste quadratus obtinet latus incommensurabile ipsi AD. Sed ex propos. 37. Coroll. si MP sit incommensurabilis ipsi AD etiam MA & PD erit incommensurabilis toti lineæ AD. Ex propos. 10. autem, si tota magnitudo ex duabus conflata vni earum incommensurabilis sit, erit, & alteri ex partibus, & ipsæ partes ab initio assumptæ incommensurabiles erunt. Quare AM, & PD ipsi AD toti, & etiam comparti MP incommensurabilis erit. Quòd si componatur MP, & AM, vel æqualis PD tota quoque magnitudo MD erit incommensu-

mensurabilis parti MA. Quamobrem partiones AM, & MD incommensurabiles erunt longitudine, tum toti AD, tum inter se.

Præass. Pro ostens. 2. partis, scilicet, quòd sint, ne dum actu incommensurabiles, sed etiam potentiâ, tum respectu lineæ AD, tum inuicem incommensurabiles, præsupponendum est; Quòd rectangulum ML est commensurabile quadrato CB, cum sit eius quarta pars, & ideo quadrato AD, cui ex CB quadratum ex Thesi commensuratur. Deinde, quòd etiam quadratum ex MP est commensurabile eidem AD. Quia, cùm quadratum ex CB sit commensurabile toti quadrato ex AD, erit etiam reliquum ex MP eidem commensurabile; quòd autem ex MP sit reliquum ostensum est in præced. Tandem rectangulum ML esse eiusdem altitudinis, ac quadratum ex AM, & quadratum ex MD, nam vnum latus DL æquat AM ex hypothesi, & MD est latus etiam quadrati ex MD.

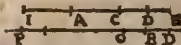
* Probatur, quòd AM, & MD sint incommensurabiles potentiâ ipsi AD Rectãgulum LM est cõmensurabile quadrato CB, cum sit eius quarta pars: Ergo etiam quadrato AD, cui ex CB commẽsuratur quadratum. Sed vt est AM, ad MD incommensurabiles ex 1.1.6 sic est quadratum ex AM ad rectangulum ML ob eandem altitudinem DL æqualẽ PD: Ergo etiam quadratum ex MA erit incommensurabile quadrato ex CB, & ideo ex AD. Idem ostendetur de quadrato MD. Quia est eiusdem altitudinis ob latus MD idem, ac rectanguli ML. Ergo erit incommensurabile rectangulum ML, & quadratum ex MD, quales ipsæ bases sunt AM, & MD, & ideo quadratum ex MD erit incommensurabile ipsi quadrato ex CB, & quadrato ex AD.

* Probatur. Etiam, quòd quadrata ex AM, & MD sint inuicem incommensurabilia: Nam rectangulum ML duplicatum, cum quadrato ex MP, ex 9. secundi æquant quadratũ ex MD cum quadrato PD. Cũ autẽ rectang. ML, & quad. MP ex præass. sit commensurabile ipsi AD. Etiam illa rectangula ML duplatum, & quadratum MP sunt commensurabilia quadrato CB, & AD: Ergo etiam totum quadratum ex MD simul cùm quadrato ex PD, vel AM, commensurabilia erunt, quæ illa æquant quadrato ex CB, & AD, sed quadratum ex AM est ostensum incommensurabile quadrato ex CB, vel AD. Ergo etiam erit incommensurabile toti quãtitati aggregatæ quadratorum AM, & MD; Quare ex propos. 10. ipsa quadrata erunt, inuicem incommensurabilia.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Si linea extrema, & media ratione secetur, vtrumque segmentum irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

* PRobatur de maiori segmento. Nam si tota linea AB ponatur rationalis; etiam dimidium erit rationale. Sed ex propos. 35. 1.6. si hoc dimidium reperiatur coniunctum cum maiori segmento facit quadratum quintuplo maius, quã à dimidio descriptum quadratum. Quare dimidij CB, vel æqualis AI, & maioris segmenti AD tanquam ex vnica linea, idest DI factum quadratum erit vt 5. respectu quadrati ex sola dimidia AI, quod erit vt 1. Eritque proportio tanquam numeri ad numerum, vnde lineæ ipsæ dimidia AI, & segmentum AD simul respectu dimidij tantum, idest AI, vel CB erunt potẽtia tantum commensurabiles, cum earũ quadrata habeant proportionem, quam



numeri ad numerum: Si ergo dimidia IA auferatur ab ID, reliquum remanebit AD segmentum maius ex propos. 19 huius Apotome.

* Probatur quoque secunda pars. Nam si addatur PB tota minori segmento, & fiat DP efficit ex propos. 38. lib. 6. quadratum quintuplo maius, quàm quòd efficitur à maiori segmento PG; si ergo auferatur maius segmentum à totâ, cum minori segmento DB, remanebit duplex minus segmentum; nempe, quòd erat prius DB, & id, quod relinquitur ex hac ablatione BG. Quare DG est Apotome, sed DB est dimidium BG: Ergo DB est Apotome, quòd erat probandum. Quoniam irrationali commensurabilis irrationalis linea ex prop. 8. huius est, & Apotome quoque, quòd exoritur ex ablatione minoris à maior. linearum, quæ inuicem potentia commensurantur, cùm earũ quadrata sint, vt ¼ quad. ad quinque, ex 6.1.8.

EXPENSIO X.

De irrationalibus simpliciter.

TErtium genus irrationalium est earum, quæ nascuntur ex æquipotentia ad duas lineas incõmensurabiles, ne dũ longitudine solùm, sed etiã incõmensurabiles potentiã; & huius generis sunt tres species. Prima species est earũ, quarum quadrata simul posita faciunt spatium rationale; rectangulum verò ab ipsis contentum medium. Secundum genus se habet è contrà; nam rectangulum sub ipsis contentum est rationale, spatium verò ex earum quadratis conflatum est irrationale. Tertium genus est earum, quæ faciunt rectãgulum sub ipsis contentum medium, & spatium quoque, quòd conflatur ex eorum quadratis medium, quæ quomodo inueniãtur docere oportet.



Obseruandum est ex 29.1.6. quod perpendicularis in rectangulo ab angulo recto demissa secat basim tali modo, vt rectangulum sub tota, & maiori segmento sit æqualis quadrato maioris lateris, at rectangulum sub tota, & minore segmento sit æquale quadrato minoris lateris.

Quod patet ex Corolla. pr. 8. 1.6. Nam latus BA maius est medium proportionale inter totam basim BC, & maius segmentũ BD: Ergo ex propos. 19. lib. 6. eius quadratum erit æquale rectangulo, quod totâ basi BC maiori segmento BA ambitur. Eadem ratio est de totâ BC, & minori segmento DC inter, quæ medium proportionale est minus latus CA.

Sic obseruandum est, quòd quadratum perpendicularis est æqualis rectangulo segmentorum, quòd ex eiusdẽ 8. Cor. 1.1.6. perpẽdicularis sit mediũ proportionale inter duo basis segmenta.

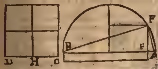
Sic

Sic rectangulum sub tota basi, & sub perpendiculari esse æquale rectangulo crurum: Patet, quia ob similitudinem triangulorum, ita est CB ad crus maius AB, vt crus minus, & basis AC in triangulo CAD est ad perpendicularem AD, crusq; maius in eodem triangulo, ideoque ex propos. 19. lib. 6. rectangulum contentum sub extremis proportionalibus erit æquale mediarum rectangulo.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum verò sub ipsis contentum medium.

REperiantur duæ Rationales potestate solùm commensurabiles, ex propos. 14. huius, quarum maior AB plus possit, quam minor CD quadrato rectæ ipsi maiori AB incommensurabilis. Deinde ex propos. huius 36. applicetur maiori parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, quod sit æquale parti quartæ quadrati à minore CD descripti, cuius latus est medietas CH. diuidatque eam in BE partes incommensurabiles, ita quòd rectangulū contineatur sub AE, & EB. Descripto tandem semicirculo super AB, erigatur à puncto E perpendicularis EF, ad AB, quæ secet semicirculum in F; iunctis ergo punctis extremis AF, & FB erunt rectæ AF, & FB duæ incommensurabiles, quarum quadrata composita faciant magnitudinem rationalem; *rectangulum verò ab ipsis contentum medium.*



Probatur primò. Quòd sint *incommensurabiles* ex propos. 39. huius. Partes AE, & EB sunt incommensurabiles, sed vt est segmentum AE ad segmentum EB; ita est rectangulum sub tota, & minore parte BA ad rectangulum sub tota, & maiore parte AB ex 1. sexti; quòd sint eiusdem altitudinis ob idem latus AB totius, commune vtrisque. Ergo etiam hæc duo rectangula erunt incommensurabilia, vt sunt bases AE, & EB. Sed hoc rectangulum ex tota, & maiore parte AB est æquale quadrato ex FA, vt suprà notaui, sicut, & rectangulū ex tota, & minore parte AB, vt suprà est æquale quadrato ex latere AF minore. Ergo quadratum cruris maioris BF, & quadratum minoris AF erunt incommensurabilia; & ideo rectæ AF, & FB, quæ horum quadratorum contexunt latera, erunt incommensurabiles eodem modo, quo AE, & EB, nimirum toti rationali AB, & inter se.

Probatur secunda pars. Quod earum quadrata composita efficiant spatium rationale. Nam ex 22. secundi efficient spatium æquale quadrato ex AB ob rectangulum triangulum AFB: Basis verò AB ponitur potentiâ commensurabilis ipsi CD minori, & ideo eius quadratum erit rationale. Quadrata ergo ex AF, & FB simul posita illi quadrato æqualia efficient spatium rationale.

Probatur tertia pars, quòd rectangulum sub ipsis AF, & FB contentum sit medium. Rectangulum sub AE, & EB contentum, vtpote, quæ sint potestate solùm commensurabiles medium est prop. 26. huius. Ergo etiam omne aliud, quòd ipsis sit commensurabile ex propos. 28. Coroll.

Sed rectangulum ex totâ basi AB, & perpendiculari BF illi commensuratur, quòd sit medietas eius, ergo hoc rectangulum erit medium.

Quòd verò sit medietas rectanguli ex CD, & AB incommensurabilibus rectangulum ex AB, & BF ostenditur; quia BF orthogonalis est medietas lateris CD. Vnde, cùm rectangulum ex tota AB, & FE sub totâ AB, & medietate lineæ CD contineatur erit dimidio minor; quàm rectangulum sub totâ AB eâdem, & totâ CD.

Quòd verò orthogonalis sit medietas lateris CD, sic ostenditur, perpendicularis FE quadratum ex præassumpt. æquale est rectangulo ex partibus AE, & EB basis; sed hoc ex effectione est æquale quadrato ex dimidia CH totius CD: Ergo quadratum perpendicularis FE, & quadratum ex HC erunt æqualia. Vnde, & latera erunt æqualia, & perpendicularis EF erit æqualis medietati CH lineæ CD. Rectangulum ergo sub BF, & AB, vtpote medietas rectanguli medij, & irrationalis sub AB, & DC contenti erit medium, & irrationale: Sed huic ex prænotatis est æquale rectangulum ex cruribus AF, & FB; Igitur rectangulum ex cruribus AF, & FB erit medium, & irrationale. Duæ itaq; AF, & FB faciunt quadrata simul posita rationalia, at rectangulum sub ipsis contentum medium, & irrationale, & ipsæ sunt incommensurabiles potentiâ ipsi AB Rationali potentiâ commensurabili.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommensurabiles; quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium: rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

INueniantur duæ *Media* ad differentiam propos. anteced. AB, & CD potentia tantùm inuicem commensurabiles, quæ Rationale spatium amplectantur ex propos. huius 29. sed hac conditione, quòd AB maior plùs possit, quàm CD minor quadrato rectæ sibi maiori longitudine incommensurabilis, quas docuimus inuenire Coroll. prop. 30. Deinde applicetur maiori rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex CD minori descripti, & omnia peragantur, vt priùs vtendo eadem figura. *Dico primo AF, & FB esse incommensurabiles.*

Probatur eadem ratione, quâ ostensa est prima pars præced. propos. ex eo principio, quòd partes AE, & EB sint incommensurabiles. Vnde, & eorum rectangula sub tota AD, & ipsis AE, & EB comprehensa, vtpote eiusdem altitudinis: ideoque quadrata ex AF, & BF eis æqualia: Idcircoque, & & ipsa latera AF, & BF erunt incommensurabilia. Dico secundo. *Compositum ex ipsarum quadratis esse medium, & irrationale.*

Probatur eodem modo, quo ostensa est secunda pars præced. Ex eo, quod sit æqualia ea magnitu-

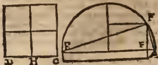
do quadratorum compositorum ex AF, & FB quadrato ex AB media. Vnde illud spatium duorum quadratorum medium erit ex Coroll. propos. 28.

Dico tertio *rectangulum sub ipsis contentum esse rationale*. Probaturque eadem deductione, qua tertia pars praeced propos. Nempe ex eo, quia rectangulum earum AF, & FB aequale est rectangulo ex perpendiculari FE, & tota BA; quod est medietas rectanguli sub AB, & CD, & ideo ipsi commensurabili. Idcircoque, cùm rectangulum illud ex AB, & CD ex Hypothesi sit rationale, cùm medias assumpserimus spatium rationale continentes, etiam dimidium eius erit rationale, & ideo rectangulum ex AF, & FB huic dimidio aequale, erit quoque rationale.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, quae faciant compositum ex earum quadratis medium, & rectangulum sub ipsis comprehensum medium.

REperiantur duę Mediae potentiâ tantùm commensurabiles AB, & CD; quae medium contineant spatium, & irrationale ex propos. 30. huius, & maior plus possit, quàm minor quadrato cuiusdam rectae maiori incommensurabilis. Deinde omnia fiant, vt propos. 41. habebimus intentum,



Nam ijsdem probationibus vtendo, primo AE, & EB erunt incommensurabiles ob quadratum, quo maioris superat minoris quadratũ maiori ipsi incommensurabile, & ideo AE, & EB sunt incommensurabiles, & hinc earum rectangula AB tota pro altero latere inseruiente erunt incommensurabilia; Idcirco etiam quadrata linearum AF, & FB eis aequalia. Vnde ipsae AF, & FB erunt incommensurabiles.

Secundo aggregatum quadratorum AF, & FB erit medium, quòd sit aequale quadrato ex AB medio, propter suum latus AB medium.

Tertiò rectangulum sub AF, & FB erit medium; cum sit medietas rectanguli sub AB, & CD medij ex Thesi, & Irrationalis, quòd sit aequale rectangulo ex perpendiculari dimidia datae CD, & altera data AB, facto, & ideo rectangulum ex lineis AF, & FB erit medium, & irrationale, vt ex suppositione est rectangulum ex AB, & CD.

EXPENSIO XI.

De lineis irrationalibus, quae ab irrationalium simpliciter additione, vel subductione resultant.

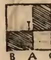
VIdimus, quomodo tres species irrationalium reperiantur in anteced Expeos. quae certis conditionibus discriminantur. Si ergo istae inuicem addantur constituunt tres species Irrationalium *Maior* prima; Secunda *Rationale, & Medium Potens*. Tertia *Bina Media potens*. Si verò altera alteri subducatur relinquunt tres species alias Irrationalium. Nempe *Primã, quae dicitur minor*. Secundam *cùm Rationali medium totum efficiens*. Tertiam *Cum media medium totum efficiens*; quas omnes demonstrabimus esse irrationales.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componantur, quarum quadrata aggregata rationalia sint, Rectangulum vero irrationale. Tota est irrationalis, quae vocatur Maior.

COniungãtur duae rectę AB, & AC potẽtiâ commensurabiles, quarum quadrata aggregata CI, & IH rationalia sint Rectangulum verò ab ipsis effectum irrationale sit BI. Dico totam CB esse irrationalem.

Probatur ratione, quâ vsi sumus propos 15. Rectangulum nigrum AI sub AB, & AC conclusum est medium ex hypothesi; Vnde, & duplicatum addito ei altero nigro medium, & irrationale perseuerabit ex Coroll. propos. 28. cùm sit commensurabile parti componenti. Sed aggregatum quadratorum alborum CI, & IH, quibus pro lateribus inseruiunt, ponitur rationale. Rectangula nigra igitur quadratis duobus albis erunt incommensurabilia. Et si rectangula cum quadratis componantur totum aggregatum ex propos. 80. erit vtrique parti componenti irrationale. Hoc autem totum est aequale ex propos. 6. secundi quadrato ex CA, & AB, tanquàm vnâ lineâ constituto. Ergo hoc quadratum totius compositae AB erit incommensurabile quadratis duobus nigris: Sed quadrata duo ex lineis seorsim sumptis ex Thesi ponuntur rationalia: Ergo quadratum ex tota cũ quadratis albis erit irrationale. Vnde, & tota CB erit irrationalis: ipsis CA, & AB, quam placuit appellare *Maiorem*.





THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur. Quarum quadrata aggregata faciant spatium medium; Rectangulum verò, quod claudunt, Rationale tota irrationalis erit; vocatur autem Rationale, & medium potens.

COmponantur duæ rectæ DB, & CB potentiâ incommensurabiles, quas docuimus reperire propos. 35. quæ compositum quadratorum faciunt medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale. Dico *has compositas facere lineam irrationalem.*

Probatur eâdem ratione adhibitâ, quæ in præcedenti. Nam rectangulum nigrum CQ est Rationale, quod claudũt iunctæ BD, & CB, & cũ alio nigro æquali rectangulo est adhuc rationale. Quadratorum verò alborum aggregatum ex Thesi est irrationale. Ergo si simul omnia ponantur tota quantitas, & magnitudo aggregata singulis partibus erit irrationalis, sicut, & ipsa quadratis. Sed hæc tota aggregatio quadratorum, & rectangulorum æquat quadratũ ov ex CD ex prop. 6. l. 2. Ergo hoc quadratum magnum ex CD erit irrationale, & idcirco eius latus tota composita BC ex duabus repertis CB, & BD erit irrationalis, quæ appellabitur *Rationale, & medium potens*, quia potest efficere suis partibus, quibus componitur rectangulum rationale, & quadratorum partium aggregatum medium, nempe irrationale.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, quarum quadrata composita spatium medium efficiant, & rectangulum quoque, quod continent medium sit, tota irrationalis erit; vocatur autem bina media Potens.

PRobatur eadem ratione, qua vsi sumus ad ostendendam propos. 33.

Vt ergo probetur applicandum est alicui rationali DE rectangulum DP nigrum, quod sit æquale rectangulis duobus albis ex hypothesi medijs duarum datarum AB, & OB & eidem Rationali PE applicetur aliud rectangulum æquale duobus quadratis nigris ex hypothesi medijs, quæ fiant ex AB, & OB.



Quo facto probabitur eodem modo, ac ibi propos. Totum spatium PH esse irrationale; quòd sit confectum ex duobus rectangulis, quorum vnum est æquale rectangulo medio duplici albo, & alterum quadratis nigris, quæ quantitates sunt incommensurabiles quia rectangulum album ad quadratum nigrum ob eandem altitudinem, quam cum illis habent, sit vt bases AB, & OB quæ ponuntur incommensurabiles, & ideo quadrata ipsa rectangulis nigris erunt incommensurabilia. Quare rectanguli PH, partes OP, & PH, vtpote æquales quantitatibus inuicẽ incommensurabilibus constans, erit incommensurabilis altera alteri: Quare lineæ ipsæ erunt incommensurabiles CD ad DH.

Erunt autem potentiâ commensurabiles Quoniam BO est rationalis, & spatium medium rationali applicatum facit aliud latus potentia commensurabile; ex propos. 27. Quamobrem duæ lineæ potentiâ tantùm commensurabiles sunt; quæ compositæ facient lineam irrationalem ex propos. 36 huius. Spatium verò, quod continent progr. 3. propos. 33. ostensum est irrationale; quia ibi demonstratur: quod, si spatium, contineatur sub rationali, & irrationali, illud est irrationale.

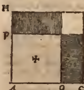
Hoc autem spatium, ex effectione æquat rectangula alba, & quadrata nigra, quæ simul faciunt quadratum AA, ex AO. Ergo quadratum ex AO erit irrationale; & ideo ipsa AO irrationalis erit.

THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

Si à linea recta auferatur alia potentia incommensurabilis existens illi toti, sit autem compositum ex ipsarum quadratis rationale: at rectangulum ab ipsis clausum medium: reliqua irrationalis erit, quæ vocatur Minor.

DIcit propositio quod si detur AC linea maior, & tota, & OC minor, quorum quadrata sint rationalia; at rectangulum sub ipsis contentum, vt est semialbum OI, sit medium: Dicit inquam; quod si minor OC auferatur à maiori AC, *reliqua AO erit irrationalis.*

Probatur eodem modo, ac propos. 33. huius. Rectangulum sub AC, & OC seminigrum inuentis lineis iuxta propos. 41. est ex Hypothesi medium; ergo duplicatum erit quoque medium ex Coroll. propos. 28.



Compositum verò ex quadratis datarum AC, & OC Rationale: igitur prædictis rectangulis OI, & PI semialbis quadrato album ex linea OC, & aliud totum CH erunt irrationalia, & incommẽsurabilia. Si verò rectangulis prædictis addatur quadratum ex residuo AO ex 7. secundi efficietur magnitudo æqualis duobus quadratis prædictis CH ex CA toti, & alteri ex linea OC; Ideoque incommensurabilis rectangulis duobus OI, & PI. Cum ergo tota magnitudo quadrati OA, & rectangulorum duorum seminigrorum PI, & IO sit incommensurabilis rectangulis seorsim sumptis ex propos. 10. erit, & incommensurabilis quadrato ex AO. Quapropter erit hoc quadratum cruce insignitum ex AO irrationale. Vnde ipsam

residuum lineæ AO erit irrationalis, quod appellandum est lineæ Minor.

THEOR. V. PROPOS. XLVIII.

Si rectâ linea à rectâ auferatur incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum ex ipsorum quadratis medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale, Reliqua irrationalis erit. Vocatur autem, cum Rationali medium totum efficiens.

DEtrahatur à rectâ CD maiori recta CE minor, quæ inuentæ sint iuxta propos. 42. Dico *reliquum* ED *esse irrationale.*

Probatur eadem ratione, ac antecedens. Rectangulum sub CD, & CE contentum ex hypoth. ponitur rationale, vnde, & duplicatum tale erit, vt OV, & EV: Sed duorum quadratorum DV, & QV ex duobus EC, & CD lateribus factorum compositum est irrationale. Ergo hoc compositum duplicatis rectangulis OV, & EV erit irrationale, & incommensurabile: Sed si rectangulis addatur quadratum album DQ, ex ED ex 9. secundi efficitur magnitudo æqualis magnitudini ex consistis quadratis DV, & QV, ideo quadratis seorsim sumptis incommensurabilis, ex propos. 10. huius. Quare incommensurabilis quoque quadrato residui albo ex QD. Ideo reliqua ED irrationalis erit, quæ vocatur. *Cùm rationali medium totum efficiens.*

THEOR. VI. PROPOS. XLIX.

Si à rectâ auferatur recta potentiâ incommensurabilis existens toti, quæ faciat compositum ex ipsorum quadratis medium, & rectangulum sub ipsis contentum medium, & quadratis incommensurabile; Reliqua irrationalis erit, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens.

SIt recta AC, à qua detrahatur OC, & sint eiusdem rationis, quas docuimus reperire prop. 43. additâ eâ conditione, quod rectangulum non commensuretur quadratis ex AO, & AC. Dico residuum OC esse incommensurabile, & irrationale.

Probatur eadem ratione, quâ vsi sumus prop. 34. Tota magnitudo ex repertarum AC, & OC quadratis conflata media est ex Thesi, sicut, & rectangulum seminigrum sub ipsis contentum, etiam si duplicatum, vt sunt duo rectangula nigra, cum duplici quadrato minori, & quia rectangulum seminigrum duobus quadratis albis ponitur incommensurabile; tale quoque erit compositum ex rectangulis duobus seminigris.

Sed si duobus Rectangulis addatur quadratum maius ex residuo OC ex propos. 9. secundi efficietur magnitudo æqualis magnitudini ex duobus quadratis AC toto, & AO: Ergo hęc tota magnitudo quadratis duobus seorsim sumptis erit media, & incommensurabilis iuxta propos. 10. superant itaq; quadrata media magnitudinem rectangulorum compositorum nigrorum quadrato ex residua OC.



Sed medium non superat medium rationali, aliquâ quantitate ex Coroll. prop. 33. Ergo quadratum ex residua OC non est rationalis quantitas: Vnde erit irrationalis, & linea illud quadratum subtendens OC erit irrationalis, quæ vocatur. Cum media medium totum efficiens, quia nascitur à partibus, quæ efficiunt tum quadrata composita: tum rectangulum, quod ambiunt medium, & irrationale.

COROLLARIVM VNIVERSALE.

HAbemus itaque 26. inuentiones diuersarum linearum irrationalium. Primò sex Binomiorum, quæ nascuntur à compositione linearum potentiâ tantùm commensurabilium. Secûdò sex Apotomes ex subtractione potentiâ tantùm rationalium. Deinde habemus mediam irrationalem, quæ inter duas potentiâ tantùm commensurabiles media proportionalis est, ex quâ nascũtur quatuor species irrationaliũ duę per subductionẽ, quę dicũtur Apotome media prima, & Apotome media secunda, duæ per additionẽ quę vocantur Binomium mediũ primũ, & Binomiũ mediũ secundũ. Tandẽ inuenimus tria genera irrationalium simpliciũ, ex quibus prodiere, sex species irrationalium; nempe duæ à singulis generibus; vna quidem per additionem, vt sunt, quas hic descripsimus prima *Maior*. Secunda *Rationale, ac medium potens*. Tertia *Bina Media potens*. Altera verò per ablationem nempe Prima *minor*. Secunda *Cum rationali medium totum efficiens*, & Tertia *Cum medio medio ratum efficiens*, quæ omnes, si simul ennumerentur erant 26. nempe 22. per additionem, & ablationem, & aliæ genericæ, nempè Mediæ, & irrationales simpliciter, & si placeat reperire etiam plures ex media infinitæ mediæ fiunt, vt supra diximus.

Addit verò Euclides multas harum linearum proprietates, quæ exoriuntur ab applicatione spatiorum irrationalium ad ipsas, seu ad aliquam rationalem: sedcum visum nobis sit, ea non pertinere ad elementa, noluimus in plura hunc tractatum extendere, cum hæc sufficiant ad naturam irrationalium, exortumque intelligendum: neque amplior earum cognitio ad prosecutionem Mathematices desideretur.

EXPENSIO XII.

De commensurabilibus ad lineas irrationales.

FÆcundum germen linearum irrationalium sunt lineæ ipsæ irrationalibus commensurabiles: nam ipsæ quoque illarũ naturam inducunt, & irrationales sunt: Vnde ad multiplicandas irrationales sufficeret multiplicare alicui irrationali semel repertæ commensurabiles.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. L.

Alicui ex Binomijs commensurabilis, ipsa quoque Binomium est.

IRrationalitas Binomiorum consistit in eo, quod totum sit incommensurabile omnino suis partibus componentibus, cùm partes ipsæ sint potentiâ commensurabiles. Sit ergo Binomium AC diuisum in sua nomina AB, & BC, & ei lineæ commensurabilis longitudine DF; ostendendum est DF esse quoque Binomium, & ostendetur ex eò, quòd possit DF in duas partes diuidi, quibus totum erit irrationale, cùm ipsæ partes inuicem sint potentiâ commensurabiles.

A B C

D E F

Fiat itaque ex propos. 15. lib. 6. vt AC ad DF, sic AB ad DE. Eritque etiam ex propos. 22. quinti cum sit totum AC ad totum DF, vt ablatum AB, ad ablatum DE, reliquum quoque BC ad reliquum EF, vt totũ ad totũ, & vt ablatũ AB ad ablatũ DE. Quare ex 5. huius erunt commensurabiles AB, & DE, sicut etiam BC, & EF. Sed AC, & AB ponuntur incommensurabiles toti AC: Ergo etiam DE, & EF ipsi toti AC tales erunt, sed AC, & DF sunt commensurabiles, ergo ex propos. 8. huius. & ipsi suo toti DE, & EF erunt incommensurabiles.

Progr. 2. Probatur quoque esse DE, & EF duas tantùm potentiâ inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* AB ad BC, vt DE respondet in proportione ad EF; sed AB, & BC sunt potentia commensurabiles. Ergo etiam ex 5. huius tales erunt DE, & EF. Quare cum DE, & DF sint duæ potentiâ tantùm commensurabiles ex ijs constet DF, etiam DF erit Binomium.

THEOR. II. PROPOS. LI.

Apotome commensurabilis, etiam ipsa Apotome est.

SIt AB Apotome, & BC congruens, & DE ipsi AB commensurabilis. *Dico, quod etiam hæc ipsa* AB *Apotome sit*; Scilicet ex subductione duarum Rationalium potentia tantum, irrationalis quædam lineæ resultans respectu ipsarum, à quibus subduci poterat.

Fiat itaque AB ad DE, vt AC ad DF ex propos. 15. lib. 6.

Quia itaque est totum AC ad totum DF, vt pars AB ad partem DE ablatas, erit quoque ex prop. 22. lib. 5. reliquum BC ad reliquum EF, vt totum ad totum, & vt ablatum ad ablatum, & ideo inuicem commensurabiles lineæ. Sed AB ablatum ponitur, vtpote Apotome incommensurabile ipsi comparti AC, & toti AC. Ergo etiam DE ex huius 5. erit incommensurabile ipsi DF, & EF. Quoniam inuicem AB, & DE sunt commensurabiles sicut, & inuicem tota AC, & DF, quare reliquum AF erit incommensurabile toti AC: vnde, & suo toti ei commensurabili DF ex propos. 8. huius.

C B A

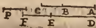
F E D

Probatur deinde, quòd DF, & EF sint potentiâ commensurabiles. Nam ostensum est, quòd sicut est AC totum ad DF totum sic, & BC pars reliqua sit ad EF partem reliquam. Ergo *permutando*, vt est AC totum ad suam partem reliquam BC in proportione, sic est DF totum ad suam partem reliquam in proportione, sed AC totum ad BC reliquam est potentiâ commensurabilis linea. Ergo ex propos. 5. huius etiam totum DF ad reliquum EF. Vnde cum DE sit residuum à subtractione Rationalis EF potentia tantùm commensurabilis respectu illius DF, à quâ subducta est, ipsa erit Apotome quoque, & respectu illarum, à quibus emanat eãdem naturam Apotome sortitur.

THEOR. III. PROPOS. LII.

Binomio medio commensurabilis, & ipsa Binomium medium est.

SIt P Rationalis, & AC Binomium medium diuisum in sua nomina AB, & BC & DF, toti Binomio AC commensurabilis. Et ex 15. lib 6. fiat, vt tota AC ad totam DF, sic pars AB ad partem DE. Erit ergo ex 22. quinti etiam reliquá BC ad reliquam EF, vt tota AC ad totam DF, & ideo, cùm DF ponatur commensurabilis ipsi AC; talis erit pars DE commensurabilis parti AB, ex propos. 5. huius, & sic EF commensurabilis parti BC. Quare respectu Rationalis P, erunt incommensurabiles, & mediæ DE, & EF; vt sunt AB, & BC ex propos. 28. huius. Secundo ostendetur esse inuicem potentiâ tantùm commensurabiles DF, & EF, sicut, & illæ sunt AC, & BC.



Quæ enim est, vt pars AB ad partem DE, sic pars BC ad partem EF, erit *permutando* pars AB ad partem BC, vt pars DE ad partem EF: Sed partes AB, & BC potentiâ tantùm ponuntur commensurabiles; Ergo etiam DE, & EF ex prop. 5. h. Quare, cum sint mediæ efficient aliquam ex ijs irrationalibus, quæ resultant per compositionem mediarum.

THEOR. IV. PROPOS. LIII.

Apotome mediæ commensurabilis, & ipsa Apotome media est

SEd sit AB Apotome media in fig præced. & ei congruens BC, & fiat, vt AC ad DF, ita AB ad DE. Quia ergo, vt totum AC correspondet proportione ad totum DF, sic pars AB ablata ad partem ablatam DE. Ergo etiam ex propos. 22. lib 5. BC reliqua pars correspondebit ad reliquam EF, vt ablata AB ad ablatam DE, sed pars ablata AB est cõmensurabilis parti DE ablatę ex Thesi. Ergo ex propos. 5. h. reliqua BC, reliquæ EF, & totum AC toti DF erit commensurabile, & quia AC, & BC ponuntur mediæ; erunt etiam DF, & EF mediæ ex propos. 28. h. respectu rationalis P.

Probatur deinde, quòd sint inuicem potentia commensurabiles DF. & FE.

Nam ita est AC ad DF, vt BC ad FE; Ergo *permutando* ita erit fundamentum AC ad fundamentum BC, vt DF terminus ad FE terminum: Sed AC, & BC sunt potentiâ tantùm commensurabiles: Ergo ex propos. 5. h. etiam DF, & FE.

THEOR. V. PROPOS. LIV.

Compositis lineis irrationalibus commensurabiles sunt quoque eodem modo, ac ipsæ irrationales compositæ.

SIt AB, & BC duæ omninò irrationales, quæ cōpositæ faciant lineam AC irrationalem respectu P Rationalis. Dico, & DF ei commensurabilem, seu longitudine seu potentiâ tantùm esse lineam quoque irrationalem, vt ipsa est.

Probatur. Sit diuisa AC in suas partes irrationales, quibus componitur AB, & BC, & fiat totum AC ad totum DF, vt AB ad DE ex propos. 15. lib. 6. ideoque etiam erit totum AC ad DF totum, sic altera pars BC ad alteram partem EF ex 22. lib. 5., & ideo partes AB ad DE, vt BC ad EF. Quare, cùm totum AC ponatur commensurabile toti DF, erit etiam pars AB commensurabilis parti DE, sicut, & alia compars BC erit alteri comparti EF commensurabilis. Quare, cùm partes sint commensurabiles, & totum AB rationali P ponantur incommensurabile, etiam partes DE, & DF erunt incommensurabiles ipsi Rationali P; sicut, & ipsum totũ DF toti AC commensurabile, & ipsi rationali P erit incommensurabile ex prop. 8 h.

Probatur secundo. Quod etiam illæ partes DE, & EF sint inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* ita erit AB ad BC, vt DE ad EF; Sed BA, & BC sunt incommensurabiles omnino. Ergo ex prop. 5. h. etiam DE, & EF.

THEOR. VI. PROP. LV.

Quæ Reliquis ex lineis irrationalibus commensurabiles sunt, & ipsæ irrationales, & Reliquæ, vt illæ sunt.

SIt AB reliquum ex irrationalibus duabus AC, & BC, & commensuretur ei DE. Dico, quod etiam DE est reliquum, seu Apotome ex irrationalibus duabus.

Sit enim BC altera irrationalis à cuius subtractione ab irrationali AB remansit AC, & ex prop. 15. l. 6 fiat, vt AB ad DE, ita AC ad DF; & quia AB commensuratur ipsi DE, etiam AC totum commensurabitur ipsi toti DF, & altera pars BC alteri comparti EF. Cum ergo AC totum, & BC pars ponantur incommensurabiles omninò rationali P etiam DF totum, & EF pars reliqua ex prop. 8. h. erit incommensurabilis omnino, & irrationalis rationali P.

Probatur deinde; quòd etiam DF, & FE sint duæ omninò incommensurabiles; Nam vt est AC ad DF, ita ponitur BC ad EF: Ergo *permutando* erit, vt AC ad BC; ita DF ad FE: sed AC, & BC sunt incommensurabiles omninò, & irrationales: Ergo ex prop. 5. h. etiam DF, & FE: ideoque, cùm sint inuicem irrationales, & irrationales quoque respectu P rationalis remanebit lineâ DE Reliquum ab irrationali DF subductâ irrationali EF sicut AB est reliquum subductâ irrationali BC ab irrationali AC.

Et hæc dicta sint genericè de illis lineis, quæ commensurantur irrationalibus; licet enim Euclides ad species singulas descendat, in illis 12. Binomiorum, & Apotomarum speciebus, & probet singulas commensurabiles vnicuique speciei Binomio, vel Reliquo ad illam speciem pertinere, cui commensuratur; nobis tamen visum est, adeo specificam cognitionem necessariam non esse, maximè, quia irrationales minùs in vsum veniant in rebus mathematicis.



TRACTATVS XIII.

IN NVMERIS PROPORTIONALIBVS. PARS I.

De Numerorum Ratione.

POST Elementa primus ſcopus, in quem Mathematica tendit, ſunt proportiones numericæ, vtpote, quæ cum ſint rationales, magis etiam cognitioni ſunt obuiæ, & proportionibus corporum maximè affines, illis ianuam aperiant. Sed priùs de numeris ipſis proportionalibus, vt qui proportionum Arithmeticarum ſint fundamenta, agere opus eſt, & ſub hac ratione fundamenti proportionum de illis ſermonem facere. Poſſunt autem conſiderari, vt fundamenta proxima, & vt fundamenta remota, vt remota conſiderantur cum rationes ipſorum, quatenus ſe gerunt, vt continens, & contentum ſpeculationem ſubeunt, at vt fundamenta proxima, cùm non iam ſub ratione ſimplici, ſed ſub ratione relata ad aliam, & ſimilitudinem alij rationi dicente animaduertuntur. Ibi interueniunt duo numeri ſolum; hic quatuor requiruntur, quoniam iam non conſiderantur, vt obtinent rationem; ſed proportionem. Si ergo, vt rationem dicentes numeri accipiantur, tunc vocantur fracti: nempe partes alterius numeri, qui ſe tanquam totum, & continens gerit, & de iſtis prima hac tractatus parte peragemus, numeris, vt rationem dicentibus in ſecundam partem reſeruantes.

EXPENSIO I.

De minutiarum proportionibus.

ANtequam ipſarum minutiarum Algorithmum proponamus, neceſſe eſt cognoſcere ipſarum proportionem, quam hic breuiter indicabimus.

DEFINITIO I.

FRactio, minutiaue, aut numerus fractus eſt vna pars, ſeu plures partes alicuius totius, vel plurium totorum ſub vnius ratione conſideratorum.

Si enim totum ſit ſectum in 4. partes æquales, duæ ex ipſis, vel vna erunt numerus fractus: item ſi tres aurei ſecti ſint in 8. partes æquales, & ex illis accipiantur tres, illæ tres partes erit numerus fractus trium aureorum.

Conſtat verò quælibet fractio duobus numeris. alter eſt, qui partes acceptas exprimit, & ſuper lineolam ponitur, alter eſt, qui totius exprimit partes, & ſub lineola ponitur hoc modo.

$\frac{3}{5}$ $\frac{3}{5}$ Qui ſuper lineolam ponitur dicitur Numerator; quòd numeret partes, quæ accipiuntur ex partibus totius; qui verò ſub lineola collocatur dicitur Denominator; quòd denominet, ex quo toto illæ partes ſumptæ ſint; ita in minutia $\frac{3}{5}$, in qua ſunt tres quintæ partes vnius integri quinque partibus conſtantis, tres eſt Numerator quinque Denominator.

Præaſſumpt. 1. Oriuntur numeri fracti ſæpius à diuiſione integrorum, in quâ, aut illa, quæ diuiduntur ſunt integra ſingula, vt numerus diuidendus accipitur, vt plures partes plurium integrorum, vt vnius, & diuiſio inſtituitur ad hoc, vt illæ partes in integros redigantur, vt 103. Iulij diuiduntur per 10 Iulios, quibus conſtat Aureus quilibet, vt Aurei fiant & ſic fractio $\frac{3}{10}$, quæ remanet à diuiſione ſignificat vnius aurei tres partes, ex 10. ex quibus conſtat. Vel diuiditur aliquis numerus ad hoc; vt ſingulis diſtribuatur, V. g. 103. Aurei, vt diſtribuantur 10. Militibus, & tunc ſignificat fractus $\frac{3}{10}$ tres Aureos in 10. æquales partes diſtributos. Ita ſi dentur V. g. in quadrato KN partes 9. ex quibus accipiantur 4. & fiat minutia $\frac{4}{9}$ KL conſtabit ex quatuor quadratis, quorum quodlibet eſt 9. pars totius; quare ſi ſingulæ partes in 9. partes iterum intelligantur diuiſæ numerus 4. eſt etiam huius totius nona pars. Nam, ſi hæ ſingularum nouenæ partes ſimul erant quatuor nouenarios, etiam ſingulis diuiſis in nouem partes, quatuor ex ipſis erunt quatuor nouenariorum nona pars. Nam fient 36. cuius 4. eſt nona pars, nempe earum nouem in quibus 4. partes intelliguntur diuiſæ, vt fiant 36. Vnde eſt illud, quòd minutia id eſt 4. eſt pars numeratoris.



tis scilicet ipsius 4. à denominatore denominata, nempe nona pars.

THOR. I. PROPOS. I.

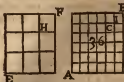
Minutia est ad suum integrum, vt numerator ad denominatorem.

PRobatur. Quia numerus numerans exprimit partes totius, & tot habet vnitates, quot partes sunt in ipsa quantitate non integra, nempe minutiâ, sicut & denominator tot habet vnitates; quot integrum partes; Ergo vt est minutia ipsa ad integrum, ita est numerator ad denominatorem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Minutiæ æquales, vel eiusdem integri quæ ad suas integras quantitates eandem habent proportionem, inuicem sunt æquales; quæ verò habet maiorem proportionem, illa maior est.

SIt integri eiusdem AB 36 minutia AC, seu pars 16. nempe $\frac{16}{36}$ sitque integrum prædicto æquale EF 9. cuius minutia sit 4. EH, ita vt sit $\frac{4}{9}$. *Dico minutias esse æquales si ad sua integra æqualia sint in eâdem proportione.*



Probatur. Quia ex propos. 9. quinti, quæ magnitudines ad eandem, seu adæquales eandem habent rationem æquales sunt inter se; sed minutia HE 4. & AC 16: ad æqualia integra EF, & AB similẽ habent rationem; Ergo sunt inuicem æquales.

Probatur secunda pars. Quia maior ratio ea est, cùm aliqua quantitas alterius plùs comprehendit, sed AI 25. dicit ex hypothesi ad suum totum AB 36. maiorem rationem, quam EH 4. ad EF 9. ergo plùs comprehendit AI 25. ex integro AB; quàm EH 4. ex integro EF 9. quæ integra sunt æqualia: Quare erit maior AI, quam EH.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ad sua integra inæqualia minutiæ similem dicant proportionem erunt inuicem in proportione, vt sua tota, & integra existunt.

SIt minutia KL 4. ad suum integrum KN 9. vt in schemate præced. præass. vt minutia AC ad integrum maius priori integro AB. *Dico, quòd minutia KL ad AC est, vt integrum KN ad AB.*

Probatur. Ita est KL minutia ad KN totum, vt AC minutia ad AB totum ex hypothesi. Ergo permutando erit KL ad AC, vt totum KN ad totum AC.

COROLLARIVM

HInc eruitur minutias, quarum numeratores eandem proportionem habent ad suos denominatores esse æquales; si denominator integri æqualis quantitatis exprimat; cum enim denominator vices integri obeat, & partes, quæ in ipsa quantitate sunt, exprimat, patet; quòd eadem ratio est de denominatoribus, ac de totis ipsis: Vnde, & minutia ad suum denominatorem maiorem rationem dicens maior erit, & ita Aurei $\frac{3}{9}$, & $\frac{4}{12}$ erunt minutiæ æquales. Quia ita se habet 3 ad 9. vt 4. ad 12. At $\frac{4}{9}$, & $\frac{4}{12}$ sunt minutiæ, quarum prima $\frac{4}{9}$ cum habeat maiorem rationem ad suum denominatorem; quam $\frac{4}{12}$ maior erit.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, eandem proportionem habent, quam numeratores, dummodo de eodem vel æquali toto verificentur.

DEtur minutia $\frac{16}{36}$, & $\frac{25}{36}$. Dico, *quòd habeat eadem inuicem proportionem, quàm numeratores 16. & 25.*

Probatur, vt numerus 16. ad 36. ita est minutiâ AC partium 16. nempe ipsa quantitas in schemate præc. ad integram quantitatem BA ex 1. h. vt autem numerus 36. ad 25. ita est AB ad AI. Ergo *ex æquo* ita erit 16. ad 25. relicto medio 36. vt quantitas AC ad quantitatem AI.

EXPENSIO II.

De fractionum valore.

CVm à proportione, quam dicunt numeratores ad denominatores minutiæ, pro vt vidimus valore crescant, & maiores sint, videndum modo est; quomodo earum valor dignosci queat.

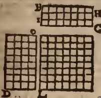
PROBL. I. PROPOS. V.

Duas minutias diuersarum denominationum ad eandem reducere denominationem.

SInt datæ minutiæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{3}{8}$ Velimusque cognoscere valorem harum minutiarum, idest quænam ad suum idem, cuius sunt minutiæ, maiorem proportionẽ dicat: Alternatim denominatores vnius cum numeratoribus alterius multiplicentur V. g. 3. per 7. & fiant 21. & è contra 4. per 8. & fiant 32. deinde denominatores inuicem, qui exprimât partes ipsius totius, & fiat 56. Dico eandem esse minutiam $\frac{4}{7}$ quæ $\frac{32}{56}$, & $\frac{3}{8}$ quæ $\frac{21}{56}$.

Probatur. Nam, cùm sint numerator 3. & denominator 8. multiplicati per eundem numerum 7. erit ex 17. l. 7. elem. eadem proportio 3. ad 8. quam 21. ad 56. ex prima vero propos. h. minu-

tiæ, quæ ad suum totum idem, habent æqualem proportionem, æquales sunt; quare cũ minutia constans tribus octauis partibus cr, & iu, & iu erit æqualis cu ipsi toti, prout constat 21. partibus minoribus ex 2. h. propos. cùm ad cz totum eandem dicat proportionem.



Sic in OD cõstante quatuor partibus septimis, cũ sit 4. multiplicatus per numerũ eundem 7. & sit factus 32. & item totum 8. sit multiplicatum per 7. & factum 56. habebit eandem proportionem 4. ad 7. quam 32. DO minutia ad 56. CL totum: Ergo ex 1. propos. h. $\frac{32}{56}$, & $\frac{4}{7}$ erunt æquales, & erit eadem minutia DO. Quare duæ minutiæ $\frac{3}{8}$, & $\frac{4}{7}$ erunt reductæ ad eundem denominatoré, cum $\frac{21}{56}$, & $\frac{32}{56}$ illis sint æquales.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Plures, quàm duas minutias diuersarum denominationum ad eundem reducere.

Sint datæ minutiæ $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, quę ad eandem denominationem redigendę sint. Multiplicentur simul ordinatim denominatores, nempe 2. cum 7. vt fiat 14. & cum hoc producto 14. numerus 3. vt fiant 42. & cum hoc producto 42. numerus 5. vt fiat 210. Deinde diuidatur numerus productus per ipsum denominatorem. Diuidatur V. g. per primum 2. & erunt 105. qui multiplicetur per 1. numeratorem, & prodibit prima minutia $\frac{105}{210}$ Deinde idem numerus diuidatur per secundum denominatorem 7. & prodibit 30. multipliceturque hic numerus per numeratorem 4. & erit $\frac{120}{210}$. Idem fiat de tertio 3. nam diuiso 210. per 3. erit 70. qui multiplicetur per 2. & erit $\frac{140}{210}$. Sic diuidatur per 5. & erit 42. qui multiplicetur per 3. & erit vltima minutia $\frac{126}{210}$. Dico omnes datas minutias reuocatas esse ad alias $\frac{105}{210}$ $\frac{120}{210}$ $\frac{140}{210}$ $\frac{126}{210}$ eiusdem denominationis, quæ prædictis $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ æquiualent.

Probatur. Nam, cùm multiplicauerimus denominatores simul, habebit primus numerus tot duenarios, quot vnitates sunt in 7. & tot septenarios, quot vnitates sunt in 2. & sic habebit partes, quas numerus 2. & quas 7. habent, idem dicas de numero 7. multiplicato cum 3. & de 3. multiplicato cum 5. Vnde productus numerus 210. eas habebit partes, quas habent denominatores; nempe secundam, septimam, tertiam, quintam. Poterit itaque mensurari numero 5. 3. 7. & 2. reperiuntur itaque istæ partes per diuisionem, & sit V g. quinta pars 42. Quia ergo 42. est quinta pars, habebit eam proportionem 42. ad 210. quam 1 ad 5. Si ergo multiplicetur 42. per 3. & fiat 126. & per 5. vt fiat 210. erit eadem proportio 3. ad 5. multiplicatorum, quæ 126. ad 210. genitorum; cum per eundem numerum 42. multiplicati sint; quare ex propos. 1. erit eadem minutia $\frac{1}{2}$ & $\frac{105}{210}$, & sic de alijs.

PROB. II. PROPOS. VII.

Datas minutias diuersæ denominationis, vel eiusdem æstimare, quæ maior sit.

Sit data minutia $\frac{4}{7}$, & $\frac{3}{5}$, & volumus cognoscere, quænam maior sit. Multiplicentur inuicem numeratores vnius cum denominatoribus alterius, & consideretur, cuiusnam numerator maiorem numerum producat. Nam illa minutia est maior. Sic quia multiplicatus 4. per 5. producit 20. & 3. cum 7. producit 21. maior erit minutia $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$.

Probatur. Nam si inuicem denominatores multiplicentur, & fiat 35. erit eadem minutia $\frac{21}{35}$, quæ $\frac{3}{5}$, & $\frac{20}{35}$, quæ $\frac{4}{7}$ ex 5. huius prop. Sed 21. maiorem proportionem dicit ad suum totum 35. quam 20. ex propos. 8. lib. 5. quia plures partes eius comprehendit. Ergo 21. erit maior, quam 20. ex secunda propos. huius. Vnde etiam erit maior $\frac{3}{5}$, quam $\frac{4}{7}$ ex propos. 12. lib. 5. Coroll.

COROLLARIVM I.

Quod, si iam sint æquales denominatores putet, eam minutiam fore maiorem, quæ denominatorem habet maiorem; ita est maior $\frac{3}{8}$, quam $\frac{2}{8}$, & cæt. Quod si numeratoribus ijsdem denominatores inæquales sint, vt $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, erit illa minor minutia, cuius denominator maior est ex prop. 8. lib 5. quia suo toti minorem proportionem dicit. Nam $\frac{3}{4}$ minutiæ denominator superat numeratorem vnica parte tantum; at minutia $\frac{3}{5}$ denominator superest numeratori duabus vnitatibus: Vnde 3. magis comprehendit de integro 4. quam 3. de integro 5.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam est; Quod, si in aliquâ minutia numerator, aut æquat, aut superet denominatoré, quòd illa minutia æquet, aut superet integrũ, cùm partes integri numerator exprimat; ita $\frac{5}{5}$, & $\frac{7}{7}$ sunt integra; at si essent $\frac{9}{7}$ tunc esset vnus integer, & insuper $\frac{2}{7}$, & sic propriè esset scribendum $1\frac{2}{7}$.

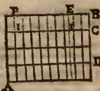
PROBL. III. PROPOS. VIII.

Valorem alicuius minutiæ, secundùm alias partes non à denominatore denominatas explorare.

Sit minutia $\frac{3}{4}$ vnius quadrati, quod constet 20. partibus. Volo scire, quot partes sint tres quartę illius quadrati: multiplico per partes 20. datas numeratorem 3. & facit 60. diuidoque per denominatorem 4 & productum erit 15. Tot ergo partibus constat minutia $\frac{3}{4}$, estque æqualis $\frac{3}{4}$, & $\frac{15}{20}$.

Probatur. Nam multiplicetur per 20. numerus 4. denominator, & quia 20. multiplicat 4. & facit 80. & 3. & facit 60. erit eadem proportio, ex 17. lib. 7. n. 3. ad 4. quæ 60. ad 80. Diuidat rursus 4. eundem numerum 60. & 80, & generet 15. & 20.

& 20. eadem quoque proportio erit 15. ad 20. quæ 60. ad 80. ideſt, quæ 3. ad 4. Quare æqualis erit minutiis ex 2. huius propoſ. $\frac{3}{4}$, & $\frac{15}{20}$.



Sic ex 20. parallelogrammis, quibus conſtat AB ob multiplicationem per 4. factum eſt AB totū 40. minorum, & AC minutia æqualis priori ex tribus parallelogrammis, quorum vnum eſt AD factū eſt 30. & tandem per diuiſionem per 4. diuiſum eſt totum in 10. parallelogramma, quorum vnum eſt AF, & item minutia, & facta eſt AE æqualis minutiæ AC.

Quod ſi minutia intelligatur diuiſa per denominatorem, vt def. 1. aduertimus V. g. remanſerint ex aliqua diuiſione facta per 4. tres integri; vt ſint $\frac{3}{4}$, tunc tria V. g. parallelogramma intelliguntur diuiſa in 4. partes, quorum trium parallelogrammorum ſimul ſumptorum minutia eſt tertia pars, ſue tres illarum amplectitur, & aliquis deſiderat ſcire, quot ex decem partibus, in quas illa tria parallelogramma intelliguntur diuiſa comprehendant $\frac{3}{4}$ ipſorum. Tunc eodem modo agendum eſt, Ratio eſt. Quia accepta vnitate V. g. AD, ea habet eandem rationem ad 3. cū 1. multiplicando 3. faciat 3. ex 17. lib. 7. quam 10. ad 30. item per 3. multiplicatus; Si verò diuidatur per 4. eadem ratio erit $7\frac{1}{2}$ ad 10. quæ 3. ad 4. cum 30. diuiſus per 3. faciat 10. & idem 30. diuiſus per 4. faciat $7\frac{1}{2}$ cumque idem numerus vtrobique diuidatur quotientes $7\frac{1}{2}$ & 10. habebunt eandem rationem, quam numeri diuidentes 3. & 4. Quare minutia AE erit tres quartæ partes minutiæ AC tribus parallelogramis conſtantis, quorum vnum eſt AD.

Aduerte tamen; quòd ſi quando, vt hîc $7\frac{1}{2}$ numerus, qui prouenit non ſit integer; tunc propriè non poteſt ad eam denominationem redigi minutia; quia ſilicet minutia non ſolet per numeratorem, cui fractus adhæreat exprimi; vt fierat, ſi numerator ſtatueretur $7\frac{1}{2}$; ideóque minutia redigetur ad aliā æquiualentem $\frac{15}{20}$, vel ſi detur 10. & velit aliquis, exhibere minutia, cuius numerus 10. ſit denominator, tunc reſpondebitur, quod propriè nequit fieri, ſed æquiualenter,

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Tam numeratoris, quam denominatoris maximam communem menſuram inuenire.

SIt datus numerus $\frac{1970}{2758}$, cuius tum numeratoris, tum denominatoris maxima communis menſura ſit reperienda. Diuidatur denominator 2758 per numeratorem 1970. & reſiduum V. g. 788. diuidat rurſus numeratorem, & 394. diuidat rurſus reſiduum præcedens 788. aut nihil remanet, aut aliquid; ſi aliquid remaneat; rurſus idem faciendum, diuidendo reſiduum maius per reſiduum minus, donec ad vnitatem deuentum ſit, & ſi ad eam perueniatur, erit ea cōmunis menſura, nec aliam communem menſuram ij numeri habebunt, & ideo vocabuntur inter ſe primi: at ſi ad vnitatem non perueniatur, vt hoc exemplo, in quo diuiſo reſiduo 788. per reſiduum minus 394. nihil remanet, ideo 394. erit communis amborum menſura maxima.

Prob. ex propoſ. 2. lib. 7. elem. Nam iam 394. menſurat ex æquo 788. reſiduū: hoc autem reſiduum 788. menſurat 1970. & hoc menſurat 2758. Ergo 394. menſurat etiam 2758. Quod vero etiam ſit maxima communis menſura patet, & probatur eiuſdem prop. 2. l. 7. elem.

PROBL. V. PROPOS. X.

Minutiam ad minorem denominationem redigere.

MInutię aliquando adeo magnis numeris proponuntur, vt non facilè earum proportio intelligatur, quis enim non faciliùs intelligat $\frac{5}{7}$ quam $\frac{1970}{2758}$. Imo aliquando magna minutia aliquius reſidui diuiſionis per minimos exprimitur, cùm tamen computus apparenter hoc non exhibeat, V. g. ſit numerus 24832. diuiſus per 2758. quotiens erit 9. & reſiduum erit $\frac{1970}{2758}$, qui numerus apud auctores reperietur expreſſus per hunc $\frac{5}{7}$ minimum numerum illi minutiæ æquiualentem: Vnde oportebit cognoſcere eandem minutiam ſub diuerſis numeris poſſe exprimi; ne aliquis putaret errorem irrepſiſſe in computo aliquo apud Mathematicos breuiſſimis terminis expreſſo.

Ita igitur, ſi reducenda ſit aliqua minutia ad minimos terminos, erit agendum: Repertâ maximâ communi menſurâ ex antecedenti diuidatur per eam, tum numerator, tum denominator V. g. datę minutię $\frac{1970}{2758}$ diuidatur per maximam menſuram 394. tam numerator 1970. & prodibit pro numeratore 5. tum denominator, & exeret pro denominatore 7. ita erit noua minutię $\frac{5}{7}$ quam Dico æquiualere minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

Probatur eadem proportio eſt 5. ad 7. quam 1970. ad 2758. cum vterque numerus ſit per 394. diuiſus, & quotientes ſint 5. & 7. ex pr. 17. lib. 7. Quare ex 3. propoſ. Cor. huius erit æqualis minutia $\frac{5}{7}$ minutiæ $\frac{1970}{2758}$.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Integros ad minutiam redigere.

SInt dati integri 7. qui reducendi ſint ad minutiam denominatam à numero 9. multiplicetur 7. per 9. & erit productus 63. qui erit numerator, ſtabitque minutia $\frac{63}{9}$.

Probatur. Denominator exprimit integrum in eas partes, quas habet, ſeu numeros diuiſum. Ergo tot erunt nouenarij, quot integri. Sed integri ſunt 7. Ergo nouenarij erunt quoque 7. Numerus verò 9. ſeptiea acceptus facit 63. vnde erunt $\frac{63}{9}$.

EXPEN.

EXPENSIO III.

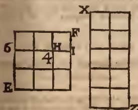
De fractorum numerorum additione.

ADditio fractorum facilis eſt, & ferè eadem, quæ integrorum; quare ad eam declarandam vnica propoſitio ſufficiens erit.

PROBL. I. PROPOS. XII.

Minutias eiuſdem denominationis, aut diuerſæ ſimul addere.

SInt primo addendæ minutiæ eiuſdem denominationis $\frac{6}{9}$, & $\frac{4}{9}$. Simul colligantur numeratores, & fint 10. & ſupponatur denominator, & fint $\frac{10}{9}$, ideſt 1. & $\frac{1}{9}$. Dico *duas minutias eſſe ſimul additas*.



* Probatur; vt eſt numerator numerus 6. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EI ad integrum EF ex propoſ. 1. Et vt eſt numerus 4. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EH ad integrum EF ex e. huius. Ergo ex propoſ. 25. lib. 5. compoſitus numerus 6. prima quantitas cum 4. quinta, habebit eandem rationem ad denominatorem 9. ſecundam, quam EI tertia cum EH ſexta ad integrum EF quartam quantitatem: ſed 6. & 4. numerus eſt ad 9. vt 10. ad 9. ſed vt 10. ad 9. ita fiat ZX minutia ad integrum EF. Ergo ZX ad integrum EF erit, vt EI, & EH ad integrum EF. Vnde ZX erit minutia æqualis EI, & EH, & dicet eandem proportionem ad integrum, quam 10. ad 9. Vnde bene quoque exprimetur per numerum $\frac{10}{9}$, vt requiritur in expreſſione minutiæ ex prima propoſ. huius.

Idem verò agendum etiã, ſi ſint plures minutiæ, quam datæ, vt $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{7}$. Nam omnes iſtæ minutiæ ſimul collectæ efficiant $\frac{12}{7}$ ideſt 1. & $\frac{5}{7}$, ſic agito in cæteris.

Si vero denominatores minutiarum ſint diuerſi; tunc redigentur ex ſupradictis ad eãdem denominationem, & eadem ſeruabitur regula, eademque oſtenſio valebit.

EXPENSIO IV.

De Minutiarum ſubductione.

EAdem prorſus ratio eſt de ſubductione, quæ de additione.

PROBL. I. PROP. XIII.

Minutiam minorem à minutia maiore ſubducere.

SI duæ minutiæ, quarum minor à maiore ſubducenda ſit. Subducatur numerator minoris à maiore, & reſiduum erit minutiæ, quæ poſt ſubtractionem remanet. Ita ſi $\frac{3}{5}$ à $\frac{4}{5}$ ſubducenda ſit, deducto n. 3. à 4. reſiduum erit $\frac{1}{5}$ ſic ſi $\frac{4}{9}$ à $\frac{7}{9}$ deducatur, reſiduum erit $\frac{3}{9}$.

Probatur. Quia enim 4. detractus à 7. relinquit 3. erit 3. & 4. æqualis numero 7. Ergo, & minutia 3. & 4. expreſſa erit æqualis quantitati minutiæ expreſſæ numero 7. Vnde ablata quantitate reſpondente numero 4. remanebit quantitas reſpondens numero 3.

At ſi ſint minutiæ diuerſorum denominatorum. Priùs in vnam denominationem ſunt reuocandæ, vt ſupra docuimus, & ſic inſtituenda eſt, vt priùs, operatio.

EXPENSIO V.

De fractorum multiplicatione.

MInutia multiplicatur, aut per minutiam aliam, aut per numerum integrum cum minutia, aut per numerum integrũ, aut mutuò duo integri cum duabus minutiis, &c.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Inuicem Minutias multiplicare.

SInt multiplicandæ minutiæ $\frac{4}{9}$, & $\frac{6}{9}$ multiplicentur inuicem numeratores, & fiat 24. Deinde denominatores, ſeu ſint eiuſdem, ſeu diuerſæ denominationis, & fiant 81. Ergo numerus ex multiplicatione $\frac{4}{9}$, & $\frac{6}{9}$ productus eſt minutia $\frac{24}{81}$ ſic $\frac{2}{7}$, & $\frac{3}{5}$ multiplicantur ex numeratorum multiplicatione faciendo 6. & denominatorum faciendo 35.

* Prob. Illa eſt multiplicatio, in qua toties componitur is, qui multiplicatur, quot ſunt in multiplicante vnitates; vnde genitus V. g. 15. eam habet proportionem ad multiplicatum 5. quã habet 3. multiplicans ad vnitatem. Data ſit ergo minutia $\frac{2}{7}$, & $\frac{3}{5}$ multiplicetur 2. per 3. numeratores, & fiant 6, & 5, per 7. denominatores, & fiant 35. Dico *quod minutia* $\frac{6}{35}$ *ita eſt ad minutiam* $\frac{2}{7}$, *vt* $\frac{3}{5}$ *eſt ad vnitatem*, & ideo minutiam $\frac{6}{35}$ eſſe genitam ex minutia $\frac{2}{7}$ per minutiam $\frac{3}{5}$

Probatur. Nam; cùm 7. multiplicatus per 5. produxit 35. erit eadem proportio product. 35. ad multiplicatum 7. vt multiplicantis 5. ad 1. Idem dicas de numeratoribus, nam 6. ad 3. erit, vt 2. ad 1. ob eandem rationem. Cum ergo tam denominator 35. ad denominatorem 7. generantẽ, quã numerator genitæ minutiæ $\frac{6}{35}$, nimirum 6. ad numeratorem 3. minutiæ generantis $\frac{3}{5}$ dicat eam proportionem, quam numerator 2. dicit ad 1. & denominator 5. dicit ad 1. minutiæ $\frac{2}{5}$ multiplicãtis, tota minutia, nempe ſimul numerator, & denominator $\frac{6}{35}$ generata erit ad totum $\frac{2}{7}$ multiplicatã, & generantem, vt minutia tota multiplicans

 eſt

$\frac{4}{5}$ est ad 1. ideo erit ea, quæ multiplicabit $\frac{3}{5}$, & generabit $\frac{12}{25}$.

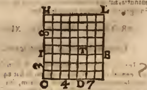
COROLLARIVM

HInc vides maiorem esse rationem in minutiâ genitâ denominatoris ad numeratorem, quam in minutijs generantibus denominatorum ad numeratores: siquidem 3. ad 2. est proportio sesquialtera, & 4 ad 3. est proportio superparticularis sesquitertia, at verò 6. ad 12. est dupla, ad quod explicandum.

THEOR. I. PROP. XV.

Genitus numerus in multiplicatione minutiarum habet proportionem compositam, ex proportione minutiarum generantium.

SIt $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{7}$ docet regula multiplicationem numeratorum simul, & denominatorum simul, sed hoc est proportiones componere. Siquidem ex def. 1. lib. 8. per mutuam multiplicationem duorum denominatorum fit planus numerus, item fit alius planus numerus per multiplicationem numeratorum; sed ex propos. 10. lib. 8. elem. duo plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam: Ergo, & hi duo numeri denominator, & numerator habebunt proportionem



à lateribus compositam inuicem. Sic si adsit numerus $\frac{4}{8}$ DH, & alius $\frac{3}{7}$ CB, si multiplicauerimus latus 8. per 7. efficiemus planum num. 56. CL, & 3. per 4. planū 12. CT, qui habebunt eam proportionem compositam ex $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{7}$. Quoniam si multiplicentur 3. numerator per 8. denominatorem efficiemus 24. & 12. ad 24. erit eadem proportio, vtpote multiplicati per eundem 3. quæ 4. ad 8. sic 24. & 56. erit eadem proportio, quæ 3. ad 7. vtpote multiplicati per eundem numerum 8. sed proportio 12. ad 57. est composita ex proportione (defin. 4. lib. 7.) n. 12. ad 24. & 24. ad 57. ergo etiam ex proportione 4. ad 8. & 3. ad 7.

COROLLARIVM

HInc elicito non esse mirum, si magis augeatur proportio denominatoris ad numeratorem in genitis, quam ea, quæ est in generantibus. Nam genitæ minutiæ denominator ad numeratorem, cum sit composita ex proportionibus generantium minutiarum est maior. Vnde numerator geniti debet pluries, vel saltem plus cōprehendere suum numeratorem ob maiorem proportionem, quam ei dicto, quàm denominator minutiarum generantium ad suum numeratorem, ad quem dicunt proportionem simplicem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Minutiam per integrum, cuius est minutia multiplicare.

ACcipitur integer tanquam minutia supponendo integro 1. vt fiat ex ea, velut fractio ab vnitate denominata; deinde regula præcedens adhibeatur. Sic si sit multiplicanda minutia $\frac{2}{3}$ per numerum 7 fiat $\frac{7}{1}$, & adhibita regula tradita fient $\frac{14}{3}$, vel 4 $\frac{2}{3}$.

* Prob. Tum ex antecedenti, tum quia, cum in minutiâ integrū exprimat denominator diuisū in tot partes, quot in eo sunt vnitates, integra 7. si numerator sit 3. continebūt septies trinas partes, seu septem ternarios, ex quibus singulis ternatijs duas partes tantùm æquat minutia $\frac{2}{3}$. Si ergo tot tertiæ partes ex singulis septem integris tribus partibus compositis accipiantur, quot vnitates sunt in 2. erunt 14. tertiæ partes, vtpote, quòd à singulis septem duæ tertiæ partes accipiantur: Vnde conficient minutiam $\frac{14}{3}$, & numerum 4 $\frac{2}{3}$.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Numerum integrum cum integro minutiæ adnexo multiplicare.

INteger ad minutiam reuocetur, & fiat deinde, vt supra, sic, si sint multiplicandi 7. per 2. & $\frac{2}{3}$; integer 2. cui adhæret minutia in tertia proijciatur multiplicando per denominatorem, vt fiant $\frac{8}{3}$: deinde numero 7. ad modum minutiæ accepto, $\frac{7}{1}$ prima regula adhibeatur, fientque $\frac{56}{3}$.

Probatur ea 14. propos. ac etiam eodem modo velut præcedens. Nam integrum quodlibet ex duobus intelligitur diuisum in tres partes, ex quibus minutia $\frac{8}{3}$ octo tertias partes comprehendat. Si ergo ex illis accipiantur 8. tertiæ partes toties, quot vnitates sunt in 7. non est dubium, quòd fient 56. tertiæ partes; nempe minutia $\frac{56}{3}$.

COROLLARIVM

HInc est, quod eodem modo multiplicetur integer cum minutia per minutiam solùm. V. g. 2. $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$ reducendo integrum ad minutiam, & faciendo $\frac{8}{3}$, & $\frac{2}{3}$. Deinde multiplicando numeratores simul, & denominatores simul, & efficiendo minutiam $\frac{16}{9}$.

Sic, si multiplicanda sint inuicem integra duo, quibus minutiæ adhæreant idem præstabitur V. g. sint 2. & $\frac{2}{3}$ multiplicandi per 4. $\frac{1}{3}$ reducetur ad minutiam suam vtrumque integrum; primum quidem ad $\frac{8}{3}$, secundum verò ad $\frac{13}{3}$; & deinde eodem modo res præstabitur, & fient $\frac{104}{9}$.

* Quod sic ex dictis propos. 14. probo. Quia 8. multiplicat 22; ita erit genitus 176. ad 22. vt 8. ad 1. Rursus, quia 3. multiplicat 5. ita erit genitus 15. ad 5. vt 3. ad 1. ex defin. 16. Tract. 8. Quare etiam simul 176. & 15. idest $\frac{176}{15}$ erit ad 22. & 5. idest ad minutiam $\frac{22}{5}$, vt 8. & 3. simul nimirū $\frac{8}{3}$ ad vnitatē; vnde $\frac{8}{3}$ minutia erit multiplicans.

COROLLARIVM.

HInc est videre numeratores in minutijs siue ex additione collectis, seu ex multiplicatione genitis aliquando prodire maiores suis denominatoribus, & ideo superare minutias ipsas sua nota, quod in multiplicatione præcipuè tunc solum aduenit, cum iam numeratores multiplicandi erant denominatoribus in aliquo maiores. Si verò quis cupiat in integra, vt priùs restituere hoc consequetur, si ipsos numeratores per denominatores diuidat. Sic, si quis cupiat agnoscere, quot integra in minutia $\frac{315}{15}$ contineantur, diuidat per 15. & inueniet integra 21. & $\frac{0}{15}$.

Porrò Multiplicatio probatur per diuisionem. Vnde operę pretium erit, priùs addiscere diuisionem, quam modo trademus.

EXPENSIO VI.

De Minutijs diuidendis.

QVi intellexerit minutiarum multiplicationem, facilis ei euadet diuisio, quòd fere idem sit, vt modo videri poterit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Minutiam, quam alia data minutia per aliam minutiam mensuret, reperire.

SIt data minutia $\frac{3}{7}$, & $\frac{2}{5}$, & iubeatur quis reperire minutiam aliquam, quam minutiæ datæ metiantur. Multiplicentur vnius inuicem numerator, & denominator, vt 3. & 7. & fiant 21. & per hunc numerum multiplicetur numerator 2. & denominator 5. alterius, & fiat minutia $\frac{42}{105}$. Dico hanc minutiam metiri minutia $\frac{3}{7}$.

Probatur. Quia 21 multiplicat 2. & 5. Ergo producti 42. & 105. erunt inuicem, vt 2. ad 5. ex 17. lib. 7. & sic 42. metietur 105. vt 2. mensurat 5. Sed etiam 3. & 7. mensurant 21. qui per 2. mensurat 42. & per 5. metitur 105. ergo etiam $\frac{3}{7}$ metietur $\frac{42}{105}$ ex 9. pronunt. Tract. 8.

Reperiemus secundò numerum per quem minutia $\frac{3}{7}$ metitur minutiam $\frac{42}{105}$. Sic fiat 2. per 7. & prodibit 14. numerator, deinde 3. per 5. denominatores vnius cum numeratoribus alterius minutiæ multiplicando, & habebimus 15. denominatorem, stabitque minutia $\frac{14}{15}$, per quam dico minutiam $\frac{3}{7}$ metiri minutiam $\frac{42}{105}$.

Et probatur. Nam idem 2. multiplicauit 7. & fecit 14. multiplicauit quoque 21. in præcad. probatione, & fecit 42. ergo, ex 17. septimi, ita est 7. ad 21. vt 14. ad 42. Quare ex def. 18. Tr. 8. talis pars erit 7. numeri 21. quæ 14. 42. sed 7. metitur 21. per 3. ex ostensione 1. partis, ergo etiam 14. metietur 42. per 3. & ideo etiam è contra 3. metitur 42. per 14. Rursus Quoniam 3. multiplicauit 5. & fecit 15. & 5. multiplicauit 21. vt supra, & fecit 105. ita erit 3. ad 21. vt 15. ad 105. sed 3. metitur 21. per 7. Ergo etiam 15. metietur 105. per 7. & ideo etiam 7. metietur 105. per 15. ideoque $\frac{3}{7}$ metietur minutiam $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$.

COROLLARIVM

MInutiam, seu numeros, per quos altera minutiarum $\frac{3}{7}$ mensurat productum $\frac{42}{105}$ & quotientes $\frac{14}{15}$ consurgere à decussata datarum minutiarum $\frac{3}{7}$, & $\frac{2}{5}$ multiplicatione, nempe denominatorum vnius per numeratores alterius, & vice versa. Nam 2. per 7. facit 14. qui ter acceptus mensurat 42. & 3. per 5. facit 15. qui septies acceptus facit 105. Vnde quotientes 14. à numeratore vnius 2. per 7. alterius denominatore, & 15. à numeratore 3. per denominatorem alterius 5. consurgit. Quare minutia $\frac{42}{105}$ mensuratur à minutia $\frac{3}{7}$ per minutiam $\frac{2}{5}$ nempe per $\frac{7}{3}$ inuersè sumptam.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Minutiam per minutiam diuidere.

POtest diuisio fieri, ac multiplicatio, & eodem pacto præstari hac solum conditione seruata, vt diuisoria minutiæ numerator sumatur pro denominatore, & denominator pro numeratore sedibus eorum commutatis. Sint diuidendi $\frac{2}{5}$ per $\frac{3}{7}$ diuisoris $\frac{3}{7}$ numeri sedes mutent, & fiat $\frac{7}{3}$. Deinde multiplicentur inuicem numeratores, & fiat minutiæ $\frac{14}{15}$. Dico Minutiam $\frac{2}{5}$ esse per minutiam $\frac{3}{7}$ diuisam.

Fiat 3. in 7. numerus 21. & 2. in 21. fiat 42. sic 5. in 21. fiat 105.

Probatur. Cum 42. se habeat ad 105. vt 2. ad 5. erit eadem minutia $\frac{42}{105}$ ac $\frac{2}{5}$ ex prima parte antecad. propos. Sed minutia $\frac{3}{7}$ mensurat $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{15}$ ex præced. 2. parte. Ergo etiã minutia $\frac{3}{7}$ mensurabit minutiam $\frac{2}{5}$ per $\frac{14}{15}$. Hęc autem minutia $\frac{14}{15}$ ex Coroll. consurgit ex multiplicatione vnius denominatoris per alterius numeratorem, & è contra, vel à multiplicatione vnius minutiæ per aliam multiplicantem sumptam inuersè. Ergo si sumatur minutia diuidens inuersè vt $\frac{7}{3}$, & multiplicetur per aliam producetur quotiens alterius V. g. $\frac{14}{15}$, qua mensurable $\frac{42}{105}$ minutia $\frac{3}{7}$, & ideo etiam minutiam $\frac{2}{5}$, quæ est eadem cum ipsa.

Eodem autem modo agemus, si voluerimus diuidere quamlibet minutiam per integrum, seu per integrum, cui minutia adhęreat, seu integrum per minutiam, vel integrum, cui minutia hæreat per minutiã, vel integrũ per integrum cũ minutia, vel tandem integrum cum minutia per integrũ solũm, vel cum minutia, qui sunt casus 7. Id verò reducendo semper integra quæcunque ad minutiam agemus, & more minutiarum ea assumendo, vt hic vides.

Min. Int.				
$\frac{2}{3}$ per 4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	fiet	$\frac{2}{12}$
min. int.min. $\frac{2}{5}$ per 3 & $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{17}$		$\frac{10}{85}$
int. min. 3 per $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$
int.min. min. 4 $\frac{1}{3}$ per $\frac{2}{5}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{5}{2}$		$\frac{65}{6}$
int. int.min. 5 per 2 $\frac{3}{4}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{11}$		$\frac{20}{11}$
int.min. in.mi. 6 $\frac{1}{2}$ per 3 $\frac{4}{5}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{19}$		$\frac{65}{38}$
int.min. int. 4 $\frac{2}{4}$ per 2	$\frac{18}{4}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{18}{8}$

Obseruandum verò est diligenter, quinam numerus sit diuisor, vt eius numerus inuertatur; alioquin, si non diuisoris, sed diuidendi numerus inuertatur contrarium eueniet, vt experimentum docebit.

THEOR. II. PROPOS. XX.

Numerus, seu minutiæ quotiens potest esse aliquando maior minutiâ diuisâ.

Sit data minutia $\frac{6}{7}$ diuidenda per minutiam $\frac{2}{7}$. Factâ operatione $\frac{42}{14}$ minutis erit quotiens, & demonstrabit, quoties $\frac{2}{7}$ ingrediuntur in minutis $\frac{6}{7}$, quæ minutia $\frac{42}{14}$ est minutia maior minutiâ diuisâ $\frac{6}{7}$.

Probatur. Nam quotiens est numerus indicans, quot vicibus diuisor in numero diuidendo capiat; sed minutis diuidens multo minor, quam diuidenda potest capere tot vicibus, vt quotiens vel superet denominatorē proportionis minutię diuidēdę: Ergo potest esse maior ipsa ex Cor pr. 3 huius. Sic minutia $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$ capit ter perfectè; & ideo 42. numerator etiam capit denominatorem 14. ter. At è contrà, si diuideretur $\frac{2}{7}$ per $\frac{6}{7}$ nam 6. non capit in 2. nisi pro tertia sui parte; & ideo esset quotiens $\frac{14}{42}$. Nam 14. minus est numero 42. pro tertia ipsius 42. parte, & ad illum habet proportionem, quam 1 ad 3. & quam $\frac{2}{7}$ diuisus numerus habet ad $\frac{6}{7}$ numerum diuidentem.

COROLLARIVM.

Hinc itaque collige. Quod minutiæ quotientis numeratoris proportio ad denominatorem exprimit proportionem, quam habet minutia diuisa ad diuisorem. Nam, si numerator contineat denominatorem; etiam minutia diuisa continebit diuidentem, vel semel, vel pluries prout numerator quotientis denominatorem continet, quod, si non continet; sed minor sit numerator denominatore in minutia quotiente, tunc exprimit proportionem minoris inæqualitatis, quam habet minutia diuisa ad diuidentem, vt $\frac{14}{42}$ exprimet proportionem subtriplam, quam habet $\frac{2}{7}$ ad $\frac{6}{7}$, & ideo exprimit, quod $\frac{2}{7}$ non continet, nisi tertiam partem numeri $\frac{6}{7}$, vt 14. non continet, nisi tertiam partem numeri 42. at è contra, si diuideretur $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$ tunc quotiens esset $\frac{42}{14}$ exprimens, quod minutia diuisa continet diuidentem ter, & habet ad eam proportionem maioris inæqualitatis triplam.

EXPENSIO VII.

De Minutijs minutiarum.

Aliquando fracti numeri quoque suas fractiones habent, quæ duplici sensu accipiũtur, vel enim sunt fractiones vnius partis, quæ numero fracto reperitur. Sic, si dicu duæ tertiæ partes vnius dimidij diuisum significo illud dimidium in 3. partes ex quibus possideo duas.

Alio verò modo accipitur, tanquam non vna pars numeri fracti, sed omnes partes simul per modum vnius essent diuisæ in alias partes, ex quibus omnes non assumerem, sed aliquas, vt, si dicerem $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ significo duas tertias partes, ac si essent vnica pars, diuisas esse in 6. partes ex quibus assumo 5. Scribitur autem fractio fractionum interiecto puncto pro linea sic $\frac{5}{6}$.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

Fractiones fractionum ad simplices fractiones reuocare.

Vt fractiones fractionum secundo sensu intellectæ ad simplicem fractionem reuocemus, numeratores inuicem sunt multiplicandi, & vltimus terminus genitus erit numerator minutię omnibus illis fractionibus fractionum ęquiualentis; denominator autem erit numerus à multiplicatione mutuâ denominatorum genitus. Sic $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ reducetur ad hanc $\frac{6}{12}$, & minutia reducetur ad hanc 6. $\frac{24}{60}$ multiplicatis inuicem numeratoribus 2. 3. 4. & denominatoribus 3. 4. 5.

A	B	C
2	3	4
3	4	5

Probatur hanc regulam esse bonam. Nam quia intelligitur minutia secundò sensu. Ergo duæ partes totius 3. A erunt diuisæ in 4. Si ergo minutiæ minutiarum denominator 4. mensurat 2. numeratorem ex hypothesi; mensurabit etiam ex pronunc. 9. Tract. 8. denominatorem simplicis minutiæ A. qui est 3. quem 2. mensurat. Ergo redigatur denominator A 3. in partes, quas continet

nec denominatoris 2 4 & in easdem partes a 8. numerator, fietque minutia $\frac{3}{4}\frac{2}{3}$. & quia 3. & 2. a fuerunt multiplicati per eundem numerum 4. ita ee 17. sept. erit 2. ad 3. multiplicati, ac geniti 8. & 12. Sic numerator minutiæ minutiarum 3. B mensurat suum denominatorem a 4 & hic ex hypothesi numeratorem a 8. simplicis minutiæ. Redigatur itaque a 2. in partes, quas continet numerus 4. & 3. & gignetur minutia $\frac{8}{12}$; quia autem 2. multiplicauit 4. & fecit 8. & 3. fecit 6, erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 6. ad 8. Cum ergo sit 6. ad 8. vt a minutiæ minutiarum 3. ad 4. & 8. ad 12. vt a minutiæ simplicis 2 ad 3. Ergo etiam erit ex æque 6. ex 2. in 3. genitus ad 12. ex 4. in 3. nascentem, vt numerator minutiæ minutiarum B 3. ad minutiæ simplicis denominatorē a 3. quare $\frac{6}{12}$ æquiualebit tribus quartis duarū tertiarū penitū. Nam vt magis res pateat, duę quartę partes numeri 2. sunt 8. quarum tres quartæ partes sunt 6.

At si in primo sensu minutia intelligatur, & de vnica parte minutiæ simplicia intelligatur fractus secundus, & minutia minutiæ: Tunc alio pacto oportebit procedere. Nam numerator idē persistet, q minutia minutię, at denominatoris est denominatore minutię simplicia, vel antecedentie multiplicatio denominatorem dabit. Sic si sint $\frac{3}{5}$ fractionis secundæ idem 3. numerator ria vices obibit; at denominator consurget ex multiplicatione 5. cum 3. vt fiant 15, & stabit minutia $\frac{3}{15}$.

Prob. Nam, cùm numeri 8. intelligatur diuisa quælibet vnitas in 5. partes; Ergo 5. toties mensurabit 8. quot vnitates sunt in 2, & ideo etiam mensurabit 3. quot vnitates sunt in 3. ideoque, si habeo tres quintas vnitatis, quæ est in 2. habeo etiam 3. quintas partes vnius vnitatis quæ est in 3. & quia omnium vnitatum 3. simul sumptarum quinque partes faciunt 15. habebo itaque minutiam $\frac{3}{15}$.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Minutiam minutiæ in primo sensu, minutiæ inserere, seu simul addere.

Differt insitio à reductione. Nam ibi quærimus minutiam, quæ eiusdem valoris sit, ac minutia minutiæ, hic verò addimus minutiam minutiæ simplici minutiæ, ita vt ibi non interueniat prima, & simplex minutia, nisi tanquam denominator minutiæ secundæ, nec auget eam, sed restituit eandem non re, aut numero; sed valore: hic autem minutia simplex additur minutię minutiarum, vt fiat maior etiam valore, & est propriè additio.

Fit ergo sic. Detur minutia $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, & debeamus simul addere quatuor quintas partes vnius tertiæ, ad duas tertias. Numerator minutię simplicis in denominatorem minutiæ minutiarum ducatur. Nempe 2. in 5. vt fiat 10. & huic addatur numerator 4. minutiæ minutiarum, & sint 14. & hic erit numerator; denominatorem verò exhibebit mutua denominatorum multiplicatio, & erunt 15. stabitque minutie ex minutie simplici, & minutia minutiæ coaugmentata $\frac{14}{15}$.

Probatur. Nam cùm 5. multiplicet 3. & multiplicet 2. & fiat minutie $\frac{10}{15}$ erit eadem ac $\frac{2}{3}$ sed quia 5, idem est, ac vna pars denominatoris 3. minutiæ simplicis ex præc. propos. parte secunda ideo $\frac{4}{15}$ erit eadem minutia, ac $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{3}$ nimirum minutia $\frac{1}{3}$ simplicis $\frac{4}{5}$; cùm ergo habeamus $\frac{10}{15}$ $\frac{4}{15}$ poterimus simul addere, vt fiant $\frac{14}{15}$, quod est inserere.

Et idem agendum, si sint plures minutiæ minutiarum, vt si $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{8}$ proponantur addendæ. Ex 2. in 5. fiunt 10. addito 4. fiant 14. ex 14. in 8. fiunt 112, addito 5. fiunt 117. & hic erit numerator; Denominator verò exurget ex mutuâ denominatorum multiplicatione 120. & erit minutia $\frac{117}{120}$. summa minutiarum $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{8}$.

Aduerte autem minutiam nullam esse reducendā ad minimos terminos, dum vna alteri additur, licet valde augescat; sed tunc, cum omnino completa est operatio; alioquin sensus variaretur, & nihil recti colligeretur, sic $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ prius ad 2. per 3. fiunt 6. addito 1. fiant 7. deinde per secundum 3. 7. fiunt 21, & addito 2. fiunt 23, deinde 23, per 4. fiunt 92. addito 3, fiunt 95. pro numeratore, cum denominator ex multiplicatione denominatorum mutua colligatur 180. & fiat minutie summa prædictarum minutiarum $\frac{95}{180}$ quæ deinde potest redigi ad denominationem minorem per regulas traditas $\frac{19}{36}$.

PROBL. III. PROPOS. XXIII.

Minutiam minutiæ minutiæ simplici in secundo sensu addere, aut inserere.

Sint exhibitæ minutiæ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ intellectæ in secundo sensu, quæ sint simul addendæ. Minutiæ simplicis numerator 3. cum denominatore minutiæ secundæ 5. multiplicetur, vt fiant 15. deinde ipsi numeratores inter se multiplicentur 2. & 3. & sint 6. addanturque simul 15. & 6. & fiant 21. pro numeratore; denominator verò erit numerus ex multiplicatione denominatorum 4. & 5. procreatus nempe 20. stabitque minutia $\frac{21}{20}$, quæ erit summa prædictarum minutiarum $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$.

Probatur. Nam quia 5. multiplicauit 3. & 4. ex 17. lib. 7. ita erit 3. ad 4. vt 15. ad 20. Quare ex 3. huius Coroll. eadem minutia erit $\frac{3}{4}$, quæ $\frac{15}{20}$. Rursus, quia 5. multiplicauit 4. qui sunt denominatores, & fecit 20. & 2. multiplicauit 3. numeratores, & fecit 6. ex propos. 21. huius eadem minutia erit $\frac{6}{20}$, quæ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$.

Cum ergo habeamus eandem minutiam minorem $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ expressam minutia $\frac{6}{20}$, & minutiam $\frac{3}{4}$ maiorem, & simplicem expressam numerò [illegible] Si eas addamus simul efficient minutiam [illegible] summam minutiarum $\frac{3}{4}$, & $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$. Ac si plures minutiæ essent, idem prorsus agendum. Sic, si habeamus $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$ nempe [illegible], & 2 quintas trium quartarum duarum tertiarum, & tres quartas duarum tertiarum addendas ad duas tertias, ita agamus. Multiplicabimus 2. numeratorem primæ $\frac{2}{3}$ per denominatorem maximæ minutię minutiarum 4. & fiant 8. & deinde numeratores inuicem, & erunt 6. quibus simul additis conficient 14. hunc verò per denominatorem 5. sequentis minoris multiplicabimus, & fiet numerus 70. deinde omnes tres numeratores inuicem 2. 3. 2. & fient 12. quibus numero 70. additis erunt 82. quem numerum per denominatorem postremæ 6. multiplicabimus, & fiet 492. & deinde omnes quatuor numeratores inuicē 2.3.2.4. vt sint 48. qui numerus addendus est numero 492. & erit numerator 540. Denominator verò erit numerus ex mutuâ multiplicatio-

plicationa denominatorũ productus, nempe 360. & minutia summa omnium prædictarum stabit $\frac{1}{5}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{1}{6}$. idest $\frac{1}{2}$.

Porrò in hac infitione, seu additione termini aute totalem additionem ad minimos numeros reduci possunt, si tamen numerator sit minor quàm denominator, alioqui illa reductio esset potiùs causa confusionis.

TRACTATVS XIII.

PARS SECVNDA.

De Numeris proportionalibus inueniendis.

Hic iam ipsos numeros, non vt rationem, sed vt proportionem dicentes exquirimus, & docemus, tum numeros extremos proportionales inuenire, & consequenter Auream regulam proportionum, tum mediam proportionalem, vnde extractionem Radicis quadratæ, tum etiam duos medios proportionales, & cubicam radicem inuenire docemus. Tractatus omninò, & absolutè necessarius, sine quo in Mathematicis proficere nemo potest.

EXPENSIO I.

De inueniendo datis tribus quarto proportionali, vel de regula proportionum.

HÆc regula, quâ datis tribus numeris quartus quæritur, dicitur Aurea ob eius vsum mirificum, nedum in mathematicis, sed & in omnibus humanis comercijs, vt ferè nihil in negotijs côtractibusue agatur, nisi hęc regula interueniat.

PROBL. I. PROP. I.

Tribus datis numeris quartum proportionalem inuenire, qui ita sit ad tertium, vt secundus ad primum.

DIsponantur tres numeri dati in seriem, ita vt tertius, cui annexa est quæstio, & cui quæritur quartus, qui sit ei proportionalis, vt est secundus ad primum sit vltimo loco, & huic similis primo loco, cui verò quartus, qui desideratur, debet assimilari secundo loco, V.g. sit datus numerus 6. & 9. & 12. numero verò huic vltimo quartus proportionalis quæritur, nempe aliquis numerus, qui sit in proportione ad 12. vt est 9. ad 6. Primo ergo loco ponendus est numerus 6. secundo 9. tertio 12. dicendo si 6. tanquam fundamentum habet pro termino numerum 9. numerus 12. acceptus, vt fundamentum, quem numerum proportionalem habebit, qui illi ita correspondeat, vt 9. ad 6.? Sicque dispositi, vt hic vides stabunt numeri, si 6. dant 9. quid 12.? Multiplicabitur, Itaque numerus 12. per 9. & fient 108. genitus autem numerus diuidetur per 6. & prodibunt 18. hicque numerus erit quartus proportionalis.

Probatur ex 19. propos. septimi Eucl. cum quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex medijs generatur est ęqualis ei numero, qui ex extremis conficitur; cùm ergo hic sint quatuor numeri proportionales, & sit 6. ad 9. vt 12. ad 18. genitus numerus à medijs 12. & 9. qui est 108. erit æqualis numero, qui producitur ab extremis 6. & 18. Itaque habemus eundem numerum, qui ab extremis produceretur per multiplicationem mutuam mediorum: quare ex defin. 15. multiplicationis Tract. 8. numerus 108. toties continebit numerum 18. quot vnitates sunt in 6. quia est idẽ numerus, qui produceretur à 6. & à 18. inuicem multiplicatis: Si ergo diuidatur per numerum 6. prodibit numerus, qui perquiritur, nempe numerus 18.

COROLLARIVM I.

COllige ex propos. 4. octaui non omnes numeros habere quartum proportionalem; eo quòd minimi sint in datis rationibus: vnde enascuntur minutiæ in diuisione geniti ex secundo, & tertio per primum ferè semper, quæ eodem modo ponendæ sunt, vt in diuisione integrorum tract. 8. monuimus Coroll. propos. 22. & more fractorum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis numeris, cuius primo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

SIt V. g. qui emerit 3. palmos serici cum $\frac{5}{7}$. quinque aureis, quęratur quot nummis aureis emet 32. palmos?

Si 3 $\frac{5}{7}$ dant 5 quid 32.?

Primo

Primo multiplicabimus integros secundum, & tertium. Nimirû 32. p quinque, & facient 160. Iste ergo numerus per integrum 3. & $\frac{5}{7}$ est diuidendus ex doctrina propof. 19. part. 1. Tractat. huius. Supponemus itaque numero 160. vnitatem. & deinde redigemus integrum 3. in minutiam: multiplicabimusque 3. per 7. vt fiant 21. addemusque numeratorem 5. & fient 26. itaque minutia erit $\frac{26}{7}$, & sic numeri dispositi erunt:

$$\frac{160}{1} \quad \frac{26}{7} \quad \text{diuisorisque mutato loco} \quad \frac{7}{26}$$

Multiplicabimus 160 per 7. & prodibit genitus quotiens [illegible], quem, vt redigamus ad integra diuidemus per 26. & prodibit numerus 43 [illegible]. itaque 32. palmi serici venient aureis, 43. [illegible] si 3 $\frac{5}{7}$ quinque aureis vendantur.

PROBL. III. PBOPOS. III.

Datis duobus numeris, cuius secundo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

$$\text{Si Equi 5. aureis } 35\frac{4}{9} \text{ quid 27?}$$

Sint V. g. Equi quinque, qui empti sint 35. aureis, & $\frac{4}{9}$. Quæritur, quot aureis Equi 27. constabunt. Ex Tract. h. p. 1. prop 11. integra in fractiones proiciatur, nempe 35 $\frac{4}{9}$ in [illegible], & numero 27. supponatur 1. & sic fient numeri inuicem multiplicandi.

$$\frac{27}{1} \quad \& \quad \frac{309}{9}$$

Qui generabunt numerum [illegible], qui diuidentur per numerum 5 Equorum ex propof. 19. Tr. h 1. & erunt [illegible], quæ fractio ad integra redacta erit 185. & [illegible], idest [illegible]. Ita Equi 27. constabunt aureis 185. & [illegible].

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Datis tribus numeris, cui tertio adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

Quæratur, quot aureis 57. libræ, & [illegible]. Zaccari veneant? dum tres libræ 14. solidis emuntur itaque numeri disponentur.

Libræ 3. dant 14. solidos, quot restituent libræ 57. & [illegible]?

Igitur, vt in anteced. numerus 57 [illegible] in minutias proiciendus, vt fiant [illegible]; ex inde secundus numerus 14. per hunc tertium multiplicandus, & genitus prodibit [illegible], qui deinde per 3. primum diuidendus erit ex part. 1. propof. 19. h. Tract. de fractis, fientq; [illegible], qui ad integra redacti dabunt 268. & [illegible], idest [illegible]. Obseruandum verò est, quòd fracti non sunt ad integra redigendi, neque in hac, neque in antecedenti operatione; donec sit completa operatio, ne impediatur, & confusio enascatur.

PROBL. V. PROPOS. V.

Datis tribus numeris, cui primo, & secundo adhæreant fractiones, quartum proportionalem inuenire.

Quæratur, quid veneant 12. vlnæ panni; si 3 $\frac{5}{7}$ veneunt aureis 2. & $\frac{3}{5}$, itaque ita dispositi stabunt numeri.

$$3\frac{5}{7} \text{ dant } 2\frac{3}{5} \text{ quid 12?}$$

Multiplices ex prop. 17. huius Tract. par. 1. numerum 12. per 2 $\frac{3}{5}$ redigendo ad fractiones [illegible] & deinde ducendo 12. in [illegible], & fient [illegible]; deinde ex expens. 5. Tract. huius p. 1. diuido fractionem [illegible] per integrum, & fractionem 3 $\frac{5}{7}$ nempe $\frac{26}{7}$ multiplicando 7. per 156. & 26. per 5. & erit minutia [illegible] nimirum ad integros redacta 8. & [illegible], idest [illegible] itaque 12. vlnæ panni constant aureis 8. & [illegible].

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Datis tribus numeris, cui secundo, & tertio minutia adhæreat quartum proportionalem inuenire.

Sint quatuor pedes muri, qui fiant pretio 6. aureorum, & $\frac{1}{4}$; quot aurei persoluentur ob opus pedum muri 9. & $\frac{1}{2}$?

Redigentur ad fractiones 6. $\frac{1}{4}$ ad [illegible], & 9 $\frac{1}{2}$ ad [illegible]; & deinde multiplicentur, & fient [illegible] diuidantur deinde ex supra cit. propof. [illegible] per 4. & fient [illegible], quæ minutia ad integrû redacta, fient aurei 16. & [illegible]; itaque 9. pedes muri, & $\frac{1}{2}$ efficientur pretio 16. aureorum, & [illegible].

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis tribus numeris, cui tertio, & primo adhæreat fractio quartum proportionalem inuenire.

Eodem modo fit. Quæratur V. g. si 4. vlnæ, $\frac{5}{8}$ emûtur pretio 20. aureorum, quot aureis $\frac{3}{7}$ vnius vlnæ ementur?

$$\text{Si } 4\frac{5}{8} \text{ vlnæ aureis 20. quid } \frac{3}{7}?$$

Itaque multiplica 20. per $\frac{3}{7}$ ex expens. 4. super citatis, eruntque [illegible], qui fracti diuidentur per integrum, & fractionem 4 $\frac{5}{8}$ multiplicando, vt docetur propof. 9. expens. 5. supracit. eruntque [illegible], itaque pretium erit 1. aureus, & [illegible] qui redigi nequeunt ad minorem denominationẽ, idest insuper dandæ erunt 221. partes vnius aurei ex 259. in quas diuideretur.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

Datis tribus numeris, in quibus omnibus inueniatur fractio, quartum proportionalem reperire.

QVis tribus diebus, & septem horis, nimirum in 3 & [illegible] conficiat 93. milliaria, & $\frac{1}{2}$; quæritur, quot milliaria conficiet 5. diebus, & 11. horis nimirum 5 [illegible]? itaque redigentur integri 5. ad suam minutiam, & fiant [illegible], sic etiam 93 $\frac{1}{2}$ redigentur ad [illegible] & inuicem multiplicabuntur, eruntque [illegible], quæ minutia diuidetur per minutiam 3. & [illegible] redactum ad [illegible], vt docemus expens. 5. huius de fractis, & producet [illegible]. Quæ minutia ad integros redacta dabit milliaria 155 [illegible] nimirum ferè [illegible], itaque viator quinque diebus, & 11. horis conficiet milliaria 155 [illegible], qui confecit diebus 3. & 7. horis milliaria 93. & $\frac{1}{2}$.

EXPENSIO II.

De probatione regulæ aureæ.

MOdus inueniendi quartum numerum proportionalem indiget trutina aliqua, ob quam, quis certò agnoscat se benè operatum fuisse; pro quo sciendum est duobus alijs modis æquiualentibus quartum proportionalem inueniri, quos hic explicabimus; deseruientque pro lydio lapide ad capiendum experimentum de operationis rectitudine.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datis tribus numeris quartum proportionalem aliter inuenire.

SIt numerus 10. cui quærendus quartus proportionalis, qui ad illum ita sit proportionatus, vt 8. ad 12. diuidatur per primum secundus numerus, & quotiens multiplicet tertium numerum 10. fit.

Si 8. dat 12 quid 10. ? dabit 15.

diuisus numerus 12 per 8. dat quotientem [illegible] per quem multiplicatus 10. dat numerum quartum proportionalem 15.

Probatur. Quia enim, vt est 8. ad 12. ita esse debet 10. ad 15. & quotiens [illegible] exprimit proportionem, secundùm quam 8. continetur in 12. estq; denominator proportionis; & ideo eam ipsam designat, iuxta quam 10. debet contineri in quarto proportionali; quare si 10. multiplicatur per quotientem 1 $\frac{1}{2}$ producet illum numerum, qui toties continebit 10. vt 12 continet 8. quia quotiens numerat vices, quibus multiplicatus continetur in numero genito.

Si verò fracti adsint eadem regula valebit. V. g. velit quis capere experimentum, an computus præced. expens. propos. 7. sit bene deductus, in qua quærebatur, quid sibi vellent $\frac{2}{3}$ vnius vlnæ; si 4. vlnæ, & $\frac{1}{2}$ precio 30. aureorum vendebantur. Itaque diuidendus erit secundus numerus per primum 4. $\frac{1}{2}$ idest [illegible] & numerus prodibit [illegible]; qui multiplicabuntur per $\frac{2}{3}$, & dabunt [illegible], vt priùs.

Placeat deinde capere experimentum operationis propos. 6. in qua quæritur, cum habeamus per 4. pedes muri aureos [illegible]; quid simus lucraturi si sint pedes 9 [illegible], vel [illegible], diuidemus itaque [illegible] per 4. & producent [illegible] deinde multiplicabimus per [illegible], & generabunt [illegible].

PROBL. II. PROPOS. X.

Alio quoque modo datis tribus numeris quartum proportionalem inuenire.

DAtis tribus numeris 30. 55. 89. quæratur quartus proportionalis, qui sit ad 89. vt 55. est ad 30. diuidatur tertius per primum, & quotus erit 2. [illegible]. Multiplicet deinde hic quotus secundum 55. & producit [illegible], qui diuisus per 30. dabit 163 [illegible], idest [illegible].

I. 30. II. 55. III. 89. IV. 163. [illegible]

Probatur. Ita est primus ad secundum, vt tertius ad quartum: Ergo quoties continetur tertius in primo, toties continebitur quartus in secundo; quoniam permutando, ita quoque erit primus ad tertium, vt secundus ad quartum, & inuertendo, ita erit tertius ad primum, vt quartus ad secundum; quamobrem primus toties continebitur in tertio quoties continebitur secundus in quarto, vel è contrà. Quapropter si diuidatur tertius per primum, quotiens indicabit suis vnitatibus vires secundùm quas continetur primus in tertio, & idem secundùm quas continetur secundus in quarto, eritque denominator proportionis. Quare secundum eas vires, & per illum quotum secundus multiplicatus ex 18. defin. arith. 8. restituet quartum ignotum; cùm genitus ex multiplicatione contineat multiplicatum toties, quot vnitates habet multiplicans, qui, vt prædiximus, quotus est, & proportionis denominator.

COROLLARIVM.

HInc autem habes, quomodo regulæ aureæ operatio tentari possit. Nam postquam perfeceris eam primo modo, poteris hoc secundo, & tertio capitate, & experimentum sumere; ac eundem numerum pariat; moraliter enim impossibile est, vt per diuersas operationes procedendo in eundem errorem delabaris.

Sit V. g. accipiendum experimentum, an prop. 5. præced. Expens. calculus sit ritè confectus, in qua proponebatur quæstio.

Si 3 [illegible], dant 2 [illegible], quid exposcet 12. [illegible]

Itaque tertius numerus 12. diuidendus erit per primum 3. [illegible] in fractiones redactum [illegible], & quotiens erit [illegible], qui deinde multiplicandus erit per 2 [illegible] in fractiones redactum [illegible], & pariet numerum [illegible], vt priùs.

Rursus velit quis examinare prop. 4. operationem, in qua dantur lib. 3. sacchari emendæ solidis 14. & quæritur librarum 57 [illegible] pretium. Diuidatur vltimus in minutias redactus [illegible] per primum 3. & erunt [illegible]. Rursusque hic quotiens multiplicet secundum 14 & prodibit genitus [illegible] requisitus quartus proportionalis; eruntque solidi 268 [illegible].

EXPEN-

EXPENSIO III.

De regula trium inuersa.

DIximus primum numerum ad secundum in regula proportionum ita respondere proportione, vt tertius ad quartum, qui quæritur, & ideò, vt ex propos. 12. lib. 5. Euclidis constat eò maior est quartus secundo, quò maior est tertius primo, & pari ratione quò minor est tertius primo, sic, & esse debeat quartus secundo. Verùm aliquando etiam desideratur numerus quartus qui tantò sit minor secundo quantùm est tertius maior primo, vel è contra quartus expetitur, qui tantò sit maior secundo, quantò tertius est minor primo. Si tamen in priori ordine numeri disponuntur, ita vt primum locum occupet numerum, qui significat id, quod etiam tertius 9. secundum verò occupet, cui quæritur eiusdem significationis numerus, qui ita sit ad tertium, vt ipse est ad primum. Sic verò inuersa ratio stat.

Proportio recta.				Inuersa			
I.	2.	3.	III.	I.	2.	4.	III.
II.	4.	6.	IV.	II.	6.	3.	IV.
Recta.				Inuersa.			
I.	4.	6.	III.	I.	4.	2.	III.
II.	2.	3.	IV.	II.	3.	6.	IV.

Itaq; erit proportio inuersa cum vltimum consequens secundæ ponitur loco consequentis seriei secūdę, & secundū consequens loco antecedentis secundæ seriei, & tertij termini:

THEOR. I. PROPOS. XI.

In planis numeris æqualibus tantò est latus maius latere vnius plani, quantò est minus latus aliud huius latere alio primi plani:

SIt planus numerus 4. & 2. Dico, *quod quanto est 6. numeri 2 maior quàm 4. numeri A; tantò,* & 2. eiusdem 2 minor erit quam 3.

A		B
* * *		* *
* * *		* *
4 * * *		* * 6
* * *		* *
3.		* *
		* *
		2

Probatur. Nam ita est ex propos. 17. primi reciprocè 4. ad 6. vt 2. ad 3. Ergo ex 12. lib. 5. Elem. ita 4. erit minor, quam 6. sicut 2. quam 3. Quare 3. consequenter tantò erit maior, quam 2. quantò 2. est minor, quam 3. & consequenter, quantò 4. minor quam 6. tantò maior erit 3. quàm 2.

COROLLARIVM.

HInc est posse dari casum, quòd cognoscamus plani numeri latera 4. & 3. & alterius 6. & hinc velimus cognoscere ipsi 6. per regulam auream latus tale, quod faciat cum ipso numerum talem planum, qui exæquet numerum planum ex 3. & 4. Ideoque debeat inquiri numerus, qui sit tanto minor, quam 3. quanto 6. est maior, quam 4. & ideo sit inuertenda regulá.

THEOR. II. PROP. XII.

Inuersa regula ad rectam reduci potest.

QVoniam, vt declarauimus, Consequens primæ seriei pro antecedente ponitur in secūda serie, & consequens secundæ seriei pro consequente in prima in 2. regula inuersa. Ideo erit, vt consequens 2. primæ seriei *conuertendo* ad antecedentem suum 4. Ita consequens secundæ seriei 3. ad ignotum antecedens 6. Eritq; proportio ex conuersione terminorum proportioni rectę respondens. Ibi enim referebatur Antecedens 4. ad consequentem 2. vt quiddam ignotum ad consequentem 3. Sed conuersio terminorum proportionem eorum non immutat, & adhuc antecedens assumptum, quod priùs erat consequens. Si dicebat pportionē maioris inæqualitatis ad suū antecedens in prima serie, talem, & dicit consequens in secunda serie ad antecedentem suum alioquin non esset eadem proportio, si esset in vna serie maioris inæqualitatis, in altera minoris: Ergo Proportio inuersa conuersis terminis erit recta, & consequens, ac antecedens assumptum 2. erit minus antecedēte 4. vicem termini occupante in prima serie, vt antecedens 3 priùs consequens ignoto altero termino minus erat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Quærere quartum proportionalem, qui sit maior secundo, vt est tertius minor primo; Vel etiam minor secundo, vt tertius est maior primo.

IVxta præcedentem Regulam rectam proportionum sine dispositi numeri, & quæratur; si 3. palmi latitudinis 9. vinas seriei exposcunt ad conficiendam lacernam; quot vinæ 2. palmi latitudinis requirent.

3. 9. quid 2?

Inuertantur termini, & qui habet annexam quæstionem primus constituatur, medius medium teneat; primus tertium locum, sic.

Quid 2.? si 9. dant 3.

Deinde eodem prorsus modo procedatur, multiplicetur vltimus per secundum, & erit 27. qui diuidatur per primum 2. & erit quartus proportionalis $13\frac{1}{2}$. Et ita erit 2. ad 9. vt 3. ad $13\frac{1}{2}$; quoniam sicut 9. quater cum dimidia eiusdem parte continet 2. sic $13\frac{1}{2}$ quater cum dimidia eiusdem ternarij parte continet 3.

Itaque 3. vlnæ latitudinis dant 9. longitudinis; quare 2. vlnę latitudinis exibebūt vlnas longitudinis $13\frac{1}{2}$, cùmque 2. primus sit minor, quam 3. tertius, quartus tamen $13\frac{1}{2}$ est maior secundo 9. cum in regula recta deberet esse minor: Si enim regula recta adhiberetur proueniret numerus 6. qui esset tanto minor, quam 9. secundus, vt tertius 2. minor est primo 3.

Sed iam huius regulæ capiamus experimentum in fractis.

Operarij 30. perficiunt opus 11. diebus, 15. horis, quot diebus conficient 50?

30. 11. D. H. 15. quid 50.?

Quo maior hic numurus operariorum, & minor numerus dierum requiritur ad opus perficiē-

 dum,

dum, & ideo quantò est tertius maior primo, nempe 50. numero 30. tantò erit tempus, qui desideratur, & quartus numerus minor secundo 12. qui etiam tempus exprimit.

Vnde regula aurea; sed euersa adhibenda est: atque numeri inuersò erunt dispositi.

$$50? \quad 12 \frac{15}{24} \quad 30.$$

Itaque multiplicabitur 30. per 12 [illegible] in minutias redactum [illegible], & efficient [illegible], qui deinde diuidentur per 50. & efficient [illegible] nimirum dies 6. & [illegible].

Quæ regula inuersa etiam probari poterit, tum primo, tum secundo modo præcedentis expensionis, & quidem primum si numerus secundus, [illegible] diuidatur per primum 50. & fiant [illegible] deinde quotiens hic multiplicet tertium 30. & fiant [illegible]. Sic etiam secundum examen poterit adhiberi diuidendo per primum 30. tertium numerum 50. vt fiant [illegible], deinde multiplicando hanc minutiam cum minutia medij [illegible] dabit enim [illegible].

Cognoscetur autem ex ipsâ quæstione propositâ, cùm adhiberi oportebit regula proportionum inuersa: nam ipsum lumen naturæ dictabit, quãdo requiretur quartus terminus tantò minor secundo, quantò tertius maior primo, quòd tertius ex sui natura non possit dare maiorem terminum, sed minorem. V. g. si saccus tritici, cum emitur quatuor aureis dat panem vnius solidi 10. vnciarum, quot eruntànciæ, si triticum cariùs ematur? nempe 6 aureis? nam ipsa rei natura dictat, quòd quantò cariùs emitur frumentum, tantò panis debeat esse minoris ponderis, vt eodem pretio semper vendatur, & numero æquet pretium maius, cum panis semper vendi debeat vnico solido, ideoque hìc cognoscitur, quod regula inuertenda sit, quia, quo maior est 6. tertius numerus, quàm 4. eo minus debeat esse pondus panis, qui exposcitur, pondere dato 10. vnciarũ.

EXPENSIO IV.

De Regula Aurea composita.

COmponitur regula Aurea, cum geminâ vice adhibetur eo, quòd quæstio proposita talis naturæ sit, vt non nisi gemina vice adhibita regula proportionis solui queat.

THOR. I. PROPOS. XIV.

Quando proponuntur magis, quam tres termini; tunc gemina vice regula proportionum est adhibenda.

SVnt quinque operarij, qui murum 23 pedum construunt 7. diebus: si ergo sint 10. quot diebus construent murum 39 pedum? Vides hic plores, quàm tres terminos esse propositos, nempe quinque operarios 23. pedes, dies 7. & rursus 39. pedes, & decem operarios. Dico itaque, quod regula trium gemina vice adhibenda sit: Nam exquirendum est; si 5. operarij, vt faciant 23. pedes 7 diebus operantur, quod insument temporis in conficiendis 39. pedibus ijdem met operarij. Iam, 10 operarij non veniunt sub quæstione, cum ijdem semper ponantur, cognito deinde tempore V. g. 11. dierum, & [illegible] partium vnius diei. Postea exquiremus, si 5 operarij temporis 11 [illegible] conficiunt murum 39 pedum quanto tempore 10. conficient eundem met murum. Itaque murus hic non venit sub quæstione; sed idem præsupponitur. Sicut multa alia licet possent reuocari ad quæstionem. quòd tamen eadem præsupponantur in vtraque proportionalium serie, tam in primo, & secundo, quam in tertio, & quarto non reuocantur ad quæstionem, vt altitudo muri, & longitudo, quæ, si proponeretur, quælibet semel adhibitâ regulâ esset exquirenda, vt infra.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Regulam trium rectam compositam data capaci quæstione adhibere.

SIt propositum saxum, cuius altitudo sit pedes 2. latitudo pedes 4. $\frac{1}{2}$, faciatque 9. pedes superficiei; quæritur quot pedes faceret, si latitudo esset 6. altitudo esset 5. pedum. Itaque quæremus primo de altitudine, si ita placeat, deinde de latitudine. Itaque dicemus ita. Si saxum altum pedes 2. latitudine posthabita, pedes 9 superficiei exhibet. Quot daret si esset altum pedes 5? & multiplicato 9. per 5. generabitur 45. quē diuidemus per 2. & prodibit quotiens 22 $\frac{1}{2}$. Deinde quæremus de latitudine; dicemusque si saxum pedum 4 $\frac{1}{2}$ dat longitudinis 22 $\frac{1}{2}$ quid si esset 6. & dabit 30. pedes.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Regulam auream inuersam compositam dato capaci subiecto exercere.

SIt Rupes 13. pedibus lata, alta 22. ex quâ longitudinis desumsi pedes 32. ad conficiendũ murum. Debeo conficere alium murum eiusdem magnitudinis, & habeo aliam Rupem altam 17. pedes, & latam 11. Quæritur, quid debeam de illis desumere in longitudinem. Quæram igitur primo, si pedes 13. latit. dant 32. longitudinis, quid dabunt 11? Certum est, quòd dabunt magis, quàm 32. licet 11. sit minus, quam 13. eò, quia sit minor latitudo; vnde debeo desumere magis secundùm longitudinem; ideoque regulam inuertam.

Quid 11.? si 32. dant 13.

Et facto computo prodibit 37. [illegible]. Itaque, si 13. dant longitudinem 32; oportebit, quòd ex saxo minoris latitudinis desumam longitudinem maiorem 37 [illegible]: Deinde Rursus dicam, si 22. dant 37. [illegible], quid 17? & vtique debet esse maior numerus, qui quæritur, quam 37 [illegible] licet 17. sit minor, quam 22; quia minor altitudo dat magis longitudinis. Vnde inuertam regulam sic.

$$\text{Quid } 17.? \quad \text{si } 37 \frac{9}{11} \text{ dant } 22.$$

Et inuenies numerum [illegible], idest 48. & [illegible]; itaque longitudo huius rupis debebit esse 48. & [illegible], & patet: Nam producunt 13. 22. & 32. molem æqualem nimirum 9152. vt producunt 17. 11. & 48 [illegible], qui etiam producunt 9152. & ita ex mole æquali saxea possum conficere murum æqualem.

PROB.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Regulam Auream compositam ex inuersa, & recta dato capaci subiecto exercere.

SInt quinque operarij, qui murum conficiunt diebus 25. pedum 32. Quæritur, quanto tempore conficient, si essent operarij 7. & murus pedum 40.

Primo itaque inquiratur, si diebus 25. Operarij 5. dant murum pedum 32. quid si essent 7. & sic stabit quæstio

: 5. diebus 25. perficiunt opus, quid 7?

Sed quia, quò plures sunt operarij eò minori tempore opus perficiunt, quare licet 7. sit maior numerus, quam 5. numerus tamen, qui quæritur debet esse minor, quam 25. ideoque inuertanda est regula sic.

Quid 7.? si 25. diebus 5. opus perficiunt.

Et adhibita regula eueniet tempus $17\frac{6}{7}$ dierum.

Deinde inquiremus; si murus 32. pedum conficitur diebus $17\frac{6}{7}$; quanto tempore perficietur si esset 40. pedum, & sic erit exemplum.

Si 32. diebus $17\frac{6}{7}$, quid si 40. pedum?

Et quia, quò opus est maius, eo maius est tempus insumptum in opere, ideo, vt est maior 40. quam 32. ita erit maior numerus exoptatus, quam $17\frac{6}{7}$: Vnde hæc operatio recta erit, & multiplicato vltimo numero, cum medio prodibit numerus [illegible], & si diuidatur per 32. numerus erit [illegible], idest faciunt opus diebus 22 [illegible]; idest [illegible]. Propterea perficient opus, si sint 7. operarij, & opus 40. pedum, si 5. faciunt pedes 32. diebus 25.

EXPENSIO V.

De numeris æquè potentibus.

ANtequam ad inuentionem radicis quadratæ accedamus, & inuentioni medij proportionalis, opus est vtile licet non necessarium, de numeris æquè potentibus agere, qui fundantur in lib. 2. Eucl. & 8. siquidem hæc maxime faciunt ad radicem quadratam intelligendam.

Præass. Iam quidem de numeris æquè potentibus latè egimus lib. 8. Verum hic facilius, eaq; quæ demonstrauit Euclides de lineis, numeris applicantur. Siquidem vnica ostensione omnes 10. propositiones lib. 2. numeris conuenire ostenditur. Quia longitudo, seu linea commensurabilis alteri est sicuti numerus ad numerum ex prop. 5. decimi, & ex propos. 4. quę à lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata sunt, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, & consequenter, quæ ex lineis longitudine commensurabilibus fiunt rectangula, se habebunt vt planus numerus ad numerum planum. Hinc euenit; quòd, si latera cuiuscumque, seu quadrati, seu rectanguli, cuiuscumque propositionis secundi libri ponantur rationalia, quòd se habebunt inuicem, vt numerus ad numerum, & eorum quadrata, & rectangula, vt quadratus numerus ad quadratum numerum; & ideo etiam, vt planus numerus ad planum numerum: Vnde si linea sit ad lineā, vt numerus ad numerum, etiam quadratus ad quadratū, vt numerus quadratus ad numerū quadratum, & planum ad planum, vt planus numerus ad planum numerum; Sed propositiones secundi Euclidis de lineis commensurabilibus intelligi possunt, cum sectio permittatur vt libet de 1. vsq; ad 10 Ergo eadem ratio, quæ de lineis, & quadratis, rectangulisque erit de numeris, eorumque quadratis, & planis: sed vt etiam pateat quomodo ijs propositionibus singulis, hæc vniuersalis doctrina applicetur sub exemplum veniat propos. 4. quæ, & nostra interest.

THEOR. I. PROP. XVIII.

Si numerus diuisus sit, vtcumque quadratus totius est æqualis quadratis partium, & insuper rectangulis earundem.

SInt partes AB 8. vnius 3. assumantur, & fiat quadratum 9. & 5. & fiat quadratum 25. deinde partes ipsæ multiplicentur simul, & fiat planum 15. & geminetur, sintque 15. & 15. duo plana. Dico, quod hæc duo plana 15. & 15. & duo quadrata 25 & 9. sunt æqualia quadrato ex toto numero 8. nimirum quadrato 64.



Patet. Nam ita est, vt ex præassumpto ostensum est, quadratum AD ad quadrata nigra, & rectangula t. & s. vt numerus quadratus 64. ad duo quadrata 9. & 25. & plana 15. & 15. sed illud AD est æqualis quadratis nigris, & rectangulis t. s. ergo etiam quadratus 64. erit æqualis quadratis 9. & 25. & planis 15. & 15.

COROLLARIVM I.

HInc est modus reperiendi quadratum numerum, cum quo quilibet numerus quadratum quoque numerum constituat. Sit V. g. numerus 7, constituaturque hic vice gnomonis in quadra-



to ABCD, vt per quadrata parua nigra exprimitur. Ad hoc itaque, vt reperiatur numerus quadratus cum hoc gnomone, quadratum quoque afficiens, reperiendus erit quadratus albus 25. Vt igitur reperiatur ex numero 7. demantur 1, vt auferatur quadratum seminigrum angulare ad A, remanebuntque 6. qui numerus duo parallelogramma ni-

gra

gris exprimit; ad hoc itaque, vt vnum habeatur, diuidatur bifariam, & erunt 3: multiplicetur ideo 3 in se ipsum, quia latus plani est æquale lateri quadrati albi, & obtinebis quadratum album 9. cum quo 7 faciet quoque quadratum numeri 16.

Si verò velis plana seu parallelogramma nigra plures series quadratorum continere, & numerus datus sit capax, tunc ita efficies dato numero 351. subtrahes ab eo numerum quadratum, quem elegeris, cuius sit capax, vt 169. cuius radix, & latus est 13. nempe latus O 7. quadrati parui seminigri; remanetque numerus 182. pro parallelogrammis nigris OC, & OB. Diuidatur bifariam, quia sunt duo; & erit 91. diuidaturque per latus 13. nempe O3. & prodibit latus OB; nempe quotus 7. Multiplicabitur itaq; in se quotus 7. & generabitur 49. qui numerus cum 351. constituet quadratũ 400. cuius radix est 20. Verum id non potest semper fieri præcisè, sed proximè in numeris maximè, in quibus fractiones interueniunt.

COROLLARIVM II.

*Hinc etiam regula elicitur alia, quâ inueniatur numerus, qui cum numero quadrato quadratum quoque efficiat. Ob cuius declarationem ponamus quadratum ABCD non habere, nisi 16. partes, & ideo in se toto non continere, nisi quadrata parua 256. si vellem addere quadrata tot eiusdem rationis, quæ componerent quadratum maius, deberem addere 16. pro vno quoque



latere; at insuper in angulo 1 quadratum. Vnde essent addenda 3. quadrata. Quod si in geminam seriem essent addenda quater 16. quadrata, nempe 64. & insuper 4. quadrata in angulo. Vnde regula prodit. Sit datus numerus quilibet 9. & radix 16. quadrati 256. per illum 9. multiplicetur, & producet 144. & productus numerus bis assumatur, & fit 288. ob duos planos numeros BV, & CT, deinde 9. in se multiplicetur, & fit 81. ob quadratum seminigrum DR, qui cum 288. facit summam 369. hic numerus additus quadrato 256. quadratum quoque efficit 625. cuius radix est 25. nimirum 16. & 9.

Et hac regula potest fieri tabula radicum, & quadratorum. Nam si quadrato 1 velimus addere quadratum numeri 2. accipiamus gemina vice radicem numeri 1, quæ est 1, & addamus 1, & fient 3. qui cum quadrato 1 facient 4. cuius latus est 2 Deinde accipiemus gemina vice 2. & addemus 1. vt fient 5. qui additus quadrato 4. facit 9 quadratum numeri 3. Deinde gemina vice acceptus 3. cum vnitate facit 7. qui additus quadrato 9. facit quadratum 16. numeri radicalis 4. & sic consequenter procedendo singulorum numerorum naturaliter procedentium, singula quadrata obtinebimus; quorum tabulam dat Clauius Geom. prac. l.8. & Maginus tab. Tetragonica.

COROLLARIVM III.

Tandem eruitur, quomodo dato quadrato reperiamus numerum; qui subductus relinquat quoque quadratum; nam si à latere 16. quadrati 256. auferatur 3. & reliquus 13. per 3. multiplicetur, & fiant 39 & gemina vice accipiatur, & fit 78. cui addatur quadratum 9. numeri 3. subducti à 16. fient 87. Numerus itaque 87. subductus à numero quadrato 256. relinquit quadratum 169. cuius radix 13.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Numero dato æquipotentes numeros alios, quos; quis iusserit, reperire.

Sit numerus aliquis 6. diuidendus in numeros 3. qui possint efficere quadrata, quæ simul æquent quadratum numeri 8. Reperiantur tres numeri 5. 4. 3. ex propos. 13. lib. 9. Elem. quorum duo 4. & 3. æquent quadratum numeri 5. Deinde vtere regula aurea, & dic si 5. dant 4. quid dabit datus numerus V. g. 8.? & si 5. dant 3. quid 8? Inueniesque 6 2/5, & 4 4/5, qui erunt radices duorum quadratorum quadrato numeri 8. æqualium.

* Nam ita ponitur 5. ad 4. vt 8 ad 6 2/5. Ergo ex 18. l. 8. cum quadrati suorum laterum proportionem habeant duplicatam; ita erit quadratum ex 5. ad quadratum ex 4. vt quadratum ex 8. ad quadratum ex 6 2/5. Et sic pariter quadratum ex 3. ad quadratum ex 5. vt quadratum ex 4 4/5 ad quadratum ex 8. Cum ergo ex 25. l. 5. prima, & quinta quantitas ad secundam eandem obtineat rationẽ, quam tertia, & sexta ad quartam. Erit quadratum ex 4. & 3. ad quadratum 5. vt quadratum 6 2/5, & 4 4/5 ad 8. sed quadrata ex 4. & 3. sunt æqualia quadrato ex 5. Ergo etiam quadrata ex 6 2/5, & 4 4/5 æquabuntur quadrato 8.

Sed rursus quæratur si 5. dat 4. & 3. quid 6 2/5? Inuenienturque [illegible], & [illegible], qui æquabunt quadratum numeri 6 2/5, & consequenter cum quadrato numeri 4 4/5 æquabunt quadratum numeri 8. ex prædicta ratione, & sic efficies, si alios exoptabis plures, quam tres.

EXPENSIO VI.

De radice quadrata perquirenda, & medio proportionale, tertioque perscrutando datis duobus.

Radicem quadratam exquirere est idem, ac datis duobus proportionalibus numeris medium proportionalem inuenire, quia ex prop. 19. lib. 7. Elem. quadratus numeri proportionalis est æqualis plano extremorum. Vnde sine cognitione huius extractionis medius numerus proportionalis venari nequit.

Præassumptum. Aduerte id quod notauimus Tract. 8. de Arith. simplici locum significare proportionem, quæ per decuplam multiplicationem numeri crescit; Ita primus numerus à dextra significat vnitates, secundus versùs sinistram deci-

mas

mas, tertius decimas decimarum, & cæt.

Ideo quadratus numerorum, qui primò subtrahuntur incipiendo à sinistra erit maior, quam secundus, & sic de reliquis; quia significat, vel decimas, vel centesimas, vel millesimas. Cum itaq; quadrati numeri latus non inueniatur totum simul obstante numeri magnitudine; sed per partes, & per diuersa quadrata: Ideo primus quadratus si vnus, vel duo significat quadrata numeri simplicis, si sint tres numeri erit centesimarum, & numerus ille quadrati, qui subducitur, significabit singulis vnitatibus decimas, & idem si sint quatuor; quia non possunt facere quadratum numerum decimarum; nisi tres, vel 4. numeri; sicut vnitatum quadratum facit vnus, vel duo numeri: Nam 10. per 10. ductus facit 100. qui tribus numeris exprimitur. At si sint quinque, vel sex quadrati radix, quæ extrahitur, erit centesimarum: nam 100. per 100. ductus facit 10000. qui quinque numeris exprimitur, nec minor numerus potest esse centesimarum quadratum; at si sint septem, radix quadrati, quæ extrahitur, erit millium; quia 1000 per 1000 ductus facit 1000000. quadratus numerus vnitatis millenariorum, qui, & poterunt esse dualitatis earundem, & trium, & quatuor, & ideo etiam octo numeris poterit exprimi, vt quadratum quatuor millium est 16000000. qui octo numeris exprimitur, & si sit centesimarum exprimetur, vt diximus sex numeris, vt 160000. & si sit decimarũ quatuor, vt 1600 & si sit vnitatũ duobus 16. Et sic dicendũ de alijs numeris etiã maioribus.

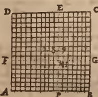
Præassumptum 2. Aduertendum secundo ex propos. 18. lib. 8. inter numerum quadratum, & alium semper cadere aliquem proportionalẽ numerum planum, qui sunt in quadrato duo complementa æqualia, vt ex propos. 35. lib. 1. Eucl. colligitur, & ex propos. 4. expens. præced. qui cum altero quadrato complent quadratum maiorem. Cum ergo habetur quadratum aliquod maius, & ex eo subducat aliquis quadratum minus relinquit Gnomonem scilicet quadratum aliud, & duo complementa: Sic si ex quadrato DCAB subducatur quadratum DEGH, relinquet gnomonem EHF circa se, qui continet quadratum HB, & duo rectangula CH, & HA, quæ sunt medis proportionalia inter quadratum DEFH, & quadratum HC. Quare tum hac, tum ratione supradicta non ab omnibus numeris latus quadrati subducẽdus est tum ex prima ratione, cum secundus, quartus, sextus, octauus, & cæt. consignificent cum primo, tertio, quinto, septimo, & cæt. Tum quia ex præsenti ratione, rectangula quoque sunt subducenda; vnde semper reliquendus est vnus medius pro illis subducendis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Quadratam radicem subducere.

Si subducenda radix quadrata à numero 289 punctum sub dextro 9. collocabitur procedendo ad sinistram, & intermisso vno, idest 8. sub tertio 2. & sic, si alij adsint, quia ab illis propriè radix quadrata subducitur; ab intermedijs verò media proportionalia, seu rectangula. Deinde videndum est, quinam quadratus numerus capiat in 2. ad sinistram, qui est 2. & video; quòd in numero 2. maior quadratus nõ continetur, quàm 1. quare scribo seorsim 1. & sub 2. rursus scribo 1. in se multiplicatus, & factus quadratus 1. Et deinde subduco ab 2. & remanet 1. nempe subduxi quadratum decimarum, qui est 100. ob locum tertium, in quo est, & æquale quadratum DFHE, & habeo latus DE, qui est 1. numerus expositus, qui, quia in radice ponendus est secundo loco, vt constabit, erit numerus decimarum, & significabit 10. idest latus DE, remansitq; residuum 189. Sed quia rectangula etiam ipsa subducenda sunt, propter quòd numerus intermedius 8. non est punctatus, quæ sunt rectangula CH, & AH, quæ pro vno latere continent quantum continet radix quadrata, & pro alio radix illius quadrati subtrahendi adhuc incogniti, vt ex prop 4. præced. colligitur: Siquidem latus 17. sectus est vtcumque in 10. & 7. Vnde duo plani numeri, qui cum duobus quadratis ex 10. & 7. integrant quadratum ex toto numero 17. continebuntur sub 10. & 7. inuicem multiplicatis, quare vnum latus erit 10. latus iam cognitum, & aliud 7. erit exquirendum.

289 | 1
1
———
189



Ad hoc, vt ergo illa subtraham, quæ sunt duo, habẽt consequenter duo latera æqualia radici EH, & HF. Quare radix duplicanda est vt faciat 2. significans 20. ob secundum locum quem occubabit radix 1. & ponendus seorsim sub radice.

Circa quem numerum 2. considero; an capiat, & quod vicibus capiat in numero residuo 18. & video, quòd cepit 9. vicibus, & esset hoc 9. aliud latus HG rectangulorũ; sed quia quantum est hoc latus HG, tantùm debet esse latus aliud quadrati incogniti subtrahendi HC; ideo videndum est; an hic numerus 9. in se multiplicatus capiat in numero residuo, & punctato, à quo illud quadratum deducendum est, & quia à 189. ablatis 2. per 9. multiplicatis, nimirum 18. residuum est 9. in quo 9. in se multiplicatus nimirum 81. non capit ideo 9. non erit alterum latus planorum CH, & HA; quia non reliquit sufficientem numerum, qui faciat quadratum HB.

Accipiam igitur 7. pro latere HG, qui duabus vicibus continetur in 18. & relinquit insuper pro residuo 4. qui cum 9. faciunt 49. qui numerus est

189 | 17
1 | 2
———
189
14
———
49
49

tantus, qui capiat 7. in se multiplicatum: Nam 7. ductus in 7. exhibet 49. Ideo iam reperi latus HG, vel AC planorum. Vnde ambo subducenda sunt; ergo 2. in 7. ducti faciunt 14. qui ob locum

æquiua-

æquiualent numero 140 subtrahoque à 189. ita tamen, vt seruet suum locum & 4 sub 8. situs sit, & 1. sub 1. neque vltimum numerum punctatum vllo modo tangat subtractio remanentq; 49. Et quia iam cognoui latus parui quadrati hic esse 7. ideo multiplico 7. in se, & faciunt 49. qui subductus à 49. numero residuo nihil remanet: Vnde 7. ponendus est apud radicem sepositam 1. & efficiet 17. Vides itaque, quod 1. priùs significabat 10. nunc modo cum numero 7. significet 17 qui est radix, seu latus 17. partium maximi quadrati capientis quadratula 289.

Sed quia aliquando casus occurrunt, qui ambiguum possent reddere operatorem, nisi de illis priùs monitus esset, ideo libet omnes casus, qui occurrere possunt recensere.

Primus est; si numerus primus ad sinistram punctum non habeat, tunc, vt diximus in præ ss. 1. ille numerus est consignificator, & tota radix à duplici numero subducenda est, vt si fuissent dati 9289. tunc numerus 9. nō esset punctatus; quare radix non esset ab illo extrahenda, quæ esset 3; sed ab illo quidem vt cum numero 2. idest à 92. quæ est 9 cuius quadratum est 81. à 92. subducendus, & residuum erit 1189. Duplicetur ergo, vt supra radix 9. & facit 18 Video itaque, quot vicibus capiat 18. in 118 & video quod capit quidem magis quā 6. sed numerus 6. est ille, qui relinquit numerum capacem recipiendi quadratum ipsius 6. & ideo multiplico 6. per 18. & faciunt 108. quos subduco à 1189. ponendo 8. sub 8. & reliquos numeri sub reliquis versus sinistram, & residuum est 109. Multiplico deinde 6. in se, & faciunt 36. quos subduco à 109 ponendo 6. sub 9 & residuum est 73. fractus numerus à quo radix quadrata subduci nequit. Radix ergo quadrata huius numeri erit 96.

Casus secundus est, si numerus, qui datur non sit quadratus V g. si numerus datus esset 115. ita vt ablato primo quadrato 1. remaneat 15. à quo radix quadrata duplata pro planis proportionalibus medijs subduci nequit, vt hic 1 Nam 1. sepositus duplatus non potest subtrahi ab 1 qui est apud 5. Vel etiam si capiat numeros planos proportionales medios, adhuc tamen totus residuus numerus à radice quadrata primo extracta. & duplata adeo absorbeatur, vt non remaneat locus alteri quadrato, nec quidem vnitati, vt si daretur numerus 120. tunc subducto maximo quadrato ab 1 qui est 1. remanet 20. à cuius numero sinistro radix quadrata 1. duplata subtrahi quidem potest; sed nihil remanet tunc signum est, quòd non adsit tantus numerus quadratorum paruorum, qui integrent saltem seriem vnam ipsorum pro quolibet plano; nimirum 10. pro vno, & 10. pro alio, vt in numero 115. siquidem ablato maximo quadrato decimarum, nempe 100. quarum radix est 10. non remanent nisi 15. qui non possunt conficere duas series æquales radii 10. pro vii, & 10. pro iii; vt constat ex Cor. 2. propos. 16. expens. præced. hæc verò series gemina 10. & 10. idest 20. non adest; cum non sint, nisi 15. Quod si adesset, at non superesset saltem vnitas pro quadrato paruo nigro, ad 11, vt ex supracit. Coroll. constat esse necessarium ad hoc, vt duo plana, & series quadratorum paruorum cum quadrato magno extracto faciant quoque quadratum. Ideo, si hoc occurrat, apud radicem ponendus est o, vt dicat 10. & residuum 15. aut 20. erit numerus fractus.

Casus tertius est. Si id occurrat non in fine, sed in medio V. g. si esset numerus 12036. à quorū quinto 1. radix quadrata subducta relinquit 20. à quo si 1. radix duplata subducatur nihil remanet sub puncto nisi o, à quo, nec vnitas subduci potest: Signum est; quòd ab eo numero radix quadrata, quæ esset decimarum subduci nequit; cum nullum adsit quadratum centesimarum, nempe nullum adest quadratum 100. vnitates, seu quadratula continens; Quare apud 1. sepositam radicem, vt locum seruet ponendus est o, & posthabito numero medio punctato, cuius loco ponitur o. apud radicem, iam procedendum est ad educendam radicem quadratam ab vltimo: Vnde considero numerum, qui apud eum est non punctatum, 203. quot vicibus capiat radicem duplatam 1 .quæ est 20. & video quod 9. vicibus, & adhuc remanet numerus talis, qui capiat 9. in se multiplicatum nempe 81. Ideo multiplico 20. per 9. & faciunt 180. quos subduco à 203. & sunt residui 23. quibus addo 6. vt fint 236. à quo in se multiplicatus subducendus nempe 81 & residuum est 155. qui fracti sunt, nec ab eis radix quadrata amplius subduci potest. Itaque radix quadrata numeri dati 120 6. est 109 & remanet aliquid, quia numerus quadratus non est. Vnde maximi quadrati, qui est 11881. qui in ipso capiat radix quadrata subducta est.

```
 · · ·      | 109. Residuum 155.
 12036      | ———
 11 .         20
   203         81
   180
  ———
   236
  ———
   155
```

Casus quartus est, si remaneant reliquiæ maiores; quam par sit, & fiat regula, quomodo dignoscatur error. Hic itaque dignoscitur ex Cor. 2 propos. 18. præced. Nam reperiatur talis numerus, qui cum numero, cuius radix quadrata extracta est, quadratum quoque efficiat; Cùm ergo sciamus radicem quadratam eam duplicabimus, & fit præcedentis quadrati duplicata radix 218. & vt reperiamus minimum numerum, qui hoc quadratum constituat accipiemus 1. per quem multiplicabimus 218. & dabit eundem numerum, cui addemus 1. in se multiplicatum, vt faciat 1. & fiet 219. & hic erit minimus numerus qui quadrato 11881. possit addi ad hoc, vt eius radix vnitate tantùm aucta adhuc efficiat quadratum; si ergo residuum V. g 155. æquet hunc numerum; signum est, quòd radix quadrata non bene deducta sit, & quòd ille, qui extractus est, licet sit radix quadrata

ta alicuius numeri, non est tamen maximi quadrati, qui in numero illo capiat, cum in sor potuisset capere, cuius radix vnitate esset maior.

PROBL. II. PROPOS. XXI.

Radicem quadratam vtrum benè deducta sit inuestigare.

EXtracta radix quadrata in se multiplicanda est, & si adsint reliquiæ addendæ. Nam, si restituat numerum priorem additis residuis, benè est extracta radix quadrata alicuius quadrati, qui in numero dato capiat; Ad hoc autem, vt sciamus, & securi simus, illum esse maximum quadratum; examinandæ erunt reliquiæ, vtrum possint superare, vel æquare numerum ex Casu Tertio, qui cum numero à quo radix quadrata deducta est quadratum constituat; Nam potest esse, quod quadratum sit benè deductum; sed non maius quàm fieri possit, ita si extracta esset radix quadrata 16. à 289. multiplicatis in se 16 & additis fragmentis 33. restitueret priorem numerum 289. cum tamen radix quadrata non sit 16. sed 17.

PROBL. III. PROPOS. XXII.

A numeris non quadratis radicem quadratam proximiùs, quàm possit, educere.

QVoniam non omnis numerus quadratus est, si tamen quis velit ab eo maximum quadratum, quem possit, proximiùs inuestigare, ita faciendum est.



* Sit numerus 22. à quo radix quadrata subducta 4. qualis est quadrati ABCD reliquerit pro residuo quadrata 6. vt est OS. Volo cognoscere, quid radici quadratæ addendum sit propter hoc residuum. Multiplico radicem quadratam 4. pro vt mihi placet, V. g. per 3. (si per 10. vel 100. exactior erit, & facilior operatio) & faciet 12. & quia sunt duo plana facient 24. ita vt sint 12. pro vno, & 12. pro alio, quod nihil aliud est, quàm quod latus quadrati BD intelligatur diuisum in partes 12. & singulis quadratulorum latera in 3. & item CD in partes 12. quæ sunt 24. Deinde me transfero ad residuum, nempe 6. & quia vnumquodque latus quadratorum paruorum, quę remanent, vt est OPQS, debet diuidi in tres partes, vt est diuisum quodlibet latus quadratorum paruorum in quadrato AA, & fieri quadrata parua; ideo multiplico 3. in se, & reddit 9 & quia habeo 6. quadrata multiplico 6. per 9 & faciunt 54.

Radix verò est solum 24 nempe deberent addi ad hoc, vt peruenirent ad longitudinem duorum laterum CD, & BD quadrata parua 24. & insuper vnum in angulo, quæ sunt 25. sed, quia numerus residuus est 54. multo maior, ideo forte potero ex istis quadratis adiungere duos ordines, nempe CD, & FR pro vno latere, & BD, & NV pro alio, ideo multiplico per 2. & faciunt 48. & rursus multiplico 2 in se, & faciunt 4. quos addo numero 48. & faciunt 52. Addidi verò 4 ob quadratum paruum DR, cuius latus est 2. ob duas tesseras quadratulorum 24. hinc, & inde additas: hos itaq; 52. subduco à 54 & residuum erit 2. de quibus non est curandum maximè, si elegeris numerum maiorem, vt admonui. At quia latus multiplicaui per 3. & gemina vice duo latera radicis compleui; ideo efformo minutiam $\frac{2}{3}$. Latus ergo quadratum numeri 22. erit 4 $\frac{2}{3}$ ferè.

Obserua verò. Quod hoc est idem, ac si quadratula parua omnia 22. multiplicarentur per 3. in se ducto, idest per 9. & fierent 198. & ab eis ita multiplicatis radix quadrata erueretur: Nam subducta radix quadrata est 14. à numero 198. Quare si rursùs diuidatur 14 per 3. restituit 4 $\frac{2}{3}$, nempe partes 4. radicis prioris, & earum $\frac{2}{3}$. Vnde facilitatis gratia addes numero à quo radix quadrata subducenda est V. g. 22. binarium cifrarum, vt faciat 2200. ita enim multiplicabis numerum 22. per quadratum 100. numeri 10 & deinde ab eo extrahes radicem quadratam, vt supra docui; quæ erit 46. Diuides ergo 46. per 10. & erit 4 $\frac{6}{10}$ numeri 22 radix quadrata Sic si addas duos binarios cifrarum numero 22 vt sint 220000 extrahes exactiùs: nã hęc additio habet vim multiplicationis per 10000 qui est quadratum numeri 100. radix verò quadrata numeri 220000. est 469. quã diuides per 100. & dabit 4. & $\frac{69}{100}$. Minor vero, sed maxima, quę eo numero contineri possit. Et sic si cupias etiã exactiorem, binarium, vel duos, vel tres binarios addes, parique modo operaberis. Sufficiet autem detruncare tot numeros radici, quot binarij cifrarum additi sunt; quoniam duæ cifræ vnicum numerum in radice pariunt, & sub singulis figuris, seu numeris, interiecta lineolã addere cifram cum vnitate ad sinistram; nam hęc detruncatio habet vim diuisionis, vt patet. Si verò velis radicem maiorem vera, addes fractioni vnitatem V. g. fractioni 6. addita vnitas, vt fiat 7 dat 4 $\frac{7}{10}$ maiorem vera. Sic, & fractioni $\frac{69}{100}$ addita vnitas dat 4. & $\frac{70}{100}$ maiorem vera radice.

PROBL. IV. PROPOS. XXIII.

Datis duobus numeris tertium proportionalem inuenire.

EX propos. 20. septimi habemus, quod duo numeri extremi proportionales generant æqualem numerum inuicem multiplicati medio proportionali in se multiplicato, idest eius quadrato sicut ex propos. 19. l. 6. habetur, quòd rectangulum duarum linearum proportionalium est æquale quadrato ex media; quòd cum ita sit, si adsint duo numeri proportionales 24. 32. & tertius quęrator hic tertius quæsitus erit latus plani numeri æqualis quadrato numeri 32. Ergo in se multiplicetur 32. & fiet quadratum 1024 quia ergo ille numerus est etiam planus numerus cuius latus est 24. & tertius proportionalis est aliud latus sicut ex defin. 1. lib. 8. se mutuo multiplicantes planum generauerunt, sic si diuidatur per alterum numerus alter restituetur. Ergo diuide 1024. per 24. & quotus erit 42 $\frac{2}{3}$ tertius proportionalis, estq; 24. ad 32. vt 32. ad 42 $\frac{2}{3}$ nam 24. ad 32 & 32. ad 42. & $\frac{2}{3}$ est vt 3. ad 4.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Datis duobus numeris medium proportionalem inuenire.

QVoniam ex propos. 20. lib. 7. si sint tres numeri proportionales, planus numerus genitus ab extremis est æqualis medij in se multiplicati quadrato; Ideo, si duo numeri dati inuicé multiplicentur, & ab ipsorū genito radix quadrata eruatur, hic numerus erit medius proportionalis. Sint dati duo numeri 20 & 45. Multiplicentur inuicem, & fiat 900. si à 900, extrahatur radix quadrata erit 30 qui est intermedius proportionalis, & ita est 20. ad 30. vt 30. ad 45. quòd si numerus genitus non sit quadratus, neque enim omnibus numeris tertius, aut quartus proportionalis inuenitur ex prop. 4 & 5. l. 8 elem. Auferendus est ex dato numero plano maximus quadratus, qui auferri possit, vt medius proportionalis vicinius, quam possit, obtineri queat.

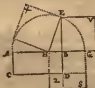
COROLLARIVM.

HInc poteris experiri illud, quod Eucl. probat propos. 5. lib. 8, non omné numerū habere, aut mediū, aut tertiū proportionalé, quia aūt numeri inter se primi, neque compositi ex alijs: Quare, si videas radicem quadratam primis vice non esse erutam, licet, vt docuimus possis à reliquis extrahere radicem quadratam, aut veræ radici semper magis appropinquare, non tamen vera educi potest, cum illa non adsit saltem numeris exarabilis: Vnde tandem quiescendum, cùm ad eas minutias peruentum sit, quæ insensibiles habeantur.

PROBL. VI. PROPOS. XXV.

Numerum datum maiorem, ita diuidere, vt partes sint respectu alterius extrema proportionalia.

V. g. sit 10, qui ita debeat diuidi, vt partes sint, respectu numeri 4. extrema proportionalia. Diuidatur in duas partes, & sint 5 multiplicetur in se fiunt 25. subducatur deinde 4. in se ductus, nempe 16. remanent 9. cuius radix est 3. qui additus numero 5. facit 8. & alterum segmentum est 2. estque 2. ad 4. vt 4. ad 8.



*PRobatur adhibito schemate propos. 16 secundi elem. HB quadratū medietatis AC æquale est quadrato EB, & HA ex 13 propos. lib. 2. elem. quare ablato quadrato BE à quadrato HB residuum erit quadratum ex HB, si ergo requiratur HB latus, & addatur medietati AH lineæ HC constituet lineam AB, & residuū medietatis erit AB. Sed ex prop. 35. l. 6. elem. BG, & BE, & AB sunt proportionales. Ergo etiam numeri eas proportiones exprimentes, vt notauimus præass. ad propos. 18. huius.

EXPENSIO VII.

De radice Cubica, duobusq́ numeris medijs proportionalibus.

EXtractio harum duarum radicum, nempe tùm cubicæ, tum quadratæ omnino necessaria est reliquis tractatibus; sed hæc præcipuè pro solidis inueniendis, & permutandis, aut proportionaliter augendis: Cæteræ verò radices Zensizensics, Surdesolida, & cæt. vix in vsum veniunt, & rarus omnino casus dempta Algebra, & etiam in ipsâ, nec frequentior vsus; Propterea earum explicatio, & extractio huic libro parum conuenit, in quo omnia quidem Mathematica, sed relictis superfluis, & minus vtilibus tradere intendimus.

Præass. Cubica radix est numerus radicalis, qui gemina vice multiplicatus in se, & in genitum producit numerum cubum, V. g 2. ex defin. 21 l. 8. Elem. erit radix cubica, quia multiplicatus in se facit 4. & iterum idem genitum multiplicans facit 8. & 8. erit cubus, Dato itaque numero cubo, vel numerum, qui cubum comprehendat, tradenda est regula quâ ex ipso hæc radix possit deduci.

Aliæ verò radices sunt numerorum, qui non dum multiplicant se, & productum, sed insuper productum producti, vt Zensizensics Vel producti etiam productum, vt Surdesolida, & sic in infinitum. Si ergo numeri V. g. 2. & 2. adhibeantur eos vnica vice inuicem multiplicādo, numerus est quadratus; si etiam rursus 2. adhibeatur, & multiplicet productum 4. erit productus 8 cubus: Si rursus 2 adhibeatur ad productum 8. multiplicandū erit productus 16 Zensizensus. Si 2. rursus adhibeatur erit numerus productus 32. Surdesolidus, & sic procedendo in infinitum.

Præass. 2. Quod adnotauimus in præass. 2. expens. præced. etiam hic aduertendum. Cubum numerorū, à quo primo subducitur à dextra significare cubum vnitatum; secundum significare cubum decimarum, tertium cubum centesimarum; & ideo cubus vnitatum, scilicet, cuius radix sunt vnitates, exprimetur ad summùm tribus numeris. Sic numeri 9. radix erit numerus cubus 729. tribus numeris expressus; at, si sit quatuor, iam incipit esse Cubus decimarum; nam numeri 10. cubus est 1000. quatuor numeris expressus, & quia cubus centesimarum incipit à 7. numeris, quia 100 per 100. faciunt 10000. & iterum hic per 100. facit 1000000. Ideo Cubus decimarum exprimetur, non dum quatuor numeris; sed quinque & sex; cum vltimus cubus decimarum s. numeri 99. Sit 970299. sex numeris expressus. Quare, cum ob numeri magnitudinem totus cubus extrahi simul nequeat, & debeat extrahi per partes; priùs extrahitur radix numeri cubi decimarum, V. g. deinde vnitatum si sex, vel quinque vel quatuor numeri sint: at, si sint septem vel octo, vel nouem figuræ; tunc ipsiùs extrahitur cubi centesimarum radix, deinde decimarum; postea vnitatum, & sic si adsint plures numeri.

Præassumpt. 3. Aduertendum quoque ex prop.

19.

19. lib. 8. Inter duos cubos, duos medios differentes radere proportionales numeros, qui ficut in radice quadrata erant duplandi. Sic in Cubica funt triplandi, vt potes faciliter intelligere ex fig. Cubi hic appofita. Cubus enim QO, cuius bafes nigræ, fi dematur à cubo toto QT, remanet cubus OT, & remanent quoque duæ fpecies folidorum; nempe folidum AS, quod habet fuperficiem AO eandem ac cubus demptus OQ, & altitudiné SO, quam cubus refiduus OT. Remanet quoque folidum aliud ZO habens fuperficiem cubi refidui OT, & altitudinem SO cubi dempti OQ. Quæ tamen folida ad cubum complendum triplicantur, nam primæ fpeciei funt tria AS, & CT, & FN, ficut & fecundæ fpeciei tria funt, ZO, & LH, & EI, quæ omnia extrahenda funt, vt habito latere, & radice FE, deinde refiduũ eius ZH obtineatur, quæ eft eadem ac TZ, vel FS a. Hinc eft, quod tum propter hanc rationem, tum propter rationem prædictam non ab omni numero radix cubica extrahitur; fed inter fingulos duo medij prætermittendi funt.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Radicem Cubicam extrahere.

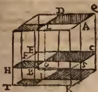
Sit datus numerus 81625. à quo radix cubica extrahi debeat. Super primam figuram ad dextram punctum collocabitur, & duabus intermiffis fuper quartam, & fic femper duabus intermiffis: quia ab iftis punctatis propriè radix quadrata fubducitur; ab alijs verò intermedijs folida proportionalia educuntur.

Videndum eft itaque quiqam maximus cubus capiat in primo numero punctato etiam inclufis precedentibus ad partem dextram, nempe in 15. ad quod expediet habere cubos iam deductos, cùm fuis radicibus ab vno vfque ad 10. vt hic vides.

Itaque maximus cubus, qui capiet in 15. eft 8, cuius radix eft 2. itaque feorfum radix 2. ftatuatur, & fubducatur 8 à 15. refiduumque erit 7. & fic fubduxi Cubum 10 ex primo præffumpto: quia numerus punctatus, à quo fubduxi, eft quarto loco, qui eft millíarium: habeoque radicẽ, & latus 2 qui in radice ponendus eft fecundo loco, quod fignificet decimas, tunc cùm fuerit omnino extracta radix cubice.

Radix	Qued.	Cubus
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	10000

2
——
7625.

Accedamus modo ad alterius cubi extractionem à punctato numero 5. fed quia prius deducenda funt omnia folida, ideo accipiamus quadratum radicis 2. appofita vnica zifra, vt fit 20. quæ, 

quadrata eft numerus decimarum, eritque 400. quẽ triplico ob tria proportionalia folida maiora, & funt 1200. Ille ergo numerus debet capere in refiduo 7625. & infuper remanere aliquid, tum ob folida minora triplicata extrahenda, tum ob cubum numerum infuper deducendum. Et video, quòd quinquies capit, & infuper remanet talis numerus, qui, vt puto, erit capax recipiendi folida prædicta minora, & cubum. Ideoque apud radicem pono 5. vt altera radix, vt itaque faciam, & tramutem in folidos numeros, fuperficies fupra factas 1200 multiplico per 5. nempe per altitudinem inuentam, & faciunt 6000. & habeo tria folida maiore. Deinde, vt habeam quoque folida minora, & cubum. Multiplico radicem 5. in fe, & generat planum numerum 25, habeoque bafim folidorum minorum, quam triplico; quia tria funt, & faciunt 75. quem numerum multiplico per latus 20 vt obtineam altitudinem ipforum. & faciunt 1500. tandem, vt obtineam cubum, multiplico quadratum 25. per radicem 5. & facit 125. Quos omnes numeros fimul colligo, nempe 6000. folida maiora 1500. folida minora, & 125 cubum; eritque numerus 7625. Quem fubduco à numero refiduo 7625. & nihil remanet. Radix ergo cubica extracta fuit, & reperta 25. Si verò fuiffet numerus 15637, non fuiffet cubus numerus; vnde fupereffuiffet aliquis numerus. V. g. 12, à quo radix cubica vlteriùs extrahi non potuiffet, vt fupra de radice quadrata dixi, & illi cafus, quos ibi expofui, funt & hic obferuandi; fed omnia triplicando.

25
——
7625

Primus itaque cafus eft; fi ante primum numerum dextrum reperiantur duo numeri, vel vnus; tunc primi funt confignificatores, & illi tres pro vno funt accipiendi; Secundus fi numerus, qui datur non fit cubus V. g. fi datus fuiffet numerus 1330 tunc extracto cubo 1. remanet 330. à quo non poffumus extrahere duas fpecies proportionalium triplicatas, & cubum minorem. Nam 1. in fe facit 1 addito 0. facit planũ numerum 100. quẽ triplico, & facit 300. qui numerus capit in 330. vnica vice; itaque radix altera effet 1. Si ergo talis verè eft oportebit, vt capiat eius cubus, & folida tria in refiduo 30. multiplicatus ergo 1. in fe facit 1. fuperficiem, quam triplico, & multiplico per 10. & facit 30. folidum. Deinde 1. in fe, & facit 1. Vnio tandem fimul 300 folida maiora 30. folida minora, & cubum 1. & faciunt 331. maior numerus; quam 330. Itaque nec quidem cubus vnius vnitatis in refiduo 330. capere poteft: Quare apud radicem pono zifram, & erit 10. & 330. erit refiduum; quòd fi fuiffet hoc refiduum 331. radix cubica fuiffet 11. & nihil refiduũ fuiffet, quia numerus exhibitus fuiffet cubus.

Tertius cafus eft. Si id occurrat non in fine operationis, fed in medio: tunc appofita, vt in præc. cafu apud radicem zifra, totum refiduum fequentibus numeris eft copulandum, & videndum an à reliquo hoc confequentibufque ad punctum radix cubica extrahi poffit.

Quartus cafus eft. Cum remanent reliquiæ, cognofcere: an illæ fint maiores, quam oporteat? Quod vt cognofcatur radix cubicæ iam extracta V. g. 10. à numero 1333. multiplicetur in fe, quæ multiplicata triplicetur, vt fit 300. triplicoque 1. & per radicem 10. multiplico, & facit 30 & ad 10 8. & facit 38. quem addo numero 300. & funt 331. Refiduum verò numeri 1333. deducta radice Cu-

bica

bicâ 10. est 333. itaque cum numerus sit maior, quam productus 331, signum est, quòd adhuc vnica vice Cubus vnius vnitatis capere potest, & quod radix cubica maxima sit 11. huius numeri 1333. remanetque fractus numerus 2.

PROB. II. PROPOS. XXVII.

Radicem cubicam, vtrum benè deducta fuerit? inuestigare.

HOc fit multiplicando radicem cubicam in se, & deinde in productum, & additis residuis, si consentiat cum numero exhibito erit bene facta deductio; sin minus aliquis error irrepsit; Hoc autem patet per se, nec indiget ostensione.

PROBL. III. PROPOS. XXVIII.

Dato numero non cubico, radicem cubicam proximiorem deducere.

ADdes proposito numero V g. 15862. aliquot ternarios cifrarum V.g. duos, vt fiat

numerus 15862000,000. à quo radix cubica subducatur, & sit 2512. Quia ergo duo ternarij cifrarum additi sunt, auferantur duæ figuræ sinistræ 12. tanquam numerus fractus, & supposito 2. cum duabus cifris iuxta ternarios 2. ciffrarum additos, erit radix cubica numeri 15862 valde proxima 25 & $\frac{1}{10} \frac{2}{100}$. Ratio est eadem, quæ præcedent. Expensi. prop 25. eritque hic applicanda.

* Vel multiplicabis residuum 237 subductâ radice cubicâ per cubum 1000. numeri 10. & erit 237000. Deinde radicem cubicam 25. multiplicabis per 10. eritque 250. quam duces in se met, vt habeas numerum planum 62500. & ob tres proportionales interpositos per 3. multiplicabis, eritque 187500 videbis itaque quot vicibus capiat hic numerus 187500. in residuo 237000 & capit vnica vice. Ideoque hæc vnitas in se ducta multiplicabitur cum radice 250 & erit 250. quam triplicabis, vt faciat 750. ob tres proportionales minores, deinde duces vnitatem quoque in se, & erit 1. Ergo isti numeri 187500 & 750. & 1 simul addantur, eruntque 188251. quos subduces à residuo 237000. Et quia in hoc vnica vice capit, & radix Cubica fuit multiplicata per 10. ideo erit minutia $\frac{1}{10}$.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

Si dentur quatuor numeri continuè proportionales, quadratum primi ad quadratum secundi est veluti secundus ad quartum.

SInt quatuor numeri continuè proportionales 3. 6. 12. 24. & sit quadratum primi 9. & secundi 36 Dico, quod ita est 9. ad 36. vt secundus 6. ad quartum 24.

* Probatur. Quoniam ponitur 3. ad 6. vt 6 ad 12. Ergo Rectangulum, & numerus planus ex primo 3. & tertio 12. æquabitur quadrato ex medio 6. Quare primus 3. multiplicando se faciet suum quadratum, & multiplicando tertium 12. faciet quadratum numeri 6. Ergo .. propos. 17. septimi erit 3. ad 12. nempe primus ad tertium. Sic quadratum primi 9. ad quadratum 36. secund. Sed vt primus ad tertium, ita est secundus ad quartum. Ergo vt secundus ad quartum, sic erit quadratus primi ad quadratum secundi.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

Si sint quatuor numeri proportionales, erit solidus primi in se ducti, & in extremum æqualis Cubo secundi.

SInt quatuor numeri proportionales 2. 6. 18. 54. Dico solidum genitum ex multiplicatione primi in se, & in quartum esse æqualem Cubo secundi.

* Probatur ex præced. ita est quadratus primi 4. ad quadratum secundi 36 vt secundus ad quartum. Ergo ex 19. septimi Elem. Si multiplicetur primi quadratus cum vltimo, qui sunt extremi proportionales generabit æqualem numerum, ac secundi multiplicati in suum quadratum, qui sunt medij proportionales. Sed secundus multiplicans suum quadratum facit Cubum, & primus multiplicans se, & deinde quartum facit solidum. Ergo iste cubus, isteque solidus erunt æquales.

PROBL. IV. PROP. XXXI.

Inter duos numeros datos, duos medios proportionales adinuenire.

SInt dati duo numeri 54. & 2 inter quos duo medij proporcionales sint conticiendi. Multiplico primum 54 in se. & deinde in alium 2. generabiturque numerus solidus 5832. Ab hoc itaque numero extrahatur radix cubica, & erit 18. secundus proportionalis apud primum 54. ponendus. Accipiatur deinde numerus 2 tanquam primus, & ducatur in se, deinde in vltimum 54. & generabit numerum solidum 216. Cuius radix cubica est 6. apud 2. collocandus, & sic erunt 54. 18. 6. 2. quatuor proportionales continui.

* Probatur. Nam cubus secundi proportionalis ex præced. æquatur plano numero ex primo in se, deinde in quartum ducto. Si ergo ab eo plano numero primo in se, deinde in quartum extrahatur radix cubica, illa erit secundus proportionalis post primum collocandus. Quamobrem, si accipiatur vltimus 2. tanquam primus inuerso ordine dabit secundum qui erit idem, ac tertius, seriei, vt priùs acceptæ. Etenim tertius 6. est secundus respectu vltimi, vt primus accepti, vt 18. est secundus respectu primi 54.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

A fractionibus quadratis, & cubicis radicem quadratam excerpere atque cubicam.

Extrahatur radix Quadrata, seu Cubica, tum à numeratore, tum à denominatore, seu vera, seu propinqua: si quando non sit nec numerator, nec denominator numerus, aut quadratus, aut cubicus, & erit factum, quod desideratur; Nam illæ duæ radices numeratoris inquam, & denominatoris constituent minutiam radicem numeri propositi. Proponatur V. g. minutia $\frac{4}{9}$ à quà deducenda sit radix quadrata. Radix numeratoris est 2. denominatoris 3. ergo $\frac{2}{3}$ erit radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$, sic quoque $\frac{2}{3}$ erit radix cubica numeri $\frac{8}{27}$. Quod, si data minutia sit fractio alterius minutiæ reducenda est ex dictis ad eam minutiam. Quod, si hæreat integris, & ab integro simul cum minutia radix quadrata, vel cubica educenda sit; integer in minutiam reuocetur, & ab ea minutia radix cubica, vel quadrata eruatur. Sic si sit 5 $\frac{4}{9}$ primò 5 $\frac{4}{9}$ reducetur ad minutiam $\frac{49}{9}$, & extrahetur radix quadrata, tum à numeratore 49 quæ erit 7. tum à denominatore 9. quæ erit 3. Itaque minutia $\frac{7}{3}$, erit radix quadrata minutiæ $\frac{49}{9}$, vel 2. & $\frac{1}{3}$.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

A fractionibus, nec cubicis, nec quadratis radicem proximiorem cubicam, vel quadratam excerpere.

Sit data minutia $\frac{5}{7}$, à quâ oportet radicem proximiorem excerpere. Potest id exequi præcedenti regula duas radices nempe denominatoris, & numeratoris excerpendo proximiores, & ex eis duabus radicibus numeratoris quidem pro numeratore, denominatoris autem pro denominatore vtendo ad statuendam minutiam, quæ sit radix minutiæ datæ. Sic numeratoris 5. radix quadrata est 2, $\frac{2}{10}$, & denominatoris 7. est 2 $\frac{6}{10}$ essetque minutia.

* Verum, vt scribantur ad modum minutiæ integri reducendi sunt ad fractiones, & vt earum valor cognoscatur per denominatorem numerator diuidendus, vt redigantur ad vnicam minutiam. Sic 2 $\frac{2}{10}$ erunt $\frac{22}{10}$, & 2 $\frac{6}{10}$ erunt $\frac{26}{10}$. Quia ergo ex propos. 4. huius 1. par. ita est minutia $\frac{22}{10}$ ad minutiam $\frac{26}{10}$, vt numerator ad numeratorem; ideo minutia $\frac{22}{26}$ erit ea, quæ quæritur relicto denominatore 10. qui non variat minutias. Vnde ita erunt minutiæ istæ, ac minutia $\frac{22}{26}$.

$$\frac{2\ \frac{2}{10}}{2\ \frac{6}{10}} \quad \frac{22}{10} \quad \frac{26}{10}$$

Verùm, & alio modo exactiori fieri potest. Multiplicetur denominator 7. per numeratorem 5. & fiunt 35. eritque huius 35. radix quadrata 5. & $\frac{10}{11}$, seu $\frac{65}{11}$. Si ergo assumatur numerator 5. & statuatur pro numeratore huius radicis inuentæ $\frac{65}{11}$ eo modo, quo supra, redigendo ad eandem denominationem, in fractioneque proiciendo, vt sit $\frac{55}{65}$ erit relicto denominatore 10. minutia radix datæ minutiæ $\frac{55}{65}$. Sic etiam eueniet, si radix inuenta $\frac{65}{11}$ statuatur pro numeratore, & denominator supponatur, & fit $\frac{65}{77}$.

* Probatur, quod hæc minutia sit eadem radix, ac illa, quæ esset educta, tum à numeratore, tum à denominatore propositæ minutiæ, & ideò quod, & ipsa radix sit.

Nam, quia multiplicauimus duos numeros 5 & 7. extremos, & fecimus 35. cuius radix quadrata est 5. & $\frac{10}{11}$ ex prop. 20. septimi, erit eadē proportio 5 ad 5. & $\frac{10}{11}$ ac 5. & $\frac{10}{11}$ ad 7. (supponimus autē ostensionis gratia 5. $\frac{10}{11}$, esse radicem veram) Quare proportio 5. ad 7. est duplicata eius, quam habet 5. ad 5. $\frac{10}{11}$, vel 5. & $\frac{10}{11}$ ad 7. Sed etiam 5. ad 7. habet duplicatam proportionem radicis 5. ad radicem numeri 7. ex propos. 18. l. 8. Ergo est eadem proportio radicis numeri 5. ad radicem numeri 7. ac 5. numeratoris ad radicem numeri 35. vel radicis numeri 35. quam ponimus esse 5 $\frac{10}{11}$ ad denominatorē 7. quare erit ex Cor. prop. 3. p. 1. huius, eadem minutia radix numeratoris, & radix denominatoris V. g. $\frac{22}{26}$ supra inuenta, ac numerator 5. cum radice numeri 35. nempe $\frac{55}{65}$, aut ipsa radix 59. numeri 35. cum denominatore 70. cum in omnibus eadem sit proportio, quod earum omnium proportionum duplicata sit proportio numeratoris 5. ad denominatorem 7.

Ad extrahendā verò radicē Cubicā. Numerator 5. quadretur, & fit genitus 25. ducaturque in quadratum 25. denominator 7 & fiat 175. adiectisque zifrarum ternarijs, ab hoc numero extrahatur radix cubica. Nam si hæc statuatur tanquam numerator denominatoris 7. erit cubica radix minutiæ propositæ.

Sic numeri 175. radix cubica proxima est 5. & $\frac{6}{10}$. Si ergo hac radice vtar pro denominatore, & numero 5. pro numeratore modo prædicto, & faciam minutiam $\frac{50}{56}$ hæc erit radix cubica proxima datæ minutiæ $\frac{5}{7}$.

Probatur. Nam ex prop. 27. huius, radix solidi 5. in se, deinde in 7. ducti, nempe numeri 175. est secundus proportionalis post 1. primum collocandus, & 7. quartus proportionalis. Quare numerus 5. ad numerum 7. habebit triplicatam proportionem eius, quam habet 5. ad radicem numeri 175 Sed ex 19. l. 8. etiam 5. habet ad 7. triplicatam proportionem radicis cubicæ 5. ad radicem cubicam numeri 7. Ergo radix cubica numeri 5. sumpta, vt numerator ad radicem cubicam numeri 7. sumptam, vt denominator habebit eandem proportionem, quam 5. ad radicem cubicam numeri 175. Vnde ex propos. 3. huius 1. part. Coroll. erit eadem minutia, si sumatur 5. vt numerator, & radix cubica numeri 175. pro denominatore accipiatur, ac radix cubica numeri 5. vt numerator sumpta, & radix cubica numeri 7. vt denominator, quæ constituit cubicam radicem minutiæ $\frac{5}{7}$.

Potes etiam ducere numeratorem in quadratum denominatoris, & radix cubica erit numerator, cuius denominator erit ipse, qui prius erat, constituesque minutiam [illegible].

Ratio est eadem, quæ prædicta; solumque differt in hoc, quòd denominator, vt primus assumitur, vt radix extracta sit secundus proportionalis immediatus, & numerator quartus. Ibi verò numerator, vt primus assumebatur, & radix extracta tanquam secundus proportionalis, & tandem denominator tanquam quartus.

TRA-

TRACTATVS XIIII.

IN PROPORTIONES NVMERICAS. PARS I.

De Proportione Geometrica continua.



QVoniam ipsa fundamenta proportionum, numeros inquam simili ratione se referentes in præcedenti Tractatu inuenire docuimus, nunc ipsas proportiones, rationumque similitudines opus est speculari. Tres verò species proportionis sunt; nempe Geometrica, Arithmetica, Musica, de quarum naturâ agere opus est. Vnde in tres partes iste Tractatus abibit, in quarum singulis, singulas species exponemus.

EXPENSIO I.

De proprietatibus proportionis Geometricæ continuæ.

PRæcipua est, & quam in primis definit. lib. 5. defin. 4. Euclides, & de qua intelligit in propositionibus quinti, & sexti est proportio Geometrica, & de hac primò agendum est; cùm sit omninò eius cognitio necessaria ad Logarithmos inueniendos, & ordinandos; ob quem scopum de ea, hic tandem pleniorem cognitionem exhibere fuit necessarium.

Proportio autem Geometrica in similitudine continentiarum consistit, quando quantitas continet, vel continetur ab alia similiter, ac aliqua alia quantitas continet aliam tertiam V.g. 4. 8. 16. sunt in proportione Geometrica, quia 8. continet 4. sicut 16. continet ipsum 8. nempe gemina vice.

Datur duplex proportio Geometrica, *Continua*, & *Discreta*. Continua est illa, quæ est eadem inter tres, aut quatuor, aut plures numeros, ita ut quilibet sit sequens, & antecedens, terminus relationis, & fundamentum V g. 4. 8. 16. proportionem continuam habent; quòd fundamentum 4. refertur ad 8 vt terminum, qui tanquam fundamentum refertur quoque ad 16. terminum suum. At non continua est illa, in quâ nullus numerus rationem habet fundamenti simul, & termini, vt est illa, quæ intercedit inter 2. ad 4. & 5. ad 10. & 6. ad 12. Nam quælibet licet eadem proportio dupla habet suum fundamentum 2. 5. & 6. terminumq; 4. 10. 12. distinctum. Cum itaque multæ proprietates, tum de Geometrica proportione in genere, seu inter quantitates corporum, vt quinto, & sexto libro, seu inter quantitates numerorum, vt septimo, & octauo, & nono ab Euclide explicatæ sint, remanet hic, vt solas proprietates Geometricæ proportionis continuæ explicemus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Non omnes numeri continuari in suis proportionibus possunt.

PRobatur. Quia ex propos. 4. lib. 8. & prop. 5. eiusdem; nec numeri duo inter se primi, nec tres, aut plures proportionem dicentes continuam; si eorum extremi sint inter se primi continuari in numeris integris possunt. Quomodo verò cognoscendum sit, an dati numeri possint continuari in suis proportionibus, ibi explicatum est propos. 7.

THEOR. II. PROPOS. II.

Numeri, qui ab vnitate continuè proportionales sunt, primus in se multiplicatus producit tertium, & primus in tertium producit quartum.

PRobatur. Quoniam vnitas per ipsum primum primum metitur, nam vnitas. V.g. ter accepta facit 3. Vt itaque referatur 3. ad alium, vt 1. ad 3. ter debet accipi ipse 3. & ita in se multiplicari, vt fiat 9. Ad hoc autem, vt 9. se habeat ad alium, vt 1. ad 3. debet ter rursus accipi, vt fiant 27. & sic prosequendo. Ergo primus numerus post vnitatem in se ducendus, vt fiat secundus. Secundus autem multiplicandus per primum, vt fiat tertius in numeris ab vnitate continuè proportionalibus.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum continuè proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, & assumptum numerum cadunt, tot, & inter ipsos medij proportionales cadent.

Sint à numero 8. continuè proportionales A B C, pro prima serie, & D E F pro secunda, & primæ numero æquali. Dico; *quòd tot inter eos cadunt numeri*, V. g. B, & E, vel C, & F quot inter quemlibet ipsorum B, vel C, & num. 8. proportionales cadunt.

C 27. 36. 48. 64 F
B 18. 24. 32 E
A 12 16 D
8
64
P 144 Q 256 R
S 20736. 3996 66136
T V

Quod, vt probetur, quilibet ipsorum quadretur ducendo illum in se, & ex numero 8. fiat quadratus numerus Q. & quadratus numerus P ex numero A, & quadratus numero R. ex numero D; Cum ergo P, & Q sint numeri quadrati cadat inter eos medius vnus proportionalis ex prop. 8. octaui Euc. Sed inter B, & 8. cadit vnus medius proportionalis nempe A 12. quare erit B ad 8. numerum, vt numerus P quadratus ad quadratum Q.

Idem dicas de quadrato R., qui inter se, & quadratum Q admittit medium proportionalem vnicum; sicut E respectu numeri 8. Quare Q respiciet R quadratum, vt 8. numerus respicit numerum E. Ideo, cum sit B ad 8. vt P ad Q & 8. ad E, vt Q ad R erit ex æquo B ad E, vt P ad R. Sed cum P, & R. sint quadrati vnus inter eos proportionalis cadit, ergo etiam inter B, & E; Quia ergo inter B, & 8. vel E, & 8. vnus medius proportionalis cadit, vel A, vel D, inter etiam ipsos B, & E vnus medius proportionalis cadet, f. 24. & prop. 8. l. 8. Idem dicas de C, & F, inter quos duo medij proportionales cadent 36. & 48. sicut cadunt inter C, & 8. duo medij proportionales B, & A, vel sicut cadunt inter F: & 8. numeri medij E. & D. Quia inter S, & V cubos cadent duo medij proportionales.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si sint quotcumque numeri continuè proportionales eandem inuicem proportionem dicent, tres numeri in eadem distantiâ assumpti relictis intermedijs.

Sint numeri continuè proportionales 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Dico, *quod si assumantur hinc tres numeri in eadem distantia*, V. g. 2. & 16. & 128. qui relictis duobus accipiuntur, *quod eadem proportio adhuc est* 2. ad. 16. *quæ est* 16. ad 128.

* Probatur. Nam vt est 2. ad 4. suum sequentem ita est 16. ad 32. suum sequentem, & vt 4. ad 8. ita 32. ad 64. & tandem, vt 8. ad 16. ita 64. ad 128. Ergo ex *æquo*, ita est 2. ad 16. vt 16. ad 128.

THEOR. V. PROPOS. V.

Trium numerorum continuâ proportione se respicientium quadratum medij est æquale rectangulo extremorum.

Patet ex propos. 20 septimi. Nam numerus medius in se ductus, qui est quadratus ex defin. 18 septimi facit numerum genitum æqualē numero extremorum, qui est rectangulum numericum, aut planum, vt ex defin. 1. lib. octaui. Hoc idem posset probari in quantitate continua ex propos. 17. sexti.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si sint quatuor numeri continuè proportionales planum factum ab extremis æquale est illi plano, quod fit à medijs.

Patet quoque hæc propos. ex 19. propos. sept. vbi numerus ex multiplicatione extremorum probatur æquari numero ex multiplicatione mediorum; cum verò inuicem numeri multiplicantur in plana rediguntur, vt constat ex def. 2 octau. quod etiam est intelligendum de cubo facto ex medio, cui est æquale solidum numericum factum ex extremis multiplicatum per medium. Patet enim, quod cum plana sint æqualia multiplicata per eundem numerum medium faciant idem solidum.

THEOR. VI. PROP. VII.

* *Quo maior est numerus, eò in ipso minutiores proportiones reperiri queunt continuâ proportione sibi inuicem respondentes.*

Probatur eo, quia ibi plures possunt inueniri relationes, vbi plura sunt fundamenta; talis autem sunt in multitudine maiori. Sed possunt etiam inueniri minutiores. Nam ea est minor proportio, quæ numeri, ad quem comparatur minorem partem, vel partes continet: sed numerus paruus acceptibilis à maiori numero continebit illius minorem partem, quam numeri minoris, V. g. 2. continebit pauciores partes numeri 1000. quam numeri 100. cum huius quinquagesimam partem amplectatur, illius verò quingentesimam. Ergo in maiori numero minutiores proportiones reperiri queunt.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

* *Differentiæ sunt in eadem proportione, ac ipsi proportionales in continuè proportionalibus.*

Sit proportio continua 50. 60. 72. Dico differentias 10. & 12 esse in eadem proportione, ac ipsi termini, & sic esse 10. ad 12. vt 50. ad 60.

Pro-

* Probatur. Ita ponitur 50. ad 60. vt 60. ad 72. Ergo *dividendo* ita erit 50. ad 10. vt 60. ad 12. Ergo *permutando*, ita erit 50. ad 60. vt 10. ad 12. quod erat ostendendum.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Differentiæ coacervatæ in continuis proportionalibus constituunt cum numero radicali maximum terminum.

SInt tres termini continuè proportionales 4. 6. 9. & differentiæ 2. & 3 Sitque quidam numerus Ovium æqualis numero 4. & differentiæ 2. & 3. isti numero addantur. Dico fieri terminum æqualem termino 9. vltimo. Nam si addamus 2. ipsi 4. quâ differt 4. à 6. fiet Ovium æqualis numerus numero 6. & sic successiuè. Ergo cum omnes termini semper sint æquales etiam vltima æquali additione differentiæ Ovium completus numerus, vltimo termino erit æqualis.

THEOR. X. PROPOS. X.

Datis duobus terminis proportionalibus diuiso maiore per minorem Quotiens est denominator proportionis.

EXibeantur duo termini 4. & 12. & diuidatur 4. per 12. quotiens erit 3. Dico *hunc quotientem* 3. *esse denominatorem proportionis, quam habet* 4. *ad* 12. Nempe 4. respectu 12. esse $\frac{1}{3}$.

Probatur ex defin. 1. septimi. Nam eam proportionem dicunt numeri, cum alterius fuerit eadem pars, vel partes, & cæt. Si ergo per diuisionem exquiratur, quæ pars sit numerus 4. numeri 12. habebimus eius proportionem, quare ex propos. 40. septimi, pars numeri 12. quæ est 4. erit à quotiente denominata, nempe à 3 & dicetur tertia pars. Sic si velimus scire. quæ pars sit numerus maior 12. numeri 4. quia per diuisionem 4. per 12. habetur minutia $\frac{12}{4}$, aut $\frac{3}{1}$ habebimus proportionem, quam dicit 12. ad 4. nimirum triplam.

COROLLARIVM.

HInc verò est, quod secundus terminus contineat antecedentem ipso antecedente dempto, quot vnitates sunt in denominatore vna abiecta, & sic quod 12. minus 3. idest 9 contineat 3. toties, quot vnitates sunt in 4. sed demptâ vnâ.

THEOR. XI. PROPOS. XI.

* *Numerus maior in quacumque proportione multiplici continet reliquos omnes tot vicibus, quot sunt in denominatore vnitates vna dempta, & insuper numerum à quo denominatio incepit.*

SIt data continua multiplex denominata à 4. proportio, quæ sit 3. 12. 48. Dico 48. continere reliquos minores tricies nempe vna vnitate minus, quam sint vnitates in denominatore, qui est quaternarius, & insuper numerum 3. à quo incipit series

Probatur. Nam progress. 1. ex suppositione n. 12. continet quater 3. ergo 3 tricies multiplicatus, idest acceptus quater minus vna vice æquabit 12. si cum 3. coniungatur numero, à quo incepit proportio. Progress. secundus sic dicas de numero 12. qui tricies acceptus, nempe per denominatorem quaternarium vnitate mancum multiplicatus, idest 36. & iunctus cum ipso 12. æquabit 48. Sed iam hoc ipsum 12. habemus, quo deficit numerus 36. ad adæquandum 48 ex primo progress. ex 3. tricies multiplicato, additoque ei numero ipso radicali 3. Ergo numerus 48. continebit reliquos tricies, nempe toties, quot vnitates sunt in denominatore minus vno, & insuper numerum radicalem, cùm 12. tricies acceptus cum 3. tricies accepto vna cum 3. radicali, nempe 12. æquet ipsum 48. Et idem dicas, etiam si sint plures termini, quàm tres.

Sic pronuncies etiam si proportio sit multiplex superparticularis, seu superpartiens. V. g. detur 9. 24. 64. cuius denominator est 2. & $\frac{2}{3}$. Si subtrahas 9 à 24. remanent 15. siue 1 $\frac{2}{3}$. Quare 9 acceptus iuxta denominatoris vnitates vnâ exclusâ. nimirum 1. & $\frac{2}{3}$, quæ faciant 15. addito ipso numero 9. æquant 24. ita 24. acceptus semel cum duobus tertijs, & 9. cum duobus tertijs addito numero 9. radicali æquant ipsum 64.

* Probatur aliter data proportione 3. 12. 48. si demitur 3. à 12. erit 3. ad 9. Ratio denominata à 4. sed diminuto vnitate, idest à 3. Quia ergo est 3. ad 12. vt 12. ad 48. erit *dividendo* 3. ad 9. vt 12. ad 36. Quare *permutando* erit 3. ad 12. vt 9. ad 36. & *Componendo* erit 3. ad 15. vt 9. ad 45. Quare etiam *permutando* erit 3. ad 9. vt 15. summa aliorum minorum ad 45. terminum maximum deducto primo. Sed 3. ad 9. habet rationem denominatam à 3. idest à denominatore 4. vnitate minuto. Ergo etiã 15. summa ad 45. terminum maximum mancum 3. primo termino eandem obtinet.

THEOR. XII. PROPOS. XII.

Summa reliquorum in proportionalibus continuis proportionis superpartientis, & superparticularis excluso maximo diuisa per denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum dat quotientem, qui vnitus cum numero radicali ipsum maximum proportionalem numerum facit.

*SIt proportio data superparticularis 50. 60. 72. cuius denominator proportionis, quam habet differentia 10. ad radicalem terminum 50. sit $\frac{1}{5}$. Dico, quòd summa reliquorum dempto maximo, quæ est 110. diuisa per $\frac{1}{5}$ dat quotientem 22. qui vnitus cum numero radicali 50. facit maiorem terminum 72.

Prob. ex 8. prop. h. ita est differẽtis ad differentiã 10. ad 12. vt terminus 50. ad terminum 60. Ideoq; ex Coroll. 2. prop. 19. lib. 5. ita erit 10. ad 10 & 12. simul, idest summam 22. differentiarum, quemadmodum 50. ad 110. summam terminorum. Verum si diuidatur summa 110. per denominatorem 5. & per eundem 5. terminus 50. erunt adhuc ex prop. 19. lib. 7. quotiens numeri 50. ad quotientẽ numeri 110. vt 50. ipse terminus ad summam 110.

Cum

Cum ergo differentia ad summam differentiarũ, & quotiens radicalis termini ad quotientem summæ terminorum obtineat eandem proportionem, quã termini radicalis ad summam terminorum, erit etiam eadem proportio primæ ipsius differentiæ ad summam differentiarum, quæ quotientis radicalis termini ad quotientem summæ terminorum ex 16. lib. 5. Elem. & ideo permutanda differentia prima ad quotientem radicalis termini habebit eam proportionem, quam summæ differentiarum ad quotientem summæ terminorum. Sed Quotiens radicalis termini est æqualis differentiæ. Siquidem diuisor est $\frac{3}{5}$ denominatur proportionis, quam differentia habet ad radicalem terminum ex propos. 10 huius. Ergo etiam summa differentiarum, & quotiens summæ terminorum erunt æquales.

Sed omnes differentiæ additæ primo termino constituunt vltimum terminum ex prop. 9. Ergo etiam Quotiens summæ terminorum diuisoris existente denominatore proportionis, quam habet differentia ad primum terminum, additus primo termino dabit vltimum terminum, vnde quotiens 25. additus termino 50. constituit vltimum terminum 75. Sic dicas de proportione superpartiente; Datis enim tribus terminis 25. 40 64. summa minorum 65. diuisa per denominatorem $\frac{3}{5}$, quæ fit multiplicando per 3. diuidendo per 5. dabit numerum 39. qui vnitus numero radicali 5. procreabit ipsum maiorem 64. Et idem argumentum valebit, etiam si plures sint termini, vt patet.

THEOR. XIII. PROP. XIII.

Secundus proportionalis detracto numero radicali, & primo dicit eandem proportionem ad numerum radicalem; quam numerus extremus detracto eodem primo ad summam reliquorum.

Sit data proportio continua 3. 12. 48. detrahatur que numerus radicalis, & minimus 3. à numero 12. & remaneat 9. sicut, & ab extremo 48. & remaneat 45. summa verò reliquorum est 15. Dico, quòd ita 9. est ad 3. vt refertur proportione 45 ad 15. summam reliquorum. Denominator autem proportionis est 4.

* Probatur ex propos. 11. huius. Nam maximus numerus continet summam reliquorum tot vicibus, quot denominator dempta vna habet vnitates, & insuper numerum primum, & radicalem. Ergo hoc numero primo, radicaliqua excluso continebit tot vicibus, quot reposcunt vnitates denominatoris vna exclusa; sed & secundus terminus minutus primo continet primũ tot vicibus, quot vnitates sunt in denominatore vna vnitate minuto ex propos. 10. Coroll. Ergo tot vicibus continetur primus in secundo minutus primo V. g. 3. in 9. quot summa reliquorum in extremo eodem primo minuto, vt 15. in 45. quare eamdem proportionem dicens ex 1. defin. septimi, & ita erit 9. ad 3. vt 45. ad 15. & ita dicas de reliquis etiam si plures termini ponantur.

Idem quoque in proportione superpartiente, & superparticulari valet. Nam, si dentur 8. 12. 18. 27. cuius denominator proportionis differentiæ primæ ad terminum radicalem est $\frac{1}{2}$. Erit ablato 8. ad 12. vt sint 4. & à 27. vt sint 19. eadem proportio 4. secundi termini dempto primo 8. ad primum terminum 8. quæ est extremi dempto primo 19. ad summam reliquorum 38.

Prob. ex 12. h. Nã quotiens summæ differentiarum cum primo termino constituit vltimum, ergo ablato primo remanebit quotiens summæ differentiarum, cuius diuisor est denominator prædictus $\frac{1}{2}$. Cum ergo idem diuisor diuidat primum terminum, & constituat primam differentiam, & summã terminorum, & constituat summã differẽtiarũ, erit secũdus terminus ablato primo, idest differẽtia prima ad primũ terminum, vt summa differentiarum, idest ex propos. 9. vltimus terminus ablato primo, ad summam terminorum. Quòd autem $\frac{1}{2}$ diuidat primum terminum, & generet primam differentiam, patet ex 10. huius; quia diuiso primo termino per differentiam dat denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum. Ergo diuiso ipso termino primo per quotientẽ, & denominatorẽ differentiam dabit ex princip. 8. Tract. 8. Elem.

THEOR. XIV. PROP. XIV.

* *Denominatores proportionum in quolibet proportionali crescunt ab vnitate.*

Sit series proportionalium 4. 12. 36. 108. & denominatur proportionis 3. Dico, quod 3. in singulis proportionalibus reperitur crescendo ab vnitate, nempe, quod semel est in 12. nouies est in 36. nonagies in 108.

* Probatur. Nam numerus radicalis 4. ter acceptus facit 12. ergo tot partes erunt in 12. quot vnitates erunt in 3. ergo 12. in suis partibus numerabit 3. semel, at 36. numerat etiam ter 12. ergo 12. ter ipsum 3. numerat, sic 108. ter capit 36. at 36. ter capit 12. ergo ter nouies capit 3. Sic verò procedere est procedere continua proportione ab vnitate ex propos. 2. huius.

EXPENSIO II.

De summandis proportionalibus Geometricis continuis.

Summa proportionalium continuè fit etiam, si intermedij ignorentur, V. g. datis 24 & 64. summa omnium, qui inter 24. & 64. intercipiuntur sine intermedijs haberi potest; ideoque hic oportet huius artis specimen exhibere.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Datis terminis continuè proportionalibus primo, secundo, & vltimo omnium summam inuenire.

3. 12. —— 768.

* Sint dati termini continuè proportionales 3. 12. 768. inter quos intercipiuntur 48. & 192. continuè proportionales, qui tamen ignoti præsupponuntur, cum eorum cognitio in acquirenda eorum summa non sit necessaria. Detrahatur terminus

minus primus 3. à secundo 12. & residuum sit 9. sic idem 3. terminus primus detrahatur à 768. & residuum sit 765. Hoc verò residuum multiplicandum est per primum terminum adhibita regula proportionum, & diuidendum productum 2295 per residuum secundi 9. Nam quotiens erit 255. summa omnium excepto maximo. Si ergo hanc summam maximo addas, erit omnium summa cognita 1023.

* Probatur. Quia ex propos. 13. huius, est eadem proportio primi termini ad secundum, cui ipse primus demptus fuerit, quæ est summæ omnium vsque ad vltimum exclusiuè ad ipsum vltimum, & maximum, cui similiter primus demptus sit; quare plana, ex primo, & vltimo ex istis quatuor proportionalibus erunt æqualia plano ex medijs ex propos. 6. huius. Quare planum factum ex 3. minimo, & 765. maximo erit æquale plano ex 9. secundo, & summa omnium excepto vltimo; vnde si diuidatur per 9. latus cognitum, planum illud latus alterum 255. exeret, quod est omnium proportionalium summa excepto vltimo.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Dato termino maximo, & minimo, & denominatore proportionis summam omnium terminorum continuè proportionalium inuenire.

3. 9. 27. 81.

*SInt dati termini continuè proportionales 3. 9. 27. 81. & denominator 3. ex vltimo primus demendus nimirum 3. & erunt 78. qui diuidendus est per denominatorem proportionis, cui vnitas ablata fuerit, nempe 2. & erunt 39. qui coniuncti cum 81. efficient omnium summam, & hoc in proportione multiplici; & multiplici superparticulari, vel superpartiente.

Probatur ex prop 12. huius. Quia numerus maior continet minores omnes, quot sunt vnitates in denominatore vna dempta vnitate ab ipso denominatore. Ergo si diuidatur per illas vnitates minus vna prodibit summa omnium aliorum.

Sic dicas de non multiplici, nam datis.

8. 12. 18. 27.

Sublato primo ab vltimo remanent 19. qui per denominatorem proportionis 1. differentiæ ad primum terminum, qui est $\frac{1}{2}$ dabit 38. summam omnium, excepto primo.

* Prob. ex prop. 12. h. Nam summa omnium diuisa per denominatorem proportionis prædictum dat quotientem differentiarum, qui cum primo ipsum facit vltimum. Ergo extracto primo, & residuo per denominatorem eundem multiplicato dabit summam omnium; quia illud residuum erit quotiens ex proportionis denominatore diuidente relictus. Vnde per multiplicationem ab eodem denominatore factam in pristinam multitudinem restitutus summam omnium, dempto vltimo exhibebit, & coniunctus cum eo erit omnium summa.

EXPENSIO III.

De proportione Geometrica propaganda.

DVplici modo potest extendi in infinitum proportio Geometrica, vel diminuendo, vel augendo; idcoque de duplici hac extensione erit agendum.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Datis duobus terminis, & proportionis denominatore extendere proportionem, seu augendo, seu diminuendo in infinitum.

MVltiplicetur terminus datus maior datis duobus terminis 2 & 6. per denominatorem proportionis, quam habet minor ad maiorem, qui est 3. & producetur terminus maior tertius 18. & si per eundem denominatorem multiplicetur 18. fient 54. & sic in infinitum se augendo.

2. 6. 18. 54. 162. & cæt.

At si cupias eam extendere diminuendo diuide minorem terminum per denominatorem eundem, & habebis minorem terminum tertium $\frac{2}{3}$; & si iterum diuidas producentur $\frac{2}{9}$; & rursus enascent $\frac{2}{27}$.

$\frac{2}{12}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{3}$ 2. 6.

Vel si dati sint 54. & 162. quorũ denominator proportionis 3. si diuidas per 3. numerum 54. acquires tertium terminum 18 & cæt.

Probatur. Nam illi numeri sunt in proportione Geometrica; qui easdem partes habent, ex def. 1. l. 7. elem. Nempe ab eodem numero denominatas; cum ergo quilibet V. g. tertius, vel quartus terminus se augendo comprehendat tres partes minoris ob multiplicationem sicut datus terminus minorem datum comprehendebat, patet esse in eadem proportione; & idem dicas de diminutione. Nam terminus tertius ob diuisionem erit tertia pars secundi dati, sicut ipse secundus est tertia pars primi.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Proportionem extendere, vel in augmentum, vel in diminutionem nullo dato proportionis denominatore.

SI sit proportio extendenda in augmentum duc maiorem in se: Deinde diuide per minorem, & tertius terminus prodibit; quod si diminuendo sit procedendum, ducendus erit minor terminus in se, & diuidendus per maiorem. Sic datis 12. & 18. si ducatur 18. in se fiet 324. qui diuisus per 12, dabit tertium terminum maiorem 27. Sic si ducatur 12. terminus minor in se, erit 144. qui diuisus per 18. dabit minorem tertium terminum 8.

Probatur ex propos. 5. huius. Nam rectangulum, seu planum ab extremis confectum est æquale

le

le quadrato medij; Vnde medio ducto in se habebimus quadratum tale, quod erit æquale rectangulo extremorum; cùm verò vnum ex extremis habeamus, obtinemus latus huius rectanguli; quare, si diuidatur per hoc latus, aliud latus prodibit, nempe aliud extremum; sicut enim rectangula numerica fiunt ex multiplicatione laterum ex defin. 16. sept. Elem. ita habetur quilibet per diuisionem totius ab altero effectam.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

Aliquæ proportiones per solam additionem, vel subtractionem possunt extendi.

Probatur. Nam talis est proportio dupla vt 4. 8. 16. 32. subductus enim terminus minor à maiore dat proportionem decrescentem, at additus terminus minor ipsi minori dat proportionem crescentem.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Datâ successiuâ proportione subducendo alias proportiones successiuas reperire.

Data proportione aliqua, subducatur minor à maiore, & ordine eodem differentiæ notentur. Nã illæ in eadẽ proportione erũt V. g. dentur proportionales 27. 81. 243. 729. & 2187. crescentes in tripla proportione: Si demptur continuè minor à maiore erunt differentiæ 54. 162. 486. & 1458. similiter in tripla proportione. & si rursus horum proportionalium sumantur differentiæ, erunt eodem modo proportionales; vt 108. 324. 972.

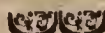
Probatur. Nam ex 23. propos. septimi. Ita dicunt proportionem numeri proportionales, vt eorum partes aliquotæ, quæ sunt in eadem proportione: Quando verò aufertur terminus minor à maiore aufertur pars aliquota, vtpote quod sit maioris pars aliqua, quam numerat denominator; vt 3. est pars aliquota numeri 9. & 9 numeri 27. Ergo reliquæ partes aliquotæ, quæ supersunt, dicent eandem proportionem. Probatur etiam ex propos. huius 8.

PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Data serie proportionali alias series diuidendo reperire.

Assume quemlibet numerum diuisorem V. g. 4. & datam seriem partire 27. 81. 243. 729. habebisque 6 $\frac{3}{4}$, 20 $\frac{1}{4}$, 60 $\frac{3}{4}$, 182 $\frac{1}{4}$, & rursus hos diuidas, habebis alios proportionales in eadem proportione in infinitum.

Probatur ex eadem propos. 18 l. 5. & 7. vel 8. huius. In eadem enim proportione sunt totum, & partes.



THEOR. II. PROPOS. XXII.

Si summa proportionis alicuius diuidatur successiuè per terminos proportionis. Quotientes in eadem proportione inuerso ordine inuenientur.

Sit summa 155. terminorum 5. continuè proportionalium 5. 10. 20. 40. 80. & per ipsos terminos diuidatur; habebimus hos terminos continuè proportionales 31. 15 $\frac{1}{2}$, 7 $\frac{3}{4}$, 3 $\frac{7}{8}$, 1 $\frac{15}{16}$.

* Probatur ex propos. 19. septimi. Nam 155. est rectangulum, vel planum, cuius vnum latus est 5. & alterum latus 31. vel 10. & alterum latus 15 $\frac{1}{2}$, vel 20, & alterum latus 7 $\frac{3}{4}$, & cæt. Quare, cùm hæc latera faciant planum semper eundem erunt in eadem proportione 5. ad 10. vt 15 $\frac{1}{2}$ ad 31. quòd etiam ostenditur ex propos. 17. sexti, & ex dictis propos. 6.

COROLLARIVM I.

Hinc est, quod si horum proportionalium postremò repertorum summam diuiseris per eosdem proportionales, efficies rursus alios in eadem proportione. & si horum summam rursus per hos diuiseris, alios inuenies in infinitum.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque satisfaciemus exquirenti duos proportionales, quorum summa æqualis sit numero vnius in alterum procreato. Nam sumptis proportionalibus duobus, & collectis in summã, ea dabit diuisa per eosdem, duos quotientes proportionales, quorum summa æqualis erit numero ex multiplicatione vnius in alterum procreato.

Sic sũptis numeris 4. & 8. quorum summa 12. diuisa per 4. dabit 3. diuisa per 8. dabit 1 $\frac{1}{2}$, quorum summa 4 $\frac{1}{2}$ est æqualis numero per mutuam multiplicationem effecto: Nam 1 $\frac{1}{2}$, & 3. inuicem multiplicati dant 4 $\frac{1}{2}$.

* Probatur. Cum enim 3 multiplicans 4. restituat 12. & multiplicans 1 $\frac{1}{2}$ faciat 4 $\frac{1}{2}$ erit eadem proportio 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. quam 4 $\frac{1}{2}$ ad 12.

Rursus, cum sit quotientium 1 $\frac{1}{2}$ ad 3. vt 4. ad 8. ex præced. vel ex 17. l. 9. erit cõponendo 1 $\frac{1}{2}$ ad 4 $\frac{1}{2}$, summam, vt 4. ad 12. quare permutando erit quoque 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. vt 4 $\frac{1}{2}$ summa ad 12. Cum ergo 4 $\frac{1}{2}$ quatenus summa, & 4 $\frac{1}{2}$, vt genitus ex mutua proportionalium multiplicatione 3. & 1 $\frac{1}{2}$ habeat eandem proportionẽ, quam 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. ad eundem numerum 12. erit idem numerus genitus ex proportionalibus, & collectus, vel summatus ab ipsis ex propos. 9. Elem. lib. 5.

EXPENSIO IV.

De proportionalibus in Geometrica proportione interserendis.

Interpositio proportionalium dificilis est maximè si in prolixam seriem proportio debeat extendi

eendi, cum non inter quoſcunque numeros numeri proportionales cadant, ſed ſolum planos, vel ſolidos ſimiles. Vnde cum procedendo tandē plani diſſimiles euadant, neceſſe eſt tandem incidere in laborioſas fractiones, vt patebit experimentum capienti.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Inter duos numeros conſtituere medium Geometricè proportionalem.

Sint dati duo numeri 3. & 75. inter quos reperiendus ſit medius proportionalis. Multiplicentur ſimul, & ſit numerus multiplicationis 225. cuius radix quadrata 15. eſt medium proportionale, & 3. ad 15. erit in eadem proportione, ac 15. ad 75. Et ſi rurſus velimus ſcire 15. & 75. quem medium proportionalem habeant, multiplicabimus eodem modo numeros exhibitos, & ſubducemus radicem quadratam, quæ erit $33\frac{1}{2}$ proxima, ſed non vera, cum numerus ex datorum numerorum multiplicatione exurens non ſit quadratus: Ita ergo erit 15. ad $33\frac{1}{2}$, vt $33\frac{1}{2}$ ad 75.

Probatur ex propoſ. 5. huius. Quia enim quadratum medij eſt æquale plano extremorum; hinc eſt quòd ex mutua multiplicatione duorum numerorum, quos extremos volumus eſſe proueniat numerus æqualis quadrato medij: Vnde ex eo deducta radix quadrata erit latus numericum illius quadrati, & ideo dicet eandem proportionem hoc latus ſuis extremis, cùm ſit latus quadrati æqualis plano extremorum.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Inter duos datos numeros plures proportionales numeros interſerere.

A Datis duobus numeris 81. & 1296. extrahemus radices quadratas 9. & 36. & iterum ex iſtis radices quadratas 3. & 6. ſi fieri poſſit. Deinde multiplicandæ radices ipſæ, vt intermedij proportionales prodeant; ſic multiplicata radix quadrata 3. cum 9. dabit 27. & 6. cum 36. dabit 216. & habebimus duas ſeries numerorum ab vnitate continuè excreſcentium ex propoſ. 2. huius, deinde ſubſcribendæ ſingulis datis ſuæ radices, & proportionales ordinatim decreſcentes, & hinc multiplicandæ inuerſo ordine, maxima cum minima, maior cum minore, mediocris cum mediocri, & cæt. Nam numeri producti dabunt medios proportionales; ita 6. multiplicatus cum 27. dabit ſecundum proportionalem 162. & 3. cum 216. tertium proportionalem 648. & 9. cum 36. numerum 324.

Probatur hæc operatio ex propoſ. 9. lib. 8. elem. Nam tot cadunt medij proportionales inter duos datos numeros, quot inter vtrumlibet ipſorum, & vnitatem; Cùm ergo inter vnitatem, & 81. inuenti ſint cadere 27. 9. & 3. & inter 1296. cadere 216. 36. 6. Ergo, & inter 81. & 1296. tot medij proportionales cadent nempe tres. Patet autem ex illa propoſitione; quod ij ipſi ſunt qui ex mutua, & alterna multiplicatione, maximi cum minimo, & cæt. fiunt.

81.	162.	324	648.	1296.
27				216
9				36
3				6
1				1

Nam, vt ibi probatur, habent intermedij eam proportionem, quam 3. ad 6. Cum ergo 3. multiplicando 27. produxerit 81. ergo 6. multiplicando eundem 27. producet ſecundum proportionalem, qui ſe habeat ad primum, vt 3. ad 6. ex propoſ. 17. ſeptimi, cum idem numerus 27. multiplicet 3. & 6. Verum non omnis numerus talis eſt naturæ, vt æquali proportionalium numero diſtet ab vnitate, ac alter datus, nec talis, vt radix quadrata ab eo extrahi poſſit. Vnde vt plurimum laborioſa erit hæc operatio, & non præciſa; niſi forte numeri, inter quos medij proportionales deſiderantur ab vnitate continua proportione excreſcant.

ROBL. III. PROPOS. XXV.

Numerum datum in partes iuxta datam proportionem proportionales diſtribuere.

Sit datus numerus 992. qui diuidendus ſit in partes quinque habentes proportionem duplam diſponantur numeri quinque eiuſdem proportionis 2. 4. 8. 16. 32. quorum ſumma ſit 62. per hanc ſummam diuidatur numerus 992. & habebimus numerum 16. qui multiplicatus per terminos prædictos dabit partes quæſitas 32. 64. 128. 256. 512. quæ ſimul conflatæ reſtituent numerum 992.

* Probatur autem. Quia ſumma proportionalium continet omnes proportionales, ſimul: Quotiens verò à diuiſione numeri dati 992. proueniens, qui eſt 16 ſecat ipſum in tot partes, quot vnitates ſunt in ſumma proportionalium, quæ eſt 62. quia 16. multiplicatus per 62. facit 992. Ergo, ſi ſumma hęc 62. habet tot vnitates, quot vnitates reperiuntur in omnibus proportionalibus, etiam numerus datus 992. capiet tot vicibus 16. quot vnitates ſunt in omnibus proportionalibus. Et quia ita eſt 1. ad 62. vt 16. ad 992. etiam compoſitus 1. & 1. ideſt multiplicatus per 2. ad 62. vt eodem modo compoſitus 16. & 16. ad 992. ex prop. 24. lib. 7. elem. & ſic de alijs. Cùm ergo ſit quilibet proportionalis 2. 4. & cæt. ad 62. vt 32. & 64. & cæt. ad 992. Etiam ſimul omnes ex prop. 24. lib. 7. elem. proportionales 2. 4. & cæt. ad 62. erunt vt omnes ſimul 32. 64. & cæter. ad 992. ſed illi ſunt æquales ex Theſi numero 62. vtpote ſuæ ſummæ, ergo etiam, & iſti 32. 64. & cæt erunt æquales numero 992.

Quod verò 32 64. & cæt. ſint proportionales, vt 2. 4. & cæt. Prob. quia per eundem numerum 16. multiplicati fuere, vnde ex 17. lib. 7. ita erunt multiplicati 2. ad 4. vt geniti 32. ad 64.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Numerum extremum intermiſſis multis medijs in proportione Geometrica reperire.

Sint dati aliqui termini 3. 9. 27. 81. poſſum reperire alium 2187. qui diſtet ab 81. duobus interme-

intermedija 243. & 729. vt ipse vltimus 81. distat 43. Id verò executioni mandatur multiplicando 81. in se, & diuidendo per primum 3. & dispositi in seriem erunt.

3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Probatur. Quia, ita ex propos. 4. huius, 3. est ad 81. vt 81. est in proportione ad alium sequentē duobus intermissis pro vt 3. distat ab 81. Ergo ex propos. 5. huius quadratum ex medio 81. est æquale plano ex extremis. Quare diuisom per latus 3. dabit alterum latus 2187. quod distat ab 81. duobus intermissis, & à 3. quinque intermissis. Vnde poteris reperire ab hoc distantē quinque terminis multiplicando 2187. in se, & diuidendo per 3. &c.

TRACTATVS XIV.

PARS SECVNDA.

De proportione Arithmetica.



Ognatio arcta intercedit, vt videbimus, inter Arithmeticam, & Geometricam proportionem, vt altera alteri ritè deseruiat, & operationibus alterius sedulè ministret; Ideo post tractationem proportionalitatis Geometricæ statim Arithmeticæ discursus subnectendus est.

EXPENSIO I.

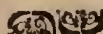
De proprietatitibus Arithmeticæ proportionis.

SImilea sunt effectiones harum duarum proportionum Arithmeticæ, & Geometricæ; nisi quòd huius multiplicatione, & diuisione, vt plurimùm innotescunt; illius ex subtractione, & additione. Proportio verò Arithmetica consistit in æqualitate excessuum, vt vna excedat aliam eodem excessu, quo hæc aliam excedit. V. g. numerus 8. excedit 6 eodem excessu, nempe dualitate, sicut 6. excedit 4. quia ergo isti tres numeri 4. 6. & 8. æquali excessu dualitatis se superant, dicantur Arithmeticè proportionales.

Præass. 1. Sed in primis notandum, quod si sint numeri quotcumque Arithmetico interuallo, vel etiam quocumque incerto crescentes, vel decrescentes, quilibet maior est æqualis minori, & omnibus interuallis numericis, quibus distant V. g.

Sint 7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. & cæt.

Dico, quod 37. est æqualis numero 7. si tamen ei addatur interuallum 5. toties quot intercapedines sunt inter 7. & 32. quæ stellulis notatæ sunt, & sunt sex. Si ergo multiplicetur 5. per 6. & fiunt 30. & addatur numero 7. erunt 37. quod patet; quia tot vicibus à numero 7. excreuit 37. per additionem numeri interuallaris 5.



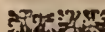
THEOR. I. PROPOS. I.

Si sint quatuor quantitates continua proportione Arithmetica excrescentes, summa mediorum est æqualis summæ extremorum.

DEntur quatuor numeri, qui se superent æqualiter, nimirum ternario 8. 11. 14. 17. Dico quod additi 8. & 17. faciunt eundem numerum, quem additi simul faciunt 11. & 14. nimirum 25.

Probatur. Numerus 8. excreuit vsque ad numerum 14. per continuam additionem æqualis partis idest ternarij, qui semel additus est numero 8. vt fiant 11. gemina vice numero 8. iterum, vt fiant 14. iuxta interuallorū multitudinem, quibus ab 8. distat 11. & 14. vt prænotaui in præass. ergo ternarius additus ter ipsi 8. semel in 11. & iterum bis in 14. faciunt medios.

Sed etiam ter idem ternarius additus est primo 8. vt fieret extremum 17. semel quando excreuit ab 8. in 11. semel cum excreuit ab 11. in 14., & semel cum excreuit à 14. in 17. iuxta tria interualla, quibus distat à primo 8. Cum ergo ter ternarius additus primo numero 8. duplato faciat duos medios, & ter additus eidem 8. faciat extremum, patet, quod duo medij simul erunt æquales primo, & extremo; cùm tam medij, quàm extremos cum primo, componantur ex primo bis accepto, & ex tribus ternarijs.



THEOR.

THEOR. II. PROP. II.

Si sint tres quantitates continua proportione Arithmetica se respicientes duplum medij est æquale summæ extremorum.

SInt tres quantitates 7. 11. 15. quæ proportione Arithmetica, nempe æquali crescant augmento, & medium 11. dupletur. Dico, *quod hoc duplum erit æquale summæ extremorum.*

* Probatur. Nam diximus propos. anteced. quòd terminus tertius componitur ex duplici additione æqualis partis, quæ hic est quaternarius bis additus numero primo 7. Numerus verò secundus Arithmeticus ex numero eodem 7. & simplici additione æqualis partis, nimirum quaternarij; Ergo si bis accipiatur hoc duplum constans gemino quaternario, & gemino numero radicali 7. erit æquale extremo, primo ei addito, qui etiam semel continet primum cum gemina parte equali, nempe quaternario; & sic faciet summam, quæ bis continet primum, & bis partem equalem, quâ proportio augetur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si sit quotcunque numeri Arithmetico interuallo crescentes, seu decrescentes, primus multiplicatus per numerum interuallorum minutum vnitate iunctus cum vltimo erit æqualis secundo multiplicato per interuallorum numerum totum.

*SIt 2,*6,*10,*14,*18,*22,*26,*30,*34 &c. numerus interuallorum sit 8. quę stellulis notantur. Dico, quòd si 2. multiplicetur per numerum interuallorum vna vnitate abiectâ, nempe per 7. & iungatur extremo 34. quòd est æqualis secundo 6. multiplicato per interuallorum numerum 8.

* Progress. 1. Si primus terminus 2. multiplicetur per 8. numerum interuallorum, & fiat 16. & si per eundem 8. multiplicetur numerus differentiæ 4. & fiant 32. isti duo numeri collecti erunt æquales numero illi, qui ex multiplicatione secundi termini V. g. 6. cum numero interuallorum eodem 8. nascitur, qui erit 48. Patet, quia 6. componitur ex 4 interualli numero, & 2. primo radicali; vnde, siuè seorsim, & deinde iuncti, siue simul multiplicati eandem summam efficient 48.

Progr. 2. Differentię numero 4. multiplicato per 8. addito 2. radicali est ęqualis numerus vltimus 34 ex primo progress. Ergo abiecto numero radicali à multiplicato numero differentiali, vt restet 32. remanet 34. numerus vltimus illo 32. maior in ipso numero radicali: Quare, & si adderetur vtrisq; numerus ex interuallorũ 8. & numeri radicalis 2. multiplicatione cõsurgẽs, qui est 16. adhuc esset maior, ita auctus vltimus terminus eodẽ æqualiter aucto numero differentiali 32. In ipso 2. radicali. Quamobrem, vt sit æqualis demendus est à 16. numerus ipse radicalis, & ita erit 14. nempe numerus 2. radicalis multiplicatus non per 8. sed per numerum vna vnitate minorem, nempe per 7. Quamobrem numerus radicalis multiplicatus per numerum interuallorum minus vna vnitate, V. g. per 7. vt sit 14 iunctus vltimo termino 34. erit ęqualis numero 16. ex multiplicatione interuallorum 8. & numeri radicalis 2. & numero differentiarũ 32. s. 48. Ergo etiã erit æqualis numero consurgenti ex multiplicatione secundi termini 6. cum numero interuallorum; quem ex primo progress. probauimus ęqualẽ numero differentiali 32. & 16. radicali per interuallorum numerũ multiplicato, & in vnam summam redacto, idest eidem 48.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Numeri proportione Arithmetica procedentes, dempto radicali, ita quilibet ad sequentem est in proportione, vt numerus interualli vnius ad numerum interualli alterius.

SInt numeri 2,*6,*10,*14,*18,*22,*26,*30,*34. 38. 42. & numerus intereeptus inter quemlibet eorum sit 4. Dico, *quòd si à numeris immediatis 34 & 38.* numerus radicalis expungatur, vt fiant 32. & 36. interuallorum numerus 8. qui mediat inter primum 2. & 34. dicit *eam proportionem Geometricam ad* 32. quam 9. numerus interuallorum medians inter primum 2. & sequentem 38. dicit ad 38. numero radicali deducto, idest 36.

* Prob. Nam 4 octies continetur in 32. ex primo notabili huius, toties nempe quot sunt interualla, sicut eodẽ modo 4. nouies continetur in 36. ergo numerus octonarius interuallorum quater continetur in 32. sicut numerus nouenarius interuallorum quater continetur in 36. Quare cum 8. & 9. per eundem 4. multiplicatus sit: ita erit 8. ad 9. vt 32. ad 36. ex propos. 17. lib. 7. Elem.

COROLLARIVM

HInc est, quod planum ex medijs 8. & 36. sit æquale plano extremorum 9. & 32.

THEOR. V. PROPOS. V.

Numeri proportione Arithmetica procedentes eandem dicunt proportionem Geometricam quilibet ad suum numerum interuallorum, si tamen ab eis numerus radicalis dematur.

PRobatur. Nam dato eadem numerorum serie, quæ in præcedenti propositione; ostensum est; ita esse numerus interualli 8. ad numerum 9. interualli alterius, vt 32. Arithmeticus ad sequẽtem numerum Arithmeticum 36. à quibus tamen Arithmeticis demptus fuit numerus radicalis 2. Quare, & *vicissim* erit 32. ad 8. vt 36. ad 9. numerum interuallorum.



THEOR.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

* *Si aliquis terminus Arithmeticus maior multiplicetur per numerum interuallorum carentem vna vnitate, numerus productus addito ei termino radicali est æqualis numero, qui fit ex eodem numero interuallorum toto, & termino immediato minori.*

*Sit eadem dispositio terminorum, quæ pridie 2. 6. 10. 14. 18. 22. 26. 30. 34. 38. 42. & numerus interuallorum inter 2. & 38. sit 9. Dico, quòd si multiplicetur 38. per 9. minutum vna vnitate videlicet per 8. procreabitur terminus 304. cui si addatur terminus radicalis 2. efficietur æqualis numero 306. qui fit ex multiplicatione totius numeri interuallorum 9. cum minori 34. termino Arithmetico immediatè sequente.

Probatur, si dematur à duobus terminis Arithmeticis 34. & 38. terminus radicalis 2. dicent proportionem ad inuicem, vt numerus interuallorū, ex præced. propositione, & ita erit 8. ad 32. vt 9. ad 36. Quare, & plana eorum erunt æqualia, nempe productū ex 32. & 9. ac productum ex 8. & 36. ex Coroll. præced. quæ sunt 288. Si verò singulis addatur terminus radicalis, & fiat 34. & 38. & deinde multiplicentur per 9. numerus 34. vt fiat 306. & per 8. numerus 38. & fiat 304. addet 9. ei plano ex 32. tot terminos radicales, quot addit 8. & insuper vnum terminum radicalem, & faciet 306. Quare maior terminus 38. multiplicatus per numerum interuallorum minus vno, vt ast 8. restituet numerum addito termino radicali 2. æqualem ei numero, qui fit ex multiplicatione termini immediate minoris 34. & toto numero interuallorum 9. vt est 306.

COROLLARIVM

Elicitur hinc, quòd idem euenit etiam, si duo numeri dati Arithmetici non sint immediati; sed secundum distantiam, ita interualla sumantur. V. g. si elligeres 30. & 38. interualla essent 7. Inter 30. & primum radicalem, & Inter 38. interualla essent 9. cum ergo ita se habeat 7. ad 28. vt 9. ad 36 dempto videlicet ab vtroque numero radicali; sequitur, quòd planum ex medijs 9. & 28. fit æquale plano ex extremis, nimirum 7. & 36. addito verò vtriq; numero radicali per interuallorum numerum multiplicato productus continebit insuper, qui oritur à 9. & 28. nouem numeros radicales; qui verò à 7. & 36. septem insuper numerus radicales; Vnde erit ei æqualis, si bis addatur numerus radicalis.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Inter quoscumque numeros Arithmeticè dispositos eadem est ratio Geometrica interualli ad interuallum, quæ est differentiarum ad differentias.

Sint numeri 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. Interualla inter 3. & 17. erunt 7. differentia subducto 3. à 17. prodibit 14. sic inter quoscumque alios inter 7. & 13. differentia est 6. interualla 3. Dico itaque, quòd ita 7. est ad 3. vt 14. ad 6. nempe numeri interuallorum, & differentiarum numeri in eadem proportione sunt.

* Probatur. Nam multiplicato numero differentiali ex præass. t per interualla, dat differentias omnes, quibus distat vnus terminus ab alio. Sic 2. multiplicatus per 7. dat differentiarum numerum 14. & idem 2. multiplicatus per 3. dat differentiarum numerum 6. nempe differentias omnes, quibus 9. distat à 3. vel 17. distat à 3. Ergo ex 17. lib. 7. Elem. cum numerus interuallorum per eundem numerum 2. multiplicatus producat numerum differentiarum, habebunt eandem rationem geniti, & multiplicati. Vnde ita erit 3. ad 7. numeri interuallares multiplicati, vt 6. ad 14. differentiales geniti.

COROLLARIVM

Hinc est, quod *permutando* fit quoque numerus interuallaris ad differentias aggregatas nempe 3. ad 6. vt 7. ad 14.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Numeri Arithmeticè procedentes, si æqualiter remoti ab extremis addantur simul, illi omnes sunt æquales.

Sit series 7. 11. 15. 19. 23. 27. Dico 7. & 27. esse æquales additi simul numeris 11. & 23. sicut etiam 15. & 19 additi simul, qui sunt æqualiter remoti ab extremis.

* Probetur. Nam tantùm 7. & 27. faciunt 34. ad quem numerum ad hoc, vt perueniat numerus 23. deficit ei 4. nempe numerus interualli, quo termini distant, & primus terminus; at numerus 11. continet ambos, ergo additus 23. facit 34. sic 19. vt perueniat ad 34. deficit ei numerus interualli gemini 4. & 4. & primus 7. numerus verò 15. vtpote duobus interuallis à primo distans 4. & 4. continet, & 7. Quare additus numero 15. conficiet 34. & sic de alijs.

EXPENSIO II.

De proportionalibus Arithmeticis continuis in vnam summam colligendis.

Faciliùs trabuntur in opus Arithmetici proportionales, quàm Geometrici; cùm sola additione, & subtractione tractentur.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Arithmeticos proportione continua procedentes; tum pares, tum impares in vnam summam colligere dato vltimo, & primo, & terminorum numero.

Sint dati quicumque termini impares proportione Arithmetice procedentes V. g. septem 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. Oporteatque omnium sum-

summã noscere. Vltimus terminus 22. iungatur cũ primo 4. & fit 28. diuidatur deinde in geminas partes, quarũ vna fit 14. numerus, qui per numerũ terminorum multiplicetur nempe per 7. dabit summam omnium 91.

Si vero numerus terminorum par fuerit 7. 11. 15. 19. 23. 27. Addatur similiter vltimus terminus primo, vt fiant 34. & multiplicetur per numerum dimidium terminorum 3. vt fiant 102. & erit omnium summa.

* Probatur. Nam additi numeri æquè ab extremis remoti sunt omnes æquales ex propos. 8. quare Arithmet. numerus iunctus primus extremo, & multiplicatus per numerũ terminorum æquabit numerum planum omnium numerorũ simul vnitarum, qui æqualiter remoti sint ab extremis, & facti sint omnes æquales V. g. 3. 5. 7. 9. 11. 13. facti sint omnes æquales, nempe minimus 3. per adiectionem maximi 13. & maximus 13. per adiectionem minoris 3. Item sequens minor 5. per adiectionẽ penultimi 9. Sicut, & 9. penultimus per adiectionem minoris 5. erunt sex numeri æquales 16. qui multiplicati per 6. dabunt planum numerum 96. qui est summa omnium sex cõstantium vnitatibus 16. quia

F	E	A	B	C	D
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	5	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	7	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	9	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	11	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	13
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
13	11	9	7	5	3

ergo numerorum ita additorũ summa est numerus 16. per numerum terminorũ multiplicatus, & addita est medietas; dum singuli suis correspondentibus additi sunt, tot enim sunt additi, quot erant. Ergo summa omnium erit dimidis huius plani numeri, nempe 48. sed si dimidium terminorum multiplicetur cum vltimo 16. generat dimidium plani numeri, idest 48. Ergo vltimus terminus V. g. 13. additus primo 3. vt fiat 16. multiplicatus cum dimidio terminorum, vt fiat 48. erit omnium summa. Quod autem dimidium terminorum, cum vltimo, addito primo multiplicatũ, producat dimidium plani ex toto numero terminorum, & eadem summa vltimi, & primi geniti, patet ex 2. prop. lib. 9. quia duo plani tales æquant planum totius.

Nec interest, si dimidium terminorum multiplicetur cum toto extremo, seu dimidium extremum multiplicetur cum omnibus terminis, nam semper conficiet dimidium planum, ex 2. propos. lib. 9. Elem. ita seu 3. multiplicetur cum 4. seu 2. multiplicetur cum 6. dimidium planum 12. constituent. Hoc autem dimidium planum erit summa omnium terminorum Arithmeticorum.

COROLLARIVM

IN progressionibus naturalibus ab 1. incipientibus quadratum maximi dempta radice, & dimidiatũ est summa omniũ ipsa dempto. Sic si sint 1. 2. 3. 4. 5. quadratũ 25. numeri 5. dempta radice 5. vt fiant 20. dimidiatum nempe 10. est summa omnium quatuor. Quia addita vnitate numero 4. fit 5. qui multiplicatus per dimidium terminorum dabit summam omnium, idem verò est multiplicare per dimidium, & per totum si genitum postea diuidas, & idem est multiplicare per 4. & per 5. ipsum 5. si à genito auferas ipsum 5. vt fiant 20.

EXPENSIO III.

De proportione Arithmetica propaganda.

FAcilis est propagatio huius proportionis, vnde breuiter eam explicabimus.

PROBL. I. PROPOS. X.

Data differentia proportionem Arithmeticam extendere.

HOc facilliter fit addendo illam successiuè singulis terminis, sic si 4. addatur 5. differentia fiant 9. secundus terminus, & si eidem 9. addantur rursus 5. fient 14. eruntque 4. 9. 14. tres termini Arithmetici.

Ratio quoque euidens; quia proportio Arithmetica oritur ab additione eiusdem partis.

PROBL. II. PROP. XI.

Datis duobus terminis Arithmeticis tertium inuenire.

A Maiore duplicato detrahe minorem, eritq; residuum tertius terminus maior, vel è contrà à minore duplicato detrahe maiorem, & minor terminus exeret; ita datis duobus terminis 8. 15. si duplices maiorem, erunt 30. à quo detractus minor residuum exhibebit terminum maiorem 22. & è contra, si duplices 8. & detrahas 15. remanebit 1. terminus minor.

Probatur ex propos. 2. huius. Quia medius terminus duplicatus est æqualis summæ extremorum; vnde, si ab eo alterum ex extremis deducatur, alterum prodire necesse est.

PROBL. III. PROPOS. XII.

Datis numero terminorum, maiori seu minori extremo, & differentia reperiemus alterum extremum.

SInt dati 10. Termini Arithmetici, quorum primus sit 7. differentia 2. Dico, quòd reperiemus aliud extremum maximum, si ducamus differentiam 2. in terminorum numerum proximè minorem V. g. in 9. vt fiant 18. & huic genito primum terminum adijciamus, vt fiat 25. nam hic numerus 25. erit terminus maior.

Probatur. Differentiæ sunt additæ, primo termino, tot, quot sunt interualla. Nã interualla tot sunt, quot termini vno dempto. Ergo ex primo præass. vltimus terminus factus est, cum vltimus sit æqualis primo, & differentiæ per interualla multiplicatæ.

Aduerte, quòd si progressio incipiat à zifra, quod ipsa, vt numerus est auferenda sicut, & in sequenti Probl.

PROBL. IV. PROPOS. XIII.

Dato primo, & secundo termino, & numero interuallorum reperire vltimum, quem elegeris.

MVltiplicetur secundus per numerum interuallorum, & à genito dematur primus per interuallorum numerum minus vno multiplicatus.

Probatur. Quia ex propos. 3. isti geniti sunt æquales; nempe primus per interuallorum numerum minutum vnitate, cum vltimo, & secundus per numerum interuallorum multiplicatus. Quare si à genito ex secundo, & numero interuallorum detrahatur ille genitus; residuum erit vltimus terminus; sic ibi 6. secundus multiplicatus per 8. interuallorum numerum dat 48. à quo demptus 14. nimirum 2. multiplicatus per 7. interuallorum numerum vnitate minorem dat 34. vltimum terminum.

PROBL. V. PROPOS. XIV.

Dato vltimo, & penultimo termino, & numero interuallorum reperire primum.

MVltiplicetur penultimus per numerum interuallorum, & ex ipso genito deducatur vltimus multiplicatus per eundem interuallorum numerum, sed minutum vna vnitate, & residuum erit primus terminus.

Probatur ex propos. 6. huius. Nam isti duo sunt æquales, vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno iunctus primo, & penultimus per interuallorũ numerũ multiplicatus. Vnde si ex hoc genito deducatur ille genitus prodibit primus: Sic ibidẽ penultimus 34. per interuallorũ numerũ 9. ductus dat 306 à quo dẽptus 304. ex 8. interuallorũ numero vnitate minori, & 38. vltimo proueniens dat 2. primum terminum.

Aduerte in his omnibus, quod si progressio Arithmetica incipiat à 0. vt 0. 4. 8. 12. 16. 20. 24. tunc ex hac operatione proueniet 0. ostendens primũ terminũ sifrã esse, vt 6. numerus interuallorum dat 120. multiplicatus per penultimũ 20. sed 24. vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno, nimirum per 5. dat 120. at 120. iste deductus ab illo relinquit 0.

PROBL. VI. PROPOS. XV.

Datis duobus terminis extremis, & numero interuallorum reperire differentiam.

MInorem à maiori subducito, & residuum diuide per numerum interuallorum.

Probatur, quia tot sunt ex primæ Expen. huius præss. differentiæ additæ primo, quot interualla vt fieret vltimus; Ergo vt fiat differentia subducendus est primus, & reliquum per interuallorum numerum diuidendum.

EXPENSIO IV.

De proportione Arithmetica interserenda.

INterpositio terminorum in Arithmetica proportione non est grauis laboris, eamque istis præceptis in opus reducemus.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Inter duos terminos Arithmeticos medium proportionalem inuenire.

COniũgatur primus 5. cum altero 9. & summa 14. diuidatur per medium, & medietas 7. erit medium proportionale inter 5. & 9. eritque arithmeticè 5. ad 7. vt 7. ad 9. sic si sint 9. & 8. summa erit 17. & medietas 8. & $\frac{1}{2}$ erit medius terminus.

Probatur ex propos. 2. huius partis. Nam duplum medij est æquale summæ extremorum. Vnde summa extremorum diuisa per medium dabit medium terminum Arithmeticum.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Inter duos terminos Arithmeticos plures medios inuenire.

HOc executioni mandatur reperiendo differentiam, quæ inter terminos illos debet mediare. Sit ergo 5. & 63. inter quos debeant inueniri 8. proportionales. Subducatur 5. à 68. & residuum erit 63. assumatur verò numerus terminorum minutus vnica vnitate, nempe 7. & diuidatur numerus residuus 63. per 7. & fiet differentia 9. Si ergo numero 5. addas differentiam 9. continuè septem vicibus, efficies 8. terminos; quorum primus erit 5. vltimus 68. vt 5. 14. 23. 32. 41. 50. 59. 68.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datum numerum Arithmeticum in partes proportionales Arithmeticas distribuere.

DAtum numerum 152. diuidemus per dimidium numerũ terminorũ 4. & quotiens erit 38. hunc quotiẽtem in duas partes inæquales diuidemus, vt placet in 3. & 35. quos constituemus pro extremis, inter quos vt libet volumus esse 8 proportionales. Horum differentiam proportionalem inueniemus, vt propos. 17. huius part. quæ erit 5. cum iam habeamus electos terminos primum 3. & nouissimum 35. & numerum terminorum 8. & consequenter interuallorum 7. cum tot sint, quot termini minus vna vnitate: Si ergo differentiam repertam 5. addamus primo termino successiue efficiemus terminos arithmeticè progredientes 3. 8. 13. 18. 23. 28. 33. 38. quorum summa erit 152.

Probatur ea 9. propos. huius partis. Nam vltimus terminus iunctus primo multiplicatus per dimidium terminorum facit summam omnium; Ergo diuisa per dimidium terminorum summa om-

omnium, qualis debet esse numerus 152. dabit numerum, qui in se continebit maius, & minus extremum. Et hinc possumus diuidere in duas partes inæquales, vt placet, cum possimus eligere maius, & minus extremum, vt voluntas erit; Vnde dato maiori, minorique extremo, & numero terminorum habebimus interuallorum numerum quapropter rectè differentiam reperiemus.

Si verò numerus interuallorum sit impar, nec commodè in duas partes possit diuidi, per ipsum totum poterimus partire numerum datum, & quotiens duplicatus erit numerus terminorum, qui rursus in duas partes inæquales diuisus dabit maius, & minus extremum, & cæt.

Sic 152 diuisus per 8. dat quotientem 19. qui duplatus restituit 38.

Ratio est, quia maius, & minus extremum ex propos. 9. in vnam summam collectum, & bifariam diuisum dat, si hæc eius medietas multiplicetur cum numero omnium terminorum, summam omnium. Vnde etiam summa omnium diuisa per totum numerum terminorum dabit dimidium numerum, in quo maius, & minus extremum latet.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

* *Data terminorum Arithmeticorum serie, aliam similem inuenire.*

ID facilliter operi consignantur multiplicando per eundem numerum proportionales Arithmeticos datos. Sic si dantur 2. 5. 8. 11. reperiemus aliam seriem Arithmeticam eos per numerum 3. placitum multiplicando, & producti erunt 6. 15. 24. 33. Arithmetici.

* Probatur. Quoniam 3. multiplicauit 2. & 8. eadem proportio erit genitorum 6. ad 15. quæ generantiũ 2. ad 5. & 15. ad 24. quæ 5. ad 8. Quare *ex æquo* erit 2. ad 8. vt 6 ad 24. Et *diuidendo* erit 2. ad residuum 6. ex 8. proportio, quæ est 6. ad 18. residuum ex 24. & *permutando* erit 2. ad 6 vt 6. residuum ad 18. Et pariter. Quia respondet 2. ad 5. vt 6. ad 15. erit *diuidendo*, 2. ad residuum 3. ex 5. vt 6. ad residuum 9. ex 15. Et *permutando* 2. ad 6. vt 3. residuum ad residuum 9. Cum ergo residua 6. ad 18. & 3. ad 9. dicant eandem proportionem, quæ est 2. ad 6. erit etiam inter eosdem eadem proportio, & 6. erit ad 18 vt 3. ad 9. Quare *permutando* 6. erit ad 3. vt 18. ad 9. Numerus verò 6. est differentia, inter 2. & 8. & ideo dupla differentiæ 3. quæ est inter 2. & 5. terminos datos; & ideo etiam 18. differentia, quæ est inter 6. & 24. erit dupla differentiæ 9 quæ est inter 6. & 15. quare 6. 15. 24. erunt Arithmetici, vt sunt 2. 5. 8.

TRACTATVS XIIII.

PARS TERTIA.

De Proportione Harmonica.



PRoportio Harmonica in eo existit; quòd eadem proportio Geometrica sit inter extrema, quæ est inter differentias, quibus numerus medius dissidet ab extremis; Ita inter 2. 3. 6. est proportio harmonica; quia extrema 2. & 6. ita geometricè proportionalia sunt, vt est 1. ad 3. quæ sunt differentiæ, quibus dissidet extremum 2. à medio 3. & extremum 6. ab eodem 3. Hæc autem proportio, licet dicatur Harmonica, est tamen potiùs Optica vt suo loco ostendemus; pro nunc ipsius vniuersalia tantùm simptomata adferemus.

EXPENSIO I.

De proportione Harmonica inuenienda, & aliquibus eius proprietatibus.

PRoportio Harmonica videtur quiddam inter Geometricam, & Arithmeticam. Nam in comparatione terminorum Geometrica est; quoad verò originem, ab Arithmetica ortus suos desumit, vt modo videre licebit.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis tribus numeris Arithmeticè proportionalibus, tres alios Harmonicè proportionales inuenire.

SInt dati 3. 7. 11. continuè Arithmeticè proportionales, & differentia sit 4. multiplicentur extremi inuicem, & fint 33. Multiplicetur deinde medius cum extremis, & erunt 21. & 77. Dico itaque 21. 33. 77. esse inuicem in Harmonica proportione.

* Probatur. Quia 3. extremum multiplicauit medium 7. & fecit 21. Multiplicauitque aliud extremum, & fecit 33. erit 7. ad 11. ex prop. 17. l. 7. vt 21. ad 33. Quare *diuidendo* erit 7. ad 4. differentiam, vt 21. ad 12 differentiam.

Rursùs. Quia 11. multiplicauit extremũ 3. & mediũ 7 & generauit 33. & 77. erit 3. ad 7. vt genitus 33. ad genitum 77. ex prop. 17. l 7. elem. Quare *diuidendo* erit 3. ad 4. differentiam, vt 33. ad 44. differentiam. Quapropter etiam *componendo* erit 3. cum 4. nempe 7. ad 4. differentiam, vt 33. cum 44. f 77. ad 44. differentiam. Cùm ergo sit 7. ad 4. vt 21. terminus, ad 12. differentiam, & 7. ad 4. vt 77. terminus ad 44. differentiam ex propos. 13. quinti erit eadem proportio 21. ad 12. quæ est 77. ad 44 Proptereaque *permutando* 21. terminus primus ad 77. vltimum terminum erit proportio, quæ est differentię 12. ad differentiam 44. Quamobrem erunt tres termini 21. 33. 77. continue harmonicè proportionales ex definit.

COROLLARIVM I.

HInc est. Quod ita sit 3. ad 11. termini Arithmetici, vt 21. ad 77. terminos musicos, & vt 12. ad 44 differentias. Patet. Medius 7. multiplicauit 3. & genuit 21. & 11. & genuit 77. Ergo ex propos. 17. septimi eadem proportio est 3. ad 11. quæ est 21. ad 77. sed vt est 21 ad 77. ita est 12. ad 44. quæ sunt differentiæ, ergo ex *æquo*, vt 3. ad 11. ita est differentia 12. ad differentiam 44.

COROLLARIVM II.

HInc emanat illa proprietas, quòd differentia primorum multiplicata in tertium, seu extremum generet numerum æqualem differentiæ posteriorum ductæ in primum, vt hic vides.

	12	44
21	33	77
	924	

Ratio petitur ex propos. 19. lib. 7. Elem. Quoniam extrema dicunt eãdem proportionem, quam differentiæ, & ita est 21. ad 77. vt 12. ad 44. Ideoque multiplicati medij inuicem 77. & 12. & extremi inuicem 21. & 44. dabunt genitos æquales, & idem dicas ob eandem proportionem de extremis arithmeticis & differentijs Harmonicis, seu extremis Harmonicis.

3	7	11	3	7	11
21	33	77	12		44
	231			132	

Nàm, quia, ita est 3. ad 11. vt 21. ad 77. ex Coroll. 1. ideo multiplicati inuicem 21. & 11. fiunt 3. & 77. dant 231. Et quia ita est 3. ad 11. vt differentiæ 12. ad 44. ex Coroll. 1. ideo 11. & 12. inuicem ducti sicut, & 3. & 44. dant 132.

COROLLARIVM III.

COlligitur Arithmeticos tres esse in eadem proportione Geometrica; ac Harmonici, sed conuerso ordine. Quia enim 3. V. g. generauit 21. & 33. primos Harmonicos. Multiplicando duos extremos Arithmeticos 7. & 11. Ideo isti postremi erunt in eadem proportione, ac Harmonici primi 21. & 33. Rursos; quia 11. multiplicando duos primos Arithmeticos 3. & 7. produxit Harmonicos postremos 33. & 77. ideo in eadem proportione erũt isti postremi Musici cum Arithmeticis primis.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duobus terminis tertium in Harmonica proportione reperire, siue maiorem, siue minorem.

TErminorũ datorũ differentiã à minore subductã termino, diuidẽdus est residuo genitum ex eorũ multiplicatione, nam quotiens cum datis duobus constituet Harmonicum maiorem. V.g. sint dati 6. & 8. quorum differentia est 2. quæ deducta à minore termino 6 relinquit 4. Numerus verò genitus ex eorum multiplicatione terminorum est 48. qui diuisus per 4. relinquit 12. tertium terminum; dico itaque quod 6. 8. 12. sunt in proportione Harmonica.

* Probatur. Nam subducta differentia à minore termino dato relinquit residuum, qui cum duobus antecedentibus proportionem Arithmeticam habet; nempe 4. 6. 8. differentia enim, quę subducto 6. ab 8. remanet, eadem à termino minori 6. subducitur. Vnde multiplicati, vt superius in 1. propos. producent tres terminos in proportione Harmonica. Nempe 6. multiplicando 4. & 8. extrema, dabit 24. & 48. & extrema 4. & 8. se multiplicando facient medium 32. Si ergo omnes diuidantur per 4. patet quotiẽtes in eadem proportione mãsuros esse. Sed iam quotiẽtes 24. & 32. diuisorum per 4 residuũ sũt ipsi multiplicati 6. & 8. Ergo reliquus diuisus quoq; per 4. residuũ dabit tertium Harmonicum proportionalem 12. Siquidem diuisio æquiualet multiplicationi, & sicuti multiplicati numeri per eundem numerum ex propos. 17. septimi faciunt genitos in eadem proportione, in qua ipsi multiplicati se respiciunt, ita etiam diuisi generant quotientes in eadem proportione, in qua ipsi erant. Si verò cupias reperire vtroque dato minorem: Differentiam eorum maiori adde, & per hanc summam numerum ex eorum mutuã multiplicatione genitum diuide; quotiens enim erit terminus vtroque dato minor, vt si dentur 6. & 9; addo differentiam eorum 3. maiori 9. & summa fit 12; diuido deinde numerum 54. ex eorum multiplicatione genitum per hanc summam 12. & prodit tertius terminus minor $4 \frac{1}{2}$.

* Probatur eodem modo. Nam addita differentia eorundem, maiori V.g. ipsi 9 ex ipsis fiunt tres termini in proportione Arithmetica, vt 6. 9. 12. Idem enim interuallum 3. mediat: quare fient ex ipsis Harmonici 54. 72. 108. ex prima propos. qui, si diuidãtur per maiorem 12. dabunt quotien-

tes eiusdem Harmonicæ proportionis: sed iam 6. & 9. sunt quotientes duorum 72. & 108 ex diuisione per 12. consurgentes; si quidem & ipsi 72. & 108. ex multiplicatione 6. & 9. per 12. consurgunt: ergo reliquus quotiens inuentus 4. $\frac{1}{2}$ ex diuisione primi proportionalis 54. proueniens erit primus terminus ipsorum 6. & 9.

COROLLARIVM.

*Hoc est quod non semper duobus datis tertius Harmonicus proportionalis inueniri queat vtroque maior; licet possit reperiri vtroque minor in infinitum.

* Ratio est, quia quandoque occurrere potest, vt differentia datorum à minore subduci nequeat, eò quòd sit maior, quàm ipse minor numerus, vel ipsi æqualis, vt essent 3 & 9. nam 6. differentia non potest subduci à 3. & sicuti si darentur 4 & 8. differentia ipsa 4. non posset subduci à 4. quia nihil remaneret. At potest diminui in infinitum, quòd differentia semper possit addi maiori termino, & sic semper numerus ex eorum multiplicatione genitus per eum diuidi possit.

EXPENSIO II.

De proportione Harmonica continuanda.

DVplici modo Harmonica proportio continuatur. Prima est, cùm datis tribus terminis Harmonicis tertio, duo alij in eadem proportione Harmonica adiunguntur. Secunda quando tribus datis, duobus extremis tertius Harmonicè proportionalis adiungitur, quæ, seu prima, seu secunda non potest dici propriè continua. Non quidem prima, eo, quòd secundus, tertius, & quartus deinde non habeant proportionem Harmonicam, vt 2. 3. 6. 9. 18. Nam 2. 3. 6. & 6. 9. 18. eam, & eandem Musicam proportionem possident; non autem 3 6. 9. qui distant Arithmeticè. Secunda verò non est eadem priorum trium, quæ posteriorum, nam 3. 4 6. & 4. 6. 12. sunt secundo modo continuè proportionales; sed non eadem proportione 3. refertur ad 6. vt 4. ad 12.

PROBL. I. PROPOS. III.

Proportionem Harmonicam datis tribus terminis primo modo continuare.

DEnominator proportionis inter extrema ducitur in duos terminos medium, & extremũ, duoq; alij adiungẽtur tertio termino, qui in eadem proportione erunt cum eo, ac tres dati inuicem V. g. datis 2. 3. 6. si per 3. denominatorẽ proportionis, quã habet 2. ad 6. multiplicetur 3. mediũ & 6. extremum producentur 9. & 18. qui in eadem proportione erunt ad 6. quã tres dati 2. 3. & 6. ita vt sint 2. 3. 6. 9. 18. continuè modo primo proportionales: & sic si multiplices hos vltimos per eundẽ ꝓportionis denominatorẽ, erũt numeri geniti 27. 54. alij quoq; adiũgendi, ita vt fiot continuè proportionales harmonicè 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54.

* Præass. Antequam deueniamus ad probationem obserua prius, quòd denominator tertius rationis numeri 2. ad numerum 6. multiplicando 2. facit 6. Quare si adhuc 3. vt iussimus, multiplicet 6. & faciat 18. erit eadem proportio 2. ad 6. quæ 6. ad 18. Sed idem ternarius multiplicauit quoque, vt præcepimus, intermedium numerum 3. & fecit 9. quare ita erit 3. ad 9. vt 2. ad 6, & ideo, vt 6. ad 18. quæ est ob proportionem Musicam eadem, ac differentiarum 1. ad 3

* Quo supposito in propos. probanda sit primus progress. Primus terminus 2. ad extremum 6. est vt medius terminus 3 ad inuentum 9. ideo *permutanda* erit 2. ad 3. vt 6 ad 9. & *diuidenda* residuum 1. erit in proportione ad totum 3. vt residuum 3. ad totum 6. Quare *permutanda* rursus erit residuum 1. differentiaque datorum numerorum ad differentiam 3. extremi dati 6. ab inuento 9. vt 2. ad 6. primus, & vltimus datus.

Progress. 2. Eodem modo, ita erit 3 medius ad 9. inuentum, vt 6. extremus datus ad 18. inuentum. Ergo *permutanda* erit 3. ad 6. vt 9. ad 18. & *diuidenda* differentia 3. ad terminum 6. vt differentia 9. ad terminum 18. & *permutanda* erit differentia 3. ad differentiam 9 vt 6. ad 18. termini, quę est eadem, ac 2. ad 6. terminorum, vt progr. 1.

Progress 3. Cum ergo sit 1. differentiã primi 2, à medio termino 3. ad differentiam 3. extremi termini 6. ab inuento 9. veluti 2. ad 6. ex primo progr. & ex secundo differentia 3. medij 3. ab extremo 6. ad differentiam 9. inuenti minoris 9 ab inuento maiore 18. sit vt 2. ad 6. Erit itaque eadem proportio 1. differentia minor datorum ad 3. differentiam minorem extremi ab inuento minore quæ est differentia 3. maioris datorum ad 9 differentiam maiorem inuentorũ. Quare *permutando* erit minor 1. ad maiorem 3. datórum, vt minor 3. ad maiorem 9. inuentorum terminorum. Differentię verò 1. minoris ad 3. maiorem proportio est, vt 2. terminus primus datus ad vltimum datum 6 & ex præass. vt 6 ad 18. quare erit differentis 3. ad differentiam 9. inuentorum, vt terminus vltimus 6. datus ad vltimum inuentum 18. Quare 6. 9. 18 erunt in Musica proportione, vt 2. 3. 6. quòd erat tandem probandum, cùm sit 6 ad 18. vt differentia 3. termini 6. à 9. ad differentiam 9. termini 9. à termino vltimo 18.

COROLLARIVM.

HInc est, quòd secundus, tertius, & quartus in istis harmonicis, & quartus, quintus, sextus, sint Arithmetici. Quod vt pateat.

* Aduerte idem esse multiplicare numerũ p numerum suarũ partiũ, & deinde per numerũ illas partes numerantẽ productum multiplicare, ac in se multiplicare; quia numeri plani facti ex toto numero, & eius partibus, si simul sumantur, æquant ipsum quadratum numeri in se ducti ex propos. 2. lib. 9. Vnde, si habeamus numerum partium, & rectangulum sub vna ex ijs partibus, & toto numero comprehensum, & hunc planum per numerum, earum partium multiplicemus, habebimus omnia rectangula, quæ ipsum quadratum dati numeri eæquant. Sic si 2. tertia pars numeri 6 multiplicet 6. & faciat 12. deinde hunc numerum planum multiplicemus per numerum partium, qui est 3. ponemus tres numeros planos duodenarios simul, qui æquabunt quadratum numeri 6. Sint ergo Arithmetici 2. 4. 6. à quibus Musici prodeunt 8. 12. 24 36. Quia 6. multiplicauit 2. & genuit 12. & rursus 4. & genuit 24. & tandem se, & genuit 36. ex propos. 19. præc. partis

erunt

erunt 12. 24. 36. Arithmetici. Multiplicauit autem se numerus 6. vt diximus supra: nam multiplicauit prius 2. & fecit numerum planum 12. deinde fuit multiplicatus per denominatorem 8. ad 24. ex propos. 3. quæ ex Coroll. 1. propos. 1. est idem, ac denominator proportionis 2. ad 6. & cõsequenter cum fuit multiplicatus numerus planus 12. per numerum continentiarum 2. in 6. fit quòd genitus æquet quadratum numeri 6. & virtualiter in se ipsum fuerit multiplicatus, quia per numerum partes numerantem fuit multiplicatus.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Proportionem Harmonicam secundo modo continuare.

SEcundo modo continuabitur proportio Harmonica. Datis enim tribus terminis Harmonicè proportionalibus 2. 3. 6. inueniemus duobus vltimo, & penultimo alium proportionalem iuxta ea, quæ docuimus propos. 2.

PROBL. III. PROPOS. V.

Etiam alio modo proportionem Harmonicam propagare.

* DIsponantur fracti ab vnitate incipientes, aut quoquo alio numero, & erunt in proportione Harmonica, ita erunt Harmonici.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, & cæt. Sic $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$, & cæt.

Patet primo. Si ad eandẽ denominationem redicantur [illegible], & [illegible], qui omnes proportionem consequuntur harmonicam secundo modo continuatam.

A — — D — C — | — — — | — — — — B

Vt autem probetur monendum. Si eadem quãtitas AB diuidatur in tres partes, quarum vna AC, & rursus in quatuor, quarum vna AD; certum est, quòd ablatis à tertijs partibus minores quartæ relinquent differentias æquales, vtpote, quòd æquales ab æqualibus demptæ sint; & quia sunt tres tertiæ partes, tot etiam relinquent differentias, quas, dico, tres differentias esse æquales vni quartæ parti, & ostẽdo. Nam tres tertiæ partes æquãt AB, à quibus auferuntur tres quartæ, vt DC, & relinquunt tres differentias, sed auferãtur tres quartæ partes à tota AB æquali tribus tertijs relinquet vnam quartam partem AD: Ergo 3. differentiæ æquant vnam quartam partem; quia ambo residua sunt ablationis æqualium trium quartarum ab æqualibus tota AB, & eius tribus tertijs.

Ergo tres differentiæ æquant quartam partem, & addita vna, quatuor differentiæ æquabunt partem maiorem tertiam.

* Sint ergo $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ einsdem totius. Dico hos numeros musicos esse: Nam differentia vnius tertij ab vnico quarto erit vnius quartæ partis $\frac{1}{3}$, & rursus differentia, quæ est inter vnam quartam, & vnicam quintam partem totius, est vnica quinta pars eiusdem totius, nempe vnius quartæ ex præpræassumpto. Ergo differentiæ erunt $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{5}$ sui totius, sicut fracti dati extremi sunt $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{5}$ eiusdem totius; cùm ergo sint differentiæ eadem minutia, ac extremi fracti dati, erunt in eadem proportione; vnde $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ erunt Musici ex pr. 3. Cor. Tract. 3.

COROLLARIVM

HInc est quoque, quod numerus factus ex differentia maiori Harmonica, & minori extremo, vel è contrà minori differentiâ in maius extremum ductâ facere numerum, qui continet tres harmonicos, tanquam suas partes; ideoque Harmonici sunt fractiones, cuius genitus est denominator, vt [illegible], [illegible], & [illegible], quòd enim cõtineat duo extrema, patet quia fit ex eorũ multiplicatione; quod autem contineat medium 33. Prob.: Nam illius partes continentur in extremis, cùm ex mutua Arithmeticorum extremorum multiplicatione sit genitus, quæ producere etiam extrema Harmonica multiplicata per medium Arithmeticum, vt ex 1. propos. huius part. constat; imò, & si tres Arithmetici simul ducantur; numerus productus erit denominator, cuius numeratores erunt Harmonici: Nam Harmonici, cum generentur ex multiplicatione Arithmeticorum non possunt continere alias partes, quam quæ in ipsis sunt, cum autem Arithmetici omnes simul ducuntur, patet, quòd genitus omnes partes, quas ipsi continent, obtineat: Vnde & continebit omnes partes harmonicorum, sic 231. qui fit ex ductione 3. in 7. & 7. in 11. Arithmeticos continent 21. vndecies 33. septies 77. tricies.

EXPENSIO III.

De proportione Harmonica interserenda.

NOn potest prætermitti intersitio proportionis harmonicæ, vtpote aliquando eius continuationi necessaria, huicque cognitioni addemus etiam diuisionem dati numeri in Musicos terminos.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Inter duos datos numeros medium Harmonicum reperire.

IStud operi mandatur Regula aurea. Nam primo eorum differentiam reperies, & deinde eos in vnam summam rediges, quæresque summa, & minore termino, & differentia, differentiam, quæ debet esse inter primum, & medium, quâ repertâ ipsi minori addatur, vt constituatur terminus medius. Sint pro exemplo dati 15. & 25. inter quos medius proportionalis harmonicè sit inueniendus; Differentia est 10. summa 40. Dico itaque si 40. dant 15. quid dabit 10. differentia? & multiplicatis 10. per 15. & diuisis per 40. prodibit differentia 3. $\frac{3}{4}$, quę addita minori termino 15. faciet 18. $\frac{3}{4}$ pro medio, ita vt sint tres harmonicè proportionales 15. 18. $\frac{3}{4}$, & 25.

* Probatur ex propos. 24. septimi elementorum. Nam si diuisi numeri proportionales fuerint, hi quoque compositi proportionales erunt; Quia ergo ita est extremum ad extremum, vt medij differentia à primo ad eiusdem differentiam ab vltimo, sequitur, vt eadem proportio sit aggregati extremorum ad vnum ex extremis, quæ est

aggre-

aggregati ex differentijs ad vnā eaeundem. Datis autem duobus te minis habes per additionem eorum aggregatum per subductionem verò summā differentiarum, vt probabo: Ergo habes tres terminos proportionales:nam ita est aggregatum extremorum ad vnum ipsorum, vt aggregatum differentiarum ad alteram ex ipsis, quę debet inquiri per regulam proportionum.

Quòd verò differentia inter duos numeros extremos sit aggregatum differentiarum, patet: medius enim numeros non potest magis differre ab ambobus maiori, & minori, quam ipsi inuicem differant V. g. datis 3. 7. 21. non potest 7. magis differre à 3. & à 21.quā,quòd ipsi differunt,nempe à 3 num 4 & à 21. numero 5. quæ simul faciunt 9. differentię ipsorum, vt per se patet alioquin esset distantia maior, vel minor, quàm quod esset, namque esset 9. vnitatum, at mensurata per 4. & 5. distantiam eorundem à medio, non esset talis.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Datum quemlibet numerum in proportionem Harmonicam distribuere.

*Si datus quisque numerus V. g. 54 & oportet secundùm proportionem Harmonicam illum distribuere, diuidatur per terminos Arithmeticos V. g. 1. 2. 3. 4 erantque partes in proportione Harmonica, quæ sunt 54. 27. 18. 13. $\frac{1}{2}$.

Probatur. Quis 54 numerus, vel quilibet alius respectu partium, in quibus diuisus est, est veluti integer, cuius vna pars est quotiens. Ergo dicent partes singulę,& quotientes eandem proportionem, quam $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, de quibus probatum est prop.5.dicere proportionem Harmonicam.

COROLLARIVM.

Hinc est; quòd si numeri Arithmetici 1. 2. 3. 4 vel quilibet alij in vnam summam continua multiplicatione redigantur, & summa deinde per singulos diuidatur, quòd producentur Harmonici continuè proportionales ob eandem rationem. quòd summa se habeat veluti integer, & denominator, cuius numeratores fiont partes diuisæ, sic 24 summa numerorum Arithmeticorum 1 2. 3. 4. ex mutua multiplicatione resultans diuisa per eosdem numeros, dat 24. 12. 8. 6. in Harmonica proportione continuos.

EXPENSIO IV.

De comparatione Proportionum.

Tribus modis inuicem proportiones comparari possunt; vel vt eorum differentiæ dignoscantur,vel vt inuicem termini intermisceantur, vel,vt omnes, aut aliquas proportiones ipsi termini obtineant: Tribus itaque expensionibus breuiter ab ista speculatione nos expediemus; cum nihil de cætero Mathematicę deseruiat.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Conueniunt in hoc omnes proportiones, quòd per eundem numerum termini multiplicati generent numeros eiusdem proportionis,

Sic 2. 4. 6. Arithmetici multiplicati per quemlibet numerum V.g.4 generant 8.16. 24. terminos quoq; Arithmeticos; Sic 3.4.6. Harmonici per 4 multiplicati generant 12. 16. 24. Harmonicos sic dicas de Geometricis.

Probatur verò propositio ex præcedentibus, & ex propos.17. septimi Elementorum.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Differunt proportiones; quod Arithmetica progrediatur in infinitum cres cendo, non decrescendo, nisi incidat in fractos,Harmonica solum decrescendo, Geometrica crescendo, & decrescendo,

Probatur ex dictis, & maxime de Harmonica ex Coroll. propos.2.

THEOR. III. PROPOS. X.

Differūt quoq; Quod Arithmeticæ proportionis differentiæ æquales sint, & proportiones inæquales, idest dissimiles: at Geometrica proportiones habet similes,& terminorum differentias similes cum differentiæ in eadem proportione sint,& Harmonica neque differentias similes, neque proportiones possidet similes in suo continuo progressu. Patet ex dictis.

Vnt aliæ, quæ oriuntur ex eorum multiplicatione, diuisione additione, & subtractione supra explicatis praxibus, quas, si voluerit, potest quilibet conferre. & differentias etiam in istis operationibus tractandis agnoscere.

EXPENSIO V.

De maxima, & minori Harmonia.

Cvm quatuor termini, ita sint ordinati; vt in ipsis omnes tres proportiones inueniantur, dicunt Mathematici habere Harmoniam maximam, quòd si solum duæ inueniantur, dicunt, Harmoniam minorem possidere. Oportet itaque docere modum inueniendi quatuor terminos, qui vel duas, vel omnes proportiones consequantur.

PROBL. I. PROP. XI.

Quatuor numeros habentes proportionem Arithmeticam, & Geometricam inuenire.

CApe tres terminos, quorum extrema, vel paria ambo sint, vel ambo imparia; sed Geometricè proportione nexos, vt 16.24.36. Interque istos extremos numerum Arithmeticum, interijce eos iungendo, vt docuimus, & deinde bifariam diuidendo, & erit numerus 30. itaque in quatuor numeris 16. 24. 30. 36. proportio Geometrica, & Arithmetica reperietur, vt ex ipsa constructione est manifestum.

PROBL. II. PROPOS. XII.

Quatuor numeros reperire, in quibus Harmonica proportio, cum Geometrica repetatur, vel cum Arithmetica.

ACcipe tres numeros continue Geometricè proportionales, vt 16. 24. 36. & ex dictis propos. 5. vel 4 h. exquire inter extrema 16. & 24. Harmonicum proportionalem numerum, eritque 19. $\frac{1}{5}$. Vnde quatuor termini 16. 19. $\frac{1}{5}$ 24. 36. duas proportiones propositas obtinebunt, vt patet ex constructione. Si verò capias inter 16. & 36 extremos idem ages, eritque 22. [illegible].

Eodem modo inter duos Harmonicos 4. & 6. extremos trium 3. 4 6. interijcietur terminus Arithmeticus 5. eruntq; quatuor termini 3. 4. 5. & 6. Harmonicè, & Arithmeticè proportionales.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Quatuor terminos reperire, in quibus omnes proportiones sint, & extrema proportionem datam Geometricam consequantur.

EX tribus Arithmeticis paribus, vt docuimus propos. 3. huius creentur tres Harmonici proportionales, quorum extrema proportionem habeant datam, & inter extremos horum statuatur terminus Arithmeticè proportionalis, & erunt quatuor termini in Maximâ Harmonia, vt exposcis.

Sint V. g. tres numeri Arithmetici 4 6. 8. ex quibus creo tres Harmonicos 24. 32. 48. Interque extrema 24. & 48. interpono Arithmeticum in se 6. multiplicando; vt fiat 36. Sunt ergo termini 24. 32. 36. 48. habentes omnes proportiones requisitas.

Probatur. Nam primo 24. & 48. sunt in proportione data 4. ad 8. vt patuit supra propos. 1. huius, & Coroll.

Secundo obtinent proportionem geometricam non continuam, & ita est 24 ad 36. vt 32. ad 48. Nam quia 6. multiplicauit 4. & fecit 24. & se & fecit 36. Ergo eadem proportio erit inter 4. & 6. quæ est inter 24. & 36. Sic quia 8. multiplicauit 4. & 6 ex prop. 17. septimi elementorum, ita erunt geniti 32. & 48. vt 4. ad 6. Ergo, cùm proportionem eandē, quam 4. ad 6. dicant 24. & 36. ac 32. & 48. eandem Geometricam rationem habebunt. Sunt etiam 24. ad 32. vt 36. ad 48. in eadem ratione. Nam 4 multiplicauit 6. & 8. Ergo geniti 24. & 32. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. & quia 6. multiplicauit se, & 8. geniti 36. & 48. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. Ergo & inter se eandem, quam 6. ad 8. consequentur.

Probatur tandem de proportione Arithmetica numerus enim 6 multiplicauit se, 4. & 8. Ergo geniti 24. 36. 48. erunt in eadem proportione, quam 4. 6. & 8. sed hæc ex Hypothesi est Arithmetica, ergo, & genitorum 24. 36. 48. ex 19. prop. part. præced. 2.

Probatur tandem de Harmonica ex ipsa constructione. Imperatum est enim ex tribus datis Arithmeticis 4. 6. 8. tres Harmonicos reperire 24. 32. 48.





TRACTATVS XV.

De Linearum, Segmentorumque proportionibus.



Vamuis quædam fundamentalia de lineis secandis lib. 6. Expens. 3 tetigerimus; ea tamen fuere pauca, & quæ solùm elementi necessitas exposceret. Verùm linearum amplioribus terminis clauditur speculatio, latiorque admodum est, & quæ cognitionem multarum propositionum, quæ deinde ostenlæ sun, requirat, & ideo earum speculationem, necesse fuit, in hunc locum reicere.

EXPENSIO I.

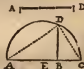
De linearum proportionali inuentione in proportione Geometrica.

QVamuis supra cum Euclide lib. 6. Expens. 3. inuenerimus lineas proportionales datis lineis. Quia tamen faciliter id, alio modo executioni demandatur; ideo ad tractatus perfectionem hic eum docebimus, & præter hoc docebimus quoque reperire alias lineas proportionales, seu potentia, seu commensurabilitate, vel inæqualitatis, vel æqualitatis, vt plena linearum proportionalium cognitio habeatur.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis duabus lineis alteram proportionalem Geometricam, seu extremam, seu mediam reperire.

SIt inquirenda media proportionalis datis AB, & AC. Fiat super AC semicirculus, & erigatur perpendicularis à puncto B in peripheriam, ducaturque AD punctata: nam hæc ex 2. Coroll. propos. 8. sexti inter AC & AB est media proportionalis, diciturque diuidere proportionem AB, ad AC *per interpositionem* AD *in duas partes æquales*,

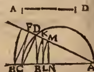


Si verò datis maiore AC, & media AD exquiratur minus extremum; facto super AC semicirculo accommodetur media AD in ipso. & à puncto D. cadat perpendicularis. Nam AB ex cit. Coroll. erit minus extremum. Si verò dato minore extremo AB. & mediâ AD seorsim exposita exquiratur maius extremum, ex B excitetur perpendicularis BD; prolungeturque AB quantum opus est, & cẽtro altero extremo A interuallo AD medie ducatur circulus, licèt fig. non exprimat, qui secet perpendicularem BD in D. A puncto ergo D, quo illã secat, excitetur perpendicularis DC, quę secabit minus extremum productum in C. Dico ergo AC ex eodem Coroll. esse maius extremum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duabus rectis lineis proportiones earum propagare in infinitum.

DEntur duæ AB, & AD, & secundùm proportionem minoris ad maiorem crescendo sit propaganda proportio: Quia datur minus extremum AB, media AD seorsim data; ideo ex propos. anteced. erecta perpendiculari BD centro A interuallo AD ducatur circuli portio l. in fig. non sit, & à pũcto D quo secat exeat data A D in A. & ei normalis DC, & CA erit tertia proportionalis ex præc. Rursusque ex puncto C ducto arcu CF interuallo AC: ab F, in quo secat, ducatur rursus perpendicularis FH ad AF, seu parallela primò ductę CD, *&* in H *erit quarta proportionalis, ita vt* AB *sit* AD, *vt* AD *ad* AC, *&* AD *sit ad* AC, *vt* AC *ad* AH.



Probatur, quia AB est ad AD, vt AD ad AC ob rectum angulum D ex Coroll. 2 prop. 8 lib. 6. Ergo etiam AD erit ad AF, idest AC, quæ ei vt potè radius, æquatur, vt AF ad AH ob rectum angulum H, ex dict. Coroll. propos. 8. & sic in infinitum crescendo.

Si verò requiratur proportio continuata in decrescendo maioris AD ad minorem BA. A puncto B interuallo AB ducatur portio circuli BK, & à puncto K demittatur perpendicularis KL. Rursusq; à puncto L ducatur portio circuli LM; & à puncto M demittatur perpendicularis MN. Dico hoc modo

do

do proportlonem continuari in se diminuendo, & AO esse ad AB, vt AB ad AL, & AB esse ad AL; vt AL ad AN; & sic quousque placuerit.

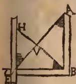
Probatur. Nam ex præced. vt est AD ad AB hoc est ad æqualem AK; ita est AX ad AL. Rursusque, vt AB hoc est AK ad AL ob rectum angulum L sic AL, idest AM ad AN; & sic quousque placeat, poteris continuare. An verò hæc continuatio possit verè in infinitum produci infra videbimus, cum de proportionum progressione.

PROBL. III. PROPOS. III.

Duobus datis extremis proportionalibus inter ea duas medias continuè proportionales in data proportione coniјcere.

HOc problema antiqui, non nisi organicè soluere potuerunt ob infinitam, linearum multitudinem, quæ inter lineas possunt poni; Multas autem eorum inuentiones singulari ingenio excogitatas Clauius affert lib.6. propos.15. Geometr. pract. & quasdam valde amplificat Betinus Aerarij Math. propos.13. tom.2. Nos afferemus modum facillimum Platonis.

Sit regula lignea, vel cuprea AB placitæ longitudinis, cui alia regula BE eiusdem rationis rectangulè infixa sit, & stabiliter. Huic verò rectangulè altera inseratur HE tali modo, vt per illam mota, nunquam tamen ab angulo recto deficiat, & ecce instrumentum paratum erit.



Vsus verò instrumenti talis est. Sint duæ datę extremę lineę AV, & VH, quę rectāgulè vniātur in V, & producantur per punctatas, quantum satis erit. Applicetur verò instrumentum extremo A regula AB, & ita accommodetur trasferendo regulam HE, vel viciniùs, vel longinquiùs vsq; dum alterum extremū H alterius datæ VH extremum ipsa regula mobilis lambat, & simul continuatæ punctatę VB, & VE transeant per angulos rectos, regularum; nempe VE per angulum E, & VB per angulum B. Dico *quatuor* AV, *&* BV, *&* VE, *&* VH *esse quatuor continuè proportionales.*

Hocque, diciturque à Mathematicis diuidere in tres partes æquales proportionem AV ad VH.

Prob. Nam triangula AVB, & BVE, & EVH sunt æquiangula. Anguli enim ad V recti, & anguli nigri æquales; Cùm albus, & niger ad basim AB in triangulo AVB vni recto sint æquales; & ideo, cum totus apud B sit rectus, residuus āgulus niger ad B erit æqualis nigro ad A, & idem dicas de alijs.

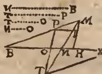
Cum ergo triangula æquiangula sint, erit AV crus maius ad BV minus in triangulo AVB, vt BV idem; sed maius in triangulo BVE ad crus minus VE, & hoc BV maius ad suum minus VE erit, vt ipsum VE maius in triangulo VEH ad minus VH. Quare BV, & VE sunt duæ mediæ proportionales inuentę inter extremas AV, & VH.

PROBL. IE. PROPOS. IV.

Datam lineam exhibere, quæ ad aliquam compositam habeat proportionem ex duabus lineis ad duas alias, cum fieri potest.

SIt data proportio BN ad NO, & proportio TP ad TO non eadem, ac precedens, sed diuersa, vt proportio composita sit, non duplicata.

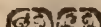
Ductis lineis BH, & TP, vtcumque, quæ faciant quemcumque angulum in O: mensuretur NO punctata super alteram earum V. g. super continuam NB à puncto O in N, & à puncto N altera punctata ei correspondens NB; Sic in altera TP punctata TO mensuretur super OT à puncto O in T, & à puncto T altera punctata TP correspondens perque extrema P, & B ducatur MB, & per N, & T linea TN, quę conueniunt in M, *& erit reperta* MB, *quæ ad* PM *habebit proportionem compositam, ex proportione* NB *ad* NO, *&* OT *ad* PT.



* Probatur primo, quod MB, & MT conueniunt, in M. Nam si non conuenient, essent TM, & MB parallelæ; Quare triangula POB, & NOT essent proportionalium laterum, vtpote æquiāgula V.g. si TX esset ipsa TN parallela ipsi BP; esset OB ad OX, vt OP ad OT, & *componendo* OB ad OB simul, & OX esset, vt OP sola ad OP simul, & OT: Quare contra presuppositionem proportio esset similis datarum linearum, quòd nolumus: nam posuimus NB ad ON dissimilem à proportione TO ad TP. Quare non erunt parallelæ; idcircò conueniunt E. g. in M.

Probatur. Quod proportio BM, ad PM sit composita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP. Ducaturque parallela PI ad NB V. g. à puncto P.

Eritque ex 4. lib.6. MB ad MP, vt NB ad IP. Interponatur quælibet, vt aduertimus possu fieri Tract.9. part.1. Expens.3. Scilicet NO, quæ interponatur inter IP, & NB. Erit igitur proportio NB ad IP composita ex duabus, sc. ex proportione NB ad NO, & NO ad IP: Sed ex 4. lib.6. vt NO ad IP ob parallelismum linearum ON ad IP; Sic est in proportione TO ad TP; Ergo (posita proportione TO ad TP loco proportionis NO ad IP) proportio MB ad MP eadem, quæ NB ad IP erit composita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP, quod si cupias proportiones componentes ambas esse maioris ad minorem vtere figura prop. seq.

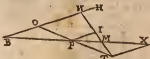


PROBL. V. PROPOS. V.

Data linea, quæ dicatur componi ex proportione vnius lineæ ad aliam exhibere duas lineas, quæ reliquam proportionem contineant.

DIcatur linea BM ad MP composita ex proportione BN ad DN; & ex alia, quæraturque reliqua proportionum, quæ proportionem MB ad PM compleat.

Accomodetur in hac, seu præc. fig. MB longior, vt faciat cum MB quemcumque angulum, & ducatur indefinita MT ab M per N. Deinde ab N, mẽsuretur NO super NB, & à puncto P parallela ducatur ad NB, quæ sit TP, & à P per O transeat PT conueniens cum TM. *Dico proportionem* TP *ad* TO *esse proportionem, quæ componit cum proportione* NB *ad* NO *proportionem* BM *ad* PM.

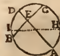


Probatur. MB est ad MP, vt NB ad IP. Interponatur NO; eritque proportio NB ad IP composita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP. Quare, & proportio BM ad MP erit composita ex proportione B ad NO, & NO ad TP, scilicet ex TO ad TP, vel TN ad TI, & aduerte, quod si TP non conueniet cum TM versus T conueniet versus M; cum in proportione composita, vt dixi in præcedenti TP, & TM non possint esse parallelæ, vt est BM, & XT.

PROB. VI. PROPOS. VI.

Datâ mediâ trium in continua ratione existentium, & aggregato extremarum proportionalium primam, & vltimam exhibere.

SVper aggregato HI duarum extremarum fiat circulus ACBD, & mediâ datâ duplâ EC accommodetur in circulo; siquidem oportet aggregatum extremarum, quæ diametrum faciunt circuli esse maius ipsâ mediâ duplatâ, quia duæ extremæ sunt maiores, quàm mediæ, & tantò magis cùm mediæ sunt inuicem æquales ex propos. 13. lib. 5. Elem.



Deinde ipsi CB erigatur perpendicularis AD ab eius medietate B. *Dico factum esse id, quod desiderabatur.*

Probatur. Quia AE est ad EC, vt EC ad ED ex Coroll. propos. 16. lib. 6. Linea AD verò, vt diameter æquatur aggregato HI.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis duobus excessibus trium magnitudinum in continuâ proportione existentium exhibere tres continuas.

SInt dati excessus AC, & CD, qui in vnicam lineam ponantur AD, quæ, & extendatur ad placitum vsque ad B: Deinde à punctis A, C, D erigantur perpendiculares, quæ ex 14. lib. 6. eandem proportionem seruent, quæ AC ad CD, & ducatur EG per puncta E, F, G, donec cum altera AB conueniat in B. *Dico factum esse id, quod exposcitur, & esse BD ad BC, vt BC ad BA.*

Probatur, vt AE ad CF, sic est AB ad CB ex propos. 4. lib. 6. sed AE ad CF, effecta est sic vt AC ad CD; Ergo vt est AC ad CD, sic ex 16. l. 5. est tota AB ad CB.



Sed, vt est CF ad DG, ita est CB ad DB; ex propos. 4. lib. 6. At CF respicit in proportione DG, vt AB respicit CF, vt AC respicit CD ex effect. & ideo vt proportionatur AB ipsi CB. Ergo proportionata est AB ipsi CB, vt CB ipsi DB. Quare tres AB, & CB, & DB sunt in continua analogia.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

Dato termino maiori, & differentia termini maioris à medio reperire ipsum medium terminum, atque minorem.

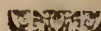
SIt datum maius extremum AB in propos. præced. figurâ, & differentia AC: Detrahatur hæc differentia AC à maiore extremo AB, & residuum CB erit medius terminus; Rursus ex propos. 15. sexti, fiat vt AB ad suam differentiam AC est in proportione, sic CB ad aliud; & inuenietur CD. *Dico itaque, quod* AB, *&* CB, *&* DB *erunt in continua proportione.*

* Probatur, vt AB est ad AC; sic CB est ad CD. Ergo componendo, vt AB est ad AC cum CB; sic CB est ad CD cum DB: Quare diuidendo, vt AB est ad CB; sic CB erit ad DB: quapropter AC, & CB, & DB, erunt in continua proportione.

EXPENSIO II.

De proportionali linearum additione.

ADditio proportionalis linearum maximas in Geometria secum fert vtilitates, & plurimis præbet speculationibus fundamentum, interque multas propositiones, quæ exhibentur, hæ sunt vtiliores, & admodum necessariæ.



PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datam lineam rectam, vtcumque sectam tali segmento augere, vt tota cum adiuncta sit ad adiunctam, vt maius segmentum ad minus.

D B C E A

SIt linea AB secta, vt cumque in C, & iubeamur adiungere talem partem V. g BD; quæ faciat rectam AD; & hæc tota AD sit ad adiunctam, & segmẽtum BD, vt maius segmentum primitiuum AC est ad minus CB.

Ponatur CE æqualis ipsi CB: Fiatque per 15. propos. lib. 6. vt AE ad EC: Sic tota AB ad BD: reperieturque BD: *Dico itaque totam AD esse ad BD adiunctam velut: proportionatur segmentum maius AC segmento minori CB.*

Probatur. Quoniam enim AE respicit EC velut AB respicit BD; erit quoque componendo AB, & BC, vt AB, & BD ad un; sed EC est æqualis ex effectione minori segmento CB: Ergo erit etiam, vt AE, & BC, hoc est AC ad CB; sic AB cum BD, idest tota AD ad BD.

Potest etiam fieri alio modo. Sit data AB diuisa, vt cumque in C. Facto super AB semicirculo, à puncto C erigatur, si placet perpendicularis CF. & fiat triangulum rectangulum AFB. lineęq; AF ducatur GH parallela per punctum B, & occurrat ipsi CF in G. Sit deinde BH æqualis ipsi GB, & ducatur per H linea FH, vsque ad L; & AB prolungetur, vsque ad L. *Dico BL esse eam additionem, quæ requiritur; & AL esse ad BL, vt AC ad CB.*

Probatur AF est ad BH, vel æqualem GB ob earum parallelismum in triangulo AFL, vt AB ad BL: sed vt AF ad GB; sic AC ad CB, ob triangulorum AFC, & GCB similitudinem: cum sint ad verticem, & inter parallelas ex 9. sexti: Ergo vt tota AL ad adiunctam BL, sic AC segmentum maius ad CB segmentum minus.

PROBL. II. PROPOS. X.

Datæ lineæ, vtcumque sectæ tale segmentum addere, vt tota cum addita sit ad totam, vt segmentum ad ipsam additam.

INter AB, & AC media proportionalis inueniatur BD; Eritque quadratum ex BD factum æquale rectangulo ex AC segmento, & tota AB effecto ex propos. 19. lib 6. Erigatur itaque hæc media ex B perpendiculariter, & facto super AB totâ datâ circulo, per centrum eius L ducatur à vertice D linea OD. *Dico, quòd portio HD inter mediam inter DB tangentem, & peripheriam intercepta est illa, quæ addita ipsi AB facit AF, quæ est ad totam AB, vt segmentum AC est ad additam BF.*

Probatur. Quia rectangulũ ex tota, & addita pro vno latere AF, & addita BF pro alio est ęquale rectãgulo ex DO tota, & segmento HD ob æqualitatem laterum HD, & BF. Rectangulum verò ex OD, & HD est æquale quadrato BD, ex 36. lib. 3. vnde etiam erit æquale rectangulo AB, & AC, quod æquatur ex dictis quadrato ex BD Quare ex prop. 16. lib. 6. BD, idest æqualis AB tota cum additâ erit ad AB totam, vt eius segmentum AC ad additam HD idest æqualem BF.

PROBL. III. PROPOS. XI.

Datis duabus lineis, alteram ipsarum, ita continuare, & tota cum additâ sit ad alteram, vt altera ad additam, idest sint continuè proportionales.

SIt data recta maior AC, & minor AD, quæ orthogonaliter ad verticem A coniungantur. Diuisâque bifariam alterâ ipsarum, puta AC minorem, dimidiæ EA interuallo describatur circulus, & ducatur ex D per centrum E linea DL. Dico totam HL, idest AC datam cum adiunctâ HD simul, idest LD esse ad datam AD, vt AD ad HD.

Probatur. Nam ex DL tota adiecta cum HD pro latere, & adiecta HD solum pro alio fiet rectangulum ęquale quadrato tangentis AD ex 36. lib. 3. Eucl. Ergo ex propos. 17. lib 6. vt DL ad AD; sic AD erit in proportione ad DH; quare AC æqualis HL aucta eodem incremento DH erit ad DA, vt DA ad DH.

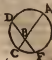
PROBL. IV. PROPOS. XII.

Lineæ datæ adiungere talem partem, vt alterius segmentis data, & adiuncta sint proportionales.

SIt linea AC secta in B, & alia DB, cui oportent addere talem partem, vt ipsa DB sit ad segmentum BC, vt AB segmentum alterum ad additam BF? Addatur linea BD lineæ AC ad punctum B, & faciat cum AC, quemcumque angulum. Per tria verò pũcta ADC reperiatur circulus transiens ex 5. lib. 4. & DB prolungetur vsque ad circumferentiam in F, & erit factum, eritque AB ad BF, vt DB ad BC.

Probatur. Et enim BF cum DB faciunt rectãgulum æquale rectangulo ex AB, & BC, & ideo erunt, vt AB ad BF, sic BD ad BC ex 18. lib 6.

Quod autem rectangulum ex BD, & BF sit ęquale rectangulo ex AB, & BC ostenditur ex 35. lib. 3.



PROBL. V. PROPOS. XIII.

* *Datam lineam sectam, vtcumque, ita augere, vt segmentum maius cum addita sit ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus.*

SIt linea AB diuisa in O, & segmentum maius O A; debeatque huic segmento addi talis pars, vt ipsum cum parte addita sit ad segmentum maius AO, vt maius ad BO minus.

Erigatur perpendicularis OB, & OD æqualis ipsi AO à puncto O, & per tria puncta E, B, O transeat circulus. Prolongeturque CA ad peripheriam in C, & erit factum.

Eritque ex 35. lib. 3. rectangulum CO, & EO æquale quadrato OB, idest OA ei æquali ex effectione.

Vnde ex propos. 19. lib. 6. CO segmentum, cum addita erit ad OA, vt OA ad AC.

PROBL. VI. PROPOS. XIV.

* *Datam lineam, vtcumque sectam, ita addere; vt tota cum addita sit ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus.*

SIt data linea AC, quam oporteat adiungere; vt tota AC cùm additâ CO, s. AO sit ad BC segmentum maius, vt BC ad AB segmentum minus.

Erigatur à puncto B perpendicularis, & à centro A interuallo segmento maiori BC portio circuli ducatur, quæ secet BH in H, cui BH fiat æqualis BI; perque tria puncta H, A, I transeat circulus, & prolongetur BC in O. Dico AO nempe totam AC cum addita CO esse ad CB segmentum maius, vt ipsa CB ad BA segmentum minus.

Patet, quia ex Coroll. propos. 8. lib. 6. ita est AO ad AH idest BC, vt AH ad AB.

PROBL. VII. PROPOS. XV.

Datæ sint duæ lineæ inæquales, & ratio data. Sintque addendæ talibus partibus, vt rationem datam inuicem obtineant, sed compositæ aliquam aliam rationem datam consequantur.

SCiendum est hoc problema non semper operi demandari posse; sed aliquando, prout rationes exhibentur, iuxta quas addendum sit, vel detrahendum: Ipsa verò experientia docebit, cùm operi demandari poterit, absque eo, quòd omnes casus ponamus: Sunt enim multi, & qui prolixia verbis indigerent.

Sint ergo datæ duæ lineæ A, B, ad quas duæ aliæ addendæ sint, quæ sint, vt C ad D, & efficiant compositæ proportionem, quam H ad L.

Fiat ON ad MO, veluti proportione respicit C ipsam D, & ex punctis M, & N erigantur perpendiculares, & parallelæ ipsis datis æquales A, & B, quæ sint NV, & MX; iungenturq; puncta VX. Deinde fiat ex propos. 25. l. 6. exp. vt H ad L, sic XT ad VT: Postmodum à puncto T per punctum O ducatur recta OT; Producaturque NV in Q, & XM in R, eruntque lineæ XR ad VQ in data proportione H ad L.

Probatur sunt enim TX ad TV. sic RX ad QV; ob parallelismum linearum VQ, & XR in triangulo VQT, sed XT ad TV ita effecimus, vt H ad L: Ergo erunt RX ad VQ, vt H ad L: Sunt verò NQ ad MR, vt ON ad OM, & ON ad OM, vt B ad A ex effectione, & pariter MX ad VN, vt C ad D; ergo effecimus id, quòd propositum fuit. Nam, partes additæ NQ, & MR obtinent rationem datam C, & D totæ verò XR ad VQ rationem datam H ad L ipsæ verò lineæ, quibus facta est additio, sunt æquales lineis datis A, & B.

EXPENSIO III.

De linearum diuisione.

REctam lineam secare proportionaliter præter ea, quæ tradidimus lib 6. hic docemus, cùm id multis operationibus deseruiat, multisque propositionibus, quæ deinde tradendæ sunt hæc doctrina necessaria euadat.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Rectam lineam ita secare, vt inter segmenta altera recta sit media proportionalis, quæ data debet esse, aut subdupla, aut minus, quàm subdupla illius, quæ secanda est.

SIt secanda AC in duo segmenta, ita quòd inter segmenta tanquam media proportionalis sit BA, non maior, quàm dimidium datæ AC. In E ad distantiam dimidiæ AE fiat semicirculus super AC diametro, & AB data fiat tangens in A, & faciat in A angulum rectum. Ducaturque diametro pa-

ralela

rallela EH ab altero extremo B. quæ secabit, vel tanget semicirculum ABC; quòd AB ex hypothesi minor sit, quàm semidiameter AE, vel ei æqualis. Deinde ab H; in quo secat, ducatur HF perpendicularis ad AC, secabitque AC in F.

Dico itaque quod inter AF & FC segmenta, media proportionalis est AB.

Probatur. Nam ex propos. 16. lib. 6. FH inter segmenta est media proportionalis; sed FH est æqualis AB, cum sint inter parallelas, & parallelæ. Ergo etiam AB est media proportionalis inter AF, & FC.

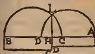
COROLLARIVM

Hinc data aliqua V. g. BA inuenies illius extrema proportionalia, nempe AF, & FC per præcedentem praxim, si simul iungas, vt vnam longitudinem efficiant, vt per se constat.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Rectam lineam duobus punctis in tres partes diuisam, in quatuor partes iterum diuidere per punctum intermedium; vt segmenta facta remaneant proportionalia.

Sit linea AB diuisa in punctis C, & D, quæ oporteat iterum diuidi in H, vt segmentum AH sit ad segmentum CH, vt segmentum HB ad segmentum HD. Diametro AD describatur circulus, & iterum diametro CB alius circulus describatur,



& à puncto, quo se intersecant in L ducatur perpendicularis ad H, & erit factum, quòd exposcitur. *Talisque erit proportio* AH *ad* CH; *qualis est* HB *ad* HD, *vel* CA *ad* CH, *vt* BD *ad* DH.

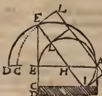
Probatur. Nam rectangulum ex AH, & HD est æquale quadrato HL ex 19. lib. 6. eo, quòd ex 8. lib. 6. HL sit media proportionalis, sic rectangulum ex CH, & HB erit æquale eidem quadrato ob eandem rationem; quare hæc rectangula erunt æqualia inuicem: quare ex propos. 10. lib. 6. AH latus vnius erit ad HC latus alterius, vt HB latus huius ad HD latus rectanguli, cuius alterum latus AH. Quare etiam *diuidendo* AC erit ad CH, vt DB ad DH.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datam lineam semel sectam, iterum denuò secare, vt partes sint in continua proportione.

Sit linea AD diuisa, vtcumque in B, quam oporteat iterum secare in C, vt partes sint in continua analogia, & sit AB ad BC, veluti est BC ad CD.

Diametro AB fiat circulus, & diametro AD alius circulus deducatur, & à puncto diuisionis datæ B erigatur perpendicularis, quæ secet peripheriam maioris circuli in E; & ducatur EH, cui fiat æqualis HC. Dico factum esse, quòd mandatum fuit, & AB, BC, & CD *in continua proportione reperiri.*



Probatur rectangulum ex IB, & EL est æquale quadrato ex BE ex 35. lib. 3. & ex 19. lib. 6 eidem quadrato ex BE, rectangulum ex AB, BD æquale est, quia AB, & CB, & BD ex 8. l. 6 sunt in cõtinua proportione. Rectangulum verò ex AB, & BD æquatur rectangulo ex AB, BC, quòd est AC, & rectangulo nigro ex AB, & CD. Pariter ex IB, & EL rectangulum æquatur rectangulo ex IL, & LE, & quadrato ex LE. Rectangula verò ista ex IL, & LE, & ex AB, & BC sunt æqualia, cum sint ex diametro, & LE, vel æquali BC: Quare ablatis istis rectangulis æqualibus rectangulum nigrum, & AL quadratum remanebũt æqualia, quamobrem ex 19. l. 6. latus nigri rectanguli, idest AB erit ad EL, hoc est ad BC; vt AC ad CD, quòd erat probandum.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam lineam sectam ita secare; vt pars intermedia sit vltima proportionalis trium continuè proportionalium.

Sit data linea AE, quæ, vtcumque sit diuisa in C; Oporteatque iterum eam diuidere in D, vt DC pars intermedia sit extrema proportionalis, & ita sit DE ad AD, vt AD ad DC.

Diuidatur EC bifariam in K, & erigatur ex E perpendicularis EL æqualis lineæ AE. Ducaturque AL per extrema A, & L: perque tria puncta C, E, L circulus transeat, & à centro V ducatur parallela ad AE, quæ occurrat AL in H puncto, & ex puncto H deducatur perpendicularis HD, & erit factum. Nam ita erit ED ad AD, vt AD ad DC.

Probatur AE æquatur EL, & HV est parallela ad AE: Ergo, & ipsa æquatur radio VL. Quare HV est etiam radius. Eadem ratione cum DH sit parallela ad KL erit æqualis lineæ AD, & HD ad angulos rectos incidet in HV radium: Vnde erit tangens; quare eius quadratum erit æquale rectangulo DE, & CD ex 36 lib. 3. & consequenter quadratum æqualis AD erit æquale rectangulo eidem CD, & DE, vnde ex 19. lib. 6. DE erit ad AD, vt AD ad DC.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Datam lineam ita secare, ut tota sit ad segmentum alterius, ut tota altera est ad segmentum huius.

SIt data AB, in quâ segmentum CB. Volumus autem ita secare BD in I V.g. vt tota DB sit ad CB, vt AB ad IB, Idest reciprocè proportionentur totæ, & partes. Vniantur ad verticem B; vt faciant quemcumque angulum. Per tria verò puncta A, C, D agatur circulus ex prop. 25. l. 3. Nam dico IB *esse segmentum, quod requiritur, & esse DB ad CB, vt AB ad IB.*

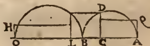
Probatur ex propos. 36. lib 3. elem. Coroll. Nam rectangulum ex AB, & CB est æquale rectangulo ex DB, & IB. Vnde ex propos. 16 lib. 6. ita erit DB ad CB, vt AB ad IB.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Datas duas rectas ita secare, ut segmenta sint reciproca in proportione.

SIt data AB minor pro libito secta in C, & maior BO secanda sit similiter, vt segmenta V.g OL, & BL sint proportionalia segmentis AC, & CB reciprocè, *nimirum* OL *sit ad* CB, *vt* AC *ad* BL.

Inter segmenta data AB, & CB inueniatur media proportionalis CD; Factoque super BO maiori, semicirculo reperiatur duo segmeta, quibus CD sit media proportionalis ex propos. huius 16. & sint BL, & LO. Eritque factum, quòd postulatur, *&* OL *erit ad* CB, *vt* AC *ad* BL.



Probatur rectangulum ex AC, & CB, idest CQ, est æquale rectangulo LM, ex OL, & BL, quòd inter umbo segmenta sit CD eadem media proportionalis; & ideo ex 19. lib. 6. sint æqualia quadrato ex CD facto. Vnde, & erunt æqualia inuicem. Quare ex 19. lib. 6. erit OL ad CB, idem latus quod AQ, vt AC ad BL, idem latus quam OH, quod erat præstandum.

PROBL. VII. PROPOS. XXII.

Auferre à lineis duabus datis partes, quæ inuicem habeant proportionem datam; ita tamen, ut residua correspondeant inuicem in proportione datâ, cùm fieri potest.

SInt datæ duæ lineæ A, & B, à quibus demendæ sint duæ partes in ratione C ad D, ita tamen, vt residua inuicem eam proportionem dicant, quam dicit H ad I.

Fiat FG ad FE, vt C ad D, & ex punctis E, & G erigantur perpendiculares EN, æqualis A, & GM æqualis B, coniungaturque MN, & fiat ex propos. 15. lib. 6 OM ad ON, vt H ad I. Si MO est maior, quam ML linea, in quam FG terminat, producta si fuerit, & FG non pertingat ad L, sed debeat produci, problema fieri potest, secus, si id non eueniat. Igitur ex O per F ducatur OQ. Dico factum esse, quòd exposcitur, *&* QG *esse ad* ER, *vt* C *ad* D; *residuas verò* QM *ad* NR *esse, vt* H *ad* I.

Probatur. Nam QG ablata correspondet proportione ad ER ablatã, vt FG ad FE, quæ ex effectione est eadem proportio, quæ C ad D. Sic MQ est ad RN, vt OM ad ON, quæ ex effectione est eadem, quæ H ad I. Ergo residuum MQ ad residuum NR est, vt H ad I; quod fieri oportebat.

Aliquando tamen fieri potest, sed reciprocè, vt si ZM inuenta, quæ esset, vt H ad I non pertingeret vltra H in O; sed esset minor, quàm ML, & esset MB, tunc enim deberet fieri EV ad VG, vt C ad D, & ex Z ad V ducenda esset BV punctata; quæ secaret in reciproca segmenta. Nam residuum à punctata vsque ad M esset ad MB, vt H ad I; at verò ablata BB ad G vsque ad punctatam, vt C ad D: ita vt fundamentum, & terminus essent in eadem quantitate V. g EN.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

Lineam diuisam extrema, & media ratione proportionali diuidere.

DIuidere extremâ, & mediâ ratione proportionali lineam est eam secare in tria segmenta facta, vt tota ad segmentum primum sit, vt segmentum, aliud secundum ad tertium.

Sit ergo linea data IH secta in L, quæ ita secãda sit in tria segmenta in aliquo puncto V. g. O, vt tota IH sit ad segmentum datum LH, vt alterum segmentum IO est ad OL.

Super segmentum IL fiat circulus, & à puncto H ducatur tangens HM, connectaturque punctum contactus MK, & ab eodem puncto contactus M demittatur perpendicularis MO. Et dico esse factum, id, quod postulatur. *Nam tota* IH *erit ad* LH, *vt segmentum factum* IO *est ad* OL.

Præassumpt. Obseruandum est lineam OM esse mediam proportionalem inter basis segmenta OH, & OB in triangulo rectangulo KMH ex 8. Eu. Et eandem OM esse mediam proportionalẽ inter duo diametri segmenta IO, & OL ex prop. 16 lib. 6. Quare si fieret ex OM quadratũ ei esset æquale rectangulum ex HO, & BO ex propos. 19. lib. 6. necnon, & rectangulum ex diametri segmentis IO, & OL ob eandem rationem. Quare hæc rectangula inuicem essent æqualia. Vnde ex prop. 10. lib. 6. habebunt latera reciprocè proportionalia: Ideoq; ea proportione respondebit HO ad OI, vt OL ad OB. Quo posito.

Probatur Propos. & progress. 1. Cum HO, sit ad OI, vt OL ad OB. Vtendo itaque *compositione rationum*, ita erit HO cum OI, idest tota HI, ad OI, vt OL cum OB, idest LK ad OK.

Progress.

Progreff. 2. Rurfus; fi HO eft ad OI, vt OL eft in proportione ad OX ex piæaffumpto vtemur *permutatione*,& erit antecedens HO ad OL antecedentem vt OI ad OX terminos. Vtémur deinde *dimfione* rationũ;& erit LH pars ad LO comparté,vt KE pars & radius, vel EX item radius ad KO compartem.

Progreff. 3. Cum ergo istæ proportiones ęquales fint, & fimiles *ex æquali arguendo* erit HE ad BI, quam primo progr. oftendimus, velut IK,vel LK ad OK: nimirum tota HE ad partem interceptam IO; vt pars extrinfecùs affumpta HL ad alteram partem intereeptam OL.

Progreff. 4. Cùm ergo LH correfpondeat proportione ad IO, vt LH ad OL poterimus denuo vti *permutatione*, & erit IH ad HL antecedentea, vt IO ad OL fequentes, nempe tota IH ad fegmentum datum HL,vt fegmentũ factum IO eft ad OL,quod erat demonftrandum.

EXPENSIO IV.

De proportione linearum Arithmetica.

Licet proportio Arithmetica fit facillima, non licet tamen eam omnino prætetire ad tractatus integritatem, ideo breuiter.

PROBL. I. PROPOS. XXIV.

Tres proportionales datis duabus lineis in Arithmeticâ proportione inuenire.

Hoc facillter fit: Datis enim duabus A, & B inquiratur maius extremũ. Fiat CL æqualis ipfi A, & addatur differentia VI femel, & fit LQ & erit CQ maius extremum.

Si verò exquiratur minus extremum fiat CL æqualis ipfi AV mediæ, & ei femel differentia LQ detrahatur, & fiet B minus extremum. Si verò inquiratur media datis B, & CQ fiat AT æqualis ipfi B, & differantia OQ, quæ eft inter minus,& maius extremum bifariam diuidatur, addaturq; ipfi AT, & fit AV media proportionalis. Patet inuentas effe extrema proportionalia arithmeticè, quia fingulæ lineę altera fuper alteram excrefcunt augmento æquali; quòd eft de ratione proportionis arithmeticæ: fic VA excedit B linea VT, & CQ excedit AV linea IQ, & IQ, & VT funt differentiæ æquales.

EXPENSIO V.

De linearum proportione Musica.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

Datis duabus lineis alteram proportionalem Harmonicam, fiue mediam, fiue extremas inuenire.

Sit primo datum maius extremum AB, & minus CB, cui oporteat mediam proportionalem Harmonicam reperire.

A puncto C excitetur perpendicularis CB, ficut & à puncto A perpendicularis AF; Sitque CE, cuiufcumque magnitudinis. Prolongetur vfq; ad I, quantum eft CB, & à B per E ducatur linea recta vfque ad AF. & vbi fecat in F ad I recta ducatur, quæ fecabit AB in O; quam effe fectam Harmonicè affirmo, *& OB effe mediam proportionalem inter CB, & BB* Harmonicè, ideft effe CB ad CA Geometrica in proportione, vt eft differentia OC inter primam, & mediam ad differentiam OA inter mediam, & extremam.

Probatur. Nam ob parallelifmum linearum AB, & CB in triangulo AFB, ita erit AB ad CE, vt AF ad BE.

Progreff. 2. Deinde confiderandum quoque eft,quod triangula nigra funt fimilia, quòd fint rectangula, & habeant angulos ad O ad verticem æquales vnde, & reliquus: quare erit AO ad AF, vt OC ad CI, vel æqualis CE. *& permutando* ita erit AO ad OC, vt AF ad CI, vel CE: Sed AF ad CE erat in primo progreff. vt AB ad CB; Ergo etiam differentia AO ad differentiam OC eft, vt maius extremũ AB ad minus CB, quare OB erit media proportionalis,cuius differentia à maiori extremo AO, ita refertur ad differentiam fuam à minori extremo CB, vt maius extremum ipfum refertur ad minus.



Si verò libeat minus extremum data media OB, & maiori AB reperire excitabis perpendicularem AF à puncto A,cuius longitudinis placeat V.g. AF, æqualemque deduces AT perpendicularem ab A, iungefque TB, & ab F per O duces FI,& à puncto, quo fecat in I rectam BB deduces perpendicularem IC, & vbi cadit in C erit extrema minor proportionalis harmonica CB.

Patet. Quia eft eadem conftructio, ac antecedens folo ordine variata.

Si verò, quis cupiat dato minori extremo CB, & media BO maius extremum. Is excitabit perpendicularem IC,cuius longitudinis libeat,& producet æqualem CE, perque punctum B à puncto B ducet rectam, & rurfus ab I per O aliam rectam, quæ fe interfecabunt ficubi V.g. in B. Ab F ergo puncto ad OB prolungatum duces perpendicularé, quæ cadet in A. Linea itaque AB erit maius extremum. Quod autem conueniant, patet: Maior eft enim angulus externus B, quã angulus niger E internus ae tus I, quod crus CO crure BC neceffariò fit minus in triágulo OCI, ideoq; TF,& BF non poffunt effe parallelæ,quod incidens EI non faciat angulos internum externo æquales.

Probatur verò prop ex eo,quòd fit alio ordin eadem operatio, quæ priùs in prima parte propofitionis, vt patet,



TRAC-

TRACTATVS XVI.

DE PROGRESSIONE PROPORTIONALI.

PARS PRIMA.

De Linearum Progressione Geometrica.



Idimus progressionem numeris procedentem, & eius singulares affectiones speculati sumus; modo linearum progressionem proportionalem oportet animaduertere in multis à prima diuersam, & præcipuè in eo, quòd in progressione numerali Geometrica vltimus numerus assignari nequit, ad quem progressio perueniat; hìc autem assignari potest vltimus lineæ terminus, ad quem licet infinita progressiò tendat, illumque consequatur, ita vt inter assignata extrema omnis multitudo innumera proportionalium concludatur, quamuis ad illud extremum successiuè procedendo nunquam sit peruentura, in duas verò partes hunc Tract. secabimus, agendo priùs de Geometrica proportione, deinde de Musica. Arithmeticam prætermittentes, vtpote à numerica non discrepantem.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam de progressionibus pertractemus ipsa principia, definitionesque videre oportet.

DEFINITIO I.

SEries Progressionis est quantitas finita diuisa secundum proportionem Geometricam datam.

Sit quantitas aliqua finita data AG, quæ diuidatur secundùm proportionem AB ad AC; ita quod AB sit ad AC, vt AC ad AD, & rursùs AC ad AD, vt AD ad AE, & cæt. hæc est series Progressionis Geometricæ.

DEFINITIO II.

GEometrica progressio est quotcumque terminorum secundum eandem rationem continuatio.

A BCDE F G

Geometrica itaque progressio est illa continuatio diuisionis secundum eandem datam rationem eiusdem quantitatis, ita vt nullum includat finem secundum se. Iam verò vt de progressione numerica dictum est, alia est discreta, alia continua. Discreta est, quæ non progreditur per easdem rationes: continua verò per eandem datam rationem, aut perpetuò augetur, aut perpetuò diminuitur.

DEFINITIO III.

TErminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur. Sed ei perpetuò accedet.

Itaque progressionis GF ad GE, & GE ad GD, & cæt. est A: quia licet diuisiones perpetuò contingant viciniores puncto A illud tamen punctum consequi non valebunt vt infra ostendetur.

EXPENSIO II.

De progressionum terminis inuicem comparatis, & differentijs.

PRiùs considerabimus progressionem in se cõparando terminos terminis; deinde comparabimus progressiones inuicem; tandem excessum terminorum ad finem animaduertemus. Tripliciter autem comparari possunt inuicem termini, vel quoad ipsam proportionem, quam cum alio dicunt, & hoc sufficienter aduertimus in proportionibus; tum numericis, tum quantitatis continuæ: at verò differentiæ terminorum, & eorum aggregata essent hic consideranda.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Continuè proportionalium differentiæ se eadem proportione respiciunt, quâ termini ipsi.

Sint in continua proportione AG, & AF, & AE, & AD, & cæt. ostendendum differentias quoque in continua correspondentia, & eadem, quà propositi termini reperiri. & GF esse ad FE, vt FE ad ED, &c.

Probatur Progress. 1. Tota AG est ad AF, vt AF ad AE. Ergo *diuidendo* GF erit ad FA, vt FE ad EA; & *permutando* EF ad FE erit, vt FA ad EA: quæ est eadem, ac proportio AG ad AF in fig. desin. 1.

Progress. 2. Repete idem argumentum de sequentibus terminis FA est ad EA, vt EA ad AD. Ergo *diuidendo* FE erit EA, vt ED ad DA. Igitur *permutando* erit FE ad ED, vt EA ad DA; quæ est eadem, quam obtinet GA ad FA.

Itaque ex primo progress. GF differentia est ad FE differentiam, vt GA ad FA: Rursusque ex secũdo progress. FE est ad ED, quæ sunt differentiæ, vt GA ad FA. Ergo eadem proportione fruuntur differentiæ GF, & FE, & ED, qua reperitur inter GF, & FA: Quare sunt continuè proportionales: idẽq; dicas de differentijs aliorum terminorum continuò proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si differentiæ sint continuæ proportionales; etiam alij termini eadem proportione continua gaudebunt, dummodo duo primi gaudeant.

Sint differentiæ continuè proportionales GF, & FE, & ED in eadem figura, addaturque ipsis EA, ita quod terminus AG sit ad AF, vt differentia GF ad differentiam FE. *Dico omnes terminos AG, & AF, & AE, & AD esse continuè proportionales.*

A   B C D E   F   G

Probatur ex primo Progress. Differentia GF est ad FE, vt AG terminus ad AF terminũ: Ergo *permutando* differentia GF ad terminum AG refertur, vt differentia FE ad terminum AF. Ergo *diuidendo* GF refertur ad FA, vt refertur FE ad EA. Quare *permutando* rursus GF respicit FE veluti FA respicit EA, quæ est eadem proportio, quæ est GA ad FA, & ex datis FE ad FD. Quare GA, FA, & EA erunt in eadem proportione.

Progress. 2. Sic quoque eodem discursu differentia FE refertur ad differentiam ED, vt FA ex primo progress. respicit EA ideo *permutando* FE in proportione se geret ad FA sicuti ED est ad EA: Quare *diuidendo* FE erit ad EA proportionatæ, sicut ED ad DA: Quare rursus *permutando* FE erit ad ED, vt EA ad DA.

Quamobrem cum ex datis termini GA sit ad FA, GF ad FE differentiæ, quæ ex datis est eadem proportio, ac FE ad ED; & rursus FA sit ad AE ex primo progress. vt eadem FE ad eandem ED, & ex secundo progress. EA sit ad DA pariter, vt eadem FE ad eandem ED, patet, quod quatuor termini GA, & FA, & EA, & DA erunt in eadem proportione, & sic dicas de alijs.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si plures fuerint quantitates in continuâ proportione, & aggregentur binæ, & binæ, erunt aggregata in continua proportione.

Sint V. g. in preced. fig. quatuor quantitates continuè proportionales GF, & FE, & ED, & DC; & simul sumantur GF, & FE. Deinde FE, & ED, tandem ED, & DC. *Dico hæc aggregata esse quoque continuè proportionalia.*

Probatur Progress. 1. GF est ad FE ex datis, vt FE ad ED. Ergo *componendo* GF, cum FE ad ipsam FE, erit vt FE cum ED ad ED: Igitur *permutando* GF cum FE erit ad FE cum ED, vt FE ad ED.

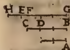
Progress. 2. FE est ad ED veluti ED ad DC. Ergo simili discursu *componendo* FE, cum ED ad ipsam ED erit in proportione, vt est ED cum DC ad DC, & *permutando* FE simul cum ED erit ad ED cum CD, vt ED ad DC. Sed hæc proportio ED ad DC eadem est ex datis, quę est FE ad ED: Ergo sunt in eadem proportione aggregata GF cum FE, ad FE cum ED, & hoc FE cum ED ad ED cum DC, cum habeant eam proportionem, quæ est FE ad ED; quod erat præstandum.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si sint tres magnitudines, & minor terminus, differentiaque à mediocri, & huius differentiæ, differentia à maiori differentia sint continuè proportionales, ipsi quoque termini erunt continuè proportionales.

Sint tres quantitates A, & BC, & GH, minorq; differentia CD, & hæc conferatur cum differentia maiori HF, & differat quantitate EF; sintq; continuè proportionales EF, & CD, & A. *Dico ipsas quantitates HG, & CB, & A futuras esse continuè proportionales.*

Probatur. Ponitur differentia CD respicere minorem terminum A, vt EF differentia differentiæ respicit ipsam differentiam CD. Ergo *componendo* CD cum A, idest CB erit ad A, veluti EF cum CD idest HF, est ad CD: Quà-



obrem etiam *permutando* CB erit ad HF fundaměta veluti A respicit CD termini. Quapropter rursus *componendo* medius terminus CB, cum HF maiori differentia hoc est terminus maximus HG, erit ad CB, vt proportionem dicit terminus A cum differentia CD, hoc est CB terminus medius ad ipsum A terminum primum, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

Colligitur propos. conuersa. Nam si quantitates A & BC, & GH fuerint continuè proportionales etiam differentia differentiæ maioris à minori, minor differentia, & primus terminus minor erunt continuè proportionales.

COROLLARIVM II.

Quod si differentia differentiæ EF differentia CD, & terminus primus minimus DA simul addantur, quod erunt continuè proportionales, patet ex prima huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Differentia differentiæ maioris, à minore ipsa differentia maior, & terminus maximus in quantitatibus continuè proportionalibus sunt continuè proportionales.

Sint quantitates, vt in præced. figura continuè proportionales A, BC, & GH, & differentia EF differentiæ maioris HF à minori CH, & terminus maximus HG. *Dico esse continuè proportionales EF, & HF, & HG.*

Probatur ex prima huius, vt differentia HF ad differentiam CD, talis quoque est proportio termini HG ad terminum CB: quare *diuidendo*, vt HF residuum est ad CB ablatum, idest FG æqualem. Sic EF residuum ad differentiam GO, vel æqualem HE; Ergo *componendo*, vt HF cum FG, quæ est maior terminus ad HF maiorem differentiam: Sic erit EF cum HE, quæ est HF maior differentia ad EF differentiam differentiæ.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si sint tres quantitates continuè proportionales, & maiori termino bis medius, semel vltimus aggregetur; Mediocri verò semel vltimus, erunt hæc aggregata, cum vltimo termino in continua proportione.

Sint tres quantitates continuè proportionales AB, & BC, & CD, Dico, quod si sumantur omnes simul, & addatur BO æqualis medio termino; deinde sumatur medius terminus semel cum minimo, & fit CA, & tandem minimus, *quod omnes adhuc erunt continuè proportionales, & ita erit* BA *ad* CA, *vt* CA *ad* AB.

Probatur. Quoniam ponuntur continuè proportionales DC, & CB, & BA. Si arguatur à *compositione* rationum erit DC cum CB, ad CB in eadem proportione, ac CB cum BA ad BA. Ergo *permutando* erit DC cum CB lines proportionata ad CB cum BA, velutj est CB ad BA: Rursusque *componendo* erit DC cum CB, & CB cum BA simul, hoc est BA ad CB cum BA hoc est CA, et CB cum BA, hoc est CA ad BA.

Itaque omnes termini BA, CB, & DC, & insuper iterum medius CB, vel æqualis ED ad medium CB cum primo BA habent eandem proportionem, quã ipse medius CB cum primo BA habet ad ipsum primum BA, quod erat ostendendum.

EXPENSIO III.

De serie linearum proportionalium inuicem comparatarum.

Visis proprietatibus differentiarum, simulque aggregatorum proportionalium terminorum, restat contemplari series linearum ad inuicem comparatas, & maximè earum, quæ ab eodem principio enascuntur: hæc enim cognitio in primis deseruit ad inueniendas areas Parabolarum, & Ellipsium, corporibusque solidis, vt plurimùm dimetiendis.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si sint duæ series linearum proportionalium, & perueniant ad eundem terminum, etiam si sequantur, termini sequentes vnius seriei ad terminos alterius erunt, vt antecedentes, dummodò in eadem remotione à communi termino summantur.

Sint ABC series vna decrescens, FGC crescens, & terminus communis C, & sequantur in sua progressione, & sint termini in prima serie A, B, C, D, E, at in secunda F, G, C, H, I, *Dico, quod sicut est* B *ad* A, *ita sit* D *ad* H, & sicut est A ad F, sic respondeat in proportione B ad I.

Probatur. Quia BCD ponuntur continuè proportionales erit rectangulum ex B, & D ex propos. 19. lib. 6. elem. æquale quadrato ex C facto: sic ponuntur proportionales GCH erit æquale rectangulum ex G, & H quadrato C: Quare erunt æqualia rectangulũ ex H, & D, & rectãgulũ G, & H: habebunt itaque reciprocè latera ex 20. lib. 6. proportionalia, & ita erit B ad G, vt H ad D.

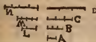
Similiter

Similiter A, B, C, D, E sunt continuè proportionales: Ergo erunt ex *æquo* AEE continuè proportionales: Vnde vt priùs rectangulum ex AE erit æquale quadrato C. Pariterque FGI ex *æquo* erunt continuè proportionales; quapropter rectangulum ex F, & I erit æquale quadrato ex C. Vnde rectangula ipsa inuicem erunt æqualia, vtpote æqualia vni tertio, & hinc etiam latera ex 10 lib. 6. elem. erunt reciprocè proportionalia, & A erit ad F, vt I ad E.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Si sint duo ordines continuè proportionalium incipientes ab eodem termino. Tertij termini primo incluso erunt in duplicata ratione secundorum ad inuicem, & quarti in triplicata, & quinti in quadruplicata, & sic in infinitum.

QVoniam ABC, & ALM sunt continuè proportionales erunt quadrata ex A, & C æqualia quadrato B, & ex A, & M æquale quadrato ex L: sed quadrata ipsa sunt ex 20. lib. 6. Eucl. in duplicata ratione suorum laterum: Ergo etiam rectangula illis quadratis æqualia: Sed rectangula, vtpote eiusdem altitudinis A sunt inuicem, vt bases C, & M, ergo C, & M erunt in duplicata ratione linearum B ad L.

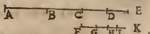


Lineæ verò quartæ erunt in triplicata: Nam quadrata ex C, & M sunt in duplicata ratione suorum laterum, quibus æquatur quadrato quidem C rectangulum ex B, & D, & quadrato ex M rectangulum ex L, N: quare inuicem ex rectangula erunt vt quadrata: sed quadrata ex C, & M obtinent proportionem duplicatam laterum C ad M, quæ latera dicunt proportionem duplicatam respectu B ad L, ergo quadrata predicta ex C, & N habebunt proportionem quadruplicatam eius, quæ est B ad L. Quamobrem rectangula quoque ex B, & D, & ex L, & N æqualia quadratis consequentur rationem quadruplicatam linearum B ad L; sed proportio rectangulorum est composita ex proportione laterum B ad L, & D ad N. Tolle itaque proportionem B ad L, cui erat quadruplicata, & remanebit proportio linearum D, N triplicata eius, quæ est B ad L; & sic concludes de alijs.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series composita, ex paribus numero terminis ad aliam ex tot terminis conflatam, & in eadem proportione continuatam habet eandem multiplicatam proportionem, quæ ex terminis conflatur.

SInt duæ series quantitatum in eadem proportione, sed pari numero terminorum constantes AE, & FK V. g. quatuor, ita vt sit AB ad BC, & hic ad CD, & hic ad DE, & hic ad FG in eadem proportione. *Dico, quod tota series, seu quantitas AE ad quantitatem FK habet proportionem quadruplicatam vnius termini ad alium puta AB ad BC.*

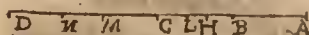


Probatur quilibet terminus obtinet proportionem quadruplicatam ad quemlibet terminum alterius seriei, & AB huius ad FG alterius quadruplicatam proportionem habet eius ex def. 7. Tract. 9. quæ est AB ad BC, quis per quatuor terminos AB, & BC, & CD, & DE vsque ad FG continuatur. Idem dicas de termino BC respectu termini alterius seriei GH, & sic de alijs: Quare omnes antecedentes termini in AE, qui constituunt AB ad omnes consequentes in FK, nempe KF habebunt proportionem quadruplicatam quoque cum vnus antecedentium AB ad alterum consequentium FG talem consequatur proportionem, vt patet ex propos. 17. lib 5. elem.

PROBL. I. PROP. X.

Duas series similium proportionalium datis tribus terminis continuè proportionalibus exhibere.

SInt disponendæ duæ series continuè proportionalium, & dentur tres termini AB, & AC, & CD: Inueniatur inter AB, & AC, media proportionalis AM. & inter AC, & AH media proportionalis AL, & sic semper fiat, & erit inuenta vna series. Rursus inter AC, & CD media proiiciatur AM, & inter AM, & AD media proiicitur AN, & sic semper fiat. Dico, *quod hæ duæ series inuentæ erunt similes, & quilibet terminus erit ad alium terminum similis; ac quilibet terminus eiusdem seriei erit ad alium sibi correspondentem.*



Probatur. Quoniam inter continuas proporcionales AB, & AC, & AD medias proiecimus HA, AM erunt omnes in continuâ proportione: Quare ex prima b. etiam differentiæ erunt in côtinua eadem proportione MC, & MD: HB, & CH.

Progress. 2. Et quia inter AH, & AC est media proportionalis AL, erunt AH, & AL, & AC continuè proportionales, sicut, & AM, & AN, & AD, quod NA sit media, tales erunt, & ideo ex 1. huius etiam differentiæ erunt in eadem proportione, & HL erit ad LC, vt AL ad AC; Et pariter MN erit ND, vt AN ad DA, quæ est eadem, quæ AL ad AC, ex Thesi eo quod sint mediæ proportionales AL, & AM inter similes proportiones AH, & AC atque inter AM, & AD:. Vnde, & differentiarum proportiones erunt similes, atque HL ad LC, vt MN ad ND.

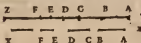
Progress. 3. Et quia ex primo progr. est MB ad HC; vt CM ad MD. Erit quoque *componendo* BH cum HC, idest BC ad ipsam HC, vt CM cum MD idest CD ad ipsam DM.

 Pro-

Progress. 4. Sic quia est ex 2. progr. HL ad LC, vt MN ad ND, erit componendo HL cum LC, idest HC ad LC, vt MN cum DN idest MD ad ND: Vnde erit HC ad CH veluti CD ad DM ex 3. progr. & ex 4. progr. CH ad CL, vt MD ad DN, & sic consequenter, si alij termini adsint.

THEOR. IV. PROPOS. XI.

* *Si ab aliqua data serie desumantur alternè termini, & fiat series, hac series ad primum terminum duplicatam habet rationem eius, quam habebat data series ad suum primum terminum.*



SIt A Z data series, à qua desumantur alternè termini intermedio semper relicto vt AB, CD, & EF, & cæt. & fiat series AX. Dico seriem AX esse ad primum terminum AB in duplicata ratione AZ ad AB.

Prob. AB est ad BC, vt BC ad CD, ergo ex æquo AB erit ad CD in duplicata ratione eius, quæ est AB ad BC, sed, vt AB ad CD, ex 9. prop. h. ita est AX ad CX, cū illæ series AX, & CX ob duplicādam eandem rationē fiant quoq; cōtinuè proportionales, ergo AX ad CX duplicatā habet rationē AB ad BC, sed vt AB ad BC, ita ex propos. 9. huius est A Z series ad BZ seriem: ergo AX series ad CX seriem duplicatam habet rationem seriei ZA ad seriē ZB, ergo p *conuersionem* rationis erit quoque AX totum ad compartem AB, & primum terminum in duplicata ratione eius, quæ est totius AZ ad compartem AB, & primum terminum.

EXPENSIO IV.

De progressionis termino.

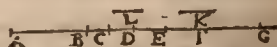
MOdo consideramus progressiones linearum in partibus suis, sed quatenus finitæ sunt, & est vtilissima consideratio maximè ad quadrandas superficies Ellipticas, & Parabolicas, & huiusmodi.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Si in aliqua finita quantitate fuerit pars assignata in proportione ad residuum, vt pars residui in proportione eadem ad remanens aliud residuum; hæ partes in quantitate finita in infinitum multiplicari possunt.

SIt data magnitudo AG, & sit in ea pars IG ad residuum suum IA, vt pars huius residui EI est ad suum residuum EA. Dico, *quod in infinitum in quantitate GA ista partes poterunt multiplicari*; fiat GI ad IE sic IE ad E.

Prob. Pr. I. Quoniam itaque est IG ad residuum IA, vt IE pars residui ad id, quod hinc restat EA; Erit quoq; *permutando* pars GI ad IE partem, nempe IE ad E ex constructione, veluti residuum IA ad aliud residuum EA. Quare rursus *permutando* erit IE ad AI, vt E ad AE; Verū E est minor, quàm IA. Ergo ex propos. 12. lib. 5. elem. etiam E erit minor quam EA. Vnde ex EA poterit sumi æqualis ED: Eruntque GI, & IE, & ED tres continuè proportionales: Sicut ex effectione erant IG, & IE, & E, & pariter erit IE ad IA, vt ED æqualis ipsi E ad EA, vt ostensum est.



Progr. 2. Quoniā itaq; est IE ad EA, vt ED ad EA erit quoq; *diuidendo* IE ad EA, veluti ED ad DA. Quare si inueniatur duabus IE, & ED tertia proportionalis L idem argumentum, quod supra iterabis. Nam, quia est pars IE ad residuum EA, vt pars ED ipsius residui ad residuum aliud DA, erit *permutando* IE pars ad ED partem, idest ex effectione ED ad L, vt residuum EA ad aliud DA, & rursus permutando ED ad AE proportione respondebit, vt L ad DA. Verum ED est minor, quàm EA, vt dictum est. Ergo etiam L minor erit, quàm DA: Vnde ex DA poterit abscindi DC æqualis ipsi L, & sic in infinitum continuari.

COROLLARIVM.

QVod si fuerit pars ad residuum, vt huius pars ad secundum residuum, & proportio partis ad partem continuetur; continuabitur etiam proportio partium quarumcumque inuentarum ad sua residua V. g. quòd si ED sit tertia proportionalis tribus GI, IE, & ED, erit etiam IE ad EA in eadem proportione, vt ED ad DA: quia ostensum est in 2. progr. quando argumentati sumus ex *diuisione rationis* IE esse ad EA, vt ED ad DA.

Et idem dicas de parte DC: Nam, quia vt in fine 2. prog ostensum est ED est ad EA, vt L, vel DC ad DA, ergo *diuidendo* ED erit ad DA, vt DC ad CA, & sic continuè.

COROLLARIVM II.

* HInc est; quod si linea, vel magnitudo aliqua proportionali aliquo decrescente crescat augmento, quod illæ partes decrescentes in infinitum poterunt in ea multiplicari. Nam in linea AG, Quia GI est ad IA, vt IE ad EA, erit etiam permutando GI ad IE, vt IA ad EA. Ponitur quoq; IE ad EA, vt ED ad DA ex effectione, ergo permutando erit IE ad ED, vt EA ad DA. Quia ergo est GI ad IE, vt IA ad EA. Et IE ad ED, vt EA ad DA. Ergo erunt GI, & IE, & ED partes continuè proportionales, vt residui IA, EA, & DA; & ideo ex præc. in infinitum procedent.

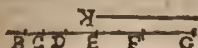
THEOR. II. PROP. XIII.

Si proportio maioris inæqualitatis continuetur magnitudo vltra omnem datam magnitudinem augetur.

SIt data proportio CE ad ED, & assignata quantitas K. Dico, quòd si hæc proportio continuetur

nuetur, quantitatem illam maiorem quantitate K quantumlibet magnâ euasuram.

Probatur. Differentia DC replicata multoties, certum est, quod tandem superabit quantitatem K. Sed Additiones, quæ ipsi DB accrescunt, ex prosecutione, & continuatione CB ad DB proportionis, sunt maiores singulæ; quàm DC. Ergo continuatæ toties, quoties replicata est quantitas DC superabunt ipsam K.



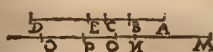
Quod autem differentiæ, seu additiones DC, & ED, & EF, & cæt. sint maiores; quam DC; patet ex prima huius. Nam sunt in eadem proportione, ut termini. Quare, ut est DB ad BE terminus sic differentiæ DC ad DE; sed maior est BE, quàm DB, Ergo ex propos. 12. lib. 5. elem. etiam ED, quam DC maior erit.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si à quantitate aliqua partes auferantur, ut sit prima pars ad suum residuum, ut pars ipsius residui ad residuum suum; fiet tandem residuum datâ quacumque quantitate minus.

Sit quantitas AD V. g. linea, ex quâ auferatur quantitas, & pars AB, & à residuo BD pars BC: ita quòd sit AB ad BD, ut BC ad CD. Dico, *quod si hoc continuè fiat, relinqui tandem partem, qua libeat assignata* MN *minorem*.

Sit quantitas MN data, & reperiatur alia NO, cui sit MN, ut residuum BD est ad totam AD, & continuetur hæc proportio, donec euadat maior in Q, quam AD; hoc enim eueniet aliquando ex præced. Deinde in ratione prædicta partis ad residuum diuidatur toties AD, quoties MQ diuisa est, hoc enim poterit fieri in infinitum ex 12. huius.



Progress. 1. Quoniam MN, & MO, & MP, & MQ, sunt continuè proportionales, erit MN ad MO, ut MP ad MQ; sed ex effectione MN est ad MO, ut residuum BD est ad AD. Igitur MP erit ad MQ: ut DB ad AD. Et ideo *inuertendo* QM erit ad MP, ut AD ad DB.

Progr. 2. Rursus *permutando* MQ erit ad AD, ut MP ad DB: sed ex effectione MQ maior est, quam AD: Ergo etiam MP maior erit, quam BD.

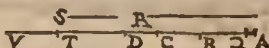
Progress. 3. Deinde quia est AB ad BD, ut BC ad CD erit quoque *componendo* AB cum BD idest AD ad BD; ut BC cum CD, idest BD ad CD; Ideoque proportio AD erit ad BD, ut BD ad AD, & etiam erit, ut MQ ad MP eadem, quæ est AD ad BD, ut dixi Progr. 1. & ex effectione MQ ad MP, est veluti MP ad MO: Quare cum sit BD ad CD, ut PM ad MO, erit quoque permutando BD ad PM, ut CD ad MO: Sed maior est MP ex probatis, quàm BD. Ergo maior quoque erit MO, quam CD.

Idem autem ostendes de MN respectu ED: quare erit maior MN data quantitas; quam ED, quod erat ostendendum.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Si fuerit proposita talis quantitatum series, ut quilibet ablatus terminus ab aliqua alia sit ad eius reliquum, ut sequens terminus à reliquo ablatus ad id, quod denuò remanet; erit illa alia quantitas æqualis toti seriei infinitæ terminorum propositæ.

Sit series infinita terminorum proposita AB, BC, CD, & cæt. qui auferantur à quantitate AV; & quilibet V. g. AB relinquat residuum BV, ad quod sit AB, ut BC alius terminus ablatus à residuo est ad reliquum suum CV. Dico; *quod hæc quantitas* AV *æquat totam seriem*.



Probatur non erit maior tota serie; sed nec minor: Ergo totam seriem æquabit.

Quod non sit minor, patet ex 11. propos. Quia tota series poterit intra ipsam continuari in infinitum; ita quòd numquam perueniatur ad V: Ergo quantitas AV minor non erit serie terminorum infinita.

Quod verò non sit maior ostenditur: nam si esset maior aliquo excessu esset maior. Sit is TV, & continuetur proportio AB ad BC in linea AT; donec sit minor pars residua, quam TV, quod ex propos. præc. fieri potest: cum ergo series infinita superet AT: Ergo AV non superat seriem terminorum omnem quantitate TV; sed minore, cùm iam continuata minus relinquat, quam TV contrà hypothesim; & semper idem argumentum vrgebit: Ergo quantitas AV nulla assignabili quantitate excedet infinitam seriem: sed nec ea minor est: Ergo illam æquat, quod erat ostendendum.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Datâ serie infinitâ terminorum per eandem proportionem procedentium, & primâ differentiâ inuenire magnitudinem, summæ omnium terminorum æqualem.

Sit series infinita AB, & BC, & CD, & cæt. & differentia maioris termini à sequenti BC, sit AZ, & fiat differentia AZ ad primum terminum AB, ut AB ad aliud, & inueniatur AV: ex prop. 14. l. 6. elem. Dico *lineam* AV *toti magnitudini infinitæ terminorum æqualem esse*.

Probatur. Quoniam ex constructione AZ differentia est ad AB primum terminum, ut terminus AB ad quantitatē AV. Etiam *diuidendo* AZ erit ad BZ, est AB ad VB. Idoeque *componendo* AZ cum BZ ad BZ, ut AB cum AV ad BV, hoc est AB erit ad BZ equalem BC, ut AV ad BV.

Rursusque *permutando* AB erit ad AV, ut BZ idem terminus, qui BC ex effectione ad BV. Quare *diuidendo* AB erit ad BV, ut BZ, vel BC ad CV. Quare ex præced. AV æquabit totam seriem datorum terminorum.

CO-

COROLLARIVM I.

HInc est, quòd, si fuerit AB ad AV, vt BC ad BV; quod AV æquabit totam seriem in finitorum terminorum. Item si fuerit AB ad BC, vt AV ad BV, vel BV ad CV: erit enim *permutando*, vt priùs AB ad AV, vt BC ad BV. Quare, & *diuidendo* AB erit ad BV BC ad CV.

Item si AV, BV, & CV, sint continuè proportionales, quoniam *diuidendo* erit AB ad AV, vt BC ad CV. Quare semper quantitas AV æquabit infinitam terminorum seriem.

COROLLARIVM II.

HInc quoque educitur, quod cum sit AB ad BC, vt AV ad BV, & AV continent omnes antecedentes alicuius seriei, & BV omnes consequentes, licet in infinitum procedentes; quod tota collectio infinitorum antecedentium ad collectionem infinitorum consequentium erit, vt vnum antecedens ad vnum consequens.

COROLLARIVM III.

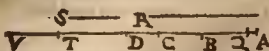
DEducitur quoque differentiam maioris termini à minore, & maiorem terminum, & totam collectionem terminorum esse in continua analogiâ: siquidem fecimus, vt AZ differentia ad AB primum terminum; sic AB ad aliud; & inuenimus totam collectionem terminorum infinitorum AV.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datam magnitudinem iuxta proportionem datam, ita diuidere; vt progressio secundum eandem seriem continuata terminetur in punctum destinatum.

SIt data proportio R ad S, & secundùm hanc proportionem sit diuidenda AV, vt progressio terminorum finiat in V.

Diuidatur taliter AV, vt proportio AB ad BV sit ea, quam habet R ad S ex prop. 13. Cor. 6. Elem. deinde iuxta proportionem AV ad BV, sic fiat AB ad BC, & erit factum id, quod desiderabatur.



Probatur. Vt AV ad BV; sic est AB ad BC. Ergo etiam ex propos. 22. lib. 5. Reliquum VB erit ad reliquum VC, vt AB ad BC. Vnde ex propos. 16. huius, terminus progressionis est V, hæc autem progressio ex effectione est vt R ad S.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datis pluribus rationum progressionibus inuenire quantitatem, quæ omnes adæquet.

SInt datæ tres proportionû AB, & CD, & FE series & EB 16. h. inueniantur tres quantitates, quę illas adæquent H, K, L, & hæ quantitates in vnam

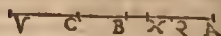


summam redigantur, eritque factum, quòd exoptatur.

Patet. Nam, cùm quælibet quantitas vt H æquet suam seriem V. g. proportionis A ad B, sicut K seriem proportionis C ad D, & tandem L seriem proportionis F ad E; si simul colligantur eas omnes series propositas tota æquabit.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam magnitudinem, ita secare, vt duplicis seriei idem sit terminus.



SIt AV quantitas, & secetur in B; vt AB sit ad BV, vt BC ad CV ex propos. 15. lib. 6. Elem. Rursúsque secetur in Z, & fiat, vt AZ ad ZV; ita ZX ad XV, & ex propos. 15. harum duarum proportionum erit idem terminus V. Quod patet ex constructione ipsa.



TRACTATVS XVI.

PARS SECVNDA.

De Linearum Progreſsionibus Harmonicis.



Lij antecedentes Tractatus à diuerſis Auctoribus ſelecti ſunt, aliqui etiam multa additione cumulati, & omnes aliqua ſaltem propoſitione, aut oſtenſione adaucti: hic Tractatus omnino meus. Licet; vt noſtri inſtituti eſt plurimis intermiſſis in compendium redactus.

EXPENSIO I.

De progreſſionis Harmonicæ continuatione.

DOcuimus ſupra datis duabus lineis, vel interſerere lineam mediam harmonice proportionalem; ſicut, & extremas inuenire: Modo docendum eſt eas continuare, & in plures terminos propagare, & priùs declarationes dictionum nonnullarum oportet precedere,

DEFINITIO I.

CEntrum harmonicum eſt punctum, in quo plurimæ lineæ conueniunt muſicas in proportiones aliquam lineam; vel aliquas lineas diuidentes.

Sic N in fig. ſequenti erit centrum, ſi lineę NO, & NP diuidant AB in partes proportionales.

DEFINITIO II.

LInea intercepta vocatur, quæ inter centrum, & primæ lineæ harmonicè diuiſæ extremum intercipitur.

Sic NB erit intercepta inter AB lineam harmonicè diuiſam, & N centrum.

DEFINITIO III.

BAſes æquales triangulorum ſunt partes æquales cuiuſdam lineæ interceptæ parallelæ, quæ radiis terminantur.

DEFINITIO IV.

RAdij harmonici ſunt lineæ quædam, quæ à centro eodem diſcedentes in baſes æquales terminant, & lineam aliquam, vel aliquas harmonicè diuidunt.

Lineæ itaque, quæ baſes æquales vocantur ſunt vt AO, & OP, & cæt. quæ radios NO, & NP, & cæt. recipiũt. Si ergo lineam aliquam V.g. AB in partes harmonicè proportionales diuidant, illi radij vocabuntur radij harmonici.

PROBL. I. PROPOS. I.

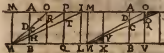
Datam lineam ita ſecare, vt ſingulæ partes ſucceſſiuè proportionem muſicam obtineant.

SIt AB diuidenda in partes muſicè continuè proportionales ita, quòd ſit BC, BD, BA in proportione muſicâ ſicut etiam ſunt BH, & BC, & BD, & ſic ſucceſſiuè. Ducantur duę parallelę per vertices AB, quæ ſint MI, & NL, & à puncto A ſumpta qualibet parte M A, ſingulæ fiant æquales in infinitum AO, OP, & PI. Sicut, & NB, iunctiſque punctis N, & M à puncto N, ducantur rectæ NO, & NP, & IN in infinitum. Dico, *has partes, quæ ductæ in linea* AB *deſignant eſſe muſica proportione ſingulæ toti correſpondentes,* & BH, & BC, & BD, & BA eſſe muſicè proportionales.

Aduerteq; quod non eſt neceſſe, parallelas MI, NL eſſe perpendiculares ipſi AB; ſed ad quemcunque angulum.

Probatur ea eſt proportio muſica, quàm proportione Geometricâ, ita eſt primus terminus ad vltimum, vt differentia ad differentiam. Sed CB eſt ad BA; vt differentia CD ad differentiam DA. Ergo ſunt in proportione muſicâ.

Probatur verò aſſumptum: Ita eſt CB ad PQ, ideſt æqualem AA, vt OR ad MN, ideſt BA ob triangulorum ſimilitudinem MNP, & NPQ: Quare RO, & CB erunt ex propoſ. 9. lib. 5. æquales: Cùm itaque ſit ob paralleliſmum linearum OR ad DC, vt MN ad DN, & vt NO ad DN, ſic MN ad DA; erit etiam OR, ideſt BC ad DC, vt MN hoc eſt BA ad DA: Quare permutandò erit quoq; terminus BC ad BA totam, vt DC differentia ad DA differentiam.



Idem

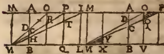
Idem ostendemus de tribus BH, & BC, & BD, quod sit BH ad BD termini extremi, vt CH ad CD differentiæ. Nam BH æquatur ipsi PT ob triangulorum PTI, & NHB in angulis ob parallelas æqualitatem, & æquales bases NB, & PI ex hypothesi: Quare erit, vt CH ad PT, vel BH: sic NC ad NP; sed NC æquatur ipsi RP: Ergo sicut RP ad NP, sic CH ad PT: sed vt RP ad PN sic RO ad MN. Ergo ex 9. lib. 5. RO erit in proportione ad NM, vt CH ad PT, vel æquali BH, idest, quæ CB ad BA, vt supra diximus. Sed OB ad NM, idest CB ad AA habent eam proportionem ex ostensis, quam DC ad DA; hoc est NA ob similitudinem triangulorum DAO, & NDA: Ergo CH ad PT, idest BH, vt supra dictum est, vt DC ad BD: Quare permutando CH erit ad DC differentiæ BH ad BD termini. Quòd si ND non sit æqualis reliquis AO, & OP, sed quælibet, vel irrationalis, probl. tamen ostendetur præsupponendo tamen AO, & OP æquales, vnde ex 4. lib. 6. Coroll. etiam CQ, & QP ob similitudinem triangulorum ex parallelis ortum erunt æquales.

Quoniam ita est DA ad NM, vt AO ad OM, & OD ad ON, & ideo, vt QC ad QN. Fiat NX æqualis OP, & ducatur XY. Erit igitur YX ad QV, vt NY, quæ æquatur ipsi QP, & ideo ipsi CQ est ad NQ. Quod enim NY sit æqualis ipsi QP: patet: Quia ob parallelas triangula NYX, & OQP sunt æqualia in angulis, imo etiam in lateribus ex eo, quia fecimus NX æquale OP: vnde, & cætera crura vnius, alterius cruribus erunt æqualia. Cùm itaque sit YX hoc est OQ ad QV, vt NY, idest QP, & ideo CQ ad NQ, & OQ ad VQ, vt CD ad CB ex propos. 4 Elem. Coroll. Ergo DC erit *ex æquo* ad CB, vt CQ ad NQ, ideoq; ex *æquo* rursùs, vt DA ad MN. Cum ergo sit DC ad CB, vt DA ad MN erit *permutan*do DC ad DA, vt CB ad MN, idest æqualem AB, nempe, vt differentia DC ad differentiam DA, sic erit terminus BC extremus ad terminum extremum BA.

PROBL. II. PROPOS. II.

* *Plurimas lineas in infinitum inuenire, quæ proportione Musicâ decrescant, vel accrescant.*

FIat eadem operatio, quæ priùs, & vtere eadem fig. & dico NM, DA, OB, PT *continua proportione musica decrescere.*



* Probatur. Similitudo enim triangulorum efficit; vt PT æquetur ipsi BH; sunt enim similia triangula NHB, & PTI ob angulos ob parallelismum linearum æquales. Sic OB æquatur ipsi CB. Sic DA ipsi BD; sed BH, & BC, & BD, & BA sunt in proportione musicâ, vt ostendimus. Ergo etiam PT, & OB, & DA, & MN, erunt in proportione musicâ.

Sit deinde data PT, cui plurimas in proportione musicâ respondentes volumus inuenire. Ducatur ad eius extremum P linea MI, & assumpta in ea placita parte PT in reliqua numerantur partes quotquot volueris ei PT æquales, vt PO, & OA & AM; erigantur que MN, AD, OB parallelæ ipsi PT a punctis M, A, O, & ducetur ab I per T extremum datæ recta, quæ illam secet in N, & à puncto N rectæ ad singula puncta ducantur AO, P; Eruntque segmenta intercepta NM, DA, OB, & PT musicè continuè proportionales; patet ex præcedenti.

THEOR. I. PROP. III.

* *Linea diuisa successiuè; secundum proportionem musicam erit diuisa in partes successiuæ denominationis.*

SIt linea AB diuisa in partes Harmonicè proportionales DB, & CB, & NB. Dico *eam esse diuisam in partes successiuè denominationis* V. g. primo in duas, secundo in tres, tertio in quatuor; ita vt primus terminus sit tota, secundus dimidia, tertius tertia pars, quartus quarta, & cæt.

Aduerte tamen, quòd non intendimus probare quod necessariò ordo incipiat à dimidia, cum possit incipere à qualibet alia denominatione V. g. à quarta, seu quinta parte, seu etiam irrationalis omninò sit; nec possit subire denominationem aliquam seriei harmonica.

* Probatur autem ita est NA ad MN, vt AO ad OM ob parallelas ex 4. propos. lib. 6. Elem. sed AO est dimidium OM ex effectione. Ergo, & NA erit medietas lineæ AB. Sic CB erit tertia pars lineæ totius AB.

Prob. autem; quia CB est ad PQ, vel AB, vt NB ad NQ; sed NB ex effectione est tertia pars NQ. Ergo etiam CB taliter erit in proportione geometrica respectu totius AB.

Sic ostendetur de HB quod sit tertia pars totius AB, & sic de reliquis. Quod si AM sit irrationalis respectu AO etiam tota composita MO ad AD irrationalis erit ex propos. 10. lib. 10. quare, & omnes MO, MP, & cæt. vtpote ex incommensurabilibus composita magnitudo, vnde NA quoque ad MN incommensurabilis erit, & sic dices de alijs.

COROLLARIVM

HInc est quod si lineam quamcumque successiuè, primò in tres V. g. secundo in quatuor, tertiò in quinque, quartò in sex diuidas, hæ omnes partes erunt musicè proportionales, eritque tertia pars ad quartam, & hæc ad quintam, & cæt. successiuè in proportione Harmonica proportionalis.

PROBL. III. PROPOS. IV.

* *Datá lineá harmonicè secta alias quascumque in infinitum harmonicè similiter secare.*

SIt data recta AB secta in C, & D harmonicè, & oporteat alias similes secare. Ducantur à punctis BCD parallelæ CE, & DF, & BG, mensureturq; super AB prolungatam, si necessarium sit, longitudo lineę diuidēdę AH: Facto ergo centro in A interuallo AH portio circuli ducatur HI, & punctum, quo secat BG connectatur cum A centro recta AI. Dico AI sectam esse, vt BA harmonicè in K, & T.

* Pro-

* Probatur. Nam ex Propos. 4. lib. 6. vt est AC ad CB, vt AB ad BI, ergo componendo AC est ad AB, vt AB ad BI, quod memoriâ tenendum.

Rursus AC ad AK; sic est AB ad AI; & AD ad AT. Ergo ex p. 28. l. 5. erit pars CD residua ad partẽ KT residuam, & pars DB ad partem TI, vt Ab ad AI totum, vel vt DA ad AT alterum totum. Cum ergo sit CD ad KT, vt OK ad TI erit etiam *permutando* CD ad DB, vt BT ad TI: Sed CD est ad DB, vt AC ad AB, ex hypothesi: Ergo etiam KT erit ad TI, vt AC ad AB: sed vt AC ad AK, ita est AK ad AI. Ergo erit AK ad AI, sic differentia BT ad differentiam TI: sed etiam ex propos. 13. lib. 6. est secta similiter, se AB, ergo habemus intentum: Sic dices de alijs lineis AQ, & AX, & quibuscumque similibus.

EXPENSIO II.

De comparatione vnius seriei harmonicæ ad aliam.

VIsa continuatione seriei musicæ; modo eam alij seriei comparare oportet.

THEOR. I. PROPOS. V.

* *Duæ series Harmonicorum proportionalium basibus suis sibi inuicem æqualibus sitæ, & à linea aliquota incipientes; eandem proportionem inuicem semper seruant.*

SInt duæ series proportionalium Harmonicorum secunda BF, & BE, & BD, & AC. Prima LB, & LO, & LN, & quarum radij cuiuscumque in bases æquales terminent, & primus sit tota linea VF, vel LZ secundus medietas BE, & LO, & sic de reliquis. Dico eam proportionem, quam habet LX ad BF primus terminus vnius seriei, cum primo termino alterius perpetuò seruari respectu terminorum sequentium ita, vt alter alteri correspondenti sit in eadem proportione, nempe ita erit, vt tota LZ ad totam BF, sic OL ad BE, & LN ad bD, & cæt.

* Prob. Prog. 1. Namenim QZ sit medietas TR, & pariter XF sit medietas lineæ XV; ita erit QB ad QT vt XV ad XV, ideoque ZO ad BT, vt EF ad AV. quare permutando erit OZ; idest OL ad KF, vel BD vt KT ad AV. Deinde Pr. 8. vt KO ad BQ, sic est ON ad QI, idest æqualem NL, & vt AE ad AX, sic BO ad XP, idest æqualẽ CB, sed vt BO ad KQ. sic est AB ad AX, ergo, vt OM ad NL, sic est BD ad DB, vel *conuertendo* NL ad ON vt DB ad BD. Quare erit OZ ad KT, vt BF ad AV ex primo progr. & ON ad NL, vt ED ad DB ex secundo, & ideo permutando OZ ad EF, vt BT ad AV, & ON ad BD, vt NL ad DB.

Cum ergo sit quoque EO ad KT, idest BF ad VA, vt ON ad NL, idest ED ad DB, vt demonstrationis serie dictum est, erit quoque *permutando* ZO ad ON, ideoque BF ad ED, vt KT ad NL, & ideo, vt VA ad DB. Igitur erit permutando, vt KT ad VA, sic NL ad DB.

Quod vt clariùs innotescat faciamus, quòd linea vb sit 48 partium, & linea TB, seu ZB 36. nimirum $\frac{3}{4}$ ipsius FK. In prima ergo diminutione ex propos. 3. huius BB erit $\frac{2}{4}$, idest 24. & DL $\frac{1}{2}$ idest 18. At vero 18 ad 24. seruat proportionem, quam habet tota ad totam, quæ est $\frac{3}{4}$. Sic linea DB erit partiũ 16. & NL partiũ 12. quia quælibet erit $\frac{2}{3}$ totius, at vero 12. ad 16. est eadẽ proportio 3. ad 4 &c.

PROBL. I. PROPOS. VI.

* *Seriem proportionis Musicæ similiter alteri ordini propagare.*

SIt datus ordo primus, & oportent alium ordinem in data proportione extendere: Fiat primus terminus AB ordinis propagandi maior, vel minor iuxta placitam longitudinem, & tot numero partes cuiuscumque magnitudinis illæ sint inuicem æquales intermedient inter centrum A, & primũ terminũ BF in hac secunda serie, quot numero intermediant inter centrum B, & terminum primum BL in primâ serie, & in præced. propos. schemate, & deinde ordo consequens terminorum propagetur, vt docuimus propos. 8. huius, & erit pgressus harmonicus B. similis proposito primo.

Probatur eodem modo, ac præced. propos.

THEOR. II. PROPOS. VII.

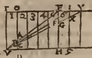
* *Omnes proportiones musicæ similes sunt in proportione Geometrica alteri ab vnitate denominatæ, si tamen sint rationales.*

SIt proportionis Musicæ series AD, & BD, & CD tres termini. Dico tres terminos EH, & FH, & GH esse quoq; musicè proportionales, & quamuis alius denominationis; esse tamen geometricè similes præcedentibus.

* Probandum itaque primo tres terminos EN, & FH, & GH esse musicè proportionales, & hoc ostenditur. Quoniam vt est primus EN ad vltimum GH, sic est differentia EF ad differentiam FG.

In ea proportione est LF ad TV ex 4. prop. lib 6. vt BI ad IT, & IF ad IV, & XG ad XV, vel æquales VC ad VX, sed vt VC ad VX; ita est CD ad XZ, sed CD æquatur IX, sunt enim æquales ob similitudinem triangulorum VCD, & XIY æqualium quoque laterum YI, & VD ex hypothesi. Quare erit VC ad VX, vt IX ad XZ: sed vt XI ad XZ, sic ex Coroll. prop. 4 lib. 6. est FG ad GH. Ergo FG ad GH, erit, vt VC ad VX: sed vt VC ad VX, sic est vb ad IV, vel æquales FI ad IV, & vt FI ad IV, sic est BI ad IT, & BF ad TV. Ergo ex 16 l. 5. el. vt FG ad GH, sic est BF ad TV, idest æqualem EH. Vnde *permutando*, vt est FG ad BF differentiæ sic GH ad EH terminos. Vnde cum sit differentia ad differentiam, vt terminus ad

terminum erunt termini EH, & FH, & GH Harmonicè proportionales.



Probatur quoque. Sint alius denominationis, quam es priùs proposita; quæ denominatur ab vnitate, vt ea in quam dinideretur OD, quæ est tota $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$. Nam FH primus terminus post totam lineam HB est ad totam HS, vel IZ, vt VF ad VI; sed VF ad VI sa habet ex hypothesi, vt 5. ad 6. Ergo etiam secundus terminus HG se habebit ad primum, vt 5. ad 6. Sic tertius terminus GH ad totam se habet. vt VG ad VT; sed VG ad VT se habet, vt 5. ad 7. Ergo etiam GH ad totam HB se habebit, vt 5. ad 7. & sic procedendo quartus erit, vt 5. ad 8. vnde series erit tota $\frac{5}{6}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{5}{9}$, &c.

Probatur tàdem, quod sint in eadem proportione Geometrica cum serie, quæ denominatur ab vno. Nam ex Coroll. prop. 4. lib. 6. vt differentia AB ad differentiam BC, sic EF ad FG, differentiæ quoq; alius seriei, & vt CA ad CD, sic EG ad GH. Quare *componendo* AC cum CD idest AD terminus maior ad CD minorem, sic EG cum GH, idest EH terminus maior in alia serie ad GH terminum minorem. Patet etiam, quia $\frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}$ ex Tract. 13. Coroll. prop. 27. sa habent, vt 1. ad 5. & sic $\frac{1}{7}$, & $\frac{1}{7}$ habent 1. ad 5. & sic semper eodem modo se habet.

PROBL. II. PROPOS. VIII.

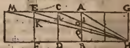
Series Harmonicas proportionalium reperire datæ denominationis in aliqua linea.

Sit Schema præcedens, & velimus reperire proportionem harmonicam in data linea EH, quæ se habeat ad aliam in eadem linea continuatam, vt 1. ad 5. Per extremum E ducatur linea TI, & quinque æquales partes, vt EI numerentur ab E versus T; erigaturque TV æqualis datæ EH. Deinde rursus in alteram partem portiones primis æquales numerentur, quantùm placet, vt EI, & IV, & cæt. ducanturque ab V rectæ, vt VI, & VT, & cæt. nam diuident lineam EH in partes, quæ ad aliam seriem datam, in quam diuisa est OD erunt singuli termini, vt 1. ad 5. Patet ex præced. ostensione.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series harmonicas proportionalium reperire iuxta datam proportionem in pluribus lineis.

Sint reperiendæ plures lineæ, quæ dicant inuicem proportionem harmonicam, & sint ad alias proportionem harmonicam dicentes vt 3. ad 1. fiant lineæ parallelæ AB, CD, & EF, & æquali distent interuallo, & recta coniungantur A, B puncta, & erunt æquales AC, & CE. Sumantur ergo in AG duæ partes æquales ipsi AC, & ducatur parallela GH ipsi AB. Deinde per B recta parallela ipsi CE ducatur, quæ cum GH conueniet in H: Ab H ergo ad Q, & C, & cæt. radij ducantur, & ex præc. AB erit diuisa in terminos harmonicos iuxta datam proportionem, ita vt AB tota $\frac{6}{6}$ IB $\frac{6}{7}$ OB $\frac{6}{8}$ QB $\frac{6}{9}$, & se habebunt ad aliam $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{9}$, vt 3. ad 1. modo dico, quod etiam lineæ AI, CL, & EB sunt in eadem proportione ac IB, & OB, & QB. Vnde se habebunt ad seriem $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{9}$ eodem modo ac 3. ad 1, cum, & etiam ipsi sint $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{9}$.



Probatur triangulum HIB est æquiangulum triangulo AIC, ob angulos C, & H inter parallelas alternos, & angulos apud I ad verticem. Quare erit ex 4. lib. sexti AC ad AI, vt HB ad IB, & *permutando* AC ad HB, vt AI ad IB. Rursus HOB triangulum est æquiangulum triangulo CLB ob eandem rationem, Quare similiter arguendo ex 4. l. sexti & *permutando* CA erit ad HB, vt CL ad OB. Rursusque triangulum HQB est æquiangulum triangulo EBM, quare erit eodem modo EM ad HB, vt EB ad QB. Sed tres, vtpote æquales AC, & CE, & EM habent eandem proportionem ad eandem HB. Ergo etiam tres AI, & CL, & EB ad tres IB, & OB, & QB, vtpote eiusdem proportionis trium æqualium ad HB habebunt eandem proportionem. Quare erit IA ad BI, vt CL ad OB, & EB ad QB. Quare permutando AI erit ad CL, vt IB ad BO, & CL ad EB, vt OB ad QB.

LEMMA I. PROP. X.

Si inter duas parallelas crura duorum triangulorum æqualium basium se intercipiant, linea per eorum intersectiones ducta erit parallela basi, & triangula, quæ fiunt æqualis altitudinis.

Sint duo triangula quæcumque ABC, & GED quorum crura se decussent in F, & O. *Dico, quod Linea FO ducta per F, & O est parallela basi FC.*

Probatur triangulum AFG est æquiangulum triangulo EFB, quod angulus B sit æqualis angulo G nigro, vtpote alterni inter parallelas ex propos. 30. lib. 1. Elem. & anguli quoque apud F sint ad verticem, & ideo æquales: vnde, & reliqui ex Coroll. 2. prop. 17. lib. 1. Elem. Quare AG ad AF, vt EB ad FB, & *permutando* AG ad EB, vt AF ad FB: Sic quoque dicendum de triangulis AOG, & EOC ob angulos alternos nigrum ad D, & seminigerrimum ad G æquales, & angulos ad verticem æquales quoque. Quadere erit, vt AN ad AO, sic DC ad OC. Quare *permutando* erit AG ad DC, vt AO ad OC, sed EB, & DC sunt æquales cum bases triangulorum præsupponantur æquales; Vnde ablata parte BD communi, reliquum EB, & DC est æquale. Quare AG ad EB, & eadem AG ad DC dicet eandem proportionem ex 7. lib. 5. vtpote ad æquales. Quadetè erit etiam eadem proportio AF ad FB, quæ AO ad OC. Quare cùm crura trianguli sint diuisa proportionaliter linea transiens per diuisiones F, & O erit parallela basi AC ex prop. 2. lib. 6. & triangula BFB, & DCC ex propos. 40. lib. 1. Coroll. 2. erunt æqualis altitudinis.

THEOR.

THEOR. III. PROP. XI.

Si plurima triangula æqualia æqualiũ basium in vnum verticem conueniant, & recta aliqua basi non parallela in ea incidat, & secet, parallelæ basibus à sectionibus crurum ductæ omnis crura secabunt harmonicè proportionaliter.

SInt triangula ABC, & ACD & AED, & cæt. quæ in vnum verticem A conueniant, & eorum sint æquales bases: secetque eorum crura aliqua FG. Dico, *quod si ducantur per eorum intersectiones parallelæ basi BE istæ in partes harmonicè proportionales diuident omnes lineas sectas, & crura triangulorum.*

Quod vt ostendatur ducatur basi BE parallela FA à verticibus triangulorum; donec occurrat obliquæ secanti GF; occurret enim, cùm incidens FG basibus parallela non sit, & à puncto F, ducatur FH, & FN Quia ergo HN, NI, & HG sũt æquales, q. 2. ex Cor prop. 4. l. 6. ei HG est ad HN, & NI; vt æquales ex thesi, DE ad DC, & CB. Ex 1. propos. AB erit secta harmonicè proportionaliter, & AI, & KA & AL erunt tres termini harmonici, quo supposito.

Probatur. Parallelæ ductæ ab intersectionibus O, P, N crurum ab FG incidente factis transeunt necessariò per puncta IKL. Ergo eam diuidunt in partes proportionales harmonicè IA, & KA, & LA. Triangula HPG ex præced & IKN sunt æqualis altitudinis. Ergo parallela à F discedens incidet in punctum K ex prop. 39. Cor. l. 1. in verticem trianguli IKN. Sic triangulum NOC æqualis altitudinis est veluti LH: Ergo parallela discedens ab O incidet in punctum L: Quare eodem modo LA diuidetur in partes proportionales, sic à radijs NF, FH, & FG, vt à parallelis LO, & KP, & IH. Cùm ergo IA sit diuisa in partes harmonicè proportionales, etiam omnes CA, DA, & EA ab ijsdem parallelis erunt diuisæ ex propos. 4. huius.

COROLLARIVM.

HInc que patet quomodo possimus diuidere in partes harmonicas plurimas lineas simul, & plures series harmonicorum terminorum efficere.

EXPENSIO III.

De interpositione Harmonicorum terminorum,

INterpositio terminorum est cum inter duos terminos alij termini interiiciuntur, ita tamen, vt sit adhuc continua series proportionalium eo modo, quo continuatur proportio Harmonica.

PROBL. I. PROPOS. XII.

Terminos continuè proportionales harmonicè inter terminos harmonicos conijcere.

SInt dati tres termini continuè proportionales harmonicè AD, & BD, & CD nempe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. & oporteat inter eos alios terminos interponere, qui proportionem continnent. Sint verò termini AD, & BC, & CD inter parallelas AF, & BF, lineisq à centro O egredientibus NH, & CE determinati, eruntq; æquales AH, & HE. Diuidantur itaq; AH, & HE secundum terminos, quos volumus interponere. V. g. 3. ita quòd primus terminus sit, vt 3. ad 3. secundus, vt 3. ad 4. tertius, vt 3. ad 5. &c. Deinde ad singulas diuisiones à centro O rectæ ducantur GI, & GH, & GL, & cæt. & erit factum, & sic procedent termini.

$$\frac{3}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{3}{9}$$

PRobatur. Nam ex prælibatis huius in prima propos. AD primus terminus erit ad AD vltimum, vt differentia AM ad differentiam MN, & MD erit ad ND, vt differentia MN ad differentiam NB. Ergo inter AD, & BD duos terminos termini duo interpositi sunt MD, & ND. Et sic dicas de cæteris, quod verò sint datæ denominationis patet ex prop. 8. huius.

EXPENSIO IV.

De terminis inuicem comparatis, & differentijs.

IAm ex ipsa definitione proportionis harmonicæ notum est duas differentias harmonicas inter tres terminos esse inuicem, ut primus terminus ad tertium, & ideo etiam permutando esse differentiam maiorem ad maiorem terminum, vt minor differentia ad minorem terminum: reliquas igitur proportiones indagabimus.

THEOR. I. PROP. XIII.

* *Maior terminus est ad summam omnium differentiarum, vt æquales bases cum intercepta ad ipsas æquales bases.*

Sit secta BC in partes proportionales harmonicè in D, E, F. Differentiæ erunt BD, & DE, & EF, & summa earum BF. Dico, *quòd ita se habet* AG *primus terminus ad totam seriem, & summam differentiarum* BF, *vt* AC *intercepta, vel æqualis* GB *cum æqualibus basibus* omnibus simul sumptis BH, & HI, & IK, ad ipsas æquales bases simul sumptas,

Probatur. Nam ex 4. lib. 6. vt BK ad BG, sic est BF summa differentiarum ad AC primum terminum.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Minor terminus omnium ita est ad summam omnium differentiarum, vti intercepta ad omnes bases æquales.*

Sit figura, quæ præcedentis propos. Minor terminus omnibus alijs terminis erit FC, & summa differentiarum erit FB. Intercepta AC omnes bases æquales BK. *Dico, quòd* FC *sit ad* FB, *vt* AC *est ad* BK.

* Probatur AFC triangulum est æquiangulum triangulo BFK: quia anguli apud F sunt ad verticem anguli verò ad A, & B alterni. Ideoque ex propos. 4. lib 6. elem. AC erit ad FC, vt BK ad FB. Ideo *permutando* AC erit ad BK, vt FC ad FB.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Termini ad inuicem maior ad minorem sunt in eadem proportione, ac æquales bases cum intercepta ad ipsas æquales bases cum intercepta minus vna æquali basi.*

Sit eadem fig. quæ supra. *Dico* BC *terminum esse ad* DC, *vt* GH *ad* GB, *&* DC *esse ad* EC, *vt* GI *ad* GH, *& è contra inuertendo.*

Probatur. Nam ADC, & DBH sunt æquiangula triangula: Ergo ex 4. lib. 6. AC erit ad DC, vt BH ad BD: Quare *permutando* AC. vel GB ei æqualis erit ad BH, vt DC ad DB, & ideo *componendo* AC, vel GB cū BH erit ad GB, vt DC cum DB ad DC, id est HG addita basis, & intercepta erit ad interceptam BC, vt terminus BC ad terminum DC.

* Probatur quoque de reliquis terminis: nempe de termino DC respectu termini EC. *Dicoque quòd* DC *sit ad* EC, *vt* GI *ad* GH.

Triangulum HIO est æquiangulum triangulo ABC ob parallelas, inter quas est. Quare vt prius AC erit ad EC, vt HI ad HO; quapropter *permutando* AC, vel GB æqualis erit ad HI, vel æqualem BH, vt EC ad HO: sed eadem AC erat in preced. part. huius prop. ad BH, & ideo ad æqualem HI ex hyp. vt CD ad BD. Ergo ex 16. l. 5. vt CD ad BD ita EC ad HO, & hinc *permutando* CD ad EC, vt BD ad HO: Sed producta AH in T ob equalitatem triangulorum HTI, & HBD ipsa TI æquatur ipsi BD: Proportione autem respondet TI, idest BD ad HO, vt TA ad AH, & vt IG ad GH, & consequenter ex 16. l. 5. CD erit ad EC, vt IG intercepta cum additis omnibus ad GH interceptas cum additis vna minus, ita in quam erit terminus CD ad terminum EC.

Est autem IG ad HG, vt TA ad HA, quia ob triangulorum THI, & HGA similitudinem TH est ad HA, vt IH ad HG, ideoque *componendo* TA est ad HA, vt IG ad HG, & ideo, vt TI, vel BD ad OH.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

* *Si intercepta sit irrationalis, etiam termini Musici erunt irrationales, idest nullo numero exprimibiles.*

Sit AC intercepta irrationalis: Dico, *quòd termini erunt irrationales* BC, *&* DC, *&* EC.

* Probatur. Quia AC ponitur irrationalis ipsi BH idest æqualis CL etiam compositū LA erit irrationale ex propos. 10. lib 10. vtrique parti componenti, nempe ipsi CL, & ipsi AC. Sed vt est AL ad AC, sic BC terminus ad DC terminum: Ergo ex propos. 5. lib. 10. elem. termini ipsi inuicem erunt incommensurabiles BC, & DC.

Idem argumentaberis de terminis DC, & EC. Nam AC ponitur incommensurabilis ipsi CL: Ergo etiam ipsi æquali LM. Quamobrem, & compositū ipsarū AL erit incōmensurabile ipsi LM. Vnde si LM, & AL incōmensurabiles cōponantur AM totū erit incommensurabile ipsi AL; sed vt MA ad AL, seu, vt IG ad GH: sic est ex 15. huius DC ad EC. Ergo, & DC ipsi EC erit incommensurabilis, & sic dicas de reliquis.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Posita intercepta incommensurabili, reliquæ omnes differentiæ inuicem erunt incommensurabiles.

Ponatur intercepta incommensurabilis. Dico differentiam DB esse incommensurabilem ipsi differentiæ DE.

Probatur DB est ad FE differentiæ, vt termini DC ad CF: sed termini sunt incommensurabiles, ergo ex 5. lib. 10. & ipsæ differentiæ, quòd verò primus terminus ad tertiū incōmensurabilis. Prob. sit DC est ad EC, vt AM ad AL, & ex prop. 15. huius EC est ad FC, vt AN ad AM: Ergo DC est ad FC ex æquo, vt AN ad AL, Sed NA, & AL ex dictis in præc., si AC sit incommensurabilis, sunt incommensurabiles, Ergo etiam DC, & FC termini,

EXPEN-

EXPENSIO IV.

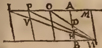
De progressionis Harmonicæ extremo.

SIcut in progressionia Geometricæ cootiouatione extremum est, ad quod nulla progressio, quantumuia multiplicata, peruenire potest; ita & Harmonicum extremum est, quòd nulla progressio barmonica valet consequi, quod vt demonstratione firmetur sit.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

* *Nulla progressio harmonica extremum suum consequi potest, quamuis vt vtlibet multiplicata.*

SInt termini harmoniei AB: & DB, & CB, & HB. *Dico, quod etiam si fine meta multiplicentur nunquam poterunt consequi extremum B.*



* Probatur ex propos. 15. huius. Nam terminus penultimus CB erit ad vltimum HB, vt MI ad MP; sed MI ad MP habet mioorem proportionem. quàm omnes alij termioi præcedeotes, & ideo MP ad MI maiorem. Ergo BH ad CB habebit maiorem proportiooem omnibus terminis præexistentibus: sed CB est lioea: Quare etiam BH linea erit. Quooiam comprehendit piures partes ipsius CB, quàm omnes antecedentes termini cóprehendant terminorum maiorum. Quod autem MP ad MI sit maior proportio, quàm MO ad MP patet. Quia erescit lioea MI per eootinuam additionem vnius. Maior est autem proportio 2. ad 3. quàm 1. ad 2. & 3. ad 4. quam 2. ad 3. & sic successiuè.

* Probatur quoq; alio modo. Nam quacunq; positâ terminorum multiplicatiooe semper NHB erit triangulum, & centrum N distabit à puncto B. Ergo etiam H distabit ab eodem puncto B.

Tandem Probatur 3. Refertur BH ad AI, vt HB ad HA, & ideo permutando, vt BN ad HB ita est AI ad súmã differentiarum HA: sed omoes differeotiæ HA ad omnes basea AI suot quid quantom; Ergo etiam BH respectu BN.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

* *In qualibet data linea absque fine quæcumque progressio Harmonica continuari potest.*

PRobatur in præced. fig. ad partes æquales assumptas io linea basium æqualium MB à eentro N. possuot duci iofiniti radij; quià partes AO, & OB, & PI possunt multiplicari io infioitum, & à singulis ab N radius duci potest: sed omnis radius in AB designat terminum harmonicum ex dictis propos. 1. huius; nec ex præc. datur terminus harmonicus, cuius longitudo excedat puoctum B: Ergo in AB termini harmonici in infinitum multiplicari poteruot abque eo, quòd perueniatur ad puoctum B.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Assignatâ qualibet in proportione harmonica serie ad minorem perueniri poterit.

PEr additionem partium æqualium fit semper minor proportio totius cum addito ad totum solùm V.g. 3. habet proportionem minorem ad 2. quam 2. ad 1. & 4. ad 3. quàm 3. ad 2. & 5. ad 4. quàm 4. ad 3. & sic continuè.

Assignetur ergo lioea R, coi habeat minorem proportionem intercepta NB, quam E. g. 7. ad 3. eritque R ad NB maior proportio, quam 7. ad 3. Ad MA addantur tot partes, vt maior sit proportio MI cum additis ad MN; quam 7. ad 3. & ducatur ad illud extremum radius NI.



Quoniam igitur triangulum MIN est triangulo IQT, & ideo æquali NOB æquiangulum erit MI ad MN, vt NB ad BO: sed MI babet maiorem proportionem ex effectione ad NM, quàm 7. ad 3. Ergo etiam NB babet maiorem proportionem ad BO, quàm 7. ad 3. sed eadem NB habet minorem proportionem ad R, quam 7. ad 3. Ergo R maior erit, quam BO. Vnde lineâ assignatâ R poterit io AB minor iinea assigoari in proportione harmonica.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Termini harmonici vltra omnem assignatam quantitatem diminui possunt.

SIt aliqua data R in præcedenti fig. Dico, quod io progressione Harmonica procedendo terminus aliquis minor, quàm R dari potest.

Assignatæ R habeat aliqua ex ipsis basibus, vt QI minorem proportionem, quam quilibet assignatus numerus 30. ad 3. Addanturque tot basea donec MI ad MN babeat maiorem proportionem, quam 30. ad 3. quo posito.

Probatur Propos. Triangulum QIT est æquiangulum triangulo MIN. Quare erit MI ad MN, vt QI ad QT: Sed MI habet maiorem proportionem ad MN, quàm 30. ad 3. Ergo etiam QI habebit maiorem proportiooem ad QT, quàm 30. ad 3. sed QI ad R haber mioorem proportiouem ea hypothesi, quam 30. ad 3. Ergo R est maior, quàm QT. Est autẽ QT terminus harmonicus, vt ex prop. 1. h.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Si series infinitorum terminorum musicorum continuetur relinquet tandem aliquam differentiam assignata qualibet quantitate minorem.

ASsignetur quantitas aliqua minima R. *Dico in AB differentias musicas adeo posse multiplicari, vt tandem aliqua sit minor, quàm R.*

Probatur. Nam termini adeo possunt multiplicari, vt aliquis sit minor, quàm R ex praeced. multiplicentur, & sit QT minor, quam R; Ducaturque NQ. Dico differentiam PO esse minorem, quam R. patet, Nam PO est ad QT, vt NP ad NQ, vel MA ad MQ: sed MA minor est, quam MQ ex hypothesi. Ergo PO minor est quam QT. Ergo minor etiam est, quàm R.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Quaecumque infinita differentiarum musicarum series aequat primum terminum.

PRobatur. Nam enim minor erit, quia in BA primo termino infinitae differentiae capere possunt ex propos. 18. h. & ideo infinitam differentiarum multitudinem capere. Sed nec erit maior: Si enim est maior sit maior V. g. quantitate OA: Multiplicentur itaque termini adeo, vt aliquis tandem inueniatur ex propos. 20. minor assignata quantitate BO. Ergo series illa in infinitum procedens in quantitate AB relinquit minus residuum, quam BO. Quare BA primus terminus non superat seriem infinitam differentiarum quantitate BO, & sic semper valebit argumentum: ergo series infinita differentiarum musicarum aequat primum terminum.





TRACTATVS XVII.

De Proportionalitatibus Rationum.

Licet iste Tractatus sit vniuersalis, & omne genus quantitatis complectatur, tum discretæ, tum continuæ; quia tamen numeris faciliùs, & euidentiùs proportionum similitudines explicantur, hinc est, quòd numeris exempla dabimus, non lineis, aut superficiebus, cum tamen propositiones generatè sint intelligendæ, & omni generi quantitatis applicandæ.

EXPENSIO I.

De principijs.

EGimus in præcedentibus de similitudine Rationum, & continentiarum, iuxta quas vna quantitas aliam continet: nunc autem agimus de similitudine ipsarum similitudinum Rationum, & in eo consistit, quòd ipsæ rationes, quibus inuicem duæ quantitates, & duæ in se continendo assimilantur ipsæ quoque inuicem sint similes. Quamobrem proportionalitas requirit ad minus duas proportiones, & ideo quatuor Rationes, nam duæ Rationes vnam proportionem efficiunt, & tandem octo terminos, inter quos quatuor rationes reperiantur.

DEFINITIO I.

P*Roportionalitas est proportionum similitudo.*

Sint duo numeri $\frac{2}{4}$ duobus numeris proportionales $\frac{1}{2}$; sint deinde etiam alij duo $\frac{3}{6}$ duobus alijs $\frac{4}{8}$ proportionales, hæc proportio, quæ inter primos quatuor reperitur si sit similis proportioni, quæ inter hos extremos proportionatur, dicitur *Proportionalitas*.

DEFINITIO II.

R*Ationum denominatores vocantur quantitates, quæ suis partibus exprimant continentiam vnius quantitatis respectu alterius.*

Sint $\frac{8}{2}$, & $\frac{9}{3}$ Denominatores harum quantitatum sunt primæ 4. secundæ 3. quia indicant quot vicibus vna quantitas in alia contineatur; sic quater 2. continetur in 8. & 3. in 9. ter continetur 3. Sic si exhiberentur duæ lineæ perticæ, & palmus. Linea quædã, quæ demonstret suis partibus continentiam palmi in pertica, dicetur denominator. V. g. semipalmus diuisus in 6. vncias poterit dici denominator, quia indicabit suo sexagenario partium continentiam sex pedum, quas pertica complectitur.

DEFINITIO III.

S*Imilitudo proportionum consistit in similitudine denominatorum.*

Et hoc quidem verum est in quantitatibus rationalibus, & in irrationalibus, nam exprimuntur earum similitudines per mutuam duarum quantitatum habitudinem. Sic sit $\frac{6}{2}$ $\frac{12}{3}$, poterit exprimi denominator proportionis, quam habet 2. ad 6. & 3 ad 12. esse eam, quæ est inter 3. & 4. nempe ipsos denominatores, qui indicant, quot vicibus capiat 2. in 6. & 3. in 12. Sic si sint duæ irrationales ab similes alijs duabus CD.

Sintque duæ aliæ lineæ, quæ exprimant V. g. F continentiam AB in A, & E, quæ demonstret continentiam D in C, istæ rationum similitudines licet irrationales poterunt exprimi per illos duos Denominatores F, & E, & dicere, quod sicut est F ad E, ita est proportio AB ad proportionem CD.

A ————	F
B ————	
C ———	E
D ——	

DEFINITIO IV.

P*Roportiones similes illæ sunt, quæ ijsdem, vel æqualibus denominatoribus gaudent.*

Sint V. g. $\frac{2}{4}$, & $\frac{8}{16}$: istæ proportiones sunt similes, quia ita 4. continet 2. gemina vice, sicut 16. continet 8. gemina vice: quare sunt similes in continendo, cùm contineant, tam vna, quam alia ijsdem vicibus, quare, & ipsæ continentiæ sunt similes.

PRINCIPIVM.

Q*Vantitas rationis, sine denominator ductus in consequentem producit antecedentem, si sit maioris inæqualitatis, at è contra si sit minoris, nam diuisus consequens per denominatorem, antecedentem manifestat.*

Sit

$$A\,12 \quad \frac{C\,4}{} \quad D\,3 \qquad A\,3 \quad C\,\frac{1}{4} \quad D\,12$$

Sit proportio A 12 ad D 3. quæ exprimatur denominatore 4. C. Si 4. ducatur in 3. producet 12. quia 4. suis vnitatibus indicet vices continentiæ 3. in 12. Sit rursus proportio rationis A 3. ad D 12. denominator $\frac{1}{4}$, quia 4. numerat vices, seu partes ex quibus A 3. sibi assumit vnicam, ideo si 12. diuidatur per 4. denominatorem producetur antecedens 3. Sic si denominator 2. & $\frac{2}{5}$, quam habet 5. ad 12. diuidat 12. producet 5. at si detur ratio 12. ad 5. & 2. $\frac{2}{5}$, denominator multiplicet 5. producet 12.

Aduerte autem; siquando iubemus reperire, vel tertium, vel quartum, vel medium proportionale, id præcipimus iuxta regulas, vel in numeris traditas lib. 7. & 8. Elem. & iuxta Tract. 13. de numeris proportionalibus. In lineis iuxta dicta lib. 6. element. Expens. 4. Si agetur de superficiebus, vel de corporibus iuxta tradenda suis locis, licet enim exempla in numeris exhibeamus, in omni tamen genere quantitatis valet iste Tractatus. Vnde iuxta cuiuscunque quantitatis modum præcepta sunt operi demandanda.

EXPENSIO II.

De Proportionibus ad denominatores collatis, & ad terminos.

PRiùs videndum est, quomodo Denominatores, terminique in proportionibus exprimendis se gerant, vt deinde earum compositioné cognoscere, multitudinemque possimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Proportiones eundem terminum habentes inuicem referuntur, vt denominatores.

*SIt A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. Dico *has proportiones esse inuicem, vt denominatores*, ideoque A $\frac{3}{7}$ esse ad B $\frac{4}{7}$ in proportione, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ proportionis A ad denominatorem D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B.

$$\text{Denomin. } C\,2\,\frac{1}{3} \quad D\,1\,\frac{3}{4}$$

$$A\,\frac{3}{7} \qquad B\,\frac{4}{7}$$

*Probatur. Nam toties fundamentum A 3. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in suo denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, nempe gemina vice, & $\frac{1}{3}$: Sed etiam fundamentum 4. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in denominatore D 1 $\frac{3}{4}$ proportionis B; Scilicet vnica vice, & $\frac{3}{4}$: Ergo denominatores sunt similes in vnitatibus, vt termini, seu consequentes in continentijs fundamentorum, & ita vnitas continetur in Denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, vt fundamentum 3. in termino 7. & vnitas inest in denominatore 1 $\frac{3}{4}$, vt fundamentum 4. in termino 7. quare ex defin. 1. lib. 7. elem. ita erit C 2 $\frac{1}{3}$ ad D 1 $\frac{3}{4}$, vt A $\frac{3}{7}$ ad B $\frac{4}{7}$.

Et idem dicas etiam si proportio esset maioris inæqualitatis, vt A $\frac{6}{2}$ B $\frac{8}{2}$; nam terminus 2. multiplicatus per denominatorem C 3. producit antecedentem 6. proportionis A, & idem consequens B 2. per denominatorem proportionis C 4. multiplicatus producit 8. Ergo multiplicatur continentia A in 6. toties, quoties vnitas in denominatore 3. continetur, & vt 2. in termino 8. comprehenditur ita vnitas in denominatore 4. ipsius. Ergo ex defin. 1. lib. 7. elem. vt est 3. ad 4. denominatores, ita est proportio A $\frac{6}{2}$ ad proportionem B $\frac{8}{2}$.

THEOR. II. PROP. II.

Duæ rationes habentes commune consequens eam sortiuntur rationem, quæ inter fundamenta reperitur.

SInt rationes A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. *Dico eas eam consequi rationem, quæ inter fundamenta reperitur*; nimirum 3. & 4. Si tamen eodem termino gaudeant, & ita esse Rationem A $\frac{3}{7}$ ad Rationem B $\frac{4}{7}$, vt 3. ad 4.

Probetur. Nam fundamentum A 3. ductum in denominatorem suum 2 $\frac{1}{3}$ producit terminum 7. & rursus fundamentum B 4. ductum in suum Denominatoré D 1 $\frac{3}{4}$ producit terminum eundem 7. Ergo ex 17. lib. 7. ita erit A 3. ad B 4. vt Denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem D 1 $\frac{3}{4}$. Sed, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem $\frac{3}{4}$ sic est Ratio A $\frac{3}{7}$ ad rationem B $\frac{4}{7}$. Ergo Ratio A $\frac{3}{7}$ ad Rationé B $\frac{4}{7}$ est vt 3. fundamentũ ad fundamẽtũ 4.

Et idem erit in proportione minoris inæqualitatis, vt A $\frac{3}{6}$, & B $\frac{4}{6}$, nam erit A ad B, vt 3. ad 4. eadem ratione: & fundatur in propos. 17. lib. 7.

THEOR. III. PROPOS. III.

Proportiones eosdem antecedentes habentes, erunt inuicem, vt termini inuerso ordine, vt secundus terminus ad primum.

$$\frac{A\,2}{B\,3} \quad \frac{A\,2}{C\,4} \qquad E\,1\,\frac{1}{2} \quad B\,3$$

FIat enim, vt C ad A; nimirum 4. ad 2. ita B 3 ad aliud E, 1 $\frac{1}{2}$; erit ratio AB ad rationem EB, vt A 2. ad E 1 $\frac{1}{2}$ ex anteced. sed eadem est ex effectione CA proportio, ac AC. Ergo proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$ est, vt A ad E, sed ex effectione, vt C est ad A; sic B est ad E. Ergo permutando, vt C 4. terminus secundus est ad B 3. primum; sic A est ad E, & ideo etiam proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$, quæ ostensa est, vt A ad E, erit etiam, vt terminus secundus C 4. ad primum B 3.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IV.

Datæ ſint quotcumque rationes earum denominatores reperire.

DAtæ ſint proportiones A $\frac{4}{6}$, & B $\frac{2}{4}$, & oportest reperire harum proportionum denominatores.

Dupliei modo id fit. Primo efficiatur, vt 4. ad 2. in proportione B, ſic in proportione A 6. ad aliud, quòd ſit E 3. quartum proportionale in eadem ſpecie quãtitatis. Dico E 3. & B 4. *eſſe Denominatores* A 4. *quidem proportionis* A, & E 3. *proportionis* B.

$$A \frac{4}{6} \quad B \frac{2}{4}$$
E 3

Probatur. Nam ex effectione B 4. terminus eſt ad ſuum fundamentum B. vt A 6. terminus eſt ad aliud 3 Ergo *inuertendo* in proportione B 2 erit ad 4. vt E 3. aliud inuentum ad A 6. Cum ergo ſit ratio alius E 3. ad A 6. quæ 2. ad 4. erit etiam ita proportio A $\frac{4}{6}$ ad B $\frac{2}{4}$, vt proportio eadem A $\frac{4}{6}$ ad aliud inuentum E $\frac{3}{6}$. cum ergo 4. & 3. habeant eoſdem terminos 6. & 6. erit proportio fundamentorum 4. & 3. eadem, ac Denominatorum ex 1. propoſ. huius, ideoque 4. & 3. erunt Denominatores proportionum, ita, quòd, vt refertur 4. ad 3. ita continentia A 4 ipſius 6. ad continentiã E 2. ipſius 4. Poteſt etiã fieri alio modo: Nam datis pro-

$$A \frac{4}{6} \ \& \ B \frac{2}{4} \qquad A \frac{4}{E\ 8}$$

portionibus fiat, vt 2. ad 4. terminum in proportione B. ſic 4. ad aliud E 8. in proportione A. Dico, *quòd* 6. & 8. *erunt Denominatores*.

Probatur. Nam ex effectione in B proportione 2. eſt ad 4. vt in A proportione 4 eſt ad 8. Quare ita erit proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt ad proportionem E $\frac{4}{8}$: ſed proportio $\frac{4}{6}$ ad proportionem E $\frac{4}{8}$ eſt, vt 8. ad 6. ex 3. huius. Ergo proportio A $\frac{4}{6}$ ad rationem B $\frac{2}{4}$ eſt, vt 8. ad 6. quare 8. & 6 erunt Denominatores 8. quidem rationis A, & 6. rationis B.

COROLLARIVM.

COllige hinc: Quomodo duas proportiones diuerſorum conſequentium, ſeu antecedentium reducantur ad idem conſequens, ſeu antecedens: nimirum, ſi fiat, vt in praxibus prædictis. Sic $\frac{2}{4}$, & $\frac{4}{8}$ eædem proportiones ſunt, quæ $\frac{4}{8}$, & $\frac{3}{6}$. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$ ſunt eędem, ac $\frac{4}{6}$, & $\frac{3}{6}$, vt in demonſtratione oſtenſum eſt.

COROLLARIVM II.

ERuitur hinc: Rationes eſſe inuicem in proportione, vt ſunt denominatores. Siquidem proportio A $\frac{4}{6}$ eſt ad proportionem E $\frac{3}{6}$ ob eundem terminum 6. vt 4. ad 3. Sed proportio B $\frac{2}{4}$ eſt eadem, ac proportio E $\frac{3}{6}$. Ergo eſt proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt Denominator 4. ad denominatorem 3.

PROBL. II. PROP. V.

Data ratione, & duabus quantitatibus, alias duas quantitates reperire, quæ ſint in proportione data cum iſtis exhibitis.

SIt data Ratio AB $\frac{2}{5}$, & quantitates C 3. & D 6. & alias duas quantitates oporteat inuenire, quæ faciant proportionalitatem ſimilem ad datas quantitates collatæ, vt eſt proportio AB $\frac{2}{5}$.

$$\text{Proportio } \frac{A\ 2}{B\ 5} \text{ Datę } \frac{C\ 3}{D\ 6}$$

$$G\,7 \frac{1}{2} \qquad \frac{E\ 5}{F\ 4}$$
D 6

Fiat, vt A ad B rationes, ſic C ad aliud G 7 $\frac{1}{2}$ Deinde fiat, vt D 6. ad inuentum G 7 $\frac{1}{2}$. Sic quęlibet alia quantitas F 4. ad aliud E 5. Dico, *quòd proportio* CD $\frac{3}{6}$ *ad proportionem* EF $\frac{5}{4}$ eſt, *vt* A 2. *ad* B 5.

Probatur. Quoniam ex effectione, & inuertendo, vt G 7 $\frac{1}{2}$ eſt ad D 6. ita eſt proportio E 5. ad F 4. Et ex 2. huius, proportio CD ad proportionem GD ob eundem terminum D eſt, vt C ad G: Ideo proportio CD ad proportionem EF, eandem cum GD, erit vt C ad G; ſed, vt eſt A ad B ita effectum eſt C ad G: Ergo, vt A B ad E 5. ita eſt proportio CD $\frac{3}{6}$ quantitatum datarum ad proportionem EF $\frac{5}{4}$ quantitatum inuentarum.

PROBL. III. PROPOS. VI.

Duas Rationes exhibere, quæ datam habeant rationem.

$$A\ \frac{3}{B\ 7} \quad A\ \frac{3}{C\ 8} \quad B\ \frac{7}{C\ 8} \quad E\ \frac{6}{F\ 16}$$

SIt data Ratio AB $\frac{3}{7}$, & poſtulentur duæ ſimiles huic rationi; Componatur A 3. alicui cuicumq; quantitati C 8. & ſic etiam B 7. eidem copuletur, ſintque proportiones AC $\frac{3}{8}$, BC $\frac{7}{8}$, & erit factum, quod poſtulatur: Nam ex propoſ. 3. huius, proportio AC ad rationem BC, eſt vt A ad B.

Quod ſi nolimus conſequentes eoſdem eſſe fiat, vt A ad C, ſic quælibet alia E 6. ad quamlibet aliam F 16. & erit, vt conſtat EF $\frac{6}{16}$ ad BC $\frac{7}{8}$, vt AC proportio eadem ex effectione, ac EF, ad BC: Sed AC ad BC ſunt, vt A ad B: Ergo etiam EF ad BC ſunt, vt A ad B.

PROBL. IV. PROPOS. VII.

Rationes duas aſſignare duabus datis proportionalis eiuſdem denominationis.

SInt duæ datæ Rationes AB $\frac{2}{5}$, & CD $\frac{3}{4}$, & oporteat exhibere duas rationes illis proportionales; quæ eoſdem obtineant Denominatores. Fiat, vt D 4. ad C 3. Sic B 5. ad aliud E 3 $\frac{3}{4}$. Erit

ratio BA ad rationem BE, vt E ad A ob idem antecedens A ex 3. huius, & *invertendo* AB erit ad EA, vt A ad E; & quia est eadem Ratio E ad B ex effectione, quæ D 4. ad C 3. & *invertendo* C ad D, quæ E ad A, ideo erit ratio AB ad rationem CD, vt A ad E. Ponatur itaque quæuis alia V. g. F 6. Dico *Rationem* EF, *& Rationem* AF *eosdem denominatores habere*.

B 5 B 5

A 2 — B 5 C 3 — D 4 E $3\frac{1}{3}$ — F 6 A 2 — F 6

Probatur. Proportio AF $\frac{2}{6}$ ad proportionem $\frac{5}{6}$ EF est, vt A 2. ad E 3. $\frac{1}{3}$ ex 2. huius: Sed vt A 2. ad E 2 $\frac{2}{3}$, ita ostensa est Ratio AB ad rationem CD. Ergo ratio AF ad Rationem EF est, vt Ratio AB ad Rationem CD. Ideoque, cum Rationes habeant eandem proportionalitatem; obtinebunt quoque eosdem denominatores.

PROBL. V. PROPOS. VIII.

Assignare proportionalitatem similem proportioni datæ, cui quantitates quoque datæ sint antecedentes, vel consequentes.

Sit data Ratio AB $\frac{2}{3}$, & quantitates C 4. & D 5. & voluntas sit reperiendi duas alias proportiones, quibus sint C, D quantitates antecedentes, sed similes, ac proportio A ad B.

A 2 C 4 quantitates L 6 G 12
Propor. —
B 3 D 5 datæ L 6 E 10

Sumantur quæuis L, & fiat, vt A ad L; sic C ad aliud G: Deinde fiat, vt B ad L, sic D ad aliud E. Dico *proportionem* CG *ad proportionem* DE *esse, vt* A *ad* B.

Probatur. Nam Ratio AL ad Rationem BL est vt A ad B; sed, vt est A ad L, sic ex effectione est C ad G; Vnde eius loco substitui potest, & vt B ad L, sic est D ad E; Vnde pariter vicaria illius BL hæc DE esse potest: Substitutis ergo istis CG, & DE, erit Ratio CG ad rationem DE, vt A ad B.

At è contrario efficies, si placeat terminos datos C, & D esse consequentes.

L 6 A 2 C 4 G $1\frac{1}{3}$
L 6 B 3 D 5 E $2\frac{1}{2}$

Vt L 6. quælibet est ad A 2. sic C 4. ad aliud G; & vt L 6. eadem prius electa ad B 3. sic D 5. ad E $2\frac{1}{2}$. Eritque ratio GC ad rationem ED, vt A ad B.

Probatur. Vt Ratio AL est ad Rationem BL, sic est A ad B: Sed vt A ad L, sic est G ad C; quia effectum est L ad A, vt C ad G; ideoque *invertendo* erit A ad L, vt G ad C: Quare proportio GC potest substitui loco proportionis AL. Sic dicas de proportione L ad B, quæ ex effectione est, vt D ad E; ideo invertendo E ad D erit, vt B ad L: ideoque proportio ED poterit poni loco proportionis BL: istis itaque illarum loco positis Ratio GC erit ad Rationem ED, vt A ad B sicut erant priùs AL ad BL, vt A ad B.

PROBL. VI. PROPOS. IX.

Data Ratione, & quantitate aliqua cum duobus denominatoribus assignatæ quantitati terminum reperire, vt Ratio data sit ad rationem, cuius, quæsitus est terminus, vt Denominator ad Denominatorem.

Sint Denominatores C 4. & D 3. & proportio data AB $\frac{2}{6}$, & quantitas E 5. cui terminus debeat assignari V. g. F: ita vt proportio BA sit ad proportionem EF, vt Denominator 4. ad Denominatorem 3.

A 2 C 4
Propor. — Denomin.
B 6 D 3

G $1\frac{1}{2}$ F $1\frac{1}{4}$
B 6 E 5

Fiat, vt C ad D, sic A ad aliud G $1\frac{1}{2}$: Deinde B 6. ad G, $1\frac{1}{2}$ sic quantitas data E 5. ad aliud F, $1\frac{1}{4}$ & erit F terminus quæsitus. Dico *quod* AB *Ratio proportionem ad Rationem* EF, *vt Denominator* C *ad Denominatorem* D.

Probatur. Ex effectione: vt E 5. ad F $1\frac{1}{4}$, sic B 6 est ad $1\frac{1}{2}$, & *invertendo*, vt F est ad E. sic G ad B. Proportio verò AB ad proportionem GB ob eundem terminum B refertur, vt A ad G, Ideoque AB erit ad FE loco rationis GB eiusdem positam, vt A ad G. Sed vt A ad G, ita factum est C ad D. Ergo vt C ad D; ita est Ratio AB ad rationem FE.

A 2 C 4 G $1\frac{1}{2}$ E 5
B 6 D 3 F 20

Quod si quis cupiat quantitatem datam E 5. esse non consequentem, sed antecedentem: Postquam fecit, vt C ad G, ita A ad G. Deinde è converso faciat, vt G est ad B, sic data quantitas E 5. ad aliquam aliam F 20. eritque AB ad rationem FE $\frac{5}{20}$, vt C ad D.

Probatur. Ex effectione B est ad F, vt G est ad E, sed vt Ratio AB est ad rationem GB, sic est A ad G ex 2. huius, ideoque erit etiam AB ad rationem EF eandem, quam GB, vt A ad G; sed A ad G ita facta est, vt C ad D: Ergo, vt C ad D, ita erit proportio AB ad proportionem EF, in qua quantitas E data est antecedens.

EXPENSIO III.

De proportionum compositione.

Explicauimus Tract. 9. in Elementis, quid sit compositio proportionum: modo aliquas insigniores compositionum proprietates, quæ ad arguendum in proportionibus sunt necessariæ, demonstrare oportet.



THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X.

Inter magnitudines; si interponatur qualibet magnitudo, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad interpositam, & interpositæ ad extremam.

Sint propositæ duæ magnitudines A 2. & B 12. & interponatur qualibet V.g.4. C, proportio 2. ad 12. componitur ex proportione A 2. ad C 4. & 4. ad B 12.

Reperiantur denominatores proportionum 2. ad 4. & sit D 2. & C 4. ad B 12. & sit F 3. Dico, quòd, si 2. multiplicet 3. quantitates denominatoresque proportionum producetur H 6. quæ quantitas erit denominator proportionis 2. ad 12. & ideo, quòd proportio A 2. ad B 12. componetur ex proportione 2. ad 4. & 4. ad 12. Quia quantitates, seu denominatores ipsarum proportionum D 2. & F 3. inuicem multiplicati producunt quantitatem proportionis, quam habet A 2. ad B 12. vt vult definitio 8. Tract. 9. part. 1.

Termini	A	2	C	4	B	12
Denominatores	D	2	F	3		
Quantitas Proportionis inter AB.	L	*	H	6	Quantitas D in F	

* Probatur. Reperiatur Denominator, seu quantitas proportionis A ad B, & sit quantitas L; & ostendam; quòd hæc quantitas L est eadem, quam quantitas H 6, ex multiplicatione denominatorum D 2. & F 3.

Quantitas ergo L est illa ex principio huius 8. quæ multiplicans terminum A 2. producit B 12. alium terminum: sed etiam quantitas H 6. multiplicans terminum 2. producit 12. B; Ergo sunt quantitas L, & H 6. æquales ex prop. 19. lib. 7. Eucl.

Id autem patet: Nam D 2. multiplicans F 3. facit H 6. & idem D 2. multiplicans 2 A facit C 4. interpositam; Ergo ex propos. 10. lib. 7. ita erit F 3. ad A 2. multiplicati, vt H 6. ad C 4. geniti, & permutando ita erit F 3. ad H 6. vt A 2. ad C 4. Quare ex propos. 19. lib. 7. extremæ quantitates 3. & 4. producent eandem quantitatem inuicem ductæ, ac mediæ H 6. & & A 2. nempe 12. Quod etiam erit verùm; quamuis maior quantitas interponatur V. g. C 16. inter A 2. & B 12. Nam Denominator proportionis 2. ad 16 est D $\frac{1}{8}$, & 16. ad 12. est F $\frac{4}{3}$: Si ergo 8. multiplicet 2. producet interpositam 16. & si multiplicat alterum denominatorem $\frac{4}{3}$ facit 6. Ergo ita erit $\frac{4}{3}$ ad 2. vt 6. ad 16. ideo producent eundem numerum 12.

	A	2	C	16	B	12
Denominatores	D	8	F	$\frac{4}{3}$		
Quantitas Proportionis inter A, & B.	L	*	H	6	Quantitas ex D in F.	

THEOR. II. PROPOS. XI.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum antecedentium, & consequentium inuersè sumptorum.

Sint datæ Rationes A 3. ad B 4. & C 5. & D 8. Dico proportionem AB $\frac{3}{4}$ ad CD $\frac{5}{8}$ componi ex proportione A 3. ad C 5. & proportione D 8. ad B 4.

$$A\ \frac{3}{B\ 4} \qquad C\ \frac{5}{D\ 8} \qquad E\ 2\ \frac{1}{2}$$

Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud E. Erit ex prop. 4. huius AB proportio ad CD proportionem, vt A ad E: Quia est ex effectione B ad E, vt D ad C, & inuertendo E ad B, vt C ad D: Est autem A B ad EB proportionem, vt A ad E; ideoque AB ad CD proportionem, vt A ad E. Sed ratio A ad E componitur ex proportionibus A ad C, & C ad E ex propos. 2. Tract. elementaria; quia sufficit ponere quid intermedium, vt extrema ex ea proportione dicantur composita. Igitur proportio Rationis AB ad rationem CD componitur ex proportione A ad C, & C ad E; quia verò ex constructione est, vt D ad C, sic B ad E, & permutando est, vt D ad B, sic C ad E: Ergo proportio A ad E componitur ex proportionibus, nedum A ad C, sed etiam D ad B, quæ est eadem, quæ C ad E, quare etiam proportio AB ad CD componitur ex proportione A ad C, & D ad B.

Quod verò AE componatur ex proportionibus A ad C, & C ad E, nempe 3. ad 5. & 5. ad 2 $\frac{1}{2}$ potest etiam videre ex præced.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum alterius, quidem directè alterius autem proportionis inuersè sumptorum.

$$A\ \frac{1}{B\ 3} \qquad C\ 2 \qquad E\ 1\ \frac{1}{5}$$
$$\qquad\qquad D\ 5$$

Sit AB ad B 3. et C 2. ad D 5. *Dico proportionem AB $\frac{1}{3}$ esse compositam ex proportione A 1. ad B 3. & D 5. ad C 2. inuersè sumptorum* fiat, vt D 5. ad C 2. sic B 3. ad aliud E 1. $\frac{1}{5}$. Erit ex 4. huius, vt in præc. Ratio A ad E, quam habent rationes AB ad CD. Sed ratio A ad E 1 $\frac{1}{5}$ est cōposita ex Ratione A 1. ad B 3. & B 3. ad E 1 $\frac{1}{5}$ ex 10. h: proportio verò B ad E est eadem, quæ D ad C: Ergo etiam Ratio AB ad Rationem CD est composita ex ratione A ad B, & B ad E hoc est D ad C, sicut est composita proportio A ad E, quæ est eadem, ac Rationum AB, & CD.

THEOR. IV. PROPOS. XIII.

Duas Rationes similes non inuicem, sed cum alijs duabus compositæ producunt proportionem similem alteri ex duabus Rationibus similibus compositis consurgenti.

*SIt data proportio AD $\frac{6}{3}$ similis proportioni FE $\frac{4}{2}$, & alia proportio CB $\frac{5}{4}$ similis alteri HL $\frac{16}{8}$. Dico, quòd, si inuicem proportiones componantur AD, & CB inter se dissimiles, sed similes alijs duabus FE, & HL, quæ inuicem etiam componantur atq; producant proportiones IK $\frac{30}{12}$, & MN $\frac{40}{16}$. Dico inquam *proportiones esse similes*, esseque I ad K, vt M ad N.

A 6 F 4 C I 30
Denomin. I 2. 2 K 12
D 3 E 2

C 5 H 16 1 1 M 40
Denom. 1 1
B 4 L 8 4 4 N 16

Sint Denominatores proportionis AD 2. & FE pariter 2. eo quod proportiones ponantur similes scilicet ab eodem, vel æquali denominatore denominatas ex defin. 3. huius.

Item denominatores CB, & HL erunt 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{2}{4}$. Si ergo denominatores isti componantur 2. cum 1 $\frac{1}{4}$, & 2. cum 1 $\frac{1}{4}$, quæ compositio fit multiplicando, producent denominatorem æqualem 2 $\frac{2}{4}$ & 2 $\frac{1}{2}$. Sed isti sunt denominatores proportionum compositarum IK, & MN ex def. 8. Tract. 9. Ergo ex defin. 3. huius compositæ proportiones IK, & MN erunt similes.

Et licet hęc propositio sit vniuersalis, etsi numeris explicata, eam tamen, & rectangulis applicabimus ad maiorem explicationem aliquarum prop. Conicarum, cui est necessaria.



* Sit basis AC ad AB in rectangulis AO, & AH sicut in rectangulis BH, & BL basis AB ad CB, & AB ad AD, in primis, vt BB, & BD in alijs. Ergo rectangulum AO super AC erit ad nigrū AL eiusdem altitudinis super AB, vt rectangulum AH super alteram basim AB ad nigrum BC eiusdem altitudinis super BC. Sed nigrum AL est ad eiusdem altitudinis rectangulum seminigrum BD, vt BH nigrum, & eiusdem altitudinis ad BL ex prop. 26. lib. 6. Quia basis priorum AF ad AD ponatur, vt BF ad BD in postremis. Quare ex ęquo in prima fig. rectangulum AO erit ad seminigrum AH, vt AF rectangulum ad rectangulum BL in postremâ.

THEOR. V. PROPOS. XIV.

Si ex duabus proportionibus similibus auferantur duæ proportiones similes, reliquæ proportiones remanent similes.

SInt proportiones IK, & MN, vt in præced. propos. & detrahantur ex ipsis duæ proportiones similes AD, & FE. *Dico residuas esse quoque proportiones similes* CB, *&* HL.

Probatur. nam sint proportionum integrarum IK, & MN denominatores 2 $\frac{1}{2}$, & 2. & $\frac{2}{4}$ erunt enim denominatores æquales, quia proportiones dicuntur similes ex definit. 3. huius. Rursusque sint denominatores ablatarum proportionum 2. & 2. qui etiam erunt æquales ob ablatarum proportionum similitudinem. Auferantur itaque isti denominatores à primis, quæ ablatio proportionalis fit diuidēdo, cùmq; ab ęqualibus ęqualis demātur, vel æqualia per æqualia partiātur, residua remanebunt æqualia 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{2}{8}$, quare etiam proportiones remanentes ex defin. 3. h. erunt similes.

COROLLARIVM

HInc ergo patet modum argumentandi in compositione rationum similium, vel diuisione efficaciter conuincere, quia ex eo, quòd duæ proportiones sint compositæ ex proportionibus similibus arguitur esse similes etiam compositas ex ipsis: Sicque ex eo quòd à proportionibus similibus auferantur proportiones similes, efficaciter deducitur residuas proportiones esse inuicem similes, quos modos arguendi descripsimus ad definit. 27. Tract. 9. Elem. part. 1.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Componere proportiones.

DAtæ sint proportiones AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$, quas oporteat multiplicare.

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 4. ad aliud E 6 $\frac{2}{3}$. *Dico proportionem* AE *esse compositam ex proportione* AB, *&* CD.

A 2 C 3 E 6 $\frac{2}{3}$
B 4 D 5 B 4

Prob. proportio AE est composita ex proportione A ad B, & B ad E; sed proportio BE est eadem, ac proportio CD. Ergo proportio AE componitur ex proportionibus AB, & CD; quòd verò AE componatur ex proportione A ad B, & B ad E patet ex propos. 12 huius Expens.

PROB. II. PROPOS. XVI.

Ratio quæuis ducta in rationem æqualitatis producit se ipsam.

SIt data ratio æqualitatis AB $\frac{2}{2}$, & alia ratio CD $\frac{1}{3}$. *Dico, si ducatur* AB *in* CD, *quòd ipsam* CD *Rationem producet.*

Fiat

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 2. ad aliud E $3\frac{1}{3}$ ex anteced. Ratio AE erit composita ex AB Ratione, & CD Ratione.

A 2 — B 2   C 3 — D 5   E $3\frac{1}{3}$

Sed Ratio AE est eadem, ac ratio BE; quia A, & B sunt æquales, & Ratio BE eadem, ac ratio CD ex effectione: Ergo Ratio CD ducta, seu composita ex proportione æqualitatis AB semet generat.

COROLLARIVM.

Hinc que educitur; quòd multiplicatio rationum per proportionem æqualitatis nihil addit rationibus; sed relinquit, vt erant.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Datis quatuor Rationibus exhibere proportionem, quam producunt duæ rationes inuicem ductæ ad duas alias Rationes inuicem ductas atque compositas.

Sint quatuor Rationes AB $\frac{2}{3}$, CD $\frac{1}{2}$ EF $\frac{1}{2}$, & GH $\frac{4}{5}$. quarum duæ componantur AB, & CD, aliæ duæ EF, & GH. componantur, & sit inquirendum, quam proportionem producant.

A 2 — P 6   A 2 — B 3   E 3 — F 6   E 6 — Q 15

L $2\frac{2}{5}$ C 1 — D 2   G 4 — H 5   O 3

Fiat vt propos.15. vt C 1. ad D 2. sic B 3. ad aliud P 6. eritque proportio AP $\frac{2}{6}$ composita ex proportionibus AB, & CD ex propos.15. huius. Rursus fiat, vt G 4. ad H 5. sic F 6. ad aliud Q $7\frac{2}{4}$; eritque proportio E Q 3. $7\frac{2}{4}$, vel $\frac{6}{15}$ composita ex proportione EF, & GH.

Si ergo ex propos.4. denominatores proportionum compositarum reperiantur AP $\frac{2}{6}$, & EQ $\frac{6}{15}$. qui erunt huius O 6. & illius L 5. Et erit proportio O6. ad L 5., seu, vt explicemus alijs terminis 3. ad $2\frac{2}{5}$ illa, quæ est inter compositas proportiones AP ex Rationibus AB, & CD, & aliam EQ ex Rationibus EF, & GH confectam.

Prob. ex eadem propos.4. nam ibi probatur ita esse proportio ad proportionem, vt denominator denominatorem.

THEOR. VII. PROP. XVIII.

Si quatuor quantitates dentur; proportio primæ, & secundæ ducta in proportionem secundæ, ad quartam eandem producit rationem, quæ proportio primæ, & tertiæ ducta in Rationem tertiæ ad quartam.

Sint quantitates A 2. B 3. C 5. D 4 Dico, quod Ratio AB $\frac{2}{3}$ in BD $\frac{3}{4}$ ducta producit eandem Rationem, ac AC $\frac{2}{5}$ in Rationem CD $\frac{5}{4}$ ductam.

Probatur. Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportionibus AB, & BD. Eademque Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportione AC, & CD ex 10. huius. Ergo Ratio AB ducta in Rationem BD eandem producit Rationem AD, ac AC ratio ducta in CD rationem.

THEOR. VII. PROP. XIX.

Ratio ducta in seipsam conuersis terminis producit rationem æqualitatis.

Sit ratio AB $\frac{2}{4}$, quæ ducatur in se, sed conuersis terminis BA $\frac{4}{2}$. Dico, quòd *producit antecedens, & consequens æquales*. Assumatur quantitas C 2. æqualis ipsi A 2. & ordine positis terminis A 2. B 4. C 2. Ratio AB componitur ex proportione A ad B, & B ad C; sed ratio BC est eadem, ac ratio BA; Ergo AC producitur quoque ex multiplicatione rationum AB, & BA conuersis terminis, sed ratio AC $\frac{2}{2}$ est ratio æqualitatis. Ergo ratio AB ducta in rationem BA producit rationem æqualitatis.

EXPENSIO IV.

De proportionum similitudine commutatis terminis.

Vt possimus in proportionibus argumentari aliqua de earum similitudine priùs consideranda sunt, in quâ vis argumentorum fundatur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si sint datæ rationes, & termini inuersi sumantur; inuersæ quoque Rationes eandem proportionem habebunt, quam priùs habebant.

Sint duæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{5}$ inuertantur termini DC $\frac{5}{3}$, & BA $\frac{4}{2}$. Dico, quod ita erit AB ad CD, vt DC inuersis terminis ad BA ipsas proportiones inuertendo.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, ita B ad E; $2\frac{2}{5}$, & erit, vt A ad B; ita Ratio AB ad Rationem CD.

A 2 — B 4   C 3 — D 5   E $\frac{2}{5}$

Prob. Proportio BE ad BA ob idem fundamentũ B est, vt A ad E ex 3. h. Sed ratio B ad E eadẽ est, ac Ratio D ad C ex constructione. Ergo Ratio DC ad BA est, vt A ad E; sed vt A ad E, ita est AB ad CD ex dictis prop.4. Ergo vt AB ad CD, ita est DC ad BA.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Proportiones duæ adsint, quarum termini permutatè sumantur, dicent quoque eandem proportionem.

Sit AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & termini permutatè sumantur AC $\frac{2}{4}$, & BD $\frac{3}{5}$. Dico, quod Ratio AB

ad

ad rationem ED est, vt AC ad BD proportionem.

$A\,\frac{2}{B\,3}$ $C\,\frac{4}{D\,5}$ $A\,\frac{2}{C\,4}$ & $B\,\frac{3}{D\,5}$ $\frac{F\,2\frac{1}{2}}{E\,2\frac{1}{2}}$.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, sic B ad aliud E $2\frac{1}{2}$ Eritq; vt AB ad CD rationem ita A ad E.

Fiatque Rursus ex rationibus quarum permutati termini, vt D ad B; sic C ad aliud F.

Probatur itaque. Quia est, vt D ad C, sic B ad E ex effectione. Erit permutando D ad B, vt C ad E: Sed, vt D ad B, ita facta est ratio C ad F. Et ideo cũ C ad F sit idem cum ratione D ad B ex 16. l. 5. erit C ad E eadem ratio, ac C ad F: quare ex nona quinti E, & F erunt quantitates æquales.

Cum ergo sit AB ad CD rationem ex effectione, vt A ad E, & inuersis terminis ratio AC ad BD rationem, vt A ad F, & AE, & AF sint eędem rationes etiam AB ad CD, & AC ad BD eandem habebunt similitudinem.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si sint datæ duæ Rationes, quarum inuertantur, & permutentur termini erunt adhuc in eadem ratione.

Sint AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{5}$, & inuersè permutatèque sumantur termini DB $\frac{5}{3}$, & CA $\frac{4}{2}$. Dico quod AB est ad CD, vt DB ad CA.

$A\,\frac{2}{B\,3}$ $C\,\frac{4}{D\,5}$ $D\,\frac{5}{B\,3}$ $C\,\frac{4}{A\,2}$

Proportio AB est ad CD ex 20. vt Ratio DC ad BA sed ex præced. vt DC ad BA, sic est DB ad CA. Ergo ratio AB ad rationem CD est, vt ratio DB ad rationem CA.

EXPENSIO V.

De proportionum Dialectica.

Sicut quatuor terminis argumentamur in Tract. elementarijs, sic etiam octo terminis possumus argumentari. Scilicet cũ pro terminis ponuntur non quantitates ipsæ, sed quantitatum Rationes, quæ dicuntur similes alijs duabus rationibus, ex quarum similitudine deducatur arguendo similitudo inter easdem rationes; sed alio modo combinatas, vnde 7. modi argumentandi, quos ex Euclide enumerauimus Tract. 9. etiam proportionibus conuenire hic ostendemus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Sit Ratio fundamentum ad rationem terminum sit, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum; Erit quoque permutãdo Ratio fundamentum ad aliam rationem fundamentum, veluti ratio terminus ad aliam rationem terminum.

Sit Ratio A $\frac{2}{4}$ ad rationem B $\frac{2}{6}$ terminum, vt alia ratio C $\frac{5}{10}$ ad aliam rationem D $\frac{3}{9}$. Dico *quod permutatione vti poterimus*, eritque A $\frac{2}{4}$ fundamentum ad rationem C $\frac{5}{10}$ fundamentum, vt B $\frac{2}{6}$ terminus ad D $\frac{3}{9}$ terminum.

E 2 F 5

$A\,\frac{2}{4}$ ad $B\,\frac{2}{6}$ vt $C\,\frac{5}{10}$ ad $D\,\frac{3}{9}$. Ergo $A\,\frac{2}{4}$ ad $C\,\frac{5}{10}$ vt $B\,\frac{2}{6}$ ad $D\,\frac{3}{9}$.

H $1\frac{1}{2}$. L $3\frac{1}{3}$.

Reperiãtur ex propos. 4. huius Denominatores proportionum E 2. rationis A $\frac{2}{4}$, & F 5. rationis C $\frac{5}{10}$. Sic H $1\frac{1}{2}$ rationis B, & tandem L $3\frac{1}{3}$ rationis D. Eritque ex Coroll. propos. 4. huius A ratio ad B Rationem, vt denominator E ad denominatorem H.

Sed ex hypothesi, vt est ratio A ad rationem B sic est ratio C ad D rationem, & C ratio est ad D rationem, vt Denominator F est ad denominatorem L, quare ex *æquo*. Ita erit denominator E ad H denominatorem, vt denominator F ad denominatorem L, quare, & permutando erit E ad F, vt H ad L denominatores, vnde ex Coroll. propos. 4. erit etiam ratio A ad rationem C, vt ratio B ad D.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si sit ratio fundamentum ad rationem terminum, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum: erit etiam inuertendo ratio terminus ad rationem fundamentum, vt alia ratio terminus ad aliam rationem fundamentum.

Sint rationes eædem, quæ superiores.

E 2 F 5

$A\,\frac{2}{4}$ vt $C\,\frac{5}{10}$ $B\,\frac{1}{3}$ vt $D\,\frac{4}{12}$

ad ad Ergo ad ad

$B\,\frac{1}{3}$ $D\,\frac{4}{12}$ $A\,\frac{2}{4}$ $C\,\frac{5}{10}$

H $1\frac{1}{2}$ L $3\frac{1}{3}$

Dico, quod si Ratio A sit ad Rationem B, vt ratio C ad rationem D erit etiam inuertendo ratio B ad rationem A, vt ratio D ad rationem C.

Probatur. Nam denominator E rationis A est ad H denominatorem B, vt ipsa ratio A ad B ex Cor. 2. propos. 4. & ratio A est ad rationem B, vt C est D rationes, & ratio C ad D, est, vt denominator F rationis C ad denominatorem L rationis D. Ergo ex æquo denominator E rationum A ad H denominatorem rationis B erit, vt denominator F rationis C ad denominatorem L Rationis D. Quare, & inuertendo H erit ad E denominatores, vt L ad F. Quare ex Coroll. propos. 4. etiam ratio B erit ad A, vt D ad C inuertendo.

THOR.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Si ratio pars ad rationem compartem alterius totius rationis, vt alia ratio pars ad aliam rationem compartem alterius totius rationis: erit etiam componendo totum ad suam partem, vt alterùm totum ad aliam suam partem.

INuentis enim denominatoribus cuiuscumque proportionis.

E 3 F 6

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ Ergo AB $\frac{3}{12}$ ad CD $\frac{60}{120}$ vt

B $\frac{2}{3}$ D $\frac{10}{15}$ A $\frac{3}{4}$ ad C $\frac{6}{8}$

H 2 $\frac{2}{3}$ L 5 $\frac{1}{3}$

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ Vel etiam AB $\frac{3}{12}$ ad CD $\frac{60}{120}$ vt

B $\frac{2}{3}$ D $\frac{10}{15}$ Ergo B $\frac{2}{3}$ ad D $\frac{16}{15}$

Sint E 3. rationis A, & H 2$\frac{2}{3}$ rationis B, sic F 6, rationis C, & L 5$\frac{1}{3}$ rationis D denominatores. Erit itaque ex inductione præcedentium propos. duarum E ad H, vt F ad L ob rationum suppositam similitudinem A ad B, vt C ad D.

Sed E, cum H, denominatores, est ad H, vt F cum L, denominatores, est ad L componendo: Ergo etiam ratio AB simul, vt totum ad A partem erit, vt ratio CD simul, vt totum ad rationem C partem, quòd est componendo arguere.

Potest autem etiam referri compositum AB ad compartē B, vt compositum CD ad compartem D.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

Si sit ratio totum ad partem suam, vt aliud totum ad partem quoque suam: Erit etiam diuidendo pars ad suam compartem, vt alia pars ad aliam compartem suam.

SIt eadem dispositio proportionum quę priùs, & ratio composita AB sit ad rationem simplicem A, vt ratio composita CD ad rationem simplicem C. Dico, *quòd ratio simplex, & pars A erit ad suam compartem simplicem B diuidendo vt simplex ratio C est ad suam compartem rationem simplicem D.*

EH 1 FL 2 E 3 F 6

AB $\frac{6}{12}$ CD $\frac{60}{120}$ Ergo A $\frac{3}{4}$ ad C $\frac{6}{8}$ vt

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ B $\frac{2}{3}$ ad D $\frac{10}{15}$

E 3 F 6 H 2 $\frac{2}{3}$ L 5 $\frac{1}{3}$

Constituatur singularum proportionum denominatores E, H, F, L. Quoniam Ratio AB ad A est, vt ratio CD ad C: erit etiam denominator EH ad E prioris combinationis rationum, vt denominator FL ad F posterioris rationum combinationis ex Coroll. 2. propos. 4. huius. Quare diuidendo, quia EH est ad E, vt FL est ad F erit etiam E ad H, vt F ad L suos denominatores partiales. Quare etiam ex Coroll 2. prop. 4. huius ratio A erit ad rationem B, vt ratio C est ad rationem D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

Si sit ratio composita ad rationem simplicem suam partem, vt alia ratio composita est ad aliam rationem suam partem simplicem: Erit etiam ratio prior composita ad suam alteram compartem rationem simplicem, vt secunda ratio composita ad suam alteram portionem simplicem.

SIt quoque eadem dispositio rationum, vt in præcedenti.

EH 1 FL 2 EH 1 FL 2

AB $\frac{6}{12}$ CD $\frac{60}{120}$ Ergo AB $\frac{6}{12}$ CD $\frac{60}{120}$

A $\frac{3}{4}$ C $\frac{6}{8}$ B $\frac{2}{3}$ D $\frac{10}{15}$

E 3 F 6 H 2 $\frac{2}{3}$ L 5 $\frac{1}{3}$

Et sint inuenti rationum denominatores compositarum EH compositæ rationis AB, & FL rationis CD. Sicqua denominatores rationum simplicium E, & H, nec non, & F, & L.

Igitur ex Cor. 2 p. 4. quia est AB, ad A, vt CD ad C: Erit etiam denominator EH ad E, vt FL ad F, cum eorum rationes sint eædem, ac rationum proportiones: Quia itaque est EH ad E, vt FL ad F erit quoque conuertendo EH ad H, vt FL ad L: quare etiam proportiones similes suis denominatoribus ex Coroll. propos. 4. simili correspondentia conuenient, & AB, erit ad B, vt CD erit ad D.

THEOR.

THEOR. VI. PROPOS. XXVIII.

Si sit ratio ad rationem, vt altera ratio ad aliam rationem, & ista altera sit ad tertiã rationem, vt hæc alia ad tertiam quoque rationem aliam, erunt etiam ex æquo prima ratio ad tertiam, vt alia ratio prima ad aliam tertiam.

$$A\ \frac{1}{3}\quad C\ \frac{4}{9}\quad E\ \frac{4}{8}\quad A\ \frac{1}{3}\quad E\ \frac{4}{8}$$

Ergo

$$B\ \frac{2}{6}\quad D\ \frac{8}{12}\quad F\ \frac{2}{4}\quad B\ \frac{2}{6}\ \text{ad}\ F\ \frac{2}{4}$$

Sint datæ Rationes, & prima in priori serie A sit ad C, vt in posteriori B est D; At in priori C sit ad E, vt in posteriori D est ad F. Dico, *quòd ex æquo erit quoque ratio A ad rationem E, vt ratio B ad rationem F.*

Probatur Progress. 1. Ratio A est ad C, vt B ad D, ergo permutando A erit ad B, vt C ad D.

Progress. 2. Rursus, vt respicit ratio C rationem E respicit quoque similiter ratio D rationem F: Quare permutando C erit ad D, vt E ad F.

Sed iam ostensum est C referri ad D progress. 1. vt A ad B. Ergo etiam A referretur ad B, vt E ad F. Quare rursus permutando A proportione correspondebit ipsi E, vt B correspondet ipsi F, quod erat demonstandum.

COROLLARIVM

Hinc est, quòd etiam si proportio sit perturbata idem eueniet: vt vides in expositis rationibus.

$$A\ \frac{1}{3}\quad C\ \frac{6}{9}\quad E\ \frac{3}{4\frac{1}{2}}$$

$$B\ \frac{4}{12}\quad D\ \frac{2}{6}\quad F\ \frac{8}{12}$$

Ergo vt

$$A\ \frac{1}{3}\qquad \text{ad}\ E\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}$$

$$B\ \frac{4}{12}\qquad \text{ad}\ F\ \frac{8}{12}$$

EXPENSIO VI.

De proportionum Algorithmo.

Hic agimus de multiplicatione, diuisione, subductione, additioneque proportionum ostendendo omnes istas varietates operationum, quæ conueniunt numeris, etiam proportionibus suo modo conuenire.

THEOR. I. PROP. XXIX.

Partium simul sumptarum ratio est ad quantitatem datam eadem, ac compositum ex ipsis ad eandem quantitatem datam.

$$\frac{A\ 2}{D\ 4}\qquad \frac{B\ 1}{D\ 4}\qquad \frac{AB\ 3}{D\ 4}$$

Sit data quantitas A, & B, & simul comparentur ad D. *Dico, quod si comparetur AB composita ex ipsis ad D, eadem omnino proportio est.*

Probatur Ratio A ad D, & B ad D est illa ipsa quantitatis A ad B ex 3. huius. Ergo componendo erit Ratio AD vnà cum ratione BD ad BD, vt ratio A vnà cum ratione B refertur ad B, hoc est, vt AB 3. ad B 1. Quamobrem proportio AD cum BD ad BD erit, vt AB 3. compositum ad D quantitatem datam.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Datæ rationis duplam assignare, aut dimidiatam, aut aliam in alia ratione.

Sit data ratio AB, cuius duplum, aut dimidium postuletur. Fiat quantitas aliqua C dupla quantitatis A. Dico rationem C ad B esse duplam proportionis A ad B, & rationem BC esse dimidiam eius, quam habet B ad A.

A 3   C 6
B 4

Probatur. Ratio CB ad AB est eadem, quam habet C ad A ex propos. 2. huius: sed C ad A ex effectione habet proportionem duplam, ergo ratio AC ad AB habebit proportionem duplam.

Ratio quoque B ad C, & B ad A est, vt A ad C, sed A ad C habet proportionem dimidiatam. Ergo etiam BC ad BA habebit proportionem dimidiatam.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Datas proportiones diuersorum antecedentium, vel consequentium ad eadem antecedentia, seu consequentia habentem proportionem reducere.

Docuimus id Coroll. 2. propos. 4. sed in quantitatibus rationalibus multiplicabimus simul terminum vnius, cum fundamento alterius, & huius terminum cum fundamento prioris, & deinde termini inuicem V. g. data proportione $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{7}$, quæ reducenda sit ad eundem terminum multiplicabimus 4. per 5. & generabitur 20. deinde 3. per 7. & generabitur 21. & tandem termini 5. & 7. & producetur 35. Proportio itaque $\frac{3}{5}$ erit ea, quæ habebit eundem terminum 35. ac proportio $\frac{4}{7}$.

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}\qquad \frac{20}{35}\qquad \frac{21}{35}$$

Probatur

Probatur: Quia cum 5. multiplicauit 4. & 7. erit ex propos. 19. septimi 4. ad 7. vt genitus, 20. ad 35. Rursus. Quia 7. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio 3. ad 5. quæ 21. ad 35. Ergo erunt [illegible] eadem proportio, quæ [illegible], & [illegible], quæ [illegible].

Si vero quis cupiat antecedentes multiplicet, vt priùs terminos, cum fundamentis alternatim, deinde fundamenta inuicem, & producet [illegible], & [illegible], quæ rationes habent idem antecedens 12.

Patet eadem ratione. Nam quia 4. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio generantium 5. & 3. quę genitorum 12. & 20. ex 19. septimi. Sic, quia 3. multiplicauit 4. & 7. erit eadem proportio generantium 4. ad 7. ac genitorum 12. ad 21. ergo erit eadem ratio [illegible], ac [illegible], & eadem quoque [illegible], & [illegible].

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

Datis quibuslibet rationibus eas in vnicam summam aggregare.

Sint rationes AB, & CD vnà aggregandæ. Reperiantur denominatores faciendo, vt C ad D, ita correspondeat proportione B ad aliud F. Deinde assumatur aliqua quantitas H illis A, & F denominatoribus simul sumptis æqualis. Dico HB *esse summam proportionum* AB, *&* CD.

A 3 — B 4; C 4 — D 5; F 3 — 5; H 6 — 5 — B 4; I 3 — L 8; M 1 — 2; N 7 — 10 — B 4

Ratio AB, & FB est eadem, ac ratio AB, & CD. quia CD, & FB eadem ratio est ex Coroll. 2. prop. 4 huius: sed ratio HB est æqualis illis duabus ex 30. prop. Ergo proportio AB, & CD in vnam summam redacta est.

Quod si placeat, & alias aggregare ipsi HB, idem fiat; sit V. g. IL [illegible], & debeat aggregari proportioni HB; Fiat, vt 8. ad 3. sic 4. ad aliud M, assumaturque quantitas æqualis quantitati H, & M s. N, & erit proportio NB ex omnibus illis aggregata; nempe ex AB, CD, & IL, vt patet: quia NB ob eandem prædictam rationem est aggregatum proportionum HB, & IL. Proportio verò HB est aggregatum proportionum AB, & CD. Ergo NB erit aggregatum proportionum earundem AB, & CD, & insuper rationis IL.

Si verò agatur de numeris ipsis, vel quantitatibus, quæ proportionum præbent fundamenta. Addenda simul sunt antecedentia, simulque consequentia, & numerus ex additione collectus erit summa exoptata. V. g. sint 2 [illegible], idest [illegible], & 3 [illegible], vel [illegible] in vnam summam colligendi. Colligantur simul fundamenta proportionum 12. & 13. in minimas partes redacta, & fundamentum fiet 25. deinde termini 5. & 4. & fient 9. erit ergo summa collecta [illegible], vel 2 [illegible]. Patet, quia cum additi sint simul, & antecedentia, & consequentia, etiam simul additas earum proportiones hoc in sensu necesse est fateri. Patet quoque, quia si auferatur à proportione [illegible] proportio [illegible] restituitur proportio [illegible].

Aduerte tamen, quod Denominatores non sunt simul addendi V. g 2 [illegible] cum 3 [illegible]; sed ipsa proportionum antecedentia 12. & 13. neque hic modus addendi est propriè addere proportiones: sed proportionum terminos.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIII.

Datam proportionem minorem à maiore detrahere.

Sit data proportio minor AB, quam oporteat subducere à proportione maiore CD.

A 2 — B 4; C 6 — D 9; E 4 — 2 — D 9; F 1 — 2 — D 9

Fiat, vt B ad A, sic D ad aliud E. Subducaturq; quantitas E 4 [illegible], vel detrahatur à quantitate C 6. & remanebit F, 1 [illegible], & s, 1 [illegible] ad D 9. habet proportionem residuam, & quod proportio FD sit residua proportionis AB à proportionis CD subductione.

Probatur. Nam ex 29. huius rationes ED, & FD rationi quantitatũ E, & F simul sumptarũ ęquantur, idest ipsi C ad D: sed proportio ED est eadem, ac AB, ergo proportio AB, & FD æquantur ipsi CD. Quare proportio FD erit residuum subducta proportione AB à proportione CD. Quantitates autem tenùs non autem quoad proportiones subductio fit detrahendo fundamenta à fundamentis, & terminos à terminis proportionum. Sic si velimus à proportione [illegible] deducere proportionem [illegible] subducemus 12. à 25. antecedentia, & 5. à 9. termini ambo, & residuum erit proportio [illegible]. Patet, quia si simul vt priùs addantur, restituitur proportio [illegible], cuius denominator est 2 [illegible].

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

Datam rationem per aliam multiplicare.

Multiplicare idem est, ac componere; ideoque eodem modo, ac propos. 15. hoc prob. operi demandabimus, quod si placeat efficere, vel multiplicando, ita faciendum erit.

Sit data proportio AB [illegible], & alia CD [illegible], quas oporteat multiplicare. Assumatur toties quantitas 2, quot partes sunt in 5. nempe quinque duenarios, idest 10. E, & toties quantitas 3. quot partes sunt in 9. eritque quantitas composita F 27. Dico, *quòd proportio* 10. *ad* 27. *est proportio genita ex multiplicatione* AB *in* CD.

E 10
A 2 — C 5
B 3 — D 9
I 15 — F 27

Probatur. Nam assumatur toties quantitas 3. quot vnitates sunt in 5. & fient I 15. ordineque ponantur quantitates E 10. I 15 F 27. proportio E ad F componetur ex proportione E 10. ad I 15. & I 15. ad F 27. ex propos. 10. huius.

Sed ex propos. 17. lib. 7. quia 5. multiplicat 2. & 3. & facit 10. & 15. eadem proportio erit inter genitas quantitates 10. & 15. quæ inter generantes 2. & 3. Sic quia 3. multiplicauit 5. & 9. & fecit

Nn 15.

15.& 27.eadem proportio erit genitorum 15.& 27. quæ generantium 5.& 9. Cùm ergo 10. & 15. sit eadem proportio, quæ 2. ad 3. & 15. ad 27. quæ 5. ad 9. Proportio 10. ad 27. dicetur quoque composita ex proportionibus 2. ad 3.& 5. ad 9.

Iste verò modus erit optimus pro numeris, & quantitatibus rationalibus; præscriptus autem propos. 15. huius prorsus est vniuersalis.

PROBL. VI. PROPOS. XXXV.

Datis rationum Denominatoribus ipsas rationes multiplicare.

SInt datæ rationes AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{9}$, & dentur denominatores ipsarum AB denominator GH, & CD denominatur EF, qui simul multiplicentur ea propos. 15. huius; Et producetur denominator alius, qui proportionem compositam denominabit N $\frac{2}{4 \cdot 9}$.

				E 1 $\frac{1}{?}$		2
					N	—
A 2	C 3			F 4		12
		Denom.		G 2	Vel 2 $\frac{?}{?}$	
					N	—
B 4	D 9			H 4		16

Probatur ex defin. 8. Tract. 9. Elem. Nam rationum quantitates, idest denominatores inter se multiplicati efficiunt rationem compositam. Vnde N $\frac{2}{18}$ erit proportio composita ea AB, & CD.

Et hic modus, tum quantitatibus rationalibus, tum irrationalibus conuenit.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Datam rationum proportionem per alteram proportionum rationem multiplicare.

SInt datæ duæ rationes AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{3}{5}$, sic, & aliæ duæ EF $\frac{2}{4}$, & GH $\frac{5}{6}$. Reperiantur earum denominatores; & quidem rationis AB sit P 2. rationis verò DC sit Q 1 $\frac{2}{3}$. Deinde rationis EF sit M 2, & rationis GH sit N 3 $\frac{2}{?}$.

		A 2	E 2			
10	P 2	—	—	M 2	—	12
		B 3	F 4			
15						14
		C 3	G 5			
9	Q 1 $\frac{2}{3}$	—	—	N 3 $\frac{2}{?}$		30
		D 5	H 6			

Probatur. Ratio P ad Q denominatorum est, vt rationis AB ad rationem CD; item proportio denominatorum M ad N est eadem, ac rationum EF ad GH. Quare si methodo præc. vel 15. h. rationes denominatorum inuicem multiplicentur, & Q, 1 $\frac{2}{3}$ ad P 2. vel redacta ad easdem partes 9. ad 10. & ratio M 3 $\frac{?}{?}$ ad rationem N 2. vel 20. ad 12. multiplicentur simul, & fiant 9. ad 6. Ratio 9. ad 6. erit ea, quæ ex ratione denominatorum, & ideo ipsarum rationum consurgit, vel alio modo erit proportio 180. ad 120. vt docuimus prop. 34. huius.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Datam rationem in duas ipsam componentes rationes partiri, quæ inter se datam obtineant rationem.

SIt data proportio A 6. ad B 27. & oporteat hanc proportionem in duas diuidere, quę inuicem datam obtineant rationem E 2. ad F 4.

A 6		E 2	A 6	B 27	A 6 C 9
Rat.	Prop. data	—	— C 9		—
B 27		F 4 - D 3	D 3		C 9 B 27

Fiat itaque, vt refertur F ad E, quòd sic referatur A ad aliud D. Deinde inter D, B media proportionalis statuatur C. Dico factum esse, quòd proponebatur, & rationem AB esse diuisam in rationes AC, & CB, quæ inter se rationem obtinent, quæ est inter E, & F.

Probatur. Quoniam B est ad C, vt C ad D per constructionem, erit etiam inuertendo D ad C, vt C ad B: sed vt A ad D, sic ea 3. huius est ratio AC ad rationem DC ob eundem terminum C, & ratio DC, est eadem, ac CB: Vnde ratio AC ad rationem CB est A ad D hoc est ex constructione, vt E ad F.

Proportio autem AB componitur ex proportione AC, & CB interposito termino C ex 10. huius. Ergo Ratio AC, & ratio CB sunt duæ rationes, quæ se habent, vt E ad F, quæ componunt proportionem AB.

PROBL. IX. PROPOS. XXXIX.

Datam rationem diuidere.

SIt ratio AB $\frac{4}{5}$ diuidenda per rationem CD $\frac{6}{7}$. fiat, vt D ad C, ita B 7. ad aliud, & prodibit B 4 $\frac{1}{?}$, itaque ratio AB $\frac{4}{5}$ subductâ ratione CD $\frac{?}{?}$ remanet ratio B 4 ad 4 $\frac{?}{?}$, idest 20. ad 21.

Probatur. Nam toties AB continet rationem CD, quoties A continet B, quia A, & B sunt denominatores Rationum: & sicuti diuiso numero quotiens demonstrat vices, quibus diuisor continetur in diuisore; sic, & hic denominatores A, & B ostendunt quoties ratio CD continebatur in ratione A nempe, vt 20. in 21.

Si verò agatur de numeris, vel de quantitatibus rationalibus; fundamenta Rationum cum terminis alternatim multiplicentur.

V. g Sit proportio AB $\frac{3}{5}$ auferenda à proportione CD $\frac{4}{7}$ multiplicetur fundamentum huius 3. cum termino alterius 7 & producetur 21. Deinde fundamentum 4. alterius cum termino huius 5. & fient 20. eritque proportio $\frac{?}{?}$, illa, quæ erit quotiens, & demonstrabit, quomodo proportio $\frac{3}{?}$ continteatur in proportione $\frac{4}{7}$.

Probatur. Nam fundamenta 3. & 4. quoque multiplicentur simul; producent 12. Itaque quia 3. multiplicauit modo 4. & priùs 7, erit eadem proportio 4. ad 7. quæ genitorum 12. ad 21. ex prop. 17. lib. 7. Proportio verò 12. ad 21. est composita ex proportione 12. ad 20. & 20. ad 21. ex propos. 10. huius: Proportioque 12. ad 20. est eadem, quę 3. ad 5. cùm sint 12. & 20. numeri geniti ab eodem 4. qui vtrosque 3. & 5. multiplicauit ea propos. 17. lib. 7. Quare subducta proportione 12. à 20. eadem, quę 3. ad 5. remanebit proportio 20. ad 21.

Quod

Quod autem ratio 20. ad 21. fine quoque quotiens. patet; si inuicem multiplicentur termini: Fiet enim terminus 35. communis vtrisque, vt suprà docuimus propos.13. huius; ideoque ex propos.8. huius erit ratio $\frac{4}{5}$ ad rationem $\frac{6}{7}$, vt 20. ad 21. quare proportio 20. ad 21 indicabit, quoties ratio $\frac{6}{7}$ contineatur in ratione $\frac{4}{5}$. Vnde proportio $\frac{20}{21}$ erit quotiens.

COROLLARIVM.

HInc quoque patet idem esse in proportionibus subducere, ac diuidere, sicut idem est multiplicare, & componere, quia subducta vna ratione ab alia, ratio residua est quoque quotiens, & multiplicata ratione per aliam, vt diximus, fit ratio composita

PROBL. X. PROPOS. XL.

Datis rationibus, quæ inuicem habeant rationem inæqualitatis assignare excessum minoris proportionis super maiorem.

A 3 — B 12   C 6 — D 10   E $7\frac{2}{10}$ I 1 $\frac{9}{18}$ K 5

SIt data ratio AB $\frac{3}{12}$, & Ratio maior CD $\frac{6}{10}$. Fiat, vt D ad C, ita B ad aliud exhibebit E $7\frac{2}{10}$. Ideoque ex 4. huius, vt AB ad CD rationem; ita erit A ad E: ponitur autem maior ratio CD ratione AB; erit ergo maior E quantitas, quantitate A. Subducatur itaque, & auferatur ab E quantitas æqualis ipsi A 3 & remanebit residuum E $4\frac{2}{10}$ denominatoris subducto denominatore A 3. Fiat itaque, vt denominator A 3. ad residuum denominatoris A $4\frac{2}{10}$ sic AB $\frac{3}{12}$ ad aliam rationē IK ex propos.9. huius. & 5. Dico *rationem IK esse excessum, quo superat ratio CD rationem AB.*

Probatur. Quoniam, vt A ad E totum, denominatores, sic AB ad CD, rationes. Ergo, ex 22 l. 5. vt sublatū ad residuum denominatoris E, sic AB ablatū ad residuum rationis CD. Sed vt A ablatum ad residuum denominatoris E, sic ex effectione est ratio AB ad rationem IK. Ergo ratio IK est eadem, ac residuum rationis CD. Quia eadem vna ratio AB eisdem CD, & IK dicit eandem proportionem, quam A denominator ablatum ad residuum denominatoris, E, quod erat ostendendum.

Hæc autē IK est eadē ac 3. ad E $\frac{2}{10}$ vt patet, solūq; excessus sub alijs terminis, si placeat, exquiri potest. Patet verò 3 ad $4\frac{2}{10}$, vel 30. ad 42. esse, vt denominator 4. proportionis AB $\frac{3}{12}$ ad denominatorem IK 1. $\frac{9}{18}$ ad 5. vel 21. ad 60 qui est 2. & $\frac{1}{7}$, quoniam redacti ad numeros planiores sunt 60. & 84. qui sunt in eadem proportione, ac 30. ad 42.

EXPENSIO VI.

De proportionum similium continuatione.

SIcut datis duabus quantitatibus, vel tertia, vel media proportionalis reperitur, & datis tribus quarta proportionalis reperitur, idem sentiendum est de proportionibus ipsis, in quibus si dētur duæ, media, vel extrema poterit inueniri, & tribus datis quarta perscrutari valebit.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inter duas datas rationes mediam rationem proportionalem inuenire.

DAtæ sint rationes AB $\frac{2}{5}$, & GH $\frac{9}{10}$, Inter quas oporteat reperire mediam proportionalem. Fiat, vt H ad G; nempe 10. ad 9. sic 5. ad aliud E $4\frac{1}{2}$. Interque A 2. & E $4\frac{1}{2}$ media proportionalis quantitas inueniatur A 2 K 3. & E $4\frac{1}{2}$ Deinde fiat, vt A 2. ad K 3. sic ratio AB $\frac{2}{5}$ ad rationem CD $\frac{3}{5}$ ex propos. 9. huius, vel 5 Dico *hanc esse mediam proportionalem, ita vt AB, & CD, & GH in continua proportione.*

A 2 — B 5   G 9 — H 10   A 2   K 3   E $4\frac{1}{2}$

AB $\frac{2}{5}$ CD $\frac{3}{5}$ GH $\frac{9}{10}$

Probatur. Nam, vt A ad K; sic effecimus rationem AB $\frac{2}{5}$ rationi CD $\frac{3}{5}$ correspondere proportione. Ratio autem A ad E est duplicata rationis A ad K ex 10. h. erit quoq; ratio A ad E duplicata rationū AB $\frac{2}{5}$ ad CD $\frac{3}{5}$. Sed ratio A ad E est eadem, quæ ratio AB ad rationem GH cùm A, & E sint denominatores ex 4. huius, Ergo AB ad rationem GH est duplicata rationis AB ad CD, & sic CD est media proportionalis, quæ exposcitur, & AB, CD, & GH erunt in continua proportione.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Datis duabus rationibus tertiam rationem proportionalem inuenire.

DEntur duæ rationes AB $\frac{2}{5}$, & CD $\frac{8}{12}$, & oporteat ipsis tertiam proportionalem inuenire. Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud E. 3. & $\frac{1}{3}$ vt autem A 2. ad E. $3\frac{1}{3}$, seu 24. ad 40. sic fiat ratio CD ad rationem aliam GH $3\frac{1}{3}$ ad 3. vt docuimus pr. 5. ad 3. Dico, quod proportio GH est tertia proportionalis, & quod Ratio AB. & GD sit in continua Analogiā trium AB, CD, & GH.

A 2 — B 5   C 8 — D 12   G $3\frac{1}{3}$ — H 3   E 5 — I $3\frac{1}{3}$

Probatur. Nam ratio AB est ad rationem CD ex propos. 4 huius. vt A ad E; sed vt A ad E, sic facta est ratio CD ad rationem GH; Ergo Ratio CD ad

est habet eandem proportionem, quam AB ad CD. Vnde tres AB, CD, & GH sunt in continuâ Analogiâ.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Datis tribus rationibus quartam proportionalem adinuenire.

SInt datæ tres rationes AB $\frac{1}{3}$, CD $\frac{2}{4}$, EF $\frac{3}{5}$, & oporteat inuenire quartam proportionalem. Fiat, vt D 4. ad C 2. sic B 3. ad aliud X, t $\frac{1}{2}$; inueniaturque ex propos. 6. huius ad rationem EF alia ratio GH, quæ sit in proportione, vt A, 1 ad X, t $\frac{1}{2}$, & erit GH $\frac{9}{10}$. Itaque GH est illa, quæ exquiritur, proportioque AB est ad proportionem CD, vt ratio EF ad rationem EH.

A	1	C	2	X	t	$\frac{1}{2}$	E	3	G	9
B	3	D	4				F	5	H	10

Probatur. Ratio AB est ad rationem CD ex 4. huius, vt A ad X, sed vt A ad X; ita effecta est ratio EF ad rationem GH: Ergo ratio AB ad rationem CD erit, vt ratio EF ad rationem GH.

Vbi vides, quòd ad hoc, vt rationes ipsæ sint similes, non est necesse, quòd termini ipsi sint proportionales, & quod ita sit A 1. ab B 3. vt C 2. ad D 4. nec B 3. ad F 5. vt G 9. ad H 10. vti est necesse in similitudine ipsorum terminorum ad hoc, vt enim similis sit ratio A ad B, quæ C ad D, necesse est, vt etiam ipsi termini sint similes, & A 2. sit ad B 4. vt C 3. ad D 6. & tunc ratio 2. ad 4. dicetur eadem, quam 3. ad 6. Sed in rationibus ipsis AB $\frac{1}{3}$ ad Rationem CD $\frac{2}{4}$ est, vt ratio EF $\frac{3}{5}$ ad rationem GH $\frac{9}{10}$, & tamen termini ipsi sunt dissimiles: Imo, & rationes ipsæ: neque enim eadem ratio est $\frac{1}{3}$, quæ $\frac{2}{4}$, aut $\frac{3}{5}$, quæ $\frac{9}{10}$, vt patet; & tamen ita est AB ratio ad rationem CD, vt EF ad GH, quod, & ipso experimento percipies, si reduxeris omnes proportiones ad eosdem terminos AB $\frac{1}{3}$ $\frac{8}{24}$ CD $\frac{2}{4}$ $\frac{12}{24}$ EF $\frac{3}{5}$ $\frac{6}{10}$, & GH $\frac{9}{10}$ $\frac{9}{10}$: nam cum istæ proportiones habeant eosdem terminos erunt, vt antecedentes, & erunt, vt A 4. ad C 6. sic E 30. ad G 45. vt patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLIV.

Propagare proportiones secundum datam rationem.

SIt data ratio AG $\frac{2}{3}$, & oporteat reperire rationẽ triplicatam ad rationem AB, sed in ratione A ad G.

Disponantur quantitates proportionales ab eadem quantitate incipientes in ratione AG 2. ad 3.

A	2	B	4	C	8	D	16	E	32
A	2	H	6	L	18	M	54	N	t6i
						K	36	P	to8

Dico, quod factum est id, quod requiritur. Nam proportio tertia DM habet ad proportionem ad primam BH duplicatam proportionem B ad H, & EN quadruplicatam ad eandem BH eius, quam habet B ad H.

Nã expr. 8. tr. 16. p. 8. D ad H habet ꝓportionẽ triplicatã eius, quæ est B ad H. Fiat, vt H ad B. sit M ad K, eritque ex 4. h. ratio DM ad rationem BH, vt D ad K. Ratio verò DK componitur ex proportione D ad H, hoc est, vt dixi triplicata rationis B ad H eius. quam habet A ad A, cuius denominator 1, & M ad K, quę ex effectione est eadem, ac ratio HB. At qui rationes BH, & HB producunt compositæ rationem æqualitatis ex propos. 19. huius.

Ergo ratio D ad K componitur ex ratione eius, quam habet A ad A triplicatã rationis BH, & ideo duplicatam B ad H, & ratione æqualitatis, sed Ratio æqualitatis nihil addit ex Coroll. propos. 19. in compositione rationum, ergo ratio D ad K est duplicata rationis B ad H. Sed vt D ad M, ita ratio DK ad rationem BH, ergo ratio DM ad rationem BH habet duplicatam proportionem.

Ita dicas de ratione EN, quæ est triplicata rationis BH. Fiat enim, vt H ad B, sic N ad aliud P. Eritq; ex 4. h. E ad P, vt proportio BH ad proportionẽ EN.

Ratio vero E ad P componitur ex proportione E ad N, & N ad P, & ideo quadruplicata eius, quam habet A ad A, & triplicata eius quam habet B ad H, & H ad B, siquidem ex effectione NP est eadem ac HB, sed HB, & BH producunt rationem æqualitatis, quę nihil addit in ꝓportionibus, ideo ꝓportio E ad P est triplicata rationis, quam habet B ad H, sed vt est E ad P, ita est ratio BH ad proportionem EN, ergo proportio EN est triplicata rationis BH.

Et idem erit si cupias quintuplicare rationes, & sextuplicare addendo terminos in eadem proportione.

COROLLARIVM.

ERuitur itaque ex hoc Tractatu multas vnius cuiuscumque proportionis reperiri denominatores; & si agatur de denominatoribus numericis.

Primo reperitur denominator propriè dictus, qui ita est ad vnitatem, vt aliqua quantitas ad suam partem, V. g. Proportio 6. ad 3. habet denominatorem propriè dictum numerum 2. quia ita 2. est ad 1. vt 6. ad 3. ea hoc sensu multi numeri, nempe omnes primi in ijs proportionibus, non possident alium denominatorem, nisi se ipsos; quia ex propos. 2. lib. 8. Elemen. sunt minimi in illis rationibus; & ipsis minores eiusdem proportionis dari nequeunt. vt sunt $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$, & de istis intelligitur principium illud, quod multiplicantes consequens producant antecedens, vel diuidentes iuxta exigentiam proportionis maioris, aut minoris inæqualitatis.

Secundo adesse denominatores impropriè dictos, sub quo genere, ne dum numerici; sed, & quantitatis continuæ concluduntur, nempe quantitates; quæ sint in proportione ad aliquam suam partem, vt duæ quantitates sunt ad inuicem. quarum proportionem denominant; & hoc sensu omnes etiam irrationales proportiones obtinent suum denominatorem; si non minorem saltem maiorem; vt proportio 6. ad 3. habet denominatorem $\frac{4}{2}$ $\frac{8}{4}$, & irrationales, vt explicauimus in definit. 3. h.

Tertio adesse denominatores proportionales, qui sua habitudine ad aliam ostendunt proportionalitatem, quam habet vna ratio ad aliam V. g. proportio 6. ad 3. habet denominatorem 2. & 4. ad 10. numerum 2 $\frac{1}{2}$, vel prima 4 & secunda 5. vel prima 12. & secunda 15. Isti ergo omnes denominatores sunt proportionales, quia suis partibus

tibus idem officium exequuntur, quod denominatores simplices 2. & 2 $\frac{1}{4}$.

Quarto reperiri denominatores proportionis minoris inæqualitatis; qui exprimuntur numeris integris etiã fractionibus copulatis, sed tali modo, vt vel vnitas in propriè dictis, vel pars aliquota suppposita subintelligatur. vt $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$ proportionis 2. ad 6. quo significetur, antecedens continere in se duas partes, quarum consequens est vna. At minoris inæqualitatis vnitas, vel pars aliquota superposita est subintelligenda, vt $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$, quo notetur quantitatem antecedentem esse partem, vel secundã, vel tertiã sequentis. Id tamen scribi non solet, eo quia commodè non possit, cum denominator, cui adhæret fractio (vt multoties euenire solet) ad modum fractionis exarari non debeat, nec possit; quamuis si denominatores calculo subigantur interest, vt ad eorum significationem percipiendam aliquo modo notetur.

In proportionalibus autem denominatoribus nullo modo id sit necessarium; cùm sufficiat habitudo ipsa quantitatum ad exprimendam proportionem rationum.



TRAC-



TRACTATVS XVIII.

De Flexis.

VIſis lineis rectis ſecundum ſe, antequam videamus de ipſis, prout circulo inexiſtunt, vel ſecant, vel eum tangunt, & vt latera quoque ſunt omnium figurarum, quæ circulo deſcribuntur, & ideo omnes etiam, vt earum latera conſiderentur; priùs de ipſis Flexis agendum eſt, & in primis de circulo.

EXPENSIO I.

De circuli deſcriptione, atque menſura.

FLexæ; aliæ ſunt, quæ ex corporum ſectionibus exoriuntur, quæ per motum puncti, & lineæ in plano nullo modo explicari poſſunt; aliæ, quę in plano ſolùm deſcribuntur, itant ad corpus nullam relationem poſſideant, aliæ vero, quæ & plano deſcribi queant, & tamen ſectiones quoque corporum ſint; aliæ, licet corporum ſectiones non ſint; ſolis tamen corporibus rotundis, & flexis deſcribi queunt.

Primi generis ſunt, Hiperbola, & aliqua talis quæ per lineæ motum, vel puncti nullo modo explicari poſſunt, vel ſaltem de facto non explicantur, & ſectiones Coni ſunt. Quarti verò generis Helix Cilyndro, ſeu Cono, ſeu ſpherę circumuoluta, quæ eſſentialiter poſcunt illud ſubiectum & nec plano deſcribi queunt. Secundi verò generis eſt ſpiralis Conchilis, Aſymtotos; & huiuſmodi. Tertij verò Circulus, qui & plano, & ſphera eodem modo deſcribi poteſt, ſicut Ellipſis, & Cylindro Conoque, & etiam plano duobus centris adhibitis, vel motu lineæ per angulum rectum, vt infrà. Hìc agemus de lineis, quæ plano deſcribuntur: reliquæ enim lineæ, cognitiones ipſorum corporum poſcunt: vnde eas ſuo loco ſeruabimus: at hìc in primis de circulo.

Licet facilis deſcriptio circuli ſit cum planum liberum eſt, & breue: cum tamen magnum, & impeditum non eſt adeo facilis: quare de hoc loquentes ſit.

PROBL. I. PROPOS. I.

Arcum circuli, cuius centrum haberi nequeat, deſcribere.

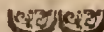
SIt deſcribendus circulus, & centrum A haberi nequeat. Fiat angulus VMP obtuſus, & claui figantur plano in punctis M, & P, moueanturque altera lambendo clauos, V. g. à P per M vſque ad V; vertex enim M deſcribet portionem circuli PMV, quam produces, ſi latus MP transferas per arcum factum: nam aliud latus MV ſua extremo arcum XV continuabit.

Probatur ex propoſ. 24. lib. 3. Nam in ſegmentis æqualibus eiuſdem circuli capiunt anguli æquales. Cum ergo angulus VMP, ſit ſemper æqualis, erit ſemper in æquali circumferentis eiuſdem circuli vertex eius M, & eius extrema V, & P; quare eundem circulum deſcribent. Huius autem circuli inuenies diametrum ex 1. lib. 3. vel per calculos.



* Sed etiam alio modo deſcribi poterit. Nempe faciendo centrum O in alio loco, & ducendo circulum CH cum non poſſit in A, nam LC longitudo, ſeu maior ſeu minor ea fuerit menſurata à circulo CH in qualibet linea parallela ipſi OC velut eſt PI ſuo extremo I circulum deſcribet.

Probatur. Nam ablato impedimento ſit AL radius æqualis radio OC, & ducatur perpendicularis AR ad AO. Cum ergo ſit LA æqualis OC: ablata ergo communi LO, erit LC æqualis ipſi OA: ſed IP eſt æqualis LC ex hypotheſi. Ergo & OA, & conſequenter æquali QR, & ideo QR erit æqualis IP: ſi addatur itaque QI vtriſque erit RI æqualis QP; ſed QP ſuo extremo P eſt in circumferentia circuli r Ergo etiam RI vel PI ſuo extremo I erit in circumferentiâ circuli æqualis.



THEOR.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. II.

Secto angulo alicuius trianguli bifariam; ambo crura ad basim totam, habent eandem proportionem, quam ipsum crus ad segmentum basis sibi vnitum.

Sit triangulum ABC. Diuidaturque angulus ad A bifariam per lineam FA. Dico *quod* AB, *&* AC *simul eandē proportionē habent ad* BC *crus alterũ, quā ipsũ crus* AC *ad segmentum basis sibi vnitum* FC.

Probatur ex propos. 3. lib 6. ita est CF ad FB, vt CA ad AB. Quare *componendo*; ita CF, & FB basis segmenta simul ad alterum segmentum basis CF; vt crus AC, & crus AB simul ad crus AC illi segmento CF vnitum: Quare, & *permutando* ita erit CF, & FB segmenta basis ad crura AC, & AB, vt segmentum basis CF ad crus sibi vnitum AC. Vel *inuersè* CA, & AB ad CB, vt CA ad CF. Hoc est fundamentum Archimedeę demonstrationis sequentis.

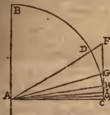


THEOR. I. PROPOS. III.

Cuiuslibet circuli peripheria est tripla diametri, & adhuc parte septima ipsius insensibiliter minor est.

Sit circulus, seu quadrans, quòd sufficit ABC. Sitque in eo angulus DAC ad centrum 30. Gr. Latus CF trianguli AFC erit dimidium basis FA, ex illis, quæ dicta sunt lib. 4. elem. propos. 15. Siquidem est latus hexagoni FV cuius duplum, seu 60. Gradus subtendit, & ideo æquat basim AF, & cum CF sit tangens, CAF triangulum est rectangulum.

Progress. 1. Si ergo CF ponatur 153. partium FA eius dupla erit 306. Vnde ex propos 47. elem. lib. 1. exquiremus latus AC. Nam quadratum numeri 153. est 23409. quo dempto à quadrato numeri 306. quod est 93636. remanet quadratum 70227. à quo subducta radix quadrata ex prop. 20. Tract. 13. dat latus AC paulo maius, quam 265. vnde iunctum simul lateri AF 306. erunt 571.



Progress. 2. Quia itaque, vt ex Lemmate duo crura AF, & AC 571. sunt ad basim CF 153. vt vnum crus AC ad segmentũ sibi vnitũ CG diuiso angulo FAC bifariam in G, erit crus AC ad segmentum CG paulo maius in proportione, quam 571. ad 153. & ideo posito, quòd CG sit 153. AC crus excedet 571. sed non integra vnitate, neque enim perueniet ad 572.

Progress. 3. Cum ergo habeamus nota AC, & CG in triangulo ACG rectangulo, eodem prorsus modo progrediemur, vt in primo progr. Nam diuiso angulo GAC bifariã in H eodẽ tenore argumẽti procedemus. Quia posuimus segmentum CG esse 153. partium quadratum eius erit, vt dictum est 23409. & quia posuimus AC esse 571. & paulò magis, quadratum eius erit 326041. & simul faciẽt ferè quadratum AG ex 47. lib. 1. elem. partium 349,450 licet quadratum ipsius AG sit paulo maius, eiusque radix paulo maior, quam radix 591 $\frac{1}{8}$ prædicti numeri 349450. Vnde proportio AG ad CG erit 591 $\frac{1}{8}$, & aliquid amplius ad 153. basim CG. & si iungantur simul duo crura AC, & AG 571. & 591. & $\frac{1}{8}$ eruntvt 1162 $\frac{1}{8}$ ad basim CG 153.

Quamobrem arguentes, vt secundo progressu, Quia ex propos. 2. duo crura AC, & AG ad basim CG sunt, vt crus AC ad segmentum sibi vnitum CH, ideo si ponatur CH 153. partium, erit crus AC 1164 $\frac{1}{8}$, & paulo maius.

Progr. 4. Secabimus rursus in triangulo HAC angulum A in duas ęquas partes in I: & eodem argumentandi ritu procedemus. Iungemus enim quadratum AC paulò maius, quàm 50534. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ quadratum inquam numeri 1164 $\frac{1}{8}$ ei cruri penè æquale, & quadratum basis CH 23409. & facient quadratum 1373943 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$, quod penè æquabit duo quadrata facta ex crure AC, & basi CH, quadrato ipsi ex crure AG ea 47. lib. 1. æqualia, & deficiet, nec quidem integra vnitas; vnde extracta radix quadrata dabit numerũ 1172 $\frac{1}{8}$, qui proximè æquabit crus HA. Vnde HA erit ad CH ferè vt 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, & si simul iungantur duo crura HA 1172 $\frac{1}{8}$, & AC 1164 $\frac{1}{8}$ erunt, vt numerus 2332 $\frac{1}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, quã ipse numerus 2334 $\frac{1}{4}$. Quapropter cum duo crura AC, & AH sint ad totam basim CH, vt crus AC ad segmentum CI, ob diuisum angulum bifariam in I. Si ponamus hoc segmentum CI esse 153. partium crus AC, erit 2334 $\frac{1}{4}$, & paulò ampliùs.

Progress. 5. Secabimus deinde angulum IAC in M bifariam, iungemusq; quadratum basis IC semper idem 23409. & quadratum cruris AC 2334 $\frac{1}{4}$ quod est 5448723 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$, & paulò amplius, fietque quadratum 5472090 $\frac{1}{4}$, cuius radix 2339 $\frac{1}{4}$ est crus IA, & etiam paulo auctior; Vnde crus IA erit ad CI, vt 2339 $\frac{1}{4}$ proximè ad 153. & crura simul posita CI 2339 $\frac{1}{4}$, & AC 2334 $\frac{1}{4}$ erunt vt 4673 $\frac{1}{2}$, & paulò ampliùs, quam ipse numerus ad 153. Quaderè, si ponatur CM segmentum 153. ex Lemmate, & 2. propos. huius erit crus AC paulò maius, quam 4673 $\frac{1}{2}$ sed non maius adeo, vt ęquet 4674.

Progress. 6. Sicque iam habemus multilaterum circulo circumscriptum, cuius semilatus CM est 153. ad semidiametrũ AC, quod est paulo maius, quã 4673 $\frac{1}{2}$, quia ergo DC est tertia pars quadrantis dimidium GC, erit sexta; & huius dimidium CH duodecima, & huius dimidium CI vigesima quarta, & huius dimidium CM quadragesima octaua pars erit quadrantis. Vnde CM erit semilatus multilateri, quod subtendit 48. partem quadrantis. Sed duplicatum, vt sit latus integrum subtẽdet 24. partem quadrantis; & ideo ob quatuor quadrantes multiplicatum per 4. nonagesima sexta pars totius circuli; nempe Polygonum laterum 96. & quia semilatus eius, vt probauimus progress. 5. est ad semidiametrum, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$ ferè; ideo totum

tum latus erit ad totum radium, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$: cum ita sit dimidium ad dimidium, vt totum ad totum ex propos. 18. lib. 5. Quapropter si multiplicemus latus CM 153. per 96. latera, quibus polygonum constat, habebimus latera totius polygoni 14688.

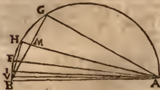
Si ergo dicas, regulam auream adhibendo si 22. dant 7. idest si 3. & $\frac{1}{7}$ dant 1. quid 14688.? & exhibebunt 4673 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$. Quare Polygoni ambitus ad 4673 $\frac{1}{2}$ habet minorem proportionem, vtpote ad numerum maiorem, quam ad 4673 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ Quare, & ad ipsum diametrum maius, quam 4673. $\frac{1}{2}$ habebit adhuc polygoni ambitus minorem proportionem, vtpote adquid maius. Ac circumferentia, vtpote interior ipsi polygono est minor, quàm ambitus polygoni: Ergo dicet tanto amplius minorem proportionem ad diametrum ex propos. 8. lib. 5. idest, quàm 14688. ad 4673 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, vel quàm 22. ad 7.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. IV.

Triangulum in semicirculo, cuius vnus angulus sit medietas alterius trianguli in eodem semicirculo, habet crus maius ad minus in eadem proportione, quam habent duo crura maioris trianguli ad totam basim.

SIt triangulum ABH in semicirculo AGB, cuius angulus ad A, sit medietate minor, quàm angulus A in triangulo maiori BAG. Dico, quòd AH crus refertur ad HB latus, vt duo crura AG, & AB trianguli maioris referuntur ad basim BG.

Probatur. Triangula AHB, & paruum MBH sunt æquiangula, quod sint rectangula, & in æquali peripheria BH, & HG ex 21 lib. 3. Ergo latera in eadem proportione versabuntur ex propos. 4. lib. 6. Ergo erit ita proportionatum crus AH maius in triangulo magno ad crus BH maius crus in paruo, vt ipsum BH crus quoq; minus in magno ad HM in paruo triangulo crus minus, idest vt AH ad BH, sic BH ad HM. Et ita erit basis BA in magno ad basim BM in paruo, vt crus minus BH trianguli magni BAH ad crus minus HM parui trianguli BMH.



Sed iam dictum est, quòd HA ad HB prorsus eiusdem proportionis reperiatur, vt HB ad HM parui. Ergo etiam hæc duo crura respicient bases eadem proportione, quâ respiciebant BH, & HM ex 16. lib. 5. Ideoq; ita erit AB basis ad basim BM, vt crus AH ad crus BH. Sed ex 2. huius proposit. vt BA, & AG, vt vnum sumpta respiciebant basim BG, sic crus BA respiciebat BM crus sibi vultum, & segmentum basis maioris trianguli BAG.

Ergo etiam AH crus maius ad BH crus minus eandem proportionem dicet, quam duo crura BA, & AG ad basim BG trianguli maioris BAG dicebant.

THEOR. II. PROP. V.

Circumferentia cuiuslibet circuli diametrum continet ter, & insuper magis, quàm eius octauam partem.

PRobatur ferè eodem modo, quò secunda propositio. Fiat itàque circulus, ducaturque diameter AB, & latus hexagoni BG. Quod BG statuatur partium 780. erit diameter AB, vtpote eius duplum partium 1560. cuius quadratū erit 2433600. Quadratum verò lateris hexagoni BG 608400. quod dēptū à quadrato diametri remanet 1825200. quadratum lateris AG, cuius radix quadrata est paulò minor, quam 1351. Vnde latus AG erit paulò minus, quam 1351. & simul vtrumque crus AB, & AG erit paulò minus, quam 2911. & basis BG latus hexagoni part. 780.

Progr. 1. Diuidatur angulus ad A bifariam lineâ AH, & iungatur BH, fietque rectangulum ABH; Quia ergo, vt 4. propos. huius ostensum, ita est vtrumque crus AG, & AB ad basim GB, vt crus AH ad crus BH; Ideo, si ponatur; quòd crus BH sit partium 780. crus HA erit partium 2911. nempe, vt est basis GB ad duo crura AB, & AG. Ideoque ex quadratis laterum rectanguli BAH inquiremus basim AB: cum ergo quadratum cruris BH, sit 608400. quòd crus supponitur 780. partium, & quadratū AH cruris, quod ponitur hoc progr. 2911. partium sit 8473921. si vniantur simul, vt fiat numerus 9082321. hoc erit quadratum basis AB rectanguli AHB, cuius radix quadrata est 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ paulò auctior, & ideo AB erit paulo minor partibus 3013 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, & simul vtrumque crus AB, & AH part. 2911. erunt partiū 5924 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, & crus HB 780.

Progr. 2. Secto rursus angulo ad A in triangulo BAH bifariam per lineam AF, ex prop 4. huius, Ita erit vtrumque crus BA, & AH ad basim HB, vt crus AF ad crus BF. Vnde, si statuatur basim BF esse 780. partium crus AF, erit paruòe minus, quàm 5924 $\frac{1}{2}$; nimiram, vt basis HB ad duo crura AB, & AH: Quare si horum quadrata vniantur simul in rectangulo BFA dabunt basis quadratum BA: cùm ergo quadratum BF sit 608400. & quadratum FA 35102662. Iuncta itaque simul dabunt quadratum 35711062. cruris BA, cuius radix quadrata est 5975 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, & paulò magis. Itaque crus BA erit paulò minus, quàm 5975 $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, quod iunctum cruri AF 5924 $\frac{1}{2}$ facient numerum amborum crurum AF, & BA paulo auctiorem, quàm 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ basis verò BF erit 780.

Progressus 3. diuidatur rursus angulus BAF in duas partes æquales per lineam AI, & per 4. prop. huius, ita erit vtrumque crus trianguli maioris BA & AF ad basim BF; vt crus AI ad crus BI. Ideoq; si statuatur basis BI part. 780. erit crus BA par. 11900. $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, nēpe vt basis BF ad duo crura AB, & AF, & quia BIA est triangulum rectangulum: Ideo quadratum duorum crurum BI, & AI erit æquale quadrato basis BA. Quadratum verò cruris AI est 1416. 28090. & quadratum BI est 608400. iuncta simul erunt 142 23690. cuius radix quadrata est 11926. $\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ paulò auctior: vnde AB basis erit paulò minor

quàm

quam 11926 $\frac{4}{10}$, quod iunctum cruri IA 11900. $\frac{1}{2}\frac{5}{6}$ dat 23826 $\frac{5}{1}\frac{6}{10}$: basis verò, seu crus IB esit 780.

Progr. 4. Diuidatur tandem angulus IAB bifariam linea AV, & quia ex propos. 4. huius ita est summa crurũ AB, & AI ad basim IB, vt crus AV ad crus VB ideò diuiso angulo SAB bifariã rectâ AV, si statuatur crus VB 780. partium erit VA 238526; cuius quadratum est 567706867. & iunctum quadrato cruris VB 608400. partium efficiet, quadratum AB 568315267. cuius radix quadrata est 23839 $\frac{6}{10}$, & paulò magis: vnde basis AB erit paulo minor, quam prædictus numerus 23839 $\frac{6}{10}$.

Progressus 5. Cum itaque iam habeamus diametrum AB paulo minorem, quam 23839 $\frac{6}{10}$, & crus VB 780; habemus quoque latus polygoni 96. laterum. Nam SG est hexagonum, quadere eius dimidium SH erit duodecagonum, & huius dimidij dimidium SF figura 24. laterum, & huius SF dimidium SI 48. laterum, & tandem huius dimidium SV 96. Cùm itaque iam habeamus VS latus polygoni 96 laterum partium 780. si multiplicemus per 96. habebimus ambitum totius polygoni 74880.

Progress. 6. Si ergo dicas auream regulam adhibendo; si 25. dant 8. Idest 3. & $\frac{1}{8}$ dant 1, quid 74880.? & factus computus exhibebit 23961 $\frac{1}{2}\frac{6}{5}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{3}{10}$ habet, vtpote ad numerum minorem maiorem proportionem, quàm ad 23961 $\frac{3}{5}$, & tanto maiorem ad diametrum ipsum, qui eo numero 23839. $\frac{6}{10}$ paulò minor est: Sed circumferentia vtpote exterior ipsi polygono, maior est ipsius ambitu: Ergo obtinebit tanto maiorem proportionem ad diametrum ex prop. 8 l. 5. quàm 74880. ad 23961. $\frac{3}{5}$, vel quam 25. ad 7. Idest, quam 3 $\frac{1}{8}$ ad 1.

Et hæc ad ostendendam propositionem sufficiunt, verùm ad hoc, vt videas præcisionem huius operationis, & quàm proximè ad verùm accedit fiat, vt 223. ad 71. Idest quam 3. & $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ ad 1, sic 74850. ad aliud, & regula proportionum inuenies esse 23840 $\frac{3}{5}\frac{6}{5}\frac{0}{1}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{3}{10}$ dicet maiorem proportionem, quam ad numerum 23840 $\frac{3}{5}\frac{6}{5}\frac{0}{1}$, qui se habet, vt 223. ad 71, & tanto maiorem ad diametrum, qui eo numero 23839 $\frac{6}{10}$ minor est, & tantò maiorem proportionem dicet, circumferentia ipsa, quæ vtpote exterior polygono illo ipso maior est.

Quare circumferentia ex hac quidem propositione maior euadit diametro sumpto ter cum octaua sui parte, vel sumpto ter cum decem ex 71. partibus, at ex propos. 3. huius, circumferentia est minor, quam diameter sumptus ter cum sui septima parte. Ergo inter has duas proportiones consistit, altera quidem tripla sesquiseptima, altera verò tripla sesquioctaua.

COROLLARIVM.

COlige ex istis duabus propositionibus 3. & 5. quòd circumferentia est inter duos istos terminos maiorem 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$, & minorem 3. & $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ diametri. Vnde si diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}$ producetur numerus minor, quam diameter, at è contra si multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}$ producetur maior numerus; quam circumferentia: Si verò multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ procreabitur minor numerus; quam circumferentia, & si diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ procreabitur maior numerus; quam diameter.

EXPENSIO I.

De circuli segmentis in figuram circularem coaptandis.

NOn mediocre Architecturæ, quandoque affert emolumentum, cæterisque similibus artibus diuersorũ circulorũ segmenta varia in vnã flexam componere, vt molli quodam flexu nullos efficiant angulos: primo autem docebimus de segmentis in se se redeuntem lineam efficientibus, deinde de segmentis in spiralem se flectentibus.

PROBL. I. PROP. VI.

Segmentum circuli duos circulos tangens ducere,

SInt duo circuli, siue contigui, seu se intersecantes, seu quocumque spatio distiti, seu æquales, seu inæquales (hic exhibemus exemplum circulorum inæqualium, & ab inuicem remotorũ) Ducatur recta per eorũ centra transiens CT: Hinc sumantur rectæ æquales TG, & CO, quæ dimidium per centra transeuntis CT superẽt, & à centris illorum circulorum A, & F interuallo AO, & FG, duæ portiones circulorum educantur MGH, & MOH. punctaque intersectionum M, & H rectis coniungantur MAT, & MFV sicut, & HFR, & HAI, & cæt. quæ transeant per centra A, & F: Factoque centro in H, circuli describatur arcus SQR interuallo HS, vel HR. sic facto centro in M alius arcus describatur TPV, quem arcum *dico tangere circulos propositos*.



Probatur. Quia AM, & AO sunt æquales additis portionibus æqualibus si radijs CA, & AS remanebunt æquales totæ HS, & CO. Sed CO ex constructione æquatur ipsi GT, & GT ipsi HR. Ergo HS, & HR erunt æquales. Vnde circuli arcus centro H transibit per puncta S, & R. Quòd verò GT sit æqualis ipsi HR patet; quia GF, & FH sunt æquales, additis itaque portionibus æqualibus FR, & FT totæ GT, & HR remanebunt æquales.

COROLLARIVM.

CVm verò circuli arcus tangit alium arcum, adeo bene inuicem se accommodant, vt nullum angulum efficiant, vt facis experimento constat: Vnde etiam addisces lineam spiralem ducere segmentis circulorum productam: si omnia centra arcuum super eandem rectam collocaueris, vt est centrum H arcus SQR, Alios verò modos, qui id exquisitè efficiant, aliò reseruamus, cùm eorum hic proprius locus non sit.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Lineam oualem propriè dictam efformare.

PRæcedens figura propriè oualis non est, cùm non omnino ouum imitetur, quod altera parte acutius est; Propterea figuram exhibemus, quæ illum præcisè imitetur, & ad inueniendas duas medias proportionales inter duas datas perutilis sit.

Super AB, semicirculo facto ACB, à puncto B plurimis chordis ductis, vt BC, & cæt. à punctis extremis demittantur perpendiculares, vt CD, & à puncto D, qua secant diametrum in quamlibet chordam, vt CB (ex cuius extremo in diametrum perpendicularis CD deducta est) in quamlibet inquam talem chordam alia perpendicularis deducatur DE: hæc enim signabit punctum E in qualibet chorda, per quæ æquabili manu ducta linea oualem figuram describet, hanc autem apellamus oualem ex similitudine, quam cum ambitu oui consequitur.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

Ope oualis figuræ inter duas extremas lineas duas proportionales proijcere.

SIt iam descripta linea oualis AEB. Super lineam maiorem ex datis AB, & in ouato altera minor data accommodetur BE, vt ex prop. 1. lib. 4 Eucl. quæ producatur vsque ad C, à quo demittatur perpendicularis CD: quia verò BEA est facta ex perpendicularibus à D in B ductis, etiam talis erit ducta DE. Et ideo erit AB ad BC, vt BC ad BD, & BD ad BE: & ideo CB, & BD erunt duæ mediæ proportionales.

Probatur ob triangulorum æquiangulorum similitudinem ACB. & DEB ob parallelas AC, & DE, linea AB erit ad CB, vt DB ad EB. Sed vt AB ad CB, ita quoque ex Coroll. prop. 8. elem. est CB ad DB, & DB ad BE: ergo sunt quatuor AB, & CB, atque DB, & tandem BE continuè proportionales.

COROLLARIVM.

OVatum quoque describetur, si describantur, vt infra duæ ellypses, quarum maioris minor axis deseruiat pro maiori axi minoris Ellypsis; Ellypsium autem descriptionem infra dabimus.

EXPENSIO III.

De linea Spirali.

SPiralis linea digna fuit, quæ Archimedis animum alliceret in sui speculationem, tantumque geometram suarum proprietatum propallatorem haberet, vsus verò eius insignis est in volutis capitellorum in Architectura prouoluendis, alijsque similibus ornamentis. Verùm non ea omnia, quæ Archimedes demonstrauit in medium adferemus de lineis eam tangentibus, earumque ad peripheriam, vel proportione, vel æqualitate, cùm ea inutilia sint; neque alijs de quibus agendum, deseruiant: ea verò speculatus est Archimedes; vt inueniret lineam peripheriæ circuli æqualem, ob quam eam mensurare posset, quod tamen assecutus non est.

DEFINITIO I.

LInea spiralis est linea formata à motu puncti per semidiametrum, dum semidiameter suo extremo puncto efformat circulum illis proportionaliter eodem tempore se mouentibus.

Sit IB semiradius in seq. fig. ponaturque moueri per peripheriam RDB eam efformando suo motu, & interim punctum ab I discedat, & per semidiametrum BI ascendat ad B, ita vt quot partes peripheriæ perfecerit extremum B, tot partes diametri perficiat punctum in eo se mouens, ex 16. V. g. partibus, in quibus diuisus est tam semidiameter, quam peripheria: hic motus puncti describit spiram BEFOPI punctatam.

DEFINITIO II.

VOcetur autem I principium spiræ manens, & B principium circularis.

DEFINITIO III.

REcta linea IB spatium spirale concludens, spatium verò spirale BCPI primum, quòd si sequatur in Q secundum, & si post completam reuolutionem adhuc sequatur tertium, & sic deinceps.

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Lineam spiralem in plano per puncta describere.

DIuidatur circumferentia BACD in tot partes æquales, quot placuerit, & in totidem se-

midiæ

midismeter (quò plures erunt eò exactior erit operatio) V.g. in 8. transferanturque singulæ partes semidiametri semper accipiendo vnam minus in singulos radios AI, & IC, & FD, & cæt. ductos à circumferentiâ ad centrum, quę imprimient puncta EFG, & cæt. *Per ea itaque puncta manu æquabili ducatur flexa, quæ erit quæsita spiralis.*

Probatur. Quia punctum E est 15. partibus distans ab I in diametro EA sicut peripheria BRA est 15. partibus distans à puncto B. Sic in radio IC punctum F 14. partibus distat ab F, sicut BRHC 14. partibus peripheriæ distat à B. Sic punctum G 3. partibus distat ab I, sicut peripheria BRD 13. partibus distat à B. Ergo, cum eodem partium decremento, tum circumferentię, tum diametri puncta, tum punctum B in extremo diametri translatum in ACD, quàm punctum aliud per ipsum diametrum ascendendo à DI in G, F, & E hęc puncta erunt in spirali iuxta definit. I. quòd, si secundum ambitum spiralis exoptemus, prolungentur diametri, vt IQ, & partes se eodem excessu superantes ex HI transferantur successiuè in diametros prolungatos, & per ea puncta flexa ducatur, quæ erit voluta in alias circumuolutiones promota.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. X.

**Si omnium circulorum æquali diminutione decrescentium arcus singuli componantur integrabunt dimidium ambitum totius maximæ peripheriæ, & dimidium maximi arcus. si verò à progressione terminus primus excludatur, tunc minus erunt dimidio ambitu eadem maximi arcus medietate.*

*PRæassumpt. supponendum est singulas peripherias, & earum partes, quarum diametri se æquali augmento superant, se etiam inuicem æquali augmento superare, & etiam subtensas illis partibus se superare æquali augmento. Ratio est, ea 43. 44. 45. tertij Elem. Siquidem ita inuicem sunt peripheriæ, & radij, & cordæ arcuum similium, & arcus similes, vt diametri: Cum ergo diametri æquali se superant augmento, etiam, & arcus, & cordæ, & peripheriæ æquali augmento se superabunt; Ideo in figurâ AH cùm arcus similes sint, AE, BC, & CD similes sint, cordæ, & arcus se æquali augmento superabunt. Quod diametri OX, OB, OC, OD se æquali augmento superent.

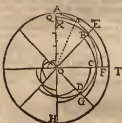
Sit itaque diuisa peripheria 8. circulorum similiter decrescentium in partes 8. & ex singulis accipiatur vnicus arcus V. g. AE, BC, & CD, & cæt. Dico, *quòd octo partes decrescentes istæ facient semicirculum* AEH, *& insuper dimidium arcus maximi* AE.

Sic si fit diuisa peripheria 16. circulorum æquali diminutione decrescētiū in partes 16. Et ea singulis peripherijs accipiatur vnicus arcus, & omnes isti arcus 16. decrescentes ponantur simul. Assero, *quod faciant lineam æqualē semigyro maximo, & insuper dimidio maximi arcus.* Nam arcus singuli sint partes 24. Ergo, vt deficiant æqualibus 16. decrementis singuli deficient 1 $\frac{1}{2}$, & stabit progressus Arithmeticus decresc. 24. 22 $\frac{1}{2}$, 21. 19 $\frac{1}{2}$, 18. 16 $\frac{1}{2}$. 15. 13 $\frac{1}{2}$, 12. 10 $\frac{1}{2}$, 9. 7 $\frac{1}{2}$, 6. 4 $\frac{1}{2}$, 3. 2 $\frac{1}{2}$, 0; qui omnes efficient numerum 204. at verò maximus circulus, cuius vnica pars decima sexta constat 24. particulis, est 384. cuius medietas est 192. Quare dimidius gyrus est 192 particularum; & arcus decrescentes sunt 204. nempe 12. particulis ampliùs; quæ sunt dimidiata pars decimasexta gyri maximi; quæ constat 24. particulis.

Si verò pars decima sexta maximi gyri excludatur: tunc erunt reliqui arcus decrescentes minus, quàm semiperipheria maxima 12. particulis, erunt enim tantum 180. particulæ, & deficient 12. ad 192. dimidium gyrum maximum, cuius decimasexta pars est 24. particularum.

Ratio est petenda à propos. 9. de propor. numericis Arithmet. Tract. 14. vbi ostendimus maximum terminum vultum primo facere totam summam progressionis Arithmeticæ, si multiplicetur per dimidium numerum terminorum, siue autem terminus primus 1 $\frac{1}{2}$, & vltimus 24. per eundem numerum dimidium terminorum 8. multiplicētur seorsim, & faciant 12. 192. & deinde in vnam summam redigantur, siue simul vniantur, & postea multiplicētur per 8. idē num. fit 204. vt pr. 2. l. 9. el.

Numerus verò 24. per 16. numerum terminorum ductus facit totum circulum maximum. Vnde per dimidium 8. ductus efficiet dimidium circuli ea propos. 17. lib. 7. cum sint ita multiplicati 8. ad 16 vt geniti 192. ad 384. Ergo Progressionis Arithmeticæ summa erit maior circuli maximi dimidio 192. nempe genito ex multiplicatione maximi termini 24. per numerum dimidium terminorū in termino primo 1 $\frac{1}{2}$, sed multiplicato per eundem dimidium terminorum numerum 8. qui gignit 12. Quia si 16. multiplicando 1 $\frac{1}{2}$ facit 24. ergo 8. eundem 1 $\frac{1}{2}$ multiplicando faciet 12. cum ita ex propos. 17. lib. 7. sit 8. ad 16. multiplicati, vt 12. ad 24. geniti. Itaque Progressio Arithmetica erit maior dimidio circulo maximo ipso primo termino 1 $\frac{1}{2}$ in 8. multiplicato, & facto 12. qui est dimidium maximi termini 24. quod verificatur in progressionibus, quæ incipiunt à nihilo, vt proposita.

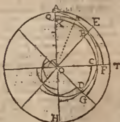


Quadere secunda pars quoque patet; nam excluso à collectione omnium maximo termino, excluditur ne dum dimidium maximi termini ipsius, quo superabat ambitum semicirculi; sed etiam aliud dimidium, nempe totum maximum arcum, vnde à semicirculo eadem medietate illius deficit.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XI.

* *Summa omnium arcuum, cuiuscumque circuli Arithmeticè decrescentium, si successio decrementi sit infinita, æquat semicirculum.*

SInt arcus AE, & BC, & CD, & subdiuidantur, vel intelligantur subdiuisi in infinitum. Dico, quod hæc progreßio arcuum decrescentium æquat semicirculum.



* Prob. Quo succeßio arcuũ numero est maior, eò maximus terminus est minor V. g. si semidiameter DA sit diuisus in 8. partes, erunt octo circuli decrescentes, & ex eis singulis octo arcus, & terminus maximus AE. Verùm si sint 16. partes in radio OA arcus erunt 16. & ideo maximus arcus AE dimidio minor. Quamobrem quo maior erit subdiuisio radij; & ideo circulorum decrescentium succeßio maior, eò minor erit differentia, qua collectio omnium arcuum excedit dimidium circulum includendo maximum, & incipiendo ab A, ita, vt sint termini AE, & BF, & CG. Et tantò minor erit quoque differentia; quâ excluso maximo termino, & incipiendo ab X, vt sint XB, BC, & CD, collectio arcuum decrescentium deficit à semicirculo. Ergo si istæ series infinitè crescãt numero, infinita erit diminutio differentię qua deficit à semicirculo: sed facta infinita diminutione subdiuidendo tandem vltimus terminus quantitatis acquisitur, & absumitur ipsa quãtitas ex propos. 15. Tract. 16. part 1. Ergo differentia eius post infinitam subduplam diuisionem fit nulla, & sic ęquabitur, siue progreßio maximum terminum includat, siue excludat toti semicirculo.

THEOR. I. PROPOS. XII.

* *Spiralis sensibilis est linea infinitis circulorum segmentis sensibilibus successiuè minoribus coagmentata.*

* PRob. Ita est AT arcus ad TC diametri portionem, vt SA ad BS, & si subdiuidatur, ita erit subdiuisi circuli portio ad subdiuisi diametri portionem, vt AT ad CT, & rursus portio hæc subdiuisa circuli ad aliam subdiuisam portionem, vt diametri arcus AT ad portionem CT, & sic semper in infinitum: sed AT est maior, quàm CT, cum peripheria sit maior, quam radius, & consequenter omnes eius partes proportionales erunt maiores, quam proportionales ipsius radij: Ergo ex Coroll. 1. propos. 12. lib. 5. etiam omnes arcus quò quò decremento diminuti erunt majores, quam partes diametri similiter diminutæ.

Probatur nunc principaliter propositio. Nam quò arcus sunt minores, è magis BX arcus intimus accedit extimo. Ergo si sint minores vltra omnem sensibilitatem, tantò magis BX minor longitudine vltra omnem sensibilem factus accedet ad arcum extimum EA V. g. arcus diminuatur sub dupla longitudine, & fiat IQ, accedet quoque subduplò spacio ad EA, & sic de alijs in infinitum minoribus, cumque semper sit maior quacunque diuisione proportionali præstita, arcus, quàm portio diametri, decrescet semper magis portio diametri minor, quàm arcus maior. Vnde, si diminuitur vltra omnem sensibilitatem spatium inter A, & E, tanto minus erit sensibile spatium XA, & BS. Quòd, si est vna linea, vt spatium sensibiliter non mediet inter E, & A: Ergo spira SA inter illos EA, & BX incedens erit idem cum ipsis saltem quoad sensum.

COROLLARIVM.

* HInc est, quòd si assumatur magna aliqua progressio Arithmetica per interuallum 1 procedens, & eius vltimus terminus reperiatur ex Tr. 14. p. 2. Propos. 13. de proportionalit. & ex inde omniũ summa ex propos. 9 eiusdem; hæc summa proximè exprimet Spiralem, si verò maximus terminus multiplicetur in se exprimet circulum. Sic si putetur diuisus circulus in 256. partes, quarum singulæ 256. particulis constent, vt singuli arcus vna particula diminuãtur. Arcuum decrescentium summa erit 32896. at verò peripheria, cuius 256. partes singulę 256 particulis constant, & medietas partis vnius 128. erit particularum 65536. quarum medietas est 32768. quæ subducta à summa arcuum dat pro residuo 128. nempe vnam dimidiam ex particulis 256. nimirum $\frac{1}{512}$ totius peripheriæ.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Spiralis æqualis est generanti semicirculo in sua circumuolutione integra.

* PRobatur. Arcus se diminuentes Arithmeticâ proportione, & interiores simul sumpti, & exteriores simul item sumpti semper accedunt magis ad semicirculum, quantò magis multiplicantur, sed quantò magis multiplicantur, tantò magis accedunt ad spiralem. Ergo si in infinitum multiplicentur accedent simul ad semicirculũ, & ad spiralem. Ergo spiralis cum semicirculo eiusdẽ longitudinis erit. Patet conseq. quia arcubus ad hoc vt æquẽt spiralẽ, & fiant spiralis multiplicatio infinita submultiplex deest, vt præced. pr. & eorum summæ, vt euadant simul æquales semicirculo ex propos. 11. multiplicatio infinita deest. Ergo ex eadem, si hęc pręstita pręsupponatur euadent spiralis, & summa arcuum decrescentium æquales semicirculo.

Hæc propos. est audacior, quam antecedens, sed si nõ placeat alicui, ãplectetur priorẽ, quę sufficit.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

De Linea Quadratrice.

Linea Quadratrix, quam ad circuli quadraturam excogitauere Dinostratus, & Nicomedes, ex Pappo lib.4. Mirabilis est, plurimosq; vsus in Geometrica obtinet; ideoque non est prętermittenda.

DEFINITIO

Qvadratrix est linea, quam proportionali motu radius ductus per circumferentiam, & perpendicularis per diametrum se intersecando producunt.

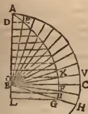
Hoc autem ex ipsa descriptione patebit.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Quadratricem lineam describere.

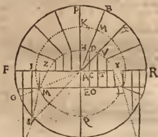
Facilior modus Geometricè Quadrandi circulum est linea Quadratrix, quam describit Clauius lib.6. Elementorum ad finem iuxta antiquos, & lib.7. Geometr. pract. Modus autem describendi talis est.

Centro B fiat portio circuli maior quadrante seu. Et sit quadrans BAC; cuius circumferentia diuidatur in tot numero partes, in quot radius (quò plures erunt, eò exactior erit descriptio) nos diuisimus in 10. partes, quarum aliquæ diametri, in diametrum SA prolungatam in L, & aliæ circumferentiæ quadrantis AC, in ipsam pariter prolungatam, vt CH insuper signatæ fuere. Ducantur deinde radij à centro B, ad circumferentiæ singulas partes, vt V, & H, & à diametri singulis partibus perpẽdiculares ipsi radio BA, vt sunt DE, & nx, & cæt. educantur donec terminent in singulos radios; prima in primum, vt DE secunda in secundum, & cęt. Deinde æquabili manu per puncta terminationum ducatur flexa AEFG, hæc enim erit linea quadratrix. Ideò verò prolungauimus ab F in G, quia cum F nequeat reperiri, cum radius sit idem, ac perpendicularis: reperitur tamen inueniendo puncta infra ipsam, qualia sunt F, t, G, quæ puncta, quo erunt plura, eo quadratricis curuitatem exactiùs prodent.



Probatur. Quia quadratrix est linea, quam diametri per circuium, & perpendicularia ipsi per ipsum diametrum motus proportionalis efficit, ita vt tot partes perpendicularis per diametrum suo motu conficiat, quot radius per circumferentiam: sed intersectiones assignatæ, per quas quadratrix ducitur tales sunt ea effectione: Ergo ea puncta in quadratrice sunt.

Aliã descriptionem lineæ Quadratricis inuenit in sua Cyinmathia Vincentius Leotandus Delphinas, de qua etiam acutissimè insignes proprietates demonstrat, est autem eadem, ac antiqua, sed auctior, ne dum circuli quadrante descripta: se toto circulo suis radijs intersectiones præbenbente, quam sic deducit prædictus auctor. Centro A describatur circulus cuiuscumque magnitudinis, & in plurimas æquales partes diuidatur incipiendo à P (nam quo plures erunt eo exactior erit descriptio) per quarum singulas à centro A radij emitantur, vt AP, AB, & cæt. Tum diameter FA in partes æquales inuicem tot, quot in circulo designatæ fuerunt diuidatur, & per singulas diuisiones perpendiculares erigantur, vt CD, & cæt. Etenim istæ initio facto ab AP radio, & prima parallela CD successiuè se intersecabunt, cum radijs V. g. in punctis D, & V per totum dimidium circulum; & idem dicas de parallelis, & radijs ad alteram partem circuli successiuè se elongantibus à prædicto radio AP. Per istas ergo intersectiones successiuas ducenda est manu æquabili linea flexa punctata SHL, quæ erit quadratrix integra.



Ex descriptione Quadratricis, linearum, & circulorum, quę eam secant nomina, & definitiones licet haurire.

DEFINITIO.

Circulus, & radius generans est ille, qui adhibetur in secunda descriptione ad totam Quadratricem describendam.

Talis est Radius AB, & circulus PASF.

DEFINITIO II.

Centrum quadratricis idem est, ac circuli generantis.

Tale est centrum A.

DEFINITIO III.

Axis quadratricis est recta, quæ in verticem quadratricis terminat, & deinde ad alteram partem

punctum in infinitum producitur, & Quadratricem in duas partes curvas dirimit. Cuius pars inter centrum circuli generantis, & verticem intercepta vocatur Basis seu Sagitta.

Talis est HQ, quæ hinc terminat in verticem H inde ad Q in infinitum procedit, cuius pars AH Sagitta, seu Basis dicitur.

DEFINITIO IV.

Applicata sunt lineæ perpendiculares ipsi axi vtrinque in Quadratricem desinentes, & Primaria inter eas est portio diametri, quæ intra quadratricem concluditur.

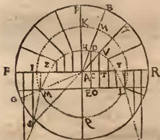
Itaque applica erit ML, & primaria erit ZY, quę transit per centrum A; estque portio diametri axi perpendicularis, quæ ab ipsa Quadratrice intercluditur.

PROBL. II. PROPOS. XV.

Dato centro quadratricis, eiusque ordinatim quacumque applicatâ ipsam quadratricem totam describere.

DAtum sit futuræ Quadratricis centrum A, & applicata quęcumque XL, & oporteat totam quadratricem describere.

Centro A per verticem L applicatæ EL transeat circulus punctatus LXM. Tum hic arcus LXM interceptus in partes quotcumque æquales secetur, sient, & applicata EL parem multitudinem partiū, ac arcus interceptus, obtineat; hæ in punctis E, & O, & cæt. circulus verò in punctis X, N, & cæt. Destinentur itaque ad has circuli partes, radij, quos parallelæ à partibus applicatæ EDOV, & cæt. producentes secent in D, V, & alijs, & hæc puncta erunt ad quadratricem. Et ad huc, vt vlteriùs producatur ipsa Quadratrix vltra L, & M partes æquales, ac prædictæ, vsque quo possunt replicari in residuo arcus LQ signentur sicut, & par multitudo partium æqualium, vt EO in applicata prolungata extra Quadratricem numerentur. Nam successiuæ intersectiones parallelarum, & radiorum erunt ad Quadratricem, vt in figura ipsa videre est.



Probatur. Quia ducta RA per centrum diuidetur in partes æquales à parallelis, sicut, & circulus generans RAP in partes æquales à radijs productis diuiditur, & tot numero, tum semicirculi, tum diametri partes erunt: Ergo eodem pacto, ac si circulus primarius, & generans RPF, & diameter AR in partes æquales, & pari numero diuisus fuisset, puncta in quadratrice dabuntur.

Dices. Poterit occurrere, vt arcus LQ vltima pars non sit æqualis cæteris arcus XL.

Respondetur vltimam partem in Q terminantem in Quadratrice non esse necessariam, sicut nec vltima pars diametri, quæ terminet in R: quia parallela ipsi AQ radio ducta ARR non potest occurrere radio AQ, vt patet, cum sit ipsa eadem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Radio ad quemcumque angulum ad axem constituto per dessignatum in eo quodcumque punctum deducere Quadratricem.

IN eodem Schemate ductus sit radius AM ad axem PA faciens angulum GAP, & assignatum in eo sit punctum M.

Per punctum M ducatur circulus MEL, & ab eodem axi perpendicularis EM, quæ erit applicata. Vnde cum obtineas applicatam EM, & centrum A deduces per M datum punctum, & in dato radio AM Quadratricem ex præc. propos.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato quouis Quadratricis puncto, & centro, punctum è diametro oppositum assignare.

DAtum sit quadratricis punctum V, cui oporteat aliud è diametro oppositum definire. Per centrum A agatur ab V linea, & per centrum A, radius generans RAF, ad quam ab V puncto dato perpendicularis ducatur VT. A puncto T igitur sumatur TI æqualis generanti semidiametro RA, & ab I perpendicularis demittatur occurrens lineæ VA productę in S, & intersectio S erit in Quadratrice.

Probatur. Nam tot partes æquales enumerare debet arcus RZEPOS, quot dinumerat diameter RTI, ve parallela IS secet radiū vs: sed semicirculus additus ZPS constituit radium TS. Ergo semidiameter TI punctum I dessignabit. Siquidem iuxta documenta propos. 14. huius, tot partes debent fieri in semicirculo, quot in semidiametro generante.

COROLLARIVM

HInc patet etiam modus continuandi in maximam distantiam Quadratricem. Quoniam punctis datis D, V, & cæt. puncta opposita M, S reperiri poterunt, per quæ producatur.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Perpendiculares à Quadratrice ad axem deductæ ita sunt ad totum diametrum, vt arcus à radio interceptus, & axi, ad totum semicirculum.

SIt quadratrix MHL, & à centro eodem A eiusdem fig. ac praeced. tum circuli, tum quadratricis educatur radius AG, & à puncto M, quo secat quadratricem, demittatur applicata BM. Dico *ita esse hanc applicatã* BM *ad totum radium; vt arcus* PG *ad semicirculum*.

Probatur ex effectione, vel defin. I. Qualis pars est arcus PG semicirculi talis pars est AZ semidiametri. Ergo ita erit arcus BG ad semicirculũ vt AZ ad radium; sed applicata BM est æqualis, cum sit inter parallelas ipsi AZ. Ergo etiam applicata BM ita erit ad semidiametrum, vt arcus PG, ad semicirculum, vel etiam *conuertendo* diameter ad applicatam, vt semicirculus ad arcum.

COROLLARIVM.

HInc enascitur esse quoque applicatam ad applicatam, vt circuli arcus ad arcum ab applicatarum radijs, vsque ad axem AP deductum. Namque omnes applicatę habent eandem proportionem ad diametrum, quam arcus intercepti à radijs per verticem applicatarum transeuntibus obtinent ad semicirculum V.g. in fig. sequenti AM est ad radium, vt arcus ACK ad semicirculum, & EL est ad radiũ, vt arcus CK ad semicirculum, ergo *conuertendo* radius est ad FL, vt semicirculus ad arcum CK quare ex *æquo*, vt MA ad LF, ita arcus ACK ad arcum CK.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Arcus ab extremo applicatæ ductus est ad applicatam, vt radius ipsius ad sagittam.

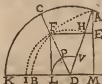
SIt sagitta DB applicata MA, circuli arcus ACK, & diameter eius AD, qui prodeant ab extremo A. *Dico ita esse*. Arcum ACK ad applicatam MA, vt radius AD ad sagittam DB.

Probatur. Per reductionem ad impossibile. Nam si non est ACK arcus ad MA applicatam, vt radius AD ad sagittam DB; erit forte ad maiorem, quàm ipsa sagitta. Sit ergo, si ita placet ACK ad MA, vt AD ad DI maiorem, quam BD.

Casus, & Progressus 1. Quoniam ergo est ex aduersarijs, vt ACB ad AM, ita AD ad DI, & vt propos.45. lib.6. element. sit quoque arcus ACK ad HFI arcum, vt AD ad radium DI. Consequenter proportio arcus ACK ad AM applicatam, & ACK arcus ad arcum HFI erit eadem proportio, ex prop. 16. lib.5. cùm sit eadem proportioni tertiæ AD ad DI.

Quamobrem, cùm eadem quantitas arcus ACK ad duas AM radij, & HFI arcus eandem dicat proportionem, ex 9. lib 5. erunt inuicem arcus HFI, & applicata AM æquales.

Progress. 2. Deinde, cùm ex anteced. Coroll, sit arcus ACK ad arcum CK, vt applicata AM ad applicatam FL, & idem arcus ACK ad minorem arcum CK, vt arcus HFI ad arcum minorem IF, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib.5. applicatę AM ad FL perpendicularem, & applicatam, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, cùm sit eadem proportio, quæ ACK ad arcum minorem CK. Cùm



ergo sit AM applicata ad applicatam LF, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, erit etiam *permutando* applicata AM ad arcum HFI maiorem, vt applicata FL ad arcum minorem FI. Sed ex primo progress. cognouimus esse AM æqualem ipsi arcui HFI: Ergo, & applicata LF esset æqualis arcui FI, quem subtendit, , quod est absurdum. Non erit itaque ACK ad AD, vt AM ad DI. Cùm ergo non sit AM ad maiorem DF, erit fortè ad minorem.

Casus 2. Progress. 3. Arcus itaque ACK sit ad AM applicatam, vt radius AD ad aliquam OL minorem, quàm sagitta DB, & eodẽ modo sequetur absurdum.

Siquidem ab aduersarijs ponitur arcus ACK ad applicatam MA, vt AD radius ad radium DL, & propos.45. lib.6. element. vt ACK arcus est ad arcum VPL, ita est AD radius ad radium DL.

Quadere ex 16. lib.5. erit eadem proportio arcus ACK ad diametrum AO, & arcus ACK ad arcum LPV, cum sit eadem, ac tertia proportio AD ad DL; cùmque idem arcus KCA ad duo applicatam MA, & arcum LPV eandem dicat proportionem, essent DA & arcus VPL æquales.

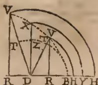
Progress. 4. Deinde cum ex anteced. sit arcus ACK ad arcum minorem KC, vt applicata AM ad applicatam PL, & idem arcus ACK eam proportionem dicat ad arcum minorem CK, vt arcus VPL ad arcum se minorem PL, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib 5. applicatæ AM ad PL, quę VPL arcus ad arcum minorem PL. Quapropter *permutando*; ita esset AM ad VPL arcum, vt PL ad LP: sed applicata AM, & arcus VPL ostensi sunt æquales in 3. progr. Ergo etiam PL, & arcus LP essent æquales, quod non potest esse; nempe, quòd tangens sit æqualis arcui, cuius est tangens.

Cùm itaq; arcus ACK nõ possit esse ad AM applicatam, vt diameter AD ad maiorem DI, quam sit sagitta DB, ex primo casu, neque ad minorem ex 2. casu DL; Radius AD erit ad æqualem ipsi sagittæ DB, taliter qualis est arcus ACK ad applicatam AM, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

HInc est, si quando contigat applicatam esse idem, ac diametrum alicuius circuli, vt est DX in fig. seq. quadrantis XY, quod radius ille, & applicata sit media proportionalis inter sagittam, & quadrantem: itaque esse DB sagittã ad applicatam DX, vt eadem DX radius quoque ad arcum XY, qui est quadrans, & è contra *conuertendo* quadrantem XY esse ad diametrum XD, vt idem XD applicata quoque ad sagittam DB.

COR.



COROLLARIVM II.

Hinc quoque enascitur, quòd si sagitta Quadratricis statuatur semidiameter alicuius circuli, diameter DX, erit æqualis quadranti illius ZB. Nam probatur iuxta tenorem præced. pr. & Coroll. quòd cum sit arcus XY ad DX applicatam, vt DX ad radium DB, & sit quoque ex propos. 43 lib, 6. elem. arcus XY ad arcum ZB, vt radij DX ad radium DZ, seu DB sagittam quod consequenter sit eadem proportio arcus XY, qui est quadrans ad quadrantem ZB, quæ est eiusdem arcus XY ad radium XD, cum tertiæ proportioni sit eadem radij BD ad radium DZ, quare cum idem arcus XY ad duas quantitates semidiametrum XD, & ZB arcum eandem dicat rationem erunt arcus ZB, & semidiameter DX æquales; cumque ZB sit quadrans DX quater assumpta circulum æquabit, cui sit sagitta BD radius.

COROLLARIVM III.

INsuper colligitur quoque ex eodem argumento, & fig. præced quamcumque applicatam RV esse æqualem arcui TB per verticem B ducti; cui sagitta quadratricis pro radio deseruiat.

Quoniam enim ex præced. est radius DV, ad sagittam BD, vt arcus HV ad applicatam RV, & arcus HV, ita est ad arcum TB, vt diameter VD ad diametrum TD, seu sagittam BD æqualem erit quoque ex 16. lib. 5. arcus HV ad applicatam RV. (cum eidem proportioni DV ad BD dicant consimilem proportionem) vt arcus HV ad arcum TB: Cum ergo idem arcus HV, tum applicatæ RV, tum arcui BT eandem dicat proportionem arcus BT, & applicata RV erunt æquales.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Sagittæ, atq́ applicatæ arcum tertium proportionalem assignare.

SIt Quadratrix ABCIN fig. seq. & sagitta DA, necnon, & applicata BC, & oporteat arcum circuli reperire tertium proportionalem, ita vt sagitta AD sit ad applicatā BC, vt ipsa BC ad arcū reperiendū.

Longitudo applicatæ CB transferatur super radium DC, & sit DH; perque punctum H ducatur IB paralela AAI, & secet in B Quadratricem, perque B ducatur radius DB, & centro D quadratricis fiat circulus interuallo XC, seu DH æqualibus. *Dico inuentum esse, quòd quærebatur, & sagittam* DA *esse ad applicatam* BC, *seu* DH, *vt* DH *ad arcum* HL.

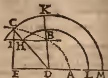
Probatur. Ita est sagitta AD ad radium DC, vt applicata BC ad arcum CXM *conuertendo* propos. 16. & *pc. mutando*. Ita est sagitta AD ad applicatam BC, seu DH, vt radius DC ad arcum CKM. Sed vt radius DC ad arcum CKM, ita est radius DH ad arcum HL ex propos. 46. lib. 6. elem. ergo *ex æquo*, vt est DA sagitta ad DH, seu æqualem BC applicatam; ita est DH, vel BC ipsa ad arcum HL; Ergo arcus HL erit tertia quantitas proportionalis, quam animo insederat reperire.

Si verò quis cupiat reperire tertium proportionem in ipso arcu MKC id efficiet ex propos. sequenti.

PROB. VI. PROPOS. XXI.

Sagittæ, & applicatæ tertium proportionalem arcum reperire in ipso arcu ab applicatæ extremo prodeunte.

FIant omnia, quæ in præced. pass, & semidiameter DA protendatur vsque in X ducto arcu CXM per extremum applicatæ BC; & dico *arcum* XM *esse tertium proportionalem*; & ita esse sagittā AD ad radium DC; vt radius DC ad XM arcum.



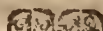
Probatur Progress. 1. Vt semidiameter DC ad radium DH, ita est arcus CM ad arcum HL, ex prop. 45. lib. 6. Sed vt CD ad HD; sic ob parallelismum linearum in triangulo DCE est CE ad IE: ergo, vt est CE ad IV, ita est arcus CXM ad arcum HL.

Progress. 2 Sed etiam in eadem proportione est arcus ipse CXM ad sui arcum minorem XM, quā CE ad IE ex ipsa cōstructione quadratricis ex Coroll. propos. h. 18. Ergo idem arcus CXM duobus arcubus XM, & HL ex primo progr. eandem dicit proportionem, quam CE ad BE. Quare XM, & HL licet inæqualium circulorum erunt æquales ex propos. 9. lib. 5. Cum ergo, & sagitta AD applicata BC, & HL sint continuè proportionales ex præc. etiam AD, & BC, & arcus XM erunt continuè proportionales.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Quadratrix ad axem Asymptota est, & numquam axem consequi; sed semper ad illum accedere potest.

PRobatur. Nam in fig. prob. 1. quanto magis diuiditur CV in minores, minoresque partes in ratione subdupla, semper tamen remanet pars residua ex Tract. 16. de progr. lin. propos. 12. Quare numquam poterimus consequi punctum, quod sit in ipso BC; verùm semper aliquatenus accedendo minus perpetuò remouebitur, & materialiter quidem accedet, non speculatiuè, vt dixi Tr. 1. prop. 6.



EXPEN-

EXPENSIO V.

De Quadratricis, & Elicis comparatione.

QVoniam non inutilem hanc comparationem agnoui: hinc est, quod illam præterire non potuerim, pro quo fit.

DEFINITIO

Connata Helici Quadratrix ea dicitur, qua habet semidiametrum circuli se generantis æqualem diametro circuli generantis Quadratricem.

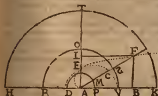
Est igitur connata Helix DE CV Quadratrici DEF; quòd semidiameter eam generans, & primam reuolutionem complens AR, vel AK circuli RTK sit æqualis diametro VAB circuli BOV generantis Quadratricem, & ideo AB radius est medietas radij AK.

THEOR. I. PROP. XXIII.

Applicata Quadratricis, & radius Helicis, qui productus ei connectatur ad verticem in ipsa quadratrice, sunt æquales.

SIt AC radius Helicis, qui productus in quadratrice DEF inueniat extremum F, applicatæ BF. Dico *huic applicatæ* BF *radium Helicis* AC *æqualem esse.*

Ducaturque gratia ostendendæ propos. à puncto F axi parallela FL.



Probatur ex constructione Helicis eadem ratio reperitur radij totius AS ad radium AC, quæ est arcus ROV ad arcum ROS. sed, quæ proportio est arcus UOV ad ROS arcum, eadem ex constructione Quadratricis est radij OA ad radium AL. Ergo radius OA, seu AV habet ad duas AL, quę æquatur BF applicatæ, & ad radium Helicis AC eandem proportionem, quam arcus UOV ad arcum ROS: Ergo AC, & AL, vel BF erunt æquales ex propos. 9. lib. 5.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Omnes radij Helicis abscindunt à circulo, cui radius est sagitta quadratricis, arcus sibi æquales.

SVpra ostensum est propos. 20. Coroll. 2. omnes applicatas, vt BF esse æquales arcubus DM circuli DMP, cui radius est sagitta à radio, vt AP, terminante in ipsum applicatæ extremum F recisis: sed applicata UF ex præced. propos. ostenla est æqualis radio Helicis, ergo radium Helicis æqualis est arcui MD, cui radius est sagitta AD.

EXPENSIO VI.

De linea Ellipsi.

ELlipsis est inter omnes figuras Mathematicas flexas, & in se redeuntes post circulum celebrior. Estque veluti circulus figura plana, & etiam solidis corporibus conueniens.

DEFINITIO.

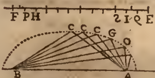
Ellipsis est motus puncti circa duo puncta talis, vt quantùm accedit ad alterum, tantùm remoueatur ab altero.

Sint A, & u duo puncta, punctumque aliud c ita moueatur per locum ccceo, vt quantùm remouetur à puncto B, tantùm accedat ad punctum A, linea hoc motu descripta Ellipsis est: an verò sit illa ipsa, quæ est sectio coni, id erit videre in Conicis, cum ostendemus hanc ipsam proprietatem, & illam obtinere, & sic quoque, vt hęc illam describi.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

Lineam Ellipticam describere.

LInea BF in partes, quascumque placeat, diuidatur, & deinde super alteram duobus punctis, vtcumque electis SA interuallo V.g. QP, assumatur FI, & in u facto centro describatur arcus, & reliqua assumatur IB, & facto centro in altero puncto A, rursusarcus versus easdem partes describatur, vbi se decussant in o Ellipsis circumferentia transit. Simili modo itaq; inueniantur alia puncta cccc, & cæt. tum infra, tum supra lineam AU, & per illa ducatur flexa. Nam illa erit Ellipsis, quam definiuimus.



Patet. Singula puncta ex constructione, tantùm sunt remota ab vno puncto, quantùm alteri approximant, nam quantum est FI, & IA, quã signatum est tantùm est OS, & SA, qua punctum c inuentum est, & sic de cæteris.

Hoc autem fit mechanicè in duobus punctis A, & u clauos infigendo, & chorda AOB liberè circum excurrat; Nam si stylo OS dum AO, & OU Chorda tensa tenetur linea Imprimatur in subiecta planitie, ea erit ellipsis; infra tamen eam vberiùs describemus, cùm de Conicis

EXPENSIO VI.

De linea Conchili.

CONchilis est inuentio Nicomedis non inutilis. Nam per illam inter duas extremas interponit duas medias proportionales, & angulum quemcumque in tres partes diuidit; deseruitque in Architectura ad rumores columnarum ritè delineandos, vt apud Vignolam.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

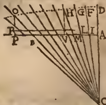
Conchilem describere.

LInea ducta AB, ducatur ei perpendicularis CD & electo in ea quolibet puncto C plurimæ rectæ ducantur quolibet interuallo ab inuicem dissitę, (quò propinquiores erunt eò meliùs) & sint CD, & CF, & CG, & CH, & cæt. Deinde arbitrarium interuallum AD super quamlibet lineam transferatur, à linea AP versùs alteram partem, qua lineæ non conueniunt, & sint IF LG, & MH, æquales ipsi arbitrariæ AD. Tandem per puncta extrema D, F, G, H, linea flexa æquâ manu ducatur, *& erit Conchilis.*

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Conchilis est linea Asymptotos: idest nunquam conueniet cum AP, *licet semper ei appropinquet, conueniet tamen cum qualibet alia illi parallela, etiam si propinquissima.*

PRobatur prima pars; quòd semper propinquior fiat. Nam data basi æquali MH V. g. & BO, cum angulus PBO sit minor angulo VMH, etiam perpendicularis minori angulo opposita PO, erit minor, quam VH. Quòd verò nunquam conueniat, patet, quia ex constructione punctum quodlibet conchilis, vt O distat à quolibet puncto lineę AB, quanta est BO, æqualis AD, quòd verò quam-

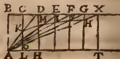


libet aliam lineam parallelam ipsi AP, vt RL inter Conchilem, & AP ductam tandem debeat secare, patet, quia producta in infinitum semper distantiam diminuet. Ergo etiam minimâ datâ quolibet minor euadet. Quare etiam distantiâ PR minor euadet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

Aliam lineam Conchilem describere, quæ nec minimam, nec maximam distantiam assequi queat.

SVper lineam BX plurimæ perpendiculares æquidistantes erigantur, vt AB, & CL, & cæt. atque electo puncto A ducantur plurimę rectę ad puncta D, E, F, G, X, & cæt. nam quælibet perpendicularem antecedentem secabit. V. g. quæ terminat ad D, antecedentem perpendicularem CL in puncto K, quæ finit in E secabit DM in M, & cæt. Si ergo p istas omnes intersectiones describatur linea KH. Dico esse conchilem talem, quæ nec ad maximam concham, seu distantiam à linea AT, in quâ maior concha est, nec ad minimam distantiam à linea AT possit peruenire.



Probatur prima pars. Nam puncta K, M, I, V, & H, quò magis procedunt, eò viciniora sunt lineæ BX. Nam ob parallalismum linearum BA, & CK, vt est CD ad DB, ita est CK ad AB: sed CD est dimidia AB, ergo CK erit dimidia AB; rursus, vt DE ad EB, sic DM ad BA: sed DE est tertia pars EB. Ergo etiam DM erit tertia pars AB, & sic de reliquis, cum ergo einsdem AB linea DM sit $\frac{1}{3}$, & CK $\frac{1}{2}$, patet esse minorē; ergo semper KH propinquior fiet: Nunquam tamen perueniet. Nam AX semper distabit à lineâ BX in puncto ab X remoto V. g. in H. Sed talia sunt omnia pūcta p quę ducitur KH, ergo nunquam ad lineam AX perueniet, & tamen semper accedet. Sed accedendo ad BX semper concha fit maior, & distans ab AT. Ergo nunquam ad maximam suam concauitatem perueniet, & tamen semper accedet.

Probatur secunda pars. Quod nec ad minimam peruentura sit. Nam minima esset in linea AB, cum si vltra AB producatur rursus ad BX prolongatam accedat: sed ad AB nunquā perueniet, & ideo, nec ad minimam distantiam ab AT.

Probatur minor. Nam non potest produci versùs AB; nisi subdiuidendo lineam BC, primo per medium; deinde alteram partem mediam, vt sit $\frac{1}{4}$, & hanc mediam, vt sit $\frac{1}{8}$, sed hoc modo, vt ex propos. 1 B. Expens. 4. de linear. Geomet. progress. patet, nunquam sectio finitur: Ergo nec vnquam ad AB conchilis KH peruenire potest.

EXPENSIO VII.

De lineæ Ciclicæ descriptione.

Linea Ciclica est illa, quam in Cęlo peragunt planetæ dum Epiclis pronoluuntur, & quam rotæ Clauus suo extremo describit, dum Currus trahitur, quamuis Ciclica planetarum suoa anfractua in gyrum torqueat, at rotę amfractus suos in directum continuet.

DEFINITIO:

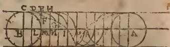
Linea Ciclica describitur à motu puncti circa circulum, dùm ipse circulus suo centro motu recto, seu circulari mouetur.

Itaque si moueatur V. g. circa rotam aliquod punctum ipsius rotæ, & ipsa rota vertendo se circa axem transferatur de loco ad locum efficitur quædam linea flexa, quæ Ciclica vocari potest.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Lineam Ciclicam per puncta describere.

Linea Ciclica triplex est, vel enim est motus centri velocior, quam puncti in circumferentia circuli, vel æquè velox, vel minus velox; sed quocumque modo se habeat, linea quidem diuersa est, sed eodem modo describitur. Sit linea AB ęqualis circuli, cuius centrum B, circumferentiæ; cùm silicet motus centri æquè velox est, ac motus puncti in eius circumferentia, vel maior, cùm velocior est motus centri, quàm puncti in circumferentia, vel minor, cùm tardior est motus centri, quam motus puncti in circumferentia. Diuidaturque in quaslibet partes V. g. 12. eriganturque perpediculares lineæ AB æquales diametro à singulis partibus lineæ AB, & in tot



numero partes diuidatur circulus, & facto centro in quibuslibet punctis LMN, & cæt. diuisionum lineæ AB describantur portiones circulorum: Sitque DF vni parti circuli æqualis EG, duabus, HI tribus, & cæt. Si ergo per puncta CFGI, & cæt. extrema arcuum transeat linea æquabili manu ducta, hęc erit linea Ciclica, quam silicet quodlibet punctum in rota signatum describit, dum currus mouetur, vel planetæ in epiciclis describunt, quę differt ab ea in eo, quod rectę perpēdiculares, vt CB & LD, & cæt. sunt radij excentricorum circulorum & ad centrum alterius magni circuli tendunt, cuius est circumferentia linea BA.





TRACTATVS XIX.

De Angulis.



Vlta de Triangulis egit Euclides lib. 1.: ſed ea erant elemetaria, quæ non ab alijs pendebant, ſed potiùs alijs ſequentibus fundamenta vniuerſaliſsima ſternebant. Modò de ipſis triangulis, quæ elementaria non ſunt tradenda, quæ tamen neceſſaria ad multa in ſequentibus percipienda.

EXPENSIO I.

De baſi triangulorum, atque lateribus in vnum verticem conuenientium.

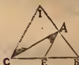
HÆc Expenſio neceſſaria eſt, tum figuris Iſoperimetris percipiendis tum tractatui de Sphæricis, tum Stereometriæ, & multis alijs.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo trianguli crura inæqualia fuerint, ducta à vertice recta, quæ biſariam baſim ſecet, hæc diuidet angulum, eritque maior anguli pars minori cruri adiacens: minor verò maiori.

SIt triangulum ABC, & AE diuidat baſim in duas partes æquales BE, & EC. Dico *angulum non eſſe ex æquo diuiſum*, ſed *angulum album apud* A *adiacentem cruri minori* BA *eſſe maiorem angulo nigro apud* A, *adiacente cruri maiori*.

Progreſſ. 1. Ducatur CI parallela AB; eritque producta AI æqualis cruri minori BA; Quod patet: Nam in triangulo IBC ob parallelismum linearum AB, & IC, vt eſt BA ad BI ex 4. lib. 6. elem. ita eſt EB ad BC: Quare ex 16. lib. 5. elem. ablatis proportionalibus BA, & BE, reliquæ erunt in eadem proportione; ſed BC eſt dimidium BC ex hypotheſi: Ergo etiam AI erit dimidium IB, & ideo æqualis ipſi BA.



Progreſſ. 2. Cum ergo AI æquet lineam BA, & ex hypotheſi AC ſit maius, quā crus AB, erit maius, quàm producta AI. Vnde erit maior angulus I, quàm niger apud C, vt ſubtendens AC maiorem baſim, quam AI. Sed niger apud C eſt æqualis nigro apud A trianguli BAE ex prop. 30. lib. 1. elem. ob lineas parallelas: Ergo angulus albus apud A in triangulo BAC; eſt maior nigro apud A in triangulo BAC eodem, quod erat probandum.

THEOR. I. PROPOS. III.

In omni triangulo rectangulo ſegmentum cruris ad reliquum adiacens angulo recto habet maiorem proportionem, quàm angulus ipſi inſiſtens, angulo inſiſtenti reliquo ſegmento.

SIt triangulum ABC, & ſecetur in D. Dico *ſegmentum* AD *habere maiorem proportionem ad ſegmentum* DC, *quàm angulus albus ad angulum nigrum apud* B *perpendiculari adiacentem*.



Probatur. Ex 1. lib. 6. Elem. ita eſt triangulum BAD ad triangulum BDC, vt eſt baſis AD ad baſim DC, & ex 39 lib. 6. vt eſt ſector FDB ad ſectorem BDE, ita eſt angulus albus ad nigrum apud B. Triangulum verò ADB. eſt maius, quàm ſector FDB, & ideo eſt proportio maioris inæqualitatis, at triangulum DBC minus, quàm ſector DBE; ideo eſt proportio minoris inæqualitatis. Proportio verò maioris inæqualitatis maior eſt, quàm minoris inæqualitatis; ſiquidem maior continet minorem, & inſuper aliquid, at minor ne dum non continet, ſed aliquid ei deficit.. Quare maior erit proportio trianguli BAD ad ſectorem BFD, quàm trianguli BDC ad ſectorem, DEB, quo poſito propoſ.

Probatur maior eſt proportio trianguli BAD ad ſectorem BFD, quàm trianguli BDC ad ſectorem BED: Ergo *permutando* maior erit proportio trianguli

anguli BAD ad triangulum DBC, quàm sectoris FDB ad sectorem DEB: Sed hæc triangulorum est eadem, vt supra notauimus, quę basium. Proportio verò sectorum eadem est, ac angulorum ex 39. lib. 6. ergo erit maior proportio basis AD ad basim DC quàm anguli albi ad nigrum apud B.

COROLLARIVM I.

Hinc & ex 39. lib 6. elem. deducitur quoque, quod habet maiorem proportionem segmẽtum AE ad segmentum DC; quam arcus FD ad arcum DE: quia proportio arcuum est eadem, ac angulorum suorum: Vnde cum AD ad DC segmenta dicant maiorem proportionem, quàm anguli albus ad nigrum: dicent etiam maiorem proportionem; quam arcus FD ad arcum DE illis subtensos.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam videre licet, quòd etiam si segmẽtum non immediatè adiaceat, angulo recto, attamen remotius dicet semper maiorem proportionem ad propinquius, quàm angulus remotiori insistens, angulo propinquiori insistente. Sic DA dicet maiorem proportionem ad AB angulus albus ad nigrum apud A, quòd triangulum DAB sit maius sectore BDF. Triãgulum verò BDC sit minus sectore BDE, vnde in figura sinistra intetes idem argumentum, quòd in propositione deductum est.

THEOR. III. PROPOS. III.

Maior arcus habet maiorem proportionem ad minorem; quam chorda maioris ad chordam minoris in semicirculo.

Dico LH arcum habere maiorem proportionem ad HA; quam chordam LH ad chordam HA. Ducatur LA, & diuiso arcu AEL bifariã in E ducatur EB, & angulus LHA in segmento erit sectus bifariam. Deinde per punctũ D centro B, arcus ducatur IEF. Basis autem LA secta quoque sit bifariam ab EB in triangulo æquicruro LBA.

Prob. ex præc. maior est proportio DA segmenti ad DC segmentum, quàm arcus DF ad DE arcum ex 3 h. Ergo inuertẽdo DC ad DA erit minor proportio, quam DE ad DF. Ideóque componendo CD, & DA segmentotum erit minor proportio ad DA segmentum; quam ED, & DF arcuum ad DF arcum, & ideo dupli segmentorum LA erit minòr proportio ad segmentum DA, quàm dupli arcuum IEF ad arcum DF. Quare diuidendo erit minor proportio LD partis ad DA compartem basis LA, quam arcus ID ad DF, sed vt pars LD ad compartẽ DA basis, ita est crus ad LH crus HA ex 3. lib 6. elem. ob angulum H bifariam sectum, & vt arcus ID ad DF ad centrum, ita est arcus LH ad HA ad circumferentiam ex 39. lib. 6. Elem. Ergo erit minor proportio LH ad HA chordæ, quam arcũ LH ad HA. Vnde LH arcus habebit maiorem rationem ad HA; quam chordæ LH ad chordam HA.

THEOR. IV. PROP. IV.

In omni triangulo rectangulo erit maior proportio totius cruris ad suum segmentum angulo recto adiacens, quàm anguli acuti adiacentis segmento ad angulum acutum adiacentem ipsi cruri.

Sit triangulum rectangulum ABG, & ab angulo acuto quolibet V. g. E ducatur recta EK ad latus oppositum IG. Dico *maiorem esse rationem cruris GI ad IE, quàm anguli EKI ad angulum nigrum G.*

Ab angulo itaque G ducatur parallela GA ad EK, centro G transeat per verticem E circulus EBC, & quia longior est AE basis, crure GE ob angulum obtusum, quem subtendit, apud E; ideo circulus EBC secabit intra triangulum AEG, & sector CGE minor erit triangulo GEA. Rursùs; quia GE maius est, quam crus GI ob angulum rectum, quem subtendit, circulus FB extra triãgulum cadet; maiorque erit sector BEG triangulo IEG.

Aduertendũ autẽ est triangula GEI, & AGE, quod sint eiusdem altitudinis se habere ad inuicem, vt bases ex 1. lib. 6. & sectores item, vt supra monuimus, vt anguli inuicem se habent ex 39. lib. 6. Elem.

Probatur. Triangulum GAE est maius sectore GCE, quare si comparentur eidem triangulo GEI maior erit proportio trianguli maioris, quam sectoris ad dictum triangulum GEI: Sector verò iste GCE habet maiorem rationem ad dictum triangulum GEI, quàm ad alterum sectorem GEB triangulo ipso GEI maiorem, quare multò maiorem rationem habebit triangulum AGE ad triangulum GEI, quàm sector GCE ad sectorem GEB; cùm multò maius sit triangulum AGE comparatum triangulo GEI, & sic eius comprehendet magis, quam sector CGE respectu sectoris EGB; quare etiam cõponendo triangulum AIG compositum, ad triangulum simplex GEI maiorem rationem habebit, quam sector totus compositus BGE ad simplicem sectorem GEB; Et ideo etiam angulus totus seminiger ad G ad angulum nigrum apud G, vt præmonuimus, & ideo insuper ita erit basis tota AI ad basim IE segmentum; sed vt est ex 4. lib. 6. AI ad segmentum IE; ita quoque GI tota ad segmentum KI; Ergo GI habebit maiorem proportionẽ ad KI, quam angulus semialbus G parti nigræ; sed angulus totus semialbus G est æqualis angulo K ob parallelismum linearum GA, & EK: Ergo tota basis GI dicet maiorem proportionem ad segmentum KI; quam angulus K ad angulum nigrum G.

COROLLARIVM.

Collige quoque, quod erit quoque GE segmentum in maiori proportione ad EI, ac angulus GEK, quod opponitur nigro G, ad ipsum G nigrum; quia probatum est esse in maiori proportione AE ad EI; quam angulus albus G ad nigrum G; sed angulus GEK est æqualis albo; ergo AE ad

BI, & ideo GK ad KI ob eandem proportionem, erit in maiori proportione, quã GEK angulus ad nigrũ o.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si sit maior proportio lateris ad latus, quam basis ad basim in triangulis duobus alterum crus commune habentibus, & basim eiusdem lineæ; erit etiam angulus subtensus segmento basis maiori maior angulo minori segmento insistente.

SIt ABI triangulum; & in eo ducatur AH, sitq; maior proportio AI ad BA, quàm segmenti IH ad segmentum HB. Dico, *& angulum* HAI *esse maiorem angulo* BAH.

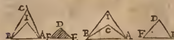
Prob. Nam, cum sit maior ratio IH, detruncetur talis portio, vt sit AC ad AB, vt CH ad HB ex propos. 3. lib. 6. erit angulus HAC æqualis angulo BAH. Ergo HAI erit maior, vtpote, quòd HAC sit eius pars.



THEOR. VI. PROP. VI.

Si dentur duo triangula, quorum lateris ad latus ratio sit maior, quam basis ad basim angulus verticalis erit minor. At si sit minor laterum proportio, quam basis, erit angulus maior.

QVoniam latera ponuntur maioris proportionis, quam bases, & AC est ad BD in maiori proportione, quam AB ad EF. Pone AI esse ad BD vt AB ad EF, ideo quoq; AC habebit maiorem proportionem ad BD, quam IA ad BD. Vnde ex 10. l. 5. AC maior erit, quã AI. Sic dicas de crure BI si fiat ad DF, vt AB ad EF bases, quare erit maior proportio CB ad DF, quam IB ad DF; erit itaque maior, vnde crura, cum sint maiora ex 21. lib. 1. conuenient extra triangulum, & minorem angulum concludent, quam IA, & IB & minorem, quam EDF, quia ex 5. lib. 6. sunt triangula ABI, & EDF æquiangula.



Sic dicas de minori proportione laterum, quam basium. Si enim dicat minorem proportionem AC ad BD, quam AB ad EF; fiat AI ad ED, vt AB ad EF, quare AC dicet minorem proportionem ad BD, quam AI ad BD: Vnde erit minor AC, quam AI. Sic dicas de latere BC, quod dicit minorem proportionem ad FD, quam AB ad EF, quare si fiat IB ad DF, vt AB ad FE, crus CB dicet minorẽ proportionẽ ad FD, quã BI ad FD, quare erit crus CB minus ex propos. 10. lib. 5. quam BI, ideoq; triangulum AIB erit maius, quam triangulum ACB quod erit minus angulusq; ACB maior, quam AIB, sed AIB est æquiangulum triangulo EDF, ex 5. lib. 6. Ergo ACB erit angulus maior, quam angulus EDF.

THEOR. VII. PROP. VII.

Bases trium triangulorum in vnum verticem conuenientium erunt continuè proportionales, si anguli duo excessuum sint æquales, & medium sit isosceleum.

SInt triangula ABC, & BAD, & BAH; quorum anguli, quo vnus alium superat niger, & nigerrimus sint æquales. Dico, & bases futuras esse continuè proportionales BC, & BD, & BH, dummodò latus AD sit æquale lateri BA.

Probatur. Angulus ADC niger est æqualis duobus internis, & oppositis angulo nempe H, & angulo ad A nigro in triangulo DAH; angulus verò niger ad D est æqualis angulo semialbo ad A, nempe AD ob æqualia crura subtensa, quare angulus semialbus ad A erit æqualis nigro ad A, & ad H. Angulus verò nigerrimus para semialbi est æqualis nigro; quare residuum album erit æquale angulo ad H. Itaque triangulum HAB erit æquiangulum triangulo BAC; siquidem angulus B communis est; angulus albus A æqualis angulo H; quare, & reliquus BAH erit æqualis angulo C nigro ex Coroll. propos. 32. lib. 1. quare hæc triangula habebunt latera proportionalia, ex 4. l. 6. & BC erit ad BA, seu BD, cui ipsa BA æquatur, vt BA, seu BD ad BH.



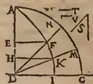
EXPENSIO II.

De triangulis, quo ad angulos secundùm rationem datam constituendis.

ANtiquitas tota; totusque ingeniorum neotericorum nixus in id elaborauit, vt posset angulos in triangulis iuxta datam proportionem diuidere, maximè si de trisariatione agitur; & præter ea, quæ antiquitùs inuenta sunt, nihil inuenit nona ætas, quod antiqua inuenta promoueret; Dinostratus itaque, & Nicomedes quadratricem lineam ad id inuenere, & Nicomedes Conchoideam lineam; quos modos breuiter tradere intendimus:

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Angulum datum mediante quadratrice iuxta proportionem datam diuidere.



SIt exhibita Quadratrix AFI, proportioque V ad T, & angulus S. Fiatque ei æqualis angulus CDN, & parallela ad basim ducatur FE. Fiatq; vt V, & T ad T ex pr. 16.

15. lib.6. elem. Sic BD ad aliam, & inuenietur DH à puncto itaque H ducatur parallela HK ad basim BD, & per K agatur radius DM, eritque arcus CM ad arcum MN, vt V ad T.

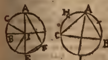
Probatur. Nam ex propos. 18. tract. 18. de lineis curuis, vt est portio lateris DK ad latus DA, sic est arcus NC ad quadrantem totum CA, vt autem DA latus ad HD partem, sic Quadrans CA ad arcum MC ex eadem cit. propos. Ergo *ex æquo*, vt pars DK ad partem HD lateris, hoc est, vt V, & T ad T ex constructione. Sic CN arcus ad CM arcum. Quare *diuidendo* BH erit ad HD hoc est *diuidendo* quoque V ad T veluti NM ad MC.

PROBL. II. PROPOS. IX.

Triangulum constituere, cuius duo anguli inter se habeant proportionem datam.

Sit quadrans circuli AB ope Quadratricis diuisus in C secundum proportionem datam, mensureturque arcus AC gemina vice in circumferentia AF; ducaturque AF, & FB, habebitque triangulum AFB duos angulos, qui habebunt proportionem datam arcus AC ad arcum CB; nempe angulus ad B erit æqualis ABC ad centrum, vtpote quod subtendat duplo maiorem circumferentiam ex effectione, & sic angulus ad A duplus anguli CBE.

Quod si velimus, & tertium angulum datam habere proportionem, totus semicirculus ACL secundùm proportionem datã diuidatur, replicando in AH, HC, & CL quadrantis arcus datos, & quilibet arcus in circulo gemina vice mensuretur, vt omnes rursus replicati æquent totam circumferentiam, & puncta ABD coniungantur, & erit factum, quod postulatur; habebuntque anguli eam proportionem, quam habent partes arcuum AH, & HC, & CL secundum proportionem eo modo, quo diximus ope Quadratricis inuentam.



PROBL. III. PROPOS. X.

Angulum datum ope Conchoidis trifariam secare.

Sit angulus datus acutus ABC, & à quolibet puncto lateris, quod placuerit, demittatur perpendicularis in aliud latus AD, prolongeturque latus BD in C, & sit DC addita pars dupla alterius lateris BA, & ab A ducatur parallela AE ipsi DC, describaturque centro B Conchois CBF, & ad punctum E, quo secat, à puncto B ducatur BE; anguliusque niger erit tertia pars totius anguli ABD dati, & altera pars alba eius duplum erit.

Probatur OB ex descriptione Conchoidis æquatur ipsi DC; Quare diuisa in P bifariam OP æquabitur dimidiatæ DC, & ideo ipsi BA, cui tota DC dupla est ex constructione; & quia OAB angulus ex effectione rectus est, circulus centro P descriptus transibit per tria puncta OAB ex propos. 13. lib. 3. elem. Quare AP erit radius, & æqualis OP, & PB, & BA; quare anguli nigri ad A, & B erũt æquales ex 14 lib. 1. elem. & angulus niger ad P, vtpote externus illis duobus erit æqualis, & duplus vni eorum B: atob æqualitatem laterum BA, & AP angulus P niger æquatur albo B: quare angulus B albus erit duplus anguli B nigri: sed hic, vtpote ab incidente in parallelas AE, & BC ex propos. 30. lib. 1. elem. factus æquatur angulo B nigro: Ergo angulus albus B est duplus anguli nigri B; & sic ABD sectus est, & diuisus in tres partes, quarum duæ sunt pars alba, reliqua pars nigra.



EXPENSIO III.

De Angulis, quoad latera secundùm datam rationem constituenda.

Vidimus modum constituendi angulos proportionales; modo restat videndum quomodo, & latera proportionalia secundùm datam rationem efficiamus.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato angulo à puncto extra illum ducere lineam, quæ crura iuxta datam proportionem detruncet.

Sit datum punctum A, & ab eo ducenda sit linea, quæ iuxta datam proportionem B ad C detruncet latera anguli E; ita vt sit vnum ad alterum, vt C ad B. Eligatur quodlibet punctũ F, & fiat, vt C ad B ex propos. 15. lib. 6. elem. sic BF ad BC, & CF ducatur dein ab A parallela ipsi FG, quæ sit AEH, & erit IE ad EH, vt C ad B.

Patet ex prop. 4. lib. 6. elem. Nam FE est ad EG, idest, vt C ad B ex effectione; vt EI ad EH: Ergo erit HE ad EH, vt C ad B. Quod intellig tur etiam si intra triangulum hęc praxis operi demandetur.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Ad datum punctum intra angulum lineam ducere, quæ ab eo puncto remaneat diuisa secundùm datam rationem.

Sit in præcedenti fig. datum punctum K per quod ducenda sit linea, vt K diuidat eam in proportiones datas B ad C.

Ducatur parallela BI lateri GB, à puncto B; & fiat, vt B ad C, sic BI ad IF, & ducatur à puncto F per punctum K linea recta FG. Dico BG esse ad BF, vt B ad C.

Patet,

Patet, quia est EK ad EF, vt EL ad LF, nempe, vt B ad C ex constructione, ergo etiam GK erit ad FE, vt B ad C.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

A dato puncto extra angulum ducere lineam, quæ diuidatur à lateribus anguli secundùm datam rationem.

Sit datum punctum E, & angulus A, & ducatur quæcumque à E puncto, quæ secet anguli A latera, & deinde fiat, vt data proportio K ad L, sic CB ad CD, & à puncto D ducatur parallela ipsi CA, & occurrat lateri AF prolungato, ac tandem ducatur EF iungens E, & F puncta. Dico BE esse ad EF, vt K ad L.

Patet, quia ex 4. lib. 6. est, vt BC ad CD, quæ ex effectione est, vt K ad L; sic BE ad EF. Ergo BE ad EL est, vt K ad L.

EXPENSIO IV.

De potentijs laterum triangulorum quorumcumque.

Licet supra viderimus l. 2. elem. potentias laterum triangulorum comparatas ad inuicem remanent tamen aliqua, quæ vtpote vtilia superficiebus conorum non rectorum proximè inueniendis, hic non debent posthaberi.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

In omni triangulo quadrata laterum simul sumpta sunt æqualia quadratis duobus sumptis, tum dimidiæ basis; tum quadratis duobus lineæ à vertice in eam medietatem deductæ.

Tres casus habet propositio, secundùm quòd perpendicularis cadit, vel enim extra triangulum ducitur, vel intra latera ipsius trianguli, seu est latus ipsius trianguli vt in rectangulis, quos omnes casus seorsim ostendemus, est autem prop. Pappi, sed aliter eam dabimus.

Cadat primùm perpendicularis intra triangulũ, vt est AF in triangulo BAC; sitq; BC basis bifariam diuisa in E, & ducta AE. Dico, *quod quadrata ex cruribus* BA, *&* AC *simul sumpta æquātur duobus quadratis lineæ* AE, *simulq; duobus quadratis medietatis* BE.



Probatur. Quadratum AB ex 14. lib. 2. est minus quadratis ex BE, & AE rectangulo BE, & EF bis sumpto; quod est BO ex eò quia angulus BEA sit acutus, & triangulum Oxigonium. Rursus quadratum AC maius est quadratis AE, & EC ex 13. lib. 2. rectangulo ex EC, & FE bis sumpto: quod est CG, eo quia angulus CEA sit obtusus, & triangulum Amblygonium, quare tantò maius est quadratum ex AC quadratis ex AE, & EC; quantò minus est BA ijsdẽ quadratis AE, & CE, vel æquali BE, cum enim BE, & EC sint æquales, & FE eadem etiam rectangula EG, & CO bis hinc inde sumpta erunt æqualia: Quare si ex AE, & BE quadrata gemina vice sumantur, æquabunt quadrata BA, & AC, cum tantum reponat quadratum AC quantum tollit quadratum BA.

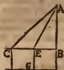
Sit secundus casus, in quo perpendicularis extra cadat in triangulo secundo, & adhuc affirmo *quadrata* BA, *&* AC *simul sumpta æquari quadrato duplici ex* AE, *& quadrato item duplici ex* BE *medietate basis.*



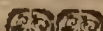
Probatur. Quadratum ex AC, vtpote in Amblygonio oppositum angulo obtuso E in triangulo ACE maius est quadratis crurum AE, & EC duobus quadratis ex BE, & EC æqualibus, & duobus rectangulis ex EB, & FA, s. rect. CE, & EF, vt lib. 2. elem. p 13.

Quadratum verò BA minus quadratis AE, & EF duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & EF, vt ostendam. Ergo, cum tantùm defficiat quadratum ex BA quantùm augescit quadratum ex AC, super quadrata AE, & EC, si hæc duplicentur, illa simul sumantur, supplente altero deffectum alterius quadrata laterum BA & AC æquabunt duo quadrata ex AE, & duo ex EC, vel BE.

Quòd autem BA quadratum deficiat à quadrato AE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & EF, patet ex 13. lib. 2. elem. Nam ex AE quadratum maius est lateris AB, & BF quadratis duobus rectangulis ex BF, & BE, ita quòd AE quadratum contineat in se quadratum ex BE, & duo rectangula ex BE, & BF, & quadratum ex AB, cui quadrato AB si addamus insuper ex BE quadratum illud AE cum addito BE superabit quadratum, ex AB duobus quadratis EB BF & duobus rectangulis ex EB, FB: quare AB quadratum minus erit quadrato ex AE, & BE duobus quadratis ex EB, & duobus rectangulis ex EB, & BF.



Casus 3. Cadat perpendicularis, & sit ipsum crus AB in triangulo BAO tertio Tunc ex AC quadratum erit maius quadratis ex AB, & BC duplici rectangulo EC, & EB, ex 13. lib. 2. quod est quadratum CG bis sumptum: BA verò deficiet, à quadratis EB, & AE quadrato EB bis sumpto, quia AB cùm BE quadratum illud AE ex prop. 12. lib. 2. exæquat. Quare defectus cruris BA æquatur excessui cruris AC, super quadrata ex AE, & BE. Quare simul posita ex BA, & AC quadrata æquabunt quadrata ex AE, & BE bis sumpta.



EX-

EXPENSIO V.

De angulis in figuris rectilineis,

Visa angulorum secundùm se constitutione, cognitisque proprietatibus modo eos, vt figuris rectilineis applicitos consideramus, siue illę regulares sint, seu irregulares.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Quælibet figura rectilinea continet bis tot angulos rectos, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

Quælibet figura rectilinea continet angulos bis tot æquales rectis quota ipsa est inter figuras rectilineas. V g. prima figura est triangulum; illius anguli duobus rectis æquabuntur. Secunda, seu oblonga, seu Trapezia, illius itaq; anguli, eo quòd sit secunda bis tot rectis, nempe quatuor erunt æquales. Tertia est Pentagonum, seu æqualium laterum, seu non. Sea itaque rectis eius anguli æquales erunt.

Ratio est, quia quælibet figura in tot triangula diuidi potest, quota ipsa est inter figuras rectilineas trahendo à quouis angulo rectas ad vnum aliquem illorum: Sic triangulum non nisi in triangulum diuidi; quadrata verò figura in duos angulos: at pentagona in tres, sexagona in 4. vt vides hic factum.



At ex 17. lib 1. propos. demonstratum est internos cuiuscumque trianguli angulos æquales esse duobus rectis: Quare, quæ figura non potest diuidi, nisi in vnum angulum trahendo de angulo ad angulum rectas, vt triangulum, æquabitur duobus rect. s, quæ in duos, vt quadratum quatuor rectos et æquabit, quæ in tres, vt pentagona sex rectis æquos angulos obtinebit sexagona octo angulos rectos complebit, & cæt. Sed quæres, quâ ratione cognoscatur figura inter figuras talem sedem occupare V g. esse decimam, vel vndecimam figuram.

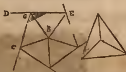
Resp. ondetur numeranda esse latera, vel angulos, & detractis duobus (duo enim latera figuram constituere nequeunt, sicut nec duo anguli solum, vt patet) ille numerus residuus, quam sedem occupet in serie figurarum demonstrabit V. g. data figura 20 vel angulos, vel latera numeret detrahe 2. remanebit 18. illa itaque figura inter figuras erit decimaoctaua.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Anguli cuiuscunque figuræ rectilineæ æquantur bis tot rectis, quot angulos obtinet, seu latera detractis rectis quatuor.

Vult propos. quòd numerentur latera, seu anguli cuiuscunque figuræ, & eo numero duplicato detrahantur quatuor, & residuus numeros angulos rectos demonstrabit, quibus anguli æquales sunt. V. g. Pētagoni sunt anguli, vel latera; quinq; duplica hunc numerum 5. erunt 10. à quo si detrahas 4. remanebunt 6 indicans quinque angulos pentagoni sex rectis esse æquales.

Probatur. Quia figura quælibet in tot triangula diuidi potest à singulis eius angulis trahendo lineas ad aliquod punctum in medio assumptum, quot ipsa habet latera. seu angulos, vt vides hic factum in triangulo, & pentagono.



Quare cum ea propos. 17. lib. 1. elem. quilibet trianguli angulus sit æqualis duobus rectis, sequitur, vt triangula ea in quslibet figura iuxtà numerum angulorum, vel laterum facta sint æqualia bis tot rectis, quot sunt anguli illi: sed omnes illi habent angulos circa punctum medium figurę consistentes omnes simul sumptos æquales quatuor rectis, vt colligimus propos. 18. lib. 1. qui ad angulos figuræ non pertinent quare si detrahatur, remanebunt reliqui ad figuram pertinentes: Sic, si ex 10. auferantur 4. erunt reliqui 6. anguli recti, quibus 5. anguli pentagoni æquales sunt.

THEOR. III. PROPOS. XVII.

Anguli cuiuscumque figuræ externi à latere producto, & sibi coniuncto effecti æquant solùm quatuor rectos.

Angulos exteriores cuiuscumque figuræ, qui fiunt à lateribus versus eandem partem seriatim deductis, vt vides factum in pentagono s omnes sunt æquales tantum 4. rectis.

Deducitur ea propos. 10. lib 1. elem. vbi asseritur, quòd linea super aliam consistens angulos duos, hinc, & inde facit duobus rectis æquales, quare cum quodlibet latus figurę cuiuslibet insistat super alium productum, vt est CG super DE; sequitur, vt angulus uiger figuræ internus, & angulus alius externus sint æquales duobus rect. s, & cum omnes ita se habeant, sequitur esse ęquales omnes interni, & externi bis tot rectis, quot ipsi sunt V. g. in fig. 5. angulorum decem angulis rectis; quis 5. interni, & interni 5. sunt, Sed iam diximus internos esse æquales sex rectis: sequitur, quòd externi sint solum æquales 4. rect s.

COROLLARIVM.

Hinc poteſt colligi modus cognoſcendi in figuris rectilineis,& ęquilateris regularibus quot gradus quilibet eius angulus, tum internus, tum externus, tum ad centrum contineat, cum enim quilibet rectus angulus 90. partes, gradúſque contineat fit, vt ex cognitione rectorum deueniamus in cognitionem continentiæ, quam anguli figuræ poſſidet ſic cum anguli ad centrum ſint 4. rectis æquales; qui 360. gradus continent, & illi V. g. in Pentagono ſint 5. ſi per 5. diuidatur 360. dabit 72. numerus ſilicet graduum, quem continet angulus s. & quia anguli externi, vt c quatuor quoque rectis ſunt æquales, angulus quoque c 72. gradus continebit, ſed quia anguli interni 6. rectis ſunt æquales, qui dant 540. gradus diuiſo hoc numero per 5. dabit 108. grad. pro continentia cuiuſcumque anguli interni.





TRACTATVS XX.

De Lineis circulo circumpositis.

Visis Linearum proprietatibus secundùm se, modo incipimus eas considerare, vt margines superficiei, atq; figuræ; & quia vt 3 lib Elem. vidimus, omnes figuræ perfectę adiumento circuli describuntur; ideo eas, vt applicatas circulo consideramus.

EXPENSIO I.

De principijs huius Tractatus.

Præcipuus scopus huius Tractatus est considerare lineas, quæ circuli peripheriæ, vel eius datis portionibus subtenduntur, quatenùs mensurabiles sunt, vel mensura adæquata, si lineę sint semidiametro commensurabiles, quę tanquam rationalis respectu omnium assumitur, & tanquam ea, iuxta cuius partes omnes alię lineæ diuidendę sunt: vel, si sint incommensurabiles, saltem mensurâ proximâ.

Circulus omnis ex libito hominum in 360. partes diuiditur, quæ Gradus appellantur, & omnis gradus in 60. partes, rursùs intelligitur diuisus, quæ minuta dicuntur; rursúsque omne minutum in 60. partes ponitur diuisum, quæ secunda, & quodlibet horum in 60. partes incisum iterum, quæ Tertia vocitantur, & sic Quarta, Quinta, Sexta: semper subdiuidendo vsque ad 10.

Illis itaque partibus circuli lineæ aliquæ subtensa vel circumscripta si non omnibus saltem Gradibus, & minutis notæ longitudinis respectu radij reperire fuit necessarium; si non adequatè, saltem proximè, & cum insensibili differentia à vero.

Linearum verò rectarum, quæ circa peripheriam circuli considerantur aliæ sunt intra, aliæ sunt extra, aliæ eam secant. Quæ intra circuli peripheriam existunt illæ sunt subtensę, quæ, & cordę dicuntur, & Sinus.

DEFINITIO I.

Chorda itaque est recta linea in circulo dirimens eum in duo segmenta, & vtrumque pariter subtendens.



Talis est AB in circulo ABCD, quæ subtendit segmentum BCA, & BDA, quòd licet verum sit, tamen, cù sinû BA in se continens accipitur, vt minorem portionem BCA subtendens consideratur.

DEFINITIO II.

Sinus Rectus est dimidiata chorda à diametro ei perpendiculariter secta.

Talis est EA. Sinus verò est nomen Arabicum vsurpatum in hanc significationem à Mathematicis. Licet Vitalis in suo Lexico Mathematico ex eo velit sinum appellatum, quòd claudat curuitatem arcus.

DEFINITIO III.

Sinus Versus est diametri portio chordæ, seu sinui recto perpendicularis inter chordam ipsam, & peripheriam inclusa.

Talis est CE inter BCA ambitum, & EA sinum, seu BA chordam existens, qui etiam dicitur sagitta.

DEFINITIO IV.

Sinus complementi est sinus rectus illius arcus, qui alium complet.

Talis est AS, qui est sinus arcus AI complentis arcum CA vsque ad quadrantem, qui dicitur etiam sinus secundus.

DEFINITIO V.

Sinus totus est radius ipsius circuli.

Assumitur verò radius, vt rationalis respectu omnium aliarum, seu chordarum, seu sinuum, ideoque à recentioribus supponitur diuisus in partes 10000000. licet Ptholomeus eum posuerit partium 60. Aruzel per 150. sed experimentum docuit minutiorem diuisionem esse maioris commodi.

Lineæ, quæ extra peripheriam sunt communi nomine dicuntur secundæ, & sunt tangentes, quarum definitionem lib. 3. def. 2. explicauimus. Talis est HG quarum terminus est secans aliqua, quæ prouenit à centro, & in ipsam tangentem terminatur, vt PG. Itaq; cum semper diameter PD in puncto contactus ductus faciat angulos rectos, cum tangente ex lib. 3. Elem. prop. 20. Radius cum tangente, & secante semper faciet triangulum rectangulum, cui secans PG basis sit.

EXPENSIO II.

De lineis portionibus peripheriarum inscriptis, quæ latera alicuius figuræ regularis intexunt.

QVę lineæ circulo inscriptæ aliquam figuram regularem constituunt notiores sunt, & fundamentum, quo cæteræ inueniantur. Vnde ab istis doctrina exordienda. Vidimus autem propos. 15. lib. 4. elem. Latus Hexagoni ęquari radio; vnde de reliquarum figurarum lateribus sermo erit.

THEOR. I. PROPOS. I.

Latus Trianguli circulo inscripti potentiâ triplum est semidiametri.

SIt triangulum ABC ęquilaterum in circulo ABC. Dico *eius latus posse inseruire pro latere quadrati, quod erit triplo maius, quàm quadratum semidiametri*, BO, qui æqualis est BL lateri hexagoni ex propos. 15. lib. 4. Euclid.

Probatur. Quadratum basis AL in rectangulo BAL est æquale quadratis rectarum BA, & BL, ex 11. lib. 2. quòd angulus B in semicirculo rectus sit ex 28 lib. 3. Sed quadratum à diametro factum est quadruplum quadrato sui dimidij, & semidiametri BL, vel BO, ex Coroll. propos. 6. lib. 2. Ergo reliquum quadratum ex BA æquat reliquas tres partes, quæ vna cum quadrato ex BL, vel BO quartæ parti æqualis, omnes quatuor partes quadrati AL exæquat: vnde solum quadratum ex AB erit triplum quadrati OA radij, & consequenter ipsum latus AB triplo ampliùs poterit.

COROLLARIVM.

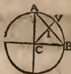
HInc est, quod si diametrum in se multiplices, & quadres, sic, & semidiametrum: deinde quadratum semidiametri à totius diametri quadrato subducas, & à residuo radicem quadratam extrahas, quòd inquam ea radix erit latus trianguli AB, & chorda, quæ subtendit 120. grad. cuius medietas est sinus 60.

Aduerte autem, & hoc sit vniuersale monitum, quod vt exactissimus sit calculus sinus totus duabus zifris augendus, & à radice quadrata, deinde vna figura abijcienda est; in qua aliquis error in maiori, vel minori excessu inesse potest.

THEOR. II. PROPOS. II.

Latus quadrati circulo inscripti potest duo quadrata ex semidiametro constituta.

PAtet. Nam latus quadrati in circulo subtendit quadrantem: Ideo angulus C rectus: Vn-



de ex 11. lib. 2. quadratum ex basi BA rectanguli ACB æquatur duobus quadratis alteri ex semidiametro AC alteri ex semidiametro CB.

COROLLARIVM.

COlligitur. Quòd si quadretur semidiameter auctus duabus zifris, & duplicetur, & à toto radix quadrata eruatur, illa abiecta vltima figura datura sit latus quadrati, & chordam AB, cuius medietas est sinus 45. grad.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptorum componantur tota recta linea extrema, & media ratione secatur.

SIt latus decagoni BC, & ei addatur AC æqualis semidiametro DB, quę, & erit latus hexagoni. Dico *totam AB sectam esse in C extrema, & media ratione*. Nempe quadratum contentum sub AC esse æquale rectangulo sub AB, & CB contentu.

Prob. Progress. 1. Triangula ADB totum, & nigra pars sunt ęquiangula, vt ostendam; Ergo ex 4. lib. 6. ita est proportionatum AB latus ad DB basim in triangulo maiori ADB, vt latus DB in triangulo nigro minori vel ęquale AC ex constructione basi CB. Cùm ergo sit tota AB ad segmentum maius AC, vt idem ad minus CB ex prop. 19. lib. 6. erit rectangulum sub extremis contentum æquale quadrato mediæ.

Remanet solum probandum triangula ABD, & minus nigrum esse æquiangula.

Progress. 2. Angulus niger apud D est quinta pars semicircumferentiæ nimirum duorum rectorum, vtpote angulus decagoni, quòd BC ex Thesi sit latus decagoni. Ergo reliqui duo C, & B nigri æquales inuicem ob æqualitatem laterum subtensorum erunt quatuor partes duorum rectorum, vt omnes simul fiut æquales duobus rectis ex 17. propos. lib. 1. & singuli duæ partes, nempe dupli anguli nigri apud D. Sed angulus C niger est æqualis ex prop. 17. l. 1. duobus internis, & oppositis A, & albo apud D, qui ęquales inuicē sunt ob crura DC, & CA suptensa ęqualia. Ergo duplus vni eorum V. g. angulo A, sed, & erat duplus angulo nigro apud D, ergo isti angulus A, & niger apud D erunt æquales.

Progress. 3. Hincque probabitur angulum D totum nigrum, albumque trianguli maioris esse æquale angulo C nigro minoris. Nam est totus duplus anguli A, cùm quilibet, nempe niger D, vt ostensum est, & albus D ob æqualitatem laterum sint æquales ipsi A: Ergo totus albus, nigerque D ipsi A duplus, ergo totus æqualis nigro angulo B du-

a duplo quoque, vt secund. progress. anguli nigri o.

Tandem angulus s est communis, ergo triangulum magnum, & paruum nigrum sunt æquiangula; cum de singulis angulis probata sit æqualitas in ambobus, & hinc erit AB ad AC, vt AC ad EB: quare recta AB, quæ constat ex latere decagoni, & hexagoni extremâ, & mediâ ratione secta est.

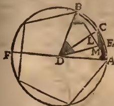
COROLLARIVM

Hinc, si diametrum auctum duabus alijs, & hoc quadratum diuidas per semidiametrum similiter auctum excipies latus decagoni.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus potest, quod potest, & latus decagoni, & latus sexagoni.

DVo iterando demonstrare alterum, quòd pentagoni latus possit latus sexagoni, quod possit quoque latus decagoni; Ideoque, vt ambo. Probentur. Sit SA latus pētagoni, quod subtēdat arcum SCA: isque ac. us diu datur per medium in C; ducaturque à centro D semidiameter DC; connectanturque subtensę, quę erunt latera decagoni CS, & CA; semidiametrique ducantur SD, & DA, & rursus diuiso arcu CA per medium in E, ducatur semidiameter DE; & secet chordam SA in M, & CA in L; connectaturque MC.



Probatur duo trianguls BAD, & BMD sunt, vt deinde ostendam, æquiangula, & angulus apud D niger est æqualis angulo A nigerrimo, & angulus niger s cōmunis, ergo ita erit SA ad SD, vt SD ad ad SM. Ideoque rectangulum sub extremis contentum SA latere Pentagoni, & SM, eius portione erit æquale quadrato ex media SD, radioque ex 19. lib. 6.

Progress. 2. Æquiangula quoque sunt, vt ostendam, triangula nigrum totum CMA & maius ipso ABC, cuius angulus s est æqualis angulo nigro C, & niger apud A communis, Ergo eadem ratione erit AB ad AC, vt AC ad MA: Ideoque rectangulū sub AS, & MA extremis æquale erit quadratu mediæ CA ex 19 lib 6. Sed hæc rectangula, nempe primi progr sub BA, & BM, & secundi sub BA, & AM æqualia, sunt quadrato ex tota BA, ex 4. prop. lib. 2. Ergo talis quoq; erunt quadrata illis æqualia, nempe quadratum ex SD æquale rectangulo, & tota AB, & maiori segmento, & quadratum CA æquale rectangulo ex tota, ex minori segmento, ista inquam duo quadrata erunt æqualia quadrato ex SA: Ergo SA latus pentagoni potest quadratum SD lateris sexagoni, & CA lateris decagoni.

Remanet primo ostendendum triangula BAO, & minus SMD esse æquiangula. Quod ita conuincitur. Angulus A nigerrimus est in peripheria; Ergo vt sit æqualis SDE ad centrum debet esse supra duplò maiorem circumferentiam, cum super æqualem sit subduplus ex 23. lib. 3. Talis verò est circumferentia FB, nempe duplo maior super quā insistit A nigerrimus angulus ad circumferentiam respectu SCE circumferentiæ, quam comprehendit angulus niger o ad centrum, vt consideranti patet, cum FB sit 6. ex circuli 20. partibus SE verò 3. Angulus verò niger apud B est communis. Ergo reliquus reliquo æqualis, cum tres anguli cuiuscumque trianguli duobus rectis æquentur ex propos. 17. lib. 1. Coroll.

Prob. Deinde triangula BAC maius, & seminigrum CMA esse æquiangula. Nam anguli in minori nigro apud A, & apud C nigeri sunt inuicem æquales ob æqualitatem laterum, vt consideranti patet; Item angulus A albus est æqualis angulo apud B trianguli CSA maioris, cum sint super æquales circumferentias CA, & CB. Ergo idem angulus apud S albus trianguli ABC erit æqualis alteri nigro minoris trianguli apud A, & consequenter angulo C nigro ei æquali: Cùm ergo S maioris, & C nigri minoris trianguli sint æquales, & reliquus albus apud A communis, erunt quoque duo reliqui æquales: Vnde triangulum maius BAC triangulo minori AMC erit æquiangulum.

PROBL. I. PROPOS. V.

Latera decagoni, & hexagoni in eodem circulo inuestigare.

SIt circulus, vel quod sufficit semicirculus CAB, cuius diametro AS sit perpendicularis EA, & diuiso bifariam semidiametro in F ducatur FA, cui æqualis sumatur FD, & à puncto D ducatur ad A recta AD. Dico rectam ED esse latus Decagoni, & secundo AD esse latus Pentagoni.

Probatur. Nam DB est secta media & extrema ratione in E: quare ED minus segmentū erit latus decagoni, & EB maius segmentum erit latus sexagoni ex propos. 3. huius.



Probatur antecedens, quod DB secta sit media, & extrema ratione. Nam ex propos. 6. lib. 2. Radius EB secatus est bifariam in F, & ei addita est recta ED. Vnde rectangulum ex tota DB, & addita DE vnā cum quadrato ex EF medietate est æquale quadrato medietatis, & additæ, vt vno latere FD facto, sed FD est æqualis lineæ AF ex constructione: Ergo ipsius AF quadratum dicto rectangulo, & quadrato ex medietate radij æquale erit. Sed quadratum ex AF est quoque æquale quadratis AE radio, & EF eiusdem medietatis ex 47. lib 1. Quamobrem, si quadratum illud EF dematur, remanebunt quadratum ex AE, vel quod idem ex maiori segmento EB, nempe

nempe radio, & rectangulum ex tota DB, & addită DA comprehenſo æquallа: Quare DA erit ſecta extre ma, & media ratioue.

Prubator ſecunda pars. Nam ex 11.ſecundi AD poteſt, & quadratum ex EA, & quadratum ex DE: ſed DE eſt latus decagoni, vt modo oſtenſum eſt EA hexagoni, cùm ſit radius. Ergo ex propoſ. antecced. eſt latus pentagoni.

COROLLARIVM.

HInc patet modus, quo eruatur latus Decagoni. Nam numero radij in ſe multiplicato, & numero medletatis radij quoq; in ſe ducto, ābo ſimul colligantur, & ex toto radix qoadrata eruatur, & obtiocbitur linea AF, à qua dempto oumero medietatis radij, nempe AF remanebit DA latus decagoni. Radius verò duabus aifris augendus, vt præciſior ſit calculus, & deinde ex radice extructa expungenda figura vltima eſt.

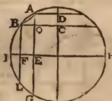
COROLLARIVM II.

ET hinc quoque ſit, qoòd ex antec. pentagoni latus habeatur. Nam numero radij aucto duabus aifris ad maiorem præciſionem in ſe ducto, & Decagoni quoque in ſe ducto, ſt à toto ſimul aggregato radix quadrata extrahatur dabit DA latus pentagoni.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Quindecagoni latus poteſt quadrata linea, quà differt ſemilatus trianguli à ſemilatere Pentagoni, & eorum ſinuum verſorum differentiæ.

PRobatur per 16. lib.4. Euclid. recta Inſcripta inter baſim trianguli, & pentagoni latus tertinm eſt latus quiodecagoni, vt Ab, quæ eſt inter punctū A, in quo cadit baſis trianguli, cuius vertex in H, & B, quo item incipit à pūcto B tertium latus



pentagoni ab H: Erit ergo AA ſemilatus trianguli & FA pentagooi, & differentia OA. Sinus verò verſus ſemilateris pentagoni eſt CA, & trianguli eſt DA, & eorom differentia OA; cum ergo OBA triangulum ſit rectangulum; ex 47. lib.1. baſis AB quadratum æquabitur quadratis ex OB, & OA.

COROLLARIVM.

QVare Colligitur, quod ſi ſemilatus FA ſubducatur AE relioquetur AO, qui in ſe ducetur. Repartitis verò complementis DA, & CA, vt infra docebo, & minori à maiori ſubducto relinquetur OB, qui in ſe multiplicabitur: numeri verò lo ſe ducti, tum AO, tum OB aggregentur. Nam extracta radix quadrata dabit chordam AB, & latus quiodecagoni Gr. 24. quæ dimidiata erit ſinus Gr. 12.

EXPENSIO III.

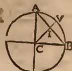
De proportione laterum figurarum circulo inſcriptarum, cum diametro.

NE fruſtra quandoque laboremus in lateribus prædictarum figurarum inueoiendis, oportet priùs videre, an ſint lineæ rationales, & ideo oumeris exprimibiles: ſi namq; numeris partium, in quas diameter diuiſus eſt exprimi nequeat earū longitudo, fruſtra quis neſcius calculum reiteraret, vt tandem partes oumero exprimeret, quæ exprimi nequeant.

THEOR. I. PROPOS. VII.

In quadrato diametrum incommenſurabile eſt lateri, ſeu ſemidiametro cui eſt inſcriptum.

PRobatur ex demooſtratis lib.2. & propoſ.6. in Coroll. Quadratum factum ex diagonali AB eſt duplum quadrati facti ex latere, & radio CA: Ergo hęc quadrata oon poſſident rationem talem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum debet habere: ſed quam numerus ad numerum ex Coroll.1. enim propoſ.16. lib.8. ioter numeros, quorum vnus ſit duplus alterius non cadit medius



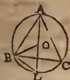
proportionalis; & ſic inter eos non poteſt intercedere proportio, quæ inter quadratos numeros mediat ex eadem 16. propoſ. Cum ergo quadratum diametri diagonalis AB ad quadratum lateris ſit ſolom, vt numerus ad numerum ex propoſ.6. lib 10. eront longitudine duo incommenſurabiles latus, & radius AC, & diagooalis AB, quæ eſt chorda ſubtenſa quadranti, & ideo etiam diametro toti incommenſurabilis erit.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

In triangulo latus ipſius ſemidiametro, in quo inſcribitur incommenſurabile eſt.

PRobatur. Nam ex propoſ.1. latus trianguli AB poteſt inſeruire pro quadrato, quod erit triplo maius; quam ſemidiametri AO: Sed 1. ad 3. non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum ex Coroll.11.lib.8.

Ergo



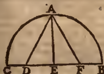
Ergo nec quadratū femidiametri ad quadratū lateris inscripti trianguli. Quare ex prop.6. lib 9. latera horū quadratorum erunt incommensurabilia.

THEOR. III. PROPOS. IX.

In Pentagono, & Decagono latus diametro est incommensurabilis linea, tum longitudine, tum potentia.

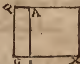
*PRobatur primo de Decagono. Nam assumpta fig. prop.5. præcedentis quadratum dimidij radij EF est quarta pars quadrati totius EA. Sed linea AF potest efficere quadratum æquale duobus quadratis, & lineæ AE, & lineæ EF. Ergo potest quintuplo magis, quam dimidius radius AF. Quare lineæ EF & DF longitudine incommensurabiles erunt ex propos. 10. lib. 10. quia possunt quadrata, quæ proportionem habent, vt numerus ad numerum; non autem, vt quadratus numerus ad numerum quadratum.

Si itaque à DF recta æqualis ipsi FA auferatur semiradius EF rationalis respectu totius diametri, eique commensurabilis. Cum à linea integra maiori DF, potestque magis, quàm minor EF quadrato rectæ AF, quæ linea toti maiori est incommensurabilis, quia quadratum AF est quater, & DF quinquies maior, quàm EF, & ideo cum quadrata se gerant, vt numerus ad numerum; ipsa latera erunt incommensurabilia. Cum ergo maior DF plus possit, quam minor EF quadrato DE lateris sibi maiori incommensurabilis, ipsaque minor EF sit exposita. Rationali nempe diametro commensurabilis longitudine, & potentia, recta DE abista EF minori erit Apotome; Et quia EF quadratum est ad quadratum ex FD, vt numerus ad numerum; ideo DE erit Apotome quinta ex 24. vel 25. propos. lib. 10.



Probatur secundo de latere pentagoni AD. Nam potest efficere quadratum æquale quadrato lateris DE, & EA. Linea verò DE est irrationalis cùm ostensa sit Apotome.

Cùm ergo DE sit irrationalis, quadratum eius, vtpote ex irrationali factum, erit omninò irrationale ex 26. lib. 10. Vnde si applicetur ad rationalem AE rectangulum illius quadrato ęquale ex



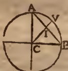
35. lib. 1. Hoc efficiet latitudinem, seu alterum latus EO rationali ipsi EA, incommensurabile lōgitudine, cum rectangulū ZE sit ad rectangulum AX, velut basis GE ad basim XE ex pr. 1. lib. 6. & ideo ex prop. 5. lib. 10. GE, erit incōmēsurabile ipsi EX. Vnde additū ipsi rationali EX efficiet totam lineam GX longitudinem incommensurabilem ipsi Rationali AE, atque irrationalem ex prop. 10. lib. 10.

Erunt itaque incommensurabiles GX, & AE idest GZ: Vnde ex propos. 26. lib. 10. rectangulum, quod continent XZ erit Irrationale. Sed huic rectangulo est æquale quadratum ex DA: Quia rectangulum OA ex constr. factum est æquale quadrato, ex DE constituto. Ergo linea AD potens hoc rectangulum est irrationalis ex prop. 25. lib. 10.

THEOR. IV. PROPOS. X.

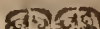
Latus Octogoni est diametro incommensurabile.

*PRobatur. Nam considerato schemate prop. 2. sit radius CI perpendicularis ipsi lateri quadrati AB; eritque semiquadratum CIB. Vnde diagonalis huius quadrati CB erit duplò maior in potentiâ, quàm CI, & ideo vt ex prima propos. huius Expens. constat erunt longitudine incommensurabiles CI, & CB, ablata itaque CI, à radio CV, vel CB reliqua erit Apotome, nempe Irrationalis etiam potentiâ, & ideo eius quadratum irrationale.



Applicetur itaque rationali potentiâ IB, vt in antecedenti fecimus rectangulum æquale quadrato rectæ IV, & sit XR, & erit longitudo IR ex 3. lib. 10. irrationalis ipsi IB, vel ęquali IZ; ideoq; cùm duæ ZI, vel æquali IB, & IR sint irrationales tota erit irrationalis, & ex Cor. 2. propos. 26. lib. 10. rectangulum XR erit quoque irrationale. Vnde latus octogoni VB potens efficere quadratum huic rectangulo XR æquale erit irrationale. Potest autem efficere quadratum rectangulo XR æquale. Quia potest efficere quadratum æquale quadratis duobus VI, & IB: quæ æqualia sunt huic rectangulo XR ex effectione.





EXPEN-

EXPENSIO IV.

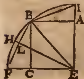
De circulo inscriptis, quæ figuram non constituunt.

EGimur de lineis inscriptis circulo, quæ figuram faciebant, modo de illis, absque respectu ad figuram vllam, sed determinatæ quantitati graduum subtensis: Eas vero in duas classes diuidemus, & hic agemus de illis subtensis, quę vt inueniátur radicis quadratę extractionem deposcunt: deinde alias trademus, quibus tractandis radix quadrata adhibenda non est.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Sinus complementi, & sinus recti quadrata æquantur quadrato radij. Sicut, & quadrato chordæ æqualia sunt sinus versi, & sinus recti quadrata.

PRobatur BAE rectus est angulus. Vnde ex 11. lib. 2. Quadrata ex BA sinu, & AE, vel æquali BC sinus complementi erunt ęqualis quadrato radij BE.



Probatur secunda pars. Nam angulus C rectus est. Ergo sinus versi CF quadratum, & recti sinus CB erút æqualia quadrato chordæ BF, & est eadem ratio de sinu recto BA, & verso AI, qui æquantur chordæ BI.

COROLLARIVM I.

HInc dato sinu recto BA si ducatur in se, & subducatur à sinu toto in se ducto, & à residuo dematur radix quadrata; Illa dabit sinum complementi BC, quo ablato à sinu toto remanebit sinus versus IA.

COROLLARIVM II.

SI verò hic sinus versus in se multiplicetur, & coniungatur cum quadrato sinus recti V. g. quadratum fiat ex FC, & coniungatur cum quadrato ex CB, vel quadratum BA cum AI Radix quadrata subducta à toto dabit chordam BF, vel BI, cuius medietas est sinus dimidiati arcus BI, vel BF, vt est sinus BL arcus XH.

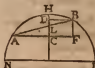
COROLLARIVM III.

QVod si duplices sinus complementi, & sinum rectum habebis chordas, quæ totum arcum subtendunt, nam si duplices BC sinum complementi habebis Chordam duplicis arcus BE, sicut si duplices sinum rectum BA habebis Chordam duplicis arcus BI.

THEOR. II. PROPOS. XII.

** Chordæ cuiuslibet quadratum est æquale quadrato duorum sinuum simul positorum, quorum arcus simul illa subtendit, & quadrato differentiæ sinuum versorum.*

SIt Chorda AB subtendens arcum AHB, qui sit diuisus in quascumque duas portiones AH, cuius sinus rectus AC versus CH, & HB arcum, cuius sinus DB rectus, & versus DH. Dico, *quod si sinus recti componantur ita vt efficiant* ACF, & deinde sinus minor versus DH à sinu maiori CH subducatur, vt remaneat DC, vel ęqualis BF, dico inquam, quòd quadratū Chordæ AB est ęquale duobus quadratis, quorum vnum est factum ex latere AF aggregato sinuum rectorum, & alterum DC, vel BF differentia sinuum versorum.



Probatur facilè. Quia triangulum AFB est rectangulum. Ergo quadratum ex AB ex 11. lib. 2, est æquale quadratis ex AF, & FB.

Quòd autem triangulum ABF sit rectangulum, patet, cùm anguli ad C, & D sint recti, & latera CF, & DB sint æqualia, sicut, & DC, & FB ex effectione. Vnde etiam angulus F rectus erit.

COROLLARIVM.

MOdus vniuersalissimus hinc eruitur, quo plurimi sinus reperiantur. Nam si duo quæcumque latera, seu chordas superius Expens. 1. inuentas dimidiaueris erunt sinus recti, quibus ex præcedenti reperies sinus complementi, qui subducti à sinu toto relinquent sinus versos. Si ergo duos ex sinibus ita repertos iunxeris, & quadratè multiplicaueris, & eorum sinus versos minorem à maiori subduxeris, differentiamque quadratè quoque multiplicaueris, multiplicatosque numeros simul iunxeris, & ab aggregato radicem quadratam subduxeris; illa erit Chorda, quæ illos duos arcus inęquales subtendit, quę diuisa per medium dabit sinum medietatis summæ arcus, quam simul vtrique efficiunt. V. g. sit chorda decagoni Gr. 36. 6180340. posito sinu toto 10000000. Medietas erit sinus Gr. 18. nimirum 3090170. Sic Sexagoni Grad. 60. est 10000000. medietas est 5000000. Gr. 30. Hinc sinus complementi Gr. 18. nimirum Gr. 72. est Par 9510565. qui subductus à sinu toto relinquit sinum versum 489435. Sic sinus complementi Gr. 30. sunt Gr. 60. quorum sinus est 8660254. subductos à sinu toto relinquit sinum versum 1339746. à quo subductus sinus versus alter primo inuentus dabit latus 850311. qui in se multiplicandus. Sic iuncti sinus 5000000. & 3060170. dant 8060170. qui pariter multiplicandus in se, & deinde iungendi numeri ita multiplicatis à quorum summa extracta radix quadrata dabit chordam Gr. 18. & 30 simul nempe 48. quæ dimidiata erit sinus Gr. 24. Par. 4067361.

Sic si iunctis sinibus Gr. 24. & 30. & in se multiplicatis, multiplicata quoque differentia sinuum verso-

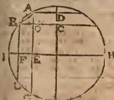
versorum in se, deinde aggregentur numeri ita multiplicati, & ab aggregato radix excipiatur, illa dabit chordam Gr. 54. & dimidiata sinum Gr. 27.

Sic idem agas iunctis sinibus 24. & 27. habebis sinum Gr. 26 $\frac{1}{2}$. Et si iungas 27. & 30. Gr. sinus habebis sinum 28 $\frac{1}{2}$; & cæt. At si iungas sinum Gr. 30. cum sinu Gr. 36. nimirum cum dimidiata chorda pentagoni habebis sinum arc. 33. Si verò medietates, vt supra reperiantur continuè dabunt multò plures sinus.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Quadratum chordæ differentiæ duorum arcuum est æquale quadratis differentiæ sinuum versorum, atque rectorum eorumdem sinuum.

REassumatur fig. propos. 6. in qua AE; & BI sint sinus cuiuscumque arcus ABIG, & BIL differentia eorundem sinuum erit AO. Sic eorum sinus versi sint ET minoris arcus, & IE maioris differentia erit EK, vel OB. Dico, *quòd quadrata harum differentiarum sunt æqualia quadrato chordæ* AB.



Probatur. Quia triangulum AOB, est rectangulum, ergo ex 47. lib. 1 Euclid. vera erit propositio, & quadrata ex lateribus differentijsque OB, & OA æqualia erunt quadrato chordæ, & basis AB.

COROLLARIVM

HÆc propositio deseruit ad inueniendas eas chordas quarum arcus vniti superant quadrantem. Nam tunc poterimus vti subtractione subducendo à sinu tum verso, tum recto arcus, sinum arcus minoris, vt habeatur gemina differentia sinuum OA, & OB, ex quibus differentijs tanquam ex lateribus in numerum quadratum redactis, & vnitis, subducendo radicem quadratam reperiemus chordam differentiæ dictorum arcuum, nempe illius arcus AB, quo differt IB ab IA.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Quadratum cuiuslibet chordæ vna cum rectangulo gemino, quòd fit à sinu complementi, & toto sinu, tanquam ex lateribus, æquatur geminis quadratis factis à sinu toto.

SIt Chorda FB. Dico, quod eius quadratum minus est quadratis radiorum EB, & FE rectangulo duplici comprehenso sub FE radio, & CE sinu complementi.

Probatur ex propos. 13. lib. 2. Euclid. Quia chorda FB, vt in fig. propos. 11. & duo sinus toti EB, & FE faciunt triangulum oxigonium, ergo ea propositio hic verificabitur, quę eodem sensu vniuersaliter ibi probatur.

COROLLARIVM.

HInc deducitur; quomodo reperta chorda, siue per additionem, siue per subductionem, vt ex 12. & 13. proposit. huius reperiatur sinus versus, & complementum sinus, nec non, & sinus rectus illius arcus, cuius chorda componendo, vel subducendo duos sinus inuenta fit.

Pone itaque chordam inuentam esse FB, & cupis scire sinum versum FC. Quoniam quadratum FB, si vniatur cum rectangulo ex FE sinu toto, & EC, sinu complementi bis accepto æquatur quadratis laterum FE, & EB, qui sunt sinus toti. Multiplicetur chorda FB in se, sicut & sinus toti in se ducantur gemina vice, & ab hoc numero aggregato sinus totius geminâ vice in se ducti dematur numerus chordę in se ductus; nam reliquus erunt duo rectanguli ex EF sinu toto, & CE sinu complementi. Diuidatur bifariam, & medietas erit vnum ex rectangulis, cuius latus FE notum est; quod est sinus totus. Vnde diuisa medietas remanens per sinum totum dabit latus CE sinus complementi quo habito, & subducto à sinu toto, remanebit FC sinus versus, cuius quadratum, vt ex 11. huius subductum à quadrato Chordę FB relinquet numerum, à quo subducta radix quadrata, dabit sinum rectum CB.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Est maior proportio arcus maioris ad minorem, quam chordæ subtensæ maiori ad chordam subtensam minori.

ID non probabimus eâ euidentiâ, qua Regiomontanus, & nos supra ostendimus prop. 3. Tract. 19. cum res per se clara sit. Dicit itaq; quod arcus maior ABC comparatus ad minorem CED comprehēdit plures partes minoris, quam comprehendat chorda maioris AC partes minoris CD. Ostenditur verò sic. Nam certum est; quòd magis curuatur ABC arcus super CA Chordam, quam CED arcus super suam Chordam CD; patet ex sagitta FB. & GE: sed quo magis curuatur aliqua linea, eo plures partes continere necesse est, cùm longius spatium metiatur. Ergo arcus ABC, qui magis curuus est super rectam AC, quam minor arcus, plures partes continebit illius arcus, quam quòd contineat AC Chorda maior respectu minoris Chordę CD.

COROLLARIVM.

HInc eruitur, quod chorda vnius gradus sensibiliter non differt ab arcu suo sicut, nec sinus 30. minutorum; cum sensibiliter super illam nondum arcus curuetur. Sic quod maior proportio arcus vnius Gradus ad arcum 45. minutorum, quam chordæ ad Chordam. Idest, quod

si arcus vnius Grad. comprehendit m. 45 & insuper 15. minuta tertiam eorum partem, quod chorda vnius gradus non comprehendet totam Chordam 45 minutorum, & insuper eius tertiam partem; sed paulò minus. Sic quod sit arcus Gradus 1 m. 30. comprehendit arcum vnius gradus vnica vice. & insuper eius medietatem; quòd Chorda ipsius arcus Gr. vnius, & m 30 non cōprehendet chordam arcus Gr. vnius semel, & insuper chordæ eius medietatem, sed paulò minus, & idem dicas de sinubus.

COROLLARIVM II.

HInc etiam quoque; quomodo propè verum Sinum vnius gradus requiras, licet non certò, nec infallibiliter, sed tamen adeo propè veritatē, vt nullus error sensibilis subrepi queat. Diuidatur sinus 161769. repertus propos. 11. huius Coroll. Arcus Gr. vnius m. 30. in sex partes, & sexta pars erit 43628 $\frac{1}{6}$. Sic sinus 130397. minutorum 45. in tres partes, eritque tertia pars 43632. Si ergo daremus sinui vnius gradus quatuor vicibus sextam partem hanc 43628 $\frac{1}{6}$ sinus vnius Gr. m. 30. esset ipse sinus Gr. vnius part. 174512 $\frac{4}{6}$. Et sinus ipse Gr. 1. m. 30 eum comprehenderet semel, & insuper dimidiam ipsius partem, aut vicibus quatuor ex sex, quibus constat ipse maior, vt arcus Gr. vnius m. 30. comprehendit gradum vnum, nempe 4. vicibus ex sex partibus, quibus ipse grad. maior Gr. 1. m. 30. constat.

At si daremus quatuor partes, ex quibus tribus constat sinus minutorum 45. & comprehenderet sinum 45. vt Gr 1. arcum m. 45. esset 174528. Differentia autem est par. 16 $\frac{4}{6}$, vel 17. Quamobrem electis $\frac{1}{6}$, & quid minus, nimirum partibus 12. proximè addemus eas partibus 174512. vel residuum 4. subtrahemus partibus 174528. & efficiemus sinum partium 174524., quæ sinum minutorum 45. non continebit semel cum tertiâ parte: quia sic deberet esse 174528. at est paulò minùs, & continebitur à sinu Gr. vnius m. 30. non semel cum medietate eius, sic enim esset 174518. sed paulò minus. Vnde proportio arcus maioris Gr. enius ad arcum minorem m. 45. erit maior, quia illum continet, semel cum tertia parte, quàm sinus maioris ad minorem, qui eum non continet semel cum tertia parte; sed paulò minùs, & maior arcus Gr. 1. m. 30 ad arcum vnius grad habebit maiorem proportionem, quàm sinus maior ipsius ad sinum minoris, quòd contineret arcum minorem semel, & medietatem ejus; sinus verò maior minorem sinum contineat semel, & minùs medietate.

COROLLARIVM III.

HInc verò sinum arcus habebis minorem 15. minutis; medietas enim Chordæ vnius gradus dabit Sinum m. 30 par. 8726 4. cuius reperies chordam ex Coroll. 2. propos. 11. cuius medietas erit minutorum 15.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Tabulam sinuum ordinare, & omnino complere.

DOctrina, quam tradidimus sufficiet ad tabulam sinuum condendam, licet, vel facilitatis gratia, & maioris abundantiæ, etiam cæteras regulas trademus infrà.

Itaque ex lateribus inuentis figurarum regularium Quadrati, Pentagoni, Exagoni, & Quindecagoni, ita cæteri sinus educentur. Nam illi erunt chordæ arcuum, quos subtendunt, & medietates sinus, quorum dimidiabis arcus ex Coroll. 2. propos. 11. & harum semissium inuenientur sinus. Deinde harum semissium reperiantur complementa ex Coroll. 1. eiusdem. Inuentorum autem cōplemētorum accipiantur semisses, & earum sinus reperiantur ex Coroll. 2. prop. eiusdem, & sic successiuè, vt in appositis tabellis videre potes.

Tabella arcuum ex latere Gr. 24. Quindecagoni nascentium.

Arcus				Complementa.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	1e	0	2079117	1	78	0	9781476
2	6		1045285	2	84		9945119
3	3		5e3360	3	87		9986295
4	1	30	e61769	4	88	30	9996573
5	0	45	130896	5	89	15	9999143
Comp. 1. Semisses.				Comp. Semissium.			
6	39	0	6293204	6	51	9	7771460
7	19	30	3338069	7	(0	30	9426415
8	9	45	1693495	8	70	15	9856013
Comp. 2. Sem.							
9	42		6691306	9	48		7431448
10	21		3583679	10	69		9335804
11	10	30	1812355	11	79	30	9°31549
12	5	15	871557	12	84	45	9961947
Comp. 3. Sem.							
13	43	30	6883549	13	46	30	7255744
14	21	45	3705574	14	69	15	9288097
Comp. 4. Sem.							
15	44	15	6977905	15	45	45	7163019
Comp. 6. Sem.							
16	30	30	5075384	16	59	30	6661892
17	15	15	2630312	17	74	45	9647873
Comp. 7. Sem.							
18	30	15	5037740	18	79	45	8638355
Comp. 9. Sem.							
19	e4.		4067366	19	66	9	9135455
Comp. 10. Sem.							
20	34	30	5864062	20	55	30	8241261
21	17	15	e965416	e1	72	25	95,0199

Comp.

Comp.11. Sem.				Compl. Semiſſium.			
N.	G.	M.		N.	G.	M.	
22	39	45	6364390	22	50	15	7688418
Comp.13. Sem.							
23	23	15	3947439	23	65	30	9187912
Comp.16. Sem.							
24	29	45	4972165	24	30	15	8681988
Comp 19. Sem.							
25	33		5446390	25	57	0	8386706
26	16	30	2840153	26	73	30	9588197
27	8	15	1434926	27	81	45	9896514
Comp.20. Sem.							
28	27	45	4656145	28	62	15	8849876
Comp.23. Sem.							
29	32	45	5409745	29	57	15	8410390
Comp.25. Sem.				Comp.			
30	28	30	4771588	30	61	30	8788121
31	14	15	2461533	31	75	45	9692309
Comp.26. Sem.							
32	36	45	5983246	32	53	15	8012538

Tabella Sinuum, qui naſcuntur à latere Sexagoni Gr. 60.

Arcus,& Semiſ.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	30		5000000	1	60		8660254
2	15		2588190	2	75		9659268
3	7	30	1305262	3	82	30	99.4449
4	3	45	654031	4	86	15	9978589
Compleměti 1. Sem.				Compl.Semiſſium.			
5	37	30	6087614	5	52	30	7933533
6	18	45	3214395	6	71	15	9469301
Comp.3. Sem.							
7	41	15	6593458	7	48	45	7518398
Comp.5. Sem.							
8	26	15	4422887	8	63	45	8958727

Tabella Sinuum, qui naſcuntur ex latere Pentagoni Gr. 72.

Arcus, & Semiſ.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	36		5877852	1	54		8090170
2	18		3090170	2	72		9510565
3	9		1564345	3	81		9876833
4	4	30	784591	4	85	30	9969173
5	2	15	392598	5	87	45	9992290
Semiſ.1. Comp.				Compl. Semiſſium.			
6	27	0	4539905	6	63	0	8910065
7	13	30	2334454	7	76	30	9723699
8	6	45	1175374	8	83	15	9930685
Semiſ.3. Comp.							
9	40	30	6494480	9	49	30	7604060
10	20	15	3461171	10	69	45	9381913

Semiſ.4. Comp.				Compl. Semiſſium.			
N.	G.	M.		N.	G.	M.	
11	42	45	6788307	11	47	15	7343225
Semiſ.6 Comp.							
12	31	30	5224986	12	58	30	8526402
13	15	45	2714405	13	74	15	9624552
Semiſ 7. Comp.							
14	38	15	6190940	14	51	45	7853169
Semiſ.9. Comp.							
15	24	45	4186597	15	65	15	9081432
Semiſ.12. Comp.							
16	29	15	4886212	16	60	45	8724960

Tabella Sinuum, qui naſcuntur à latere quadrati Gr. 90.

Arcus,& Semiſ.				Complementa.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	45		7071068	1	45		7071068
2	22	30	3826834	2	67	30	9238795
3	11	15	1950903	3	78	45	9807853
4	33	45	5555702	4	56	15	8314696

COROLLARIVM I.

EX his itaque tabellis habebis iam inuentos ſinus arcuum 120. qui ſe ſuperant m. 45. & licet ordo ſit confuſus; poteris tamen in ſeriem collocare, & ſic 45. minutorum augmentum ordinatum dignoſcere.

Si autem, & arcuum, qui ſe ſuperant min. 15. tantummodo, ſinus percupias, id deinde efficies ex propoſ. 12. huius addendo ſinum arcus 39. grad. ſinui arcus Gr. vnius, & exquirendo chordam grad. 40. ex notâ ſinuum verſorum ipſorum differentiâ, vt ibi docemus, hic itaque arcus grad. 40. & eius Semiſſes, & complementa eodem modo, ac præcedentes tabellę compoſitę ſunt, dabunt multos, multoſque arcus, qui prædictos 15. minutis ſuperant.

Tabella Sinuum ex additione ſinus grad. 39. & Gr. 1. reſultans, nempe ex latere Nonagoni.

Arcus,& Semiſ.				Complem.			
N.	Gr.	M.		N.	Gr.	M.	
1	20		3420201	1	70		9396926
2	10		1736482	2	80		9848078
3	5		871557	3	85		9961947
4	2	30	436194	4	87	30	9990482
5	1	15	218149	5	88	45	9997620
Semiſ.1. Comp.				Semiſſium, Compl.			
6	35	0	5735764	6	55	0	8161520
7	17	30	3008058	7	72	30	9537169
8	8	45	1521234	8	81	15	9883515.
Semiſ.2. Comp.							
9	40, & cęt.		6427876	9	50		7660445
Semiſ 3. Comp.							
10	42	30	6755902	10	57	30	7372773
11	21	15	& cęt.	11	68	45	& cęt.

Et

Et ſic produces ipſam tabellam vſque dum poteris ; illa enim ferè omnea gradua è 15. in 15. minota progredientes adimplebit, ſi iungantur, & in ordinem redigantur eum arcubus præced. tabellarum ipſius arcus cum ſioibus adiunctis.

Deinde ex arcu Gr. 52. m. 30. ſubducemus arcum m. 30. & acqoiremus arcum Gr. 52. cuius eborſdam perquiremus ex 13. propoſ. huius, & habebimus ſinum grad. 26. eoius perquiremus complemeota, & ſemiſſea, & complebit omninò nomerum Grad. 360. qui excreſcuor 15. minutis ſe augendo : ſicque illius tabulæ ſtabit initium.

Tabella Sinuum enaſcentium ex ſubductione arcus m. 30, ab arcu Gr. 52. m. 30.

Arcua N.	Gr.	Semiſ. M.		Complem. N.	Gr.	M.	
1	26	0	4383712	1	64	0	8987940
2	13	0	2249511	2	77	0	9743700
3	6	30	1132032	3	83	30	993*058
4	3	15	566928	4	86	45	9983917

Semiſ. 1. Comp.			Compl. Semiſſium.		
5	32	5299*92	5	58	848C481
6	16	2756573	6	74	9618617
7	8	1391731	7	82	9902681
8	4	697565	8	86	9975*40
9	2	348995	9	88	9993908
10	1	& cæt.	10	89	& cęt.

COROLLARIVM II.

VErùm, ſi pigeat tanti laboris, ſcias aliquos vti differentijs ipſis inter ſinus Arcuum ſe ſuperantium m. 45. & earum partibus proportionalibus.

Itaque diſpoſitis ſinubus arcuum ſe 45. minutis ſuperantium hoc modo.

G.	M.	Sinus	Differentiæ Prę.
11	15	1950903	
12	0	2079117	128214
12	45	2206974	127857
13	30	2334454	127480
14	15	24·1533	127*79

Subduces ſinus minores à maioribus, vt habeas differentias ipſas primas, quas ſingulas in tres partes æquales diuides. Inde ſinui datorum graduum V. g. 12. addes, & habebis ſinum maiorem minutorum 15. nempe Gr. 12 m. 15. ſaltem proximè, & ſi adhibueris in ſupputationibus ſinum maiorem ſaltem duabus ſifris etiam admodum exquiſita hæc regula erit, vſque ad grad. 45. Nam poſtea cæteri Sinus per inuentorum ſinuum arcuum ſe ſuperantium m. 15. complementa inuenien-di ſunt.

Sit ergo Sinus Gr 12. ſilicet 2079117. differentia eſt à ſinu maiori Gr. 12. m. 45. Par. 2206974. differentia inquam eſt Partium 127857 quæ trifariam diuiſa tertiã partem exhibebit 42619. Addeſq; deinde ſinui G. 12. m. 15 qui eſt 2079117. & erit 2121736. qui erit quidem paulo minor, quam is, qui in ſinubus ponitur ; Sed abiectis duabus figuris, quæ abundant ad dextram erit exquiſitus ſinus 21217. Gr. 12. m. 15. poſito ſinu toto 100000. at ſi maior ſupponatur ſinus, vt in tabulis : tunc ſinus inuenti ex ſinu aucto inſuper duabus ſifris erunt maiores. quàm hic ponuntur : vnde error etiam, qui in hac regula contingere poteſt abiectis 2. figuris corrigetur. Cum non poſſit vltra duas primas figuras ad dextram extendi.

Si verò cupias ſinum Gr. 12. m. 30. addes prædicto 2121736. eandem differentiam, & fiet ſinus 2164355 abiectiſque duabus figuris dextris erit ſinus exquiſitus Gr. 12. m. 30. poſito ſinu toto 100000. & ſic de cæteris vſque ad 45. Gradus : ex inde enim mediantibus regulis traditis, vel tradendis complementa exquiri debebunt ſinuum arcuum inuentorum, & ſic omnes ſinus arcuum excreſcentium m. 15. acquiſiti erunt.

COROLLARIVM III.

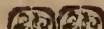
HInc quoque cognoſces ; quomodo ſinus minutorum reperiantur. Namque ſi iam, vt præſupponitur reperti ſint præced. tabularum ſinus adhibendo ſinum totum auctum duabus ziſris, cum vix differat grad. 0. m. 1. vſque ad 45. Gr. ſinus adeo paruâ additione aucti à curuitate ipſius circuli ipſi arcui additâ ; hinc fit, quod per regulam proportionum poſſint exquiri.

Primò itaque accipe differentiam inter ſinum V g. m. 30. & min. 45. quæ erit 43632. Dicesque ſi minuta 15. quibus diſcrepat arcus maior à minore dant differentiam 43631. quid m. 5. ? & habebis partes 14544. quæ additæ ad ſinum m. 30. Partium 87265. efficient ſinum 101809 minutorum 35.

Iam verò reperto ſinu arcus m. 35. Part. 101809. ſi differentiam, qua diſcrepat ab arcu minori in quinque partes diuiſeris, & ſingulas addideris ſinui m. 30. efficies ſucceſſiuè ſinus m. 31. & 32. & 33. & cæt. & hoc exactiùs ſuccedet ; ſi, vt monui, aſſumptus fuerit ſinus totus auctus duabus ziſris. Quinta igitur pars differentiæ 14544. eſt partium 2908 $\frac{4}{5}$, quam addes ſicut tabella oſtendit.

Ita verò ſequeris differentias inter ſinum arcus maioris Gradibus 15. ab arcu minori in quinque ſecando, & ſinui minori ſingulas quintas partes ſucceſſiuè addendo vſque ad arcum Gr. 45. Nam repertis ita omnibus iſtis ſinubus, quærenda ſunt deindè modo ſupra tradito Coroll. 1. prop. 11. huius, eorum complementa, & ſic tota Tabula omnibus Sinibus appoſitis erit compléta.

Sinus m. 30	87265
	2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 31	90173 $\frac{4}{5}$
	2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 32	93082 $\frac{3}{5}$
	2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 33	95991 $\frac{2}{5}$
	2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 34	98900 $\frac{1}{5}$
	2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 35	1018090



EX-

EXPENSIO V.

De Sinibus, Chordisque inueniendis sine extractione Radicis Quadratæ.

QVæ diximus supra satis sunt ad tabulam sinuum efficiendam. Verùm ad ampliorem eruditionem, & vt laboriosam, & minus notam inuentionem radicis quadratæ effugiamus suppositis cognitis lateribus figurarum regularium; ex inde sequenti doctrina eam quoque tabulam condere poterimus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si in circulo quadrilaterum sit descriptum, rectangulum ex diametris factum est æquale duobus rectangulis simul sumptis qui sub oppositis lateribus comprehenduntur.

SIt ABCD rectangulum descriptum in circulo, seu segmento. Dico *rectangulum descriptũ ex duabus diagonalibus* AD, *&* BC *esse æquale rectangulo* descripto à duobus lateribus oppositis AB, CD, & rectangulo à CA, & DB lateribus oppositis contento.



Quod vt probetur:

Progr. 1. Eligatur aliquis angulus à latere diagonali comprehensus, vt BAF niger apud A, qui vel sit æqualis, vel minor, quam alter ad eandem partem eodem diametro & latere contiguo comprehensus qualis angulus CAD ad A. Si est æqualis nihil fiat; si est minor, vt in exemplo est A in maiori abscindatur æqualis angulus & fit ad A BOgulus niger trianguli CAE, quibus nigris, & æqualibus; si addatur albus communis EAF remanebant æquales niger, albusque BAE, & niger, albusque CAF, diagonalis verò CB erit secta in duas partes in E; Quapropter ex 3. lib. 2. Euclid. rectangula duo sub partibus, & altera diagonali AD comprehensa erunt æqualia rectangulo sub duabus CB, & AD concluso.

Progr. 2. Triangula BAE, & CAD sunt æquiangula, angulusque niger apud A, & albus in maiori triangulo CAD est æqualis nigro, & albo BAE ex constructione.

Anguli verò B, & D nigri, eo quòd insistunt eidem circumferentiæ AC sunt æquales ex 24. lib. 3. Euclid. Quare, & reliqui ad E, &c. Ergo ex 4 lib. 6. Euclid erit eadem proportio CD basis ad crus AD maioris, ac basis BE ad crus AB minoris trianguli. Ergo ex 18. lib. 6. rectangulum sub extremis CD, & AB erit æquale rectangulo sub medijs BE, & AD.

Progr. 3. Idem dicendum est de triangulo nigro CAE, quod est æquiangulum triangulo ABD: Nam nigri CAE, & FAB apud A sunt anguli æquales ex constr. albus verò apud D, & niger apud C; eò quod insistant eidem circumferentiæ AB sunt quoque æquales, quare, & reliqui. Ergo eodem argumento. Ita erit in proportione AD ad BD, ve AC ad CE: Ideoque rectangulum sub extremis lineis clausum, nempe AD, & CE erit æquale illi, quod à medijs BD, & AC clauditur.

Progr. 4. Notandum est itaque, quòd rectangulum ex 2. progr. est factum ex tota diametro AD & maiori portione alterius diametri BE, & æquatur rectangulo laterum AB, & CD oppositorum, & rectangulum ex 3. progr. est ex eodem diametro AD, & minori portione alterius diametri CE æquaturque rectangulo ex reliquis lateribus oppositis BD, & AC. Rectangula autem duo ex diametro tota, & portionibus alterius facta æquantur illi facto ex integris diametris AD, CB, vt prænotauimus ex 3. l. 2. Eu. progr. 1. Quare hoc rectangulum ex diametris erit æquale duobus rectangulis quorum quodlibet ex duobus lateribus oppositis quadrilateri circulo inscripti componitur.

COROLLARIVM I.

HInc eruitur quomodo datis duabus chordis, & chorda repertis complementorum vsque ad semicirculum ex Coroll. propos. 11. possimus venire in cognitionem chordæ, quæ inter duos arcus datarum chordarum intercipitur, vel quo simul superant semicirculum, vel quo arcus datus superat alium; sine extractione Radicis quadratæ. Nam datis Chordis CA, & BD multiplicabuntur simul, vt fiat rectangulum sub ipsis comprehensum: Deinde repertis chordis complementorum vsque ad semicirculum AD, & CB arcuum ABD, & CAB inuicem pariter multiplicabuntur, & erit rectangulum æquale rectangulo ex CA, & BD, & rectangulo ex AB, & CD. Subducito itaque rectangulum notum ex lateribus CA, & BD, remanebitque rectangulũ ex DC, & AB, quo diuiso per totum diametrum dabitur chorda arcus AB, quæ diuisa per medium dabit sinum dimidij arcus AB, quò dati arcus BD, & AC deficiunt à semicirculo. Hunc autem sinum obtinebis quoque si opereris dimidio diametro, & dimidijs omnibus chordis acceptis. Nam ita est totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Quod si ponas vnum arcum esse CAB, alterum ABD, chorda AB reperta erit arcus illius, quo dati arcus simul sumpti superant semicirculum: At si arcus dati sint CA, & CAB reperta chorda esset illius arcus quo vnus superat alium, vt patet.

COROLLARIVM II.

HInc quoque chorda summæ duorum arcuum reperitur. Pone itaque te habere notas Chordas AB, & AD; earum complementa ad semicirculum reperiantur BC, & DC: Deinde lineæ diagonales ducantur, quarum vna sit diameter AC, altera BD in quadrilatero ABDC: Multiplicetur itaque AB latus per oppositum DC; item AD per oppositum BC habebimusque duo rectangula æqualia rectangulo facto ex diagonalibus AC, & BD, si ergo aggregatum duorum rectangulorum ex lateribus AB, & CD necnon,

&

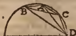
& AD, & ac diuidatur per totum dimetrum prodibit Chorda BD, quæ diuisa bifariam dabit sinum



dimidij arcus BAD. Poteris quoque vti dimidiatis lateribus, & dimidio diametro, & prodibit idem sinus dimidij arcus BAD.

COROLLARIVM III.

Poteris quoque datâ chordâ simplicis arcus, & chordâ dupli arcus reperire chordam tripli. Sit ergo chorda arcus AC simplicis, & arcus ACD duplicis. Inuenietur chorda tripli BACD, si chorda simplicis arcus multiplicetur in se ipsam, rursum chorda CD, & æqualis AB laterum oppositorum quadrilateri BACD, deinde multiplicetur in se



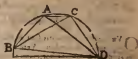
chorda dupli arcus, nempe diagonalium AD, & BC, & ab hoc rectangulo per multiplicationem facto deducatur rectangulum primo factum per multiplicationem laterum BA, & CD, & residuum æquabitur rectangulo ex lateribus oppositis AC, & BD; Vnde si hoc rectangulum diuidatur per latus notum AC, relinquetur latus BD tripli arcus chorda, & si utrarum dimidiatis chordis eueniet sinus dimidij arcus BACD.

COROLLARIVM IV.

Si autem noueris chordam tripli arcus BACD, & simplicis BA, & cupias chordam duplicis. Oportet multiplicare AB simplicis arcus chordam in se, & habebis rectangulum sub lateribus æqualibus oppositis comprehensum, deinde simplicis arcus chordam cognitam per arcus tripli chordam multiplicabis, & habebis rectangulum ex BD, & AC, quæ vnita æquabunt quadratum ex diagonalibus AD, & BC. Vnde educta radix quadrata dabit chordam AD, quod licet ad hunc locum minus spectet, cum Doctrinam institutum sit docere, quomodo sine contactione radicis quadratæ datis lateribus figurarum circulo inscriptarum possint omnes sinus reperiri; nolluimus tamen omittere.

COROLLARIVM V.

Poteris quoque reperire ex chordis notis dupli arcus tripli, & simplicis chordam quintupli arcus. Chorda simplicis arcus sit AC, dupli arcus CD. Si multiplices CD, & BA æquales simul habebis rectangulum, quadrilateri BACD sub oppositis lateribus contentum; multiplicabis quoque diagonales AC, & AD in se, & obtinebis rectangulum, à quo demes rectangulum ex oppositis late-

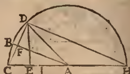


ribus constitutum BA, & CD, residuumque diuides per latus AC, iam cognitum, & prodibit chorda BD arcus quintuplicis BACD.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

Quadratum sinus recti est æquale rectangulo ex sinu verso duplicis arcus, & medietate radij confecto.

Probatur. Nam triangulum CDH ad circumferentiam, est rectangulum, vt etiam tale est CDE, angulusque C communis, ergo ita erit CH diameter, & basis ad chordam, & latus minus CD trianguli maioris, vt idem latus, chordaque, & insuper basis in triangulo minori ad CE latus minus: Et ideo ex propos. 19. lib. 6. quadratum ex chorda CD, tanquam ex medio æquale



erit rectangulo ex extremis confecto CE, & CH. Ergo, & quarta pars quadrati ex CD, cuius latus est medietas, FD, est æqualis quartæ parti rectanguli, quæ comprehenditur à CI semiradio, & CE sinu verso duplicis arcus, quod est intentum: hæc verò quarta pars posset constitui; si placeret ex semisinu verso, & toto radio CA, vt considerandi patet.

COROLLARIVM.

Hinc est, quod si multiplices sinum rectum CF in se, & deinde diuidas per semiradium CI quod habeas sinum versum duplicis arcus CE, qui subductus à sinu toto dat sinum complementi EA. Sic quoque, quod si multiplices sinum versum CE per semiradium CI, & ex numero multiplicato radicem quadratam erues, quod sinum rectum CF obtineas.



EXPEN-

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Vt dimidium sinus totius se habet ad sinum dimidij alicuius arcus, ita sinus complementi eiusdem dimidij ad sinum totius arcus.

SIt dimidium AK, Sinus totus AB; dupletur ipse sinus totus, & sit ABC diameter, & hac diametro fiat semicirculus. Sitque in eo sinus EF dimidij arcus AO totius arcus ADE; Sinus verò totius arcus eiusdem ADE sit IE complementum arcus dimidij ED sit AH, & ducta BC sinus illius cóplementi AH sit BG. Dico, *quod ita est dimidium* AB *sinus totius ad sinum* EF *dimidij arcus, vt refertur sinus* BG *complementi eiusdem dimidij in proportione ad sinum totius* AE.

Quod vt probetur considera ABC angulum; quod si in circumferentiâ, & EIC ex Hypothesi esse rectangula, angulumque communem esse apud C. Vnde, & erunt æquiangula, vt constat ex propos.8. lib 6. & ideo ex 4 Eucl. lib.6. latera circa æquales angulos erũt proportionalia. Ideoque erit, vt basis AC trianguli maioris ad crus minus AE, ità basis EC ad crus minus IE minoris trianguli EIC. Quamobrem dimidium quoq; AB totius diametri, & basis se habebit ad idem suum crus minus AE, vt dimidium BO basis EC minoris EIC trianguli se habet ad EI crus minus in ipso. Radius AB, & GE, itaque iam sumantur non vt dimidia, sed cum sint in eadem proportione, ac sua tota veluti tota accipiantur, & erit AB ad AF, vt BG ad EI. Vnde eodem argumento; denuò concludemus intentum. Nam dimidium sinus dimidij, & quarta pars AK basis AC erit ad dimidium sui cruris AE nempe ad sinum EF dimidij arcus ADE, vt sinus BG complementi ad sinum IE duplicis arcus.

COROLLARIVM I.

QVòd si obtineas cognitionem sinus recti AF dimidij arcus AE. & sinus complementi eiusdem BG potes acquirere cognitionem sinus duplicis arcus EI per regulam auream. Nam si multiplices sinum complementi BG per sinum rectum EF, & diuidas per medietatem sinus totius AK habebis sinum EI rectum duplicis arcus ADE.

COROLLARIVM II.

SIc si obtineas cognitionem Sinus duplicis arcus, & sinus complementi simplicis eiusdem posses deuenire per regulam auream in cognitionem sinus simplicis arcus. Nam si multiplices dimidium sinus totius AK, cum sinu duplicis arcus IE, & aggregatum diuidas per sinum complementi dimidij arcus EG habebis sinum simplicis arcus FA. Nam FG, qui est sinus complementi dimidij arcus EH est ad IE sinum duplicis arcus, vt dimidium sinus totius AK est ad sinum simplicis arcus AF, quare rectangulum factum ex medijs AF sinu simplicis arcus & GE complementi eiusdem æquale est rectangulo facto ex extremis AK dimidio sinus totius, & IE sinu duplicis arcus;

Si verò è contra diuidas rectangulum ex IE, & AK per sinum simplicis arcus FA habebis sinum complementi simplicis arcus EG, sicque dato sinu duplicis arcus, & dimidio sinus totius, & sinu simplicis arcus deuenies in cognitionem sinus complementi eiusdem arcus simplicis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Arcus tertiæ partis Chordâ datâ chordam totius arcus inuestigare.

SIt data chorda AB, & oportet inuenire chordam AD, quæ arcum totum subtendat.

Fiat, vt VA sinus totus ad AB chordam datam; ita AB ad BC. Deinde rursus adhibitâ regula proportionum; fiat, vt radius AV ad residuum VC inuentæ AC, sic Chorda data AB, vel æqualis BE ad aliud, & inuenietur CF; Quia ergo AC, & FD sunt æquales ipsis AB, & BE: si addatur ipsis nuper inuenta CF efficietur AD, quæ quærebatur.

Quòd, vt ostendatur, ductâ AV ponatur AC æqualis ipsi AB, & prolungetur in D. Dico *in primis* BED *arcum esse duplum arcus* AB, & ideo ABD arcum, quem subtendit AD esse triplum arcus AB.

Prob. Nam angulus niger B est æqualis nigro C ob æqualia crura AB, & AC ex effectione: Quare & angulus A semialbus erit æqualis nigro B ob æqualia crura AV, VB, nempe radios, & ideo quoque nigro C, & sic B, & C anguli nigri trianguli ABC erunt æquales angulis B, & A trianguli BAV: Quare, & reliquus angulus niger A in triangulo ABC erit æqualis albo V in triangulo BAV ex propos.17. lib.1 elem. Sed A niger est ad circumferentiam, ergo vt æqualis duplo maiorem circumferentiam subtendet BED, cum si subtenderet æqualem subduplus esset; ideo addito AB totus arcus ABED erit triplus arcus solius AB.

Prob. 2. Quòd radius sit ad datam AB, vt AB ad BC: cum enim triangula sint æquiangula habebunt latera circa æquales angulos proportionalia. Ergo erit, vt AV ad BA basim, ita eadem crusque AB ad BC. Et hinc ex 4.lib.6. erit BV ad residuum VC inuentæ BC, subductæ à sinu toto, vt BE ad CF, quæ cum AC, & DF complet subtensam AD.

THEOR.

THEOR. VI. PROP. XXI.

Radius est ad chordam, quadrantem superantem, vt ipsa chorda ad diametrum addita Chorda dupli excessus.

SIt data AB, quæ superet quadrantem, & duplus excessus sit CB. Dico, *quod radius* AD *est ad* AB, *vt* AB *chorda ad* AF *diametrum cum* HF *æquali* CB dupli excessus IB, quo arcus ACB superat quadrantem AI.



Probatur. Nam triangula ABD, & AEF sunt æquiangula, & angulus A est æqualis angulo F ob parallelismum linearum æqualium ipsi AB, quæ sunt CH, & BF; siquidem ob id; tam angulus A, quam B æquantur tertio angulo H nigro, angulus verò A communis verisque æquatur angulo B nigro ob equales radios: Ergo, & reliqui ex Cot. 2. propos. 17. lib. 1. Quare habebunt hæc triangula latera circa æquales angulos proportionalia, erit; AD crus ad AB basim, vt ipsa AB crus in triangulo ABF ad AF basim.

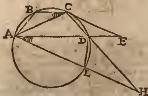
COROLLARIVM.

HInc si datâ chordâ AB excedente quadrãtem facias regula aurea, vt semidiametre AD ad AB, ita AB ad aliud inuenies AE, à quo inuento subduces diametrum, & restabit HF idest æqualis CB dupli excessus, quo superat data chorda quadrantem.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Tres subtensæ prima arcus simplici secunda duplici, tertia triplici æqualibus sunt tres continuè proportionales: si prima tertiæ addatur, vt sit vltima proportionalis.

ADdatur AB prima tertiæ AD. Dico AB, AC, & AE *esse tres continuè proportionales*.



Extensâ AD fiat equalis linea CE ipsi AC. Et ostédendum *primo* esse BA ad CA, vt CA ad AE. Angulus DAB albus est bifariam sectus linea AC, & parites DAC, & CAB equales sunt: sed angulus ipsi CAD ob æqualia crura ex effectione, sicut C niger albo CAB æquantur. Ergo triangula ECA, CBA æquiangula sunt; quare erit, vt crus BA ad basim AC, ita AC ad AE ex 4. lib. 6. elem.

Deinde ostendendum est ED equali ipsi AB Triangulum EDC est æquiangulum triangulo CBA. Angulus enim a ostensus est æqualis angulo nigro C: Angulus ABC subtendit totam periferiam exceptis duabus partibus BC. & BA; quibus inest; sed angulus CDA subtendit duas ipsas partes CB, & BA. Ergo residuus angulus exterior EDC totam reliquam peripheriam occuparet, cū duo anguli apud D duobus rectis æquentur, & ideo ad centrum positi insisterent semicirculo. Vnde ad peripheriam totam peripheriam assurparent. Quare EDC angulus æquabitur angulo B: cum ergo sint æquiangula triangula ob duos angulos equales ex Cot. 2. pr. 17. lib. 1. ita erit BA ad CB, vt DC ad DE: sed BA, & CB sunt æquales. Ergo etiam DC, & ED lineæ; linea verò DC æquatur ipsi CB ex hypothesi.

Sit deinde HD æqualis ipsi DA. Dico rursus CA esse ad AA, vt AD ad AH in proportione. Sunt enim ECA, & HDA triangula æquiangula ob angulos ipsorum apud A æquales ex Thesi, & consequenter H, & B cum triangula sint æquicrura: vnde, & reliqui æquales ex Cotoll 2. propos 17. lib. 1. Quare erit vt CA crus ad VA basim, ita DA crus ad AH basim.

Deinde assero HL æquari ipsi CA. Nam HLD triangulum est æquiangulum triangulo DCA. Nam angulus H æquatur nigro A, & angulus DCA obtusus subtendit totam circumfeentiam exceptis tribus partibus, Idest arcum DCBA: Sed angulus DLA subtendit easdem tres partes; & est internus, ergo reliquus HLD externus equatur ipsi DCA: & totam reliquam circumferentiam in circumferentia positus subtenderet. Quamobrem DC erit ad CA, vt DL ad LH: quare permutando DC erit ad DL; vt CA ad LH; sed CD, & LD sunt æquales. Ergo LH, & CA erunt æquales.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo triplices & quadruplices, aut quintuplices, & cæt. arcum propositum Cuiuscumque arcus subtensam inuenias. Nam datâ subtensâ arcus simplicis BA, & arcus duplicis CA si adhibitâ regulâ aureâ multiplices subtensâ arcus duplicis in se, & diuidas per subtensam arcus simplicis habebis AE, cui subducta ipsa BA, idest DE tertiam subtensam DA arcus triplicis exhibebit. Quoniam ostendimus AA esse ad CA, vt CA ad AE. Deinde si rursus assumas DA, & ei addas DB, vel AA, vt fiat EA, & regula proportionum dicas si CA dat AA, quid dabit AE? inuenies HA, quæ subductâ ipsâ CA, dabit subtensam AL arcus quadruplicis LCA, & sic de alijs.

COROLLARIVM II.

ELicies. Quomodo ex cognitione chordarum, quæ latera figuratum, de quibus diximus Expensione prima, & chordarum arcuum, qui earum arcus complent vsque ad sem circulum, quæ acquiri possunt ex propos. 18 possimus deuenire in cognitionem ceterorum omnium sinuum Nam dimidientur chorde, & erunt sinus dimidij arcus. Sic earum complementa vsque ad semicirculū & erunt sinus complementorum vsque ad quadrantem

tem. Deinde per propositiones positas omnes alios arcuum sinus se inuicem superantium 45 minutis possumus reperire, & deinde ex dictis Coroll.2. prop.15. reperto sinu, arcus vnius. Similiter omnes alios arcus, qui 15. minut. alter super alterum augentur inuenire, ex Coroll.1. & 2. prop. 16. & tandem ex regula aurea omnes alios, qui vnico minuto continuò excrescent augmento.

V. g. data chorda decagoni 24. dimidiata erit sinus Gr. 12. Sicut, & complementi chorda 156. Gr. dimidiata erit Gr. 78. complementi arcus 12. Primo itaque ex Corollar. proposit. 18. habebis sinum versum duplicis arcus Gr. 24. quo subducto à Radio erit residuum eius complementum Gr. 66. & consequenter chorda duplicis arcus Gr. 132. Quibus obtentis potes etiam obtinere cognitionem sinus recti ex prop. 17. Coroll. 1. arcus eius duplicis 48. & eius complementi gr. 42. ex Cor. pr. 18. Deinde cum iam habeas sinum Gr. 48. potes reperire eius duplum sinum gr. 84. & eius complementi gr. 6. Et hinc gr. 3. deinde gr. 1. m. 30. & tandem gr. 0. m. 45. Quo habito poteris reperire per ordinem omnes sinus, qui differunt m. 45. ex Coroll. propos. 18. vsquequo compleas 120. arcus inter quos reperies sinus conuenientes, vt supra docuimus. Vel vtendo alijs propositionibus positis datâ chordâ arcus 12. & arcus 30. ex propos. 17. Coroll. 2. inuenies chordam summæ datorum arcuum G. 42. cuius sinum cóplementi ex prop. 18. vel 19. reperies sinum arcus G. 46. & dimidij huius arcus ex propos. 19. duplicabisque & erit chorda totius arcus 46. Istis itaque duabus chordis gr. 12. & G. 46. ex propos. 16. Coroll. 2. inuenies chordam summæ arcuum illarum chordarum, nempe arcus 58. cuius medietas sinus erit arcus 29. & ita prosequeris diuersimodè sinus complementaque, & chordas combinando: Nam eodem modo omnes sinus reperies, qui se superant m. 45.

EXPENSIO VI.

De reperiendis sinubus aliquibus per solam subductionem, & additionem.

QVia facilitas in omnibus, & temporis compendium placet in multis sinubus inueniendis singulari breuitate, & facilitate hæc regula possumus vti, quam præmissa vnica propositione trademus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Differentia sinuum rectorum peripheriarum duarum à circuli sexta parte æquali interuallo remotarum æquantur sinus recto peripheriæ alterius interualli à circuli sexta parte.

SInt in quadrante ABC peripheriæ duæ BF, & ED æquali interuallo ab E circuli sextante remotæ, quarum sinus DI, vel EG; sinus verò arcuum, qui ab E circuli sextante æquali interuallo seiunguntur sint FH sinus arcus FC, & GD sinus arcus DC, quorum differentia sit KD. Dico KD differentiam *esse æqualem sinui recto* FE, *vel* ID *interualli, seu* DE, *seu* EF. Ducatur itaque AE, & ab L, vbi secat AE ducatur LF.

Probatur. Triangulum DFL est æquiangulum. Habemus enim duo triangula rectangula prorsus æqualia nigrum, & album. Nam latera quidem IF, & ID æqualia sunt, latus verò IL commune.



Propterea ex pr. 32. primi, & bases erunt æquales. Vnde, & anguli ad L albus, & niger æquales: Sed angulus niger ad L est partium 30. æquatur enim angulo LAB apud A ex pr 30. l. 1. ob parallelismum linearum AB, & GD. Ergo alter niger ad D erit G. 60 ad hoc, vt cum angulo recto ad I æquetur duobus rectis ex prop. 17. l. 1. Sic philosofare de albo ad F ob angulum album ad L æqualem angulo ad L nigro, qui est Gr. 30. qui, & compositi facient totum DLF Gr. 60. Ergo æquilaterum erit triangulum, & æquiangulum, & perpendiculares KF, & LI diuident, vt angulos bifariam, sic, & latera bifariam. Ergo erit KD differentia sinuum rectorum, & IF sinus rectus interualli, quo distat arcus FC ab arcu gr. 60. qui erunt æquales.

COROLLARIVM I.

SI itaque notum habeas sinum rectum arcus V g. 36. & sinum rectum interualli vsque ad 60. arcus Gr. 24. & addas simul istos duos sinus efficies sinum arcus 84. Sinus enim ille V. g. HF gr. 24 æquatur differentiæ KD arcus 84. nimirum arcus, qui compositus est ex arcus 60. & interuallo 24. qui erat inter 60. & 36. vnde additus FI sinus G. 24. sinui arcus FH Gr. 36. facient sinum GD arcus 84.

COROLLARIVM II.

SIc si notos habeas duos sinus arcuum, qui æqualiter distent ab arcu gr. 60. vt sunt duo sinus HF arcus 36. gr. & GD arcus gr. 84 & subducas vnum ab alio, habebis sinum arcus interualli; quo alteruter eorum distat à gr. 60. nempe DI sinum arcus ED, vel FE.

COROLLARIVM III.

SIc si demas notum sinum FD interualli ED, à maioris arcus sinu GD pariter cognito habebis sinum HF minoris arcus.

Et hoc de sinibus dictum sit quatenus ipsi inueniri possunt, cùm de cæterò de eis iterum reassumendus sit tractatus, quatenus mediantibus ipsis arcus inueniri queunt.



EXPENSIO VII.

De tangentibus, & secantibus.

SEcantium atque tangentium ex præcedentibus inuentis quantitates deducuntur; ex proportionibus enim, quas ad finus habent, earum mutuas proportiones breuiter explicabimus.

THEOR. I. PROP. XXIV.

Quam proportionem habet Sinus complementi ad sinum rectum, eam habet Sinus totus ad tangentem arcus.

PAtet. Nam finus complementi AB arcus BO complentis vsque ad quadrantem arcum BE est æqualis CD ob parallelogrammum rectangulũ ABCD: Sed CBD, & CFE sunt triangula æquiangula, vt patet, & BD, & EF parallelæ. Ergo ex prop. 4. lib. 6. Eucl. Ita erit CD sinui AN complementi æqualis ad BD sinum rectum, vt CE radius ad EF tangentem; quod est propositum.

Quod si constituas OB pro arcu, & AB pro sinu recto BD erit sinus complementi. Quare eadem ratione sinus rectus AB, vel æqualis CD erit ad sinum complementi BD, vt CE ad EF; quare in hoc casu, quam proportionem habet sinus rectus ad sinum complementi eam habet sinus totus ad tangentem ipsius complementi.

COROLLARIVM.

HInc potes dato sinu recto, & sinu complementi, & radio inuenire tangentem, seu sinus recti, seu complementi. Nam si multiplices sinum totum per sinum complementi, & diuidas per sinum rectum, habebis tangentem complementi. Quod si multiplices sinum totum per sinum rectum, & diuidas per sinum complementi, tangentem habebis arcus, cui rectus sinus subtenditur.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Radius medio loco proportionalis est inter tangentem arcus, & tangentem complementi.

PRobatur. Nam triangula CEF, & COV sunt æquiangula. Ergo ex propos. 4. lib. 6. ita erit OV erus maius, & tangens ad OC radium, vt radius CE, & erus maius in minori triangulo ad EF erus, & tangentem.

Quod autem triangula VOC, & CFE sint æquiangula non est dubitandum. Nam sunt rectangula ad O, & E ob tangentes perpendiculares; vnde reliqui anguli nigri simul sumpti C, & F erunt æquales vni recto, quare angulus niger F erit complementum anguli C. Ergo æqualis angulo ad C albo, & eiusdem complementum, & ob eandem eandem rationem angulus albus V erit æqualis nigro C.

COROLLARIVM.

HInc emergit Rectangulum tangentium esse æquale quadrato finus ex propos. 17. lib. 6. Eucl. & ideo si ducto sinu toto; si diuidas per notam tangentem arcus habebis tangentem complementi, & si diuidas per tangentem complementi, resultabit tangens arcus.

Vnde faciliter tabulæ tangentiũ extrui possunt Nam ex 24. propos. inuentis tantùm tangentibus dimidij quadrantis, cæteras inuenire poteris ex hac propositione, & quidem per solam diuisionem quadrati sinus totius.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Sinus totus medio loco proportionalis est inter sinum complementi eiusdem arcus, & secantem eiusdem arcus.

PRobatur ex præmissis. Nam CND, & CEF sunt triangula æquiangula: Ergo ita erit ad basim, & sinum totum CE sinus complementi CD, vel AB, vt idem sinus totus, trusque CE est ad secantem CF.

COROLLARIVM.

HInc verò deduces multiplicatum sinum totum in se, & diuisum per sinum complementi exhibiturum secantes arcuum, quos complent. Ita ex sinus totus multiplicatus in se, & diuisus per AE sinum complementi BO exhibebit secantem CF arcus EB.

THEOR. IV. PROPOS. XXVII.

Secans arcus minoris semiquadrante addita tangenti facit tangentem arcus, qui prædictum continet, & semissem sui complementi.

SIt arcus ED, cuius secans AC, tangens EC, complementum sit arcus DB, & medietas eius DC. Quare arcus continens arcum primo propositum ED, & semissẽ illius complementi DC erit arcus EC. Dico eius tangentem fieri EO. si AG secans arcus DE addatur tangenti CE.

Probatur. Sunt enim æquales AG, & CO. Ratio est; quia anguli nigri ad A, & O sunt æqualea, Vnde, & latera eis subtensa erunt æqualia. Sunt autem æquales; quoniam æquantur vni tertio angulo BAC, quòd est anguli CAE, feminigerrimi complementum, sicut angulus niger O est complementum eiusdẽ CAE in rectangulo AEO triangulo.

triangulo. Cùmque BAC, & O niger, eiusdem CAB sint complementa erunt æqualia; sed BAC æquatur ipsi DAC nigro ex constructione; ergo niger O, & niger A erunt æquales: quare, & latera AG, & CG subtensa æqualia erunt.

COROLLARIVM.

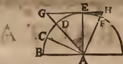
HInc habes. Quod cognitis secantibus, & tangentibus omnium Gr. vsque ad 45. possis per solam additionem omnes alias tangentes maiores, quam 45. graduum reperire, addendo scilicet secãtes tãgentibus V.g. si habeas tãgentẽ, & secantem arcus Gr. 24. & eas addas simul efficies tangentem arcus 57. Gr. qui continebit semel 24. & insuper medietatem complementi eius, quod amplectitur gr. 66.

THEOR. . PROPOS. XXVIII.

Secans arcus æqualis est tangenti arcus eiusdem, & tangenti eius complementi.

SIt arcus ED, cuius tangens EG; medietas verò eius complementi DB, sit DC, vel arcus æqualis FB, cuius tangens BH. Dico, *quòd tota* GH *ex tangentibus arcus, & semissis complementi æqualis est secanti* AG.

Probatur. Nam anguli ad H niger, & A niger, & albus in triangulo HGA inuicem sunt æquales. Ergo, & latera subtensa ex 15 propos. lib. 1. Elem. erunt æqualia. Quod verò anguli sint æquales H niger, & totus A semialbus ostenditur. Nam pars alba ad A ex Hypothesi est æqualis angulo BAC.



Ergo reliquus ad H niger in rectangulo AEH erit æqualis angulo CAE, vt ex propos. 17. lib. 1. Eucl. Cor. 2. Talis verò est totus angulus HAC, nimirum æqualis angulo CAE, cùm habeat partem nigram communem, & albam ex Thesi angulo BAC, & æquali CAD æqualem; vnde H, & A anguli, & ideo crura in triangulo HGA erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc euenit; Quod si simul componantur tangens arcus V.g. 24. & tangens semissis complementi eiusdem, nempe arcus 33. efficiatur secans arcus 57. Vnde multæ ex secantibus, atque tangentibus sola additione enasci possunt; Et hæc de secantibus, & tangentibus; quatenùs ipsę inueniri possunt, quatenùs verò per eas arcus inueniuntur, & quatenus inuicem referuntur infra tractabimus.



TRACTATVS XXI.

De Logarithmis.



Iro, & perutili inuento iungere Geometricis proportionalibus Arithmeticos cogitauit primus Ioannes Neperus Schotus, vt facilior calculus astronomicus per solam subtractionem, & additionem prodiret, quod inuentum licet ab Henrico Briggio aliter, deinde ordinatum sit; quia tamen eadem proportionum basi nititur, ideo hîc cùm (vt moris nostri est) fundamenta rerum tradere cupiamus, Neperi inuentionem ne dum, sed & ordinem, quinobis magis arridet, explanabimus.

EXPENSIO I.

Cur Arithmetici proportionales Geometricis vniantur.

ARithmetici quatenus Geometricis proportionalibus vniti vocantur Logarithmi.

Vt sunt Geometrici	1	3	9	27	81	243	729
Arithmetici	0	2	4	6	8	10	12
Arithmetici	19	17	15	13	11	9	7

Seu simul cum Geometricis decrescant, vel crescant, seu hi deficiant, dum illi augentur.

Annalogia verò, & similitudo, quam habent inuicem proportionales Arithmetici, & Geometrici in causa fuit, cur simul vnirentur, quàm hic diuersis propositionibus explicabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo numeri Geometrici inuicem multiplicati componunt tertium, eorum Logarithmorum aggregatum erit tertij Logarithmus.

SInt tres Geometrici proportionales

10	100	1000
3	6	9

Dico, *quòd, si 10. multiplicatus per 100. facit* 1000. *quod item primus Arithmeticus vnitus secundo facit tertium.* sic 3. vnitus cum 6. facit 9.

Probatur. Nam extendantur in maius, ex propos. 17. tract. 14. de proport. part. I. proportionalea Geometrici per multiplicationem denominatoris proportionis: at verò ex propos. 10. pat. 2. Tract. 14. Arithmetici per additionem differentiæ. Si ergo in Geometricis primus terminus sit denominator, vt hic 10. & in Arithmeticis primus terminus sit differentia, necessariò sicut 10. multiplicando secundùm 100. facit 1000. ita 3. additus 6. faciet 10. tertium terminum.

THEOR. II. PROPOS. II.

Proportio Geometrica applicata proportioni Arithmeticæ incipit à Zifra 0. vel à millione, vel simili numero 10. qui vnitate additis zifris constet.

SI sit proportio Geometrica continua proportionalitate, vt 10. 100. 1000. 10000. & Arithmetica, quę à 0. incipiat, vt 0. 4. 8. 12. 16.

Arithmetica	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Geometrica	1.	10.	100.	1000.	10000.	10000.
Arithmetica	0.	4.	8.	12.	16.	20.

Dico, quod hæc Series Arithmeticorum infra positorum benè demonstrat Geometricos, ex eo quòd reperto arithmetico bene reperiatur correspondens Geometricus. *Atque ideo ea series Arithm. ita bene addita sit.*

Probatur. In eo enim similitudine correspondent, quòd si duo Geometrici inuicem multiplicati producant tertium. Arithmetici quoq; additi, & simul positi producunt tertium. Sic quia 10. & 1000. se multiplicando producunt 10000. Ita 4. Aritmeticus sub positus vnitus arithmetico 12. producit 16: At si progressio inciperet à 4. tunc primus additus secundo nonfaceret tertium, vt hęc.

4. 7. 10. 13. 16. 19.

Nam nec 4. radicalis additus numero 10. producit 13. nec 10. & 13. producunt 16 Ergo numerus radicalis zifra esse debet, vel vnitas iuncta zifris, vt expeditè proportio Arithmetica deseruiat geometricę. Sic si numero 14. addatur 16.

faciet

faciet 30. à quo ablatus 10. vel vnitas ſecundi loci ad ſiniſtram dat 20. ſicut 1000 per 100. multiplicatus dat 100000.

Non intereſt autem; an retrograda ſit, & creſcentibus Geometricis, Arithmetici decreſcant, vt hic

1	2	4	8	16	32	64	128
31	28	25	22	19	16	13	10
100	94	88	82	76	70	64	58

Nam pari modo in oſtendendo tertio proportionali ſe gerunt; ſed creſcentes per additionem oſtendunt tertium proportionalem maiorem; decreſcentes verò minorem. Si tamen numerus radicalis ſit ad maximum appoſitus, vt in prima ſerie ſecùs ſi ſit ad minimum Geometricum, nam; & decreſcentes maiorem quoque oſtendunt.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si numerus Geometricus per numerum diuiſus producit tertium proportionalem, ſic & Arithmeticus à primo ſubductus relinquit tertium.

Vt	1	3	9	27	81	243	729
	0	4	8	12	16	20	24

QVia ergo 27. diuiſus per 3. producit 9. ita 4. ſubductus à 12. relinquit 8. & quia 9 diuidendo 243. producet 27. ſic, & 8. ſubductus à 20. relinquit 12. Logarithmum numeri 27.

Ratio eadem quę propoſitionis primæ adhibita cautela antecedentis propoſitionis, quoad Arithmeticos nempe à cifra, vel vnitate additis ciſris progreſſionem debere incipere.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Sicut trium Sinuum proportione Geometrica continuatorum quadratum medij eſt æquale quadrato ex extremis inuicem multiplicatis effecto. Ita Arithmeticorum appoſitorum duplum medij æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81
4	8	12	16

SIc multiplicatus 9. in ſe facit 81 vt 3. per 27. at Arithmeticus 8. duplicatus facit 16. quem numerum faciunt 4 & 12 iuncti. De Geometricis patet ex propoſ. 5 tract. 14. part. 1. De Arithmeticis conſtat ex propoſ. 2. part. 2. tract. 14.

THEOR. V. PROPOS. V.

Quatuor Geometricè proportionalium, ſicut factum ex ductu mediorum æquatur facto ex ductu extremorum: Ita ſuorum Logarithmorum aggregatum mediorum, æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81	243	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici.

ITa duo extremi Geometrici 3. & 81. faciunt 243. quem faciunt 9. & 27. medij inuicem multiplicati; ſicut Arithmetici iuncti 5. & 20. extremi faciunt 25. quem faciunt 10. & 15. medij ſimul aggregati.

Patet de Geometricis ex propoſ. 6. part. 1. tractat. 14. de Arith. quoque ex propoſ. 1. part. 2. tractat. 14.

THEOR. VI. PROP. VI.

Sicut ex numero in ſe ſemel ducto producitur quadratus, & iterum in productum ducto efficitur cubus, & rurſus in cubum ducto efficitur ſuperſolidus; ſic Arithmeticus duplatus quadrati efficit Logarithmum, triplatus cubi quituplatus ſuperſolidi.

Geomet.	1	2	4	8	16	32	64	128	256
Arithmet.	0	3	6	9	12	15	18	21	24

NAm ex propoſ. 24. lib. 8. Elem. qui ab vnitate continuè proportionales Geometrici tertium quemque habent quadratum. Quartum verò cubum, & duobus intermiſſis quemlibet ſequentem. Septimum autem cubi quadratum, & quinque intermiſſis quemlibet ſequentem, & cæt.

Sed ſi ab vnitate continuè proportionalibus Geometricis ſui cuique applicentur proportionales Arithmetici incipientes à ciſra, ſecundus erit duplex primi, & quartus triplex ſecundi. Cùm enim primus radicalis numerus ſit 0. & idem numerus ſemper addatur, ſequitur neceſſariò, quòd ſecundus ſit duplus primi, & quartus duplex ſecundi. Sed ex propoſ. 9. Element. lib. 8. quot inter vnum numerum V. g. 8. ab vnitate continuè proportionalium Geometricorum, & vnitatem cadunt proportionales Geometrici, tot, & inter illum, & alium in eadem ratione exiſtentem vt 64. neceſſe eſt cadere. Ergo quot inter eorum proportionales Arithmeticos, & ciſram cadunt partes eædem, tot etiam inter ipſum V. g. 8 & alium vtpote 64 neceſſe eſt replicare. Tot enim replicantur partes ternæ, quot proportionales Geometrici ſunt. Quia itaque inter 1. & 8. duo proportionales Geometrici reperiuntur. & tres computato ipſo 8. etiam trina vice replicabitur 3. & fient 9. At quia idem numerus proportionalium mediat inter 8. & 64. tricies inſuper idem 3. replicabitur; Vnde fient cum primo 18. Quia ergo inter quodlibet quadratum, & radicem medius proportionalis cadit numerus, hinc eſt, quòd duplicatus proportionalis arithmeticus ſit numerus quadrati at quia inter radicem, & cubum duo proportionales cadunt, hinc eſt quod debeat triplicari, & quia inter radicem, & quadrati quadratum, vel ſuperſolidū quinque proportionales mediant hinc eſt, quòd quinquies replicatus exprimat ſuperſolidum, & cæt.



THEOR. VII. PROPOS. VII.

Numeri dati Geometrici, si radix Quadrata, Cuba, Superſolida extrahatur. Eius Logarithmus bipartitus, tripartitus, vel in quinque ſecatus erit Logarithmus radicis.

PRobatur, quia Logarithmus radicis efficitur Logarithmus quadrati, ſi dupletur; cubi, ſi tripletur, ſuperſolidi, ſi quinquies ſumatur; Ergo Logharithmus quadrati bipartitus efficietur quadratæ radicis numerus, cubicæ tripartitus, ſuperſolidæ per quinque ſecatus.

COROLLARIVM.

HInc ergo euidenter patet. Quod multiplicationi Geometricę correſpondet additio in Arithmeticis ex 1. h. propoſ. & diuiſioni ſubductio ex 2 huius propoſ. Extractioni radicis quadratæ bipartitio, ſicut quadrationi duplatio ex propoſ. 7. & 4.

Regulæ autem additio, & deinde ſubductio ex propoſ. 5. Extractioni Radicis cubæ tripartitio. Superſolidæ per quinque partitio, ſicut quintuplicatio reſpondet ſuperſolidæ multiplicationi, & triplicatio Cubicationi.

Si ergo Arithmetici Geometricis applicentur, patet, quòd inuentis Arithmeticis, inuenientur quoque Geometrici. Cumque Arithmetici per additionem, bipartionem, triplationem, ſubductionem inueniantur, ſequitur, quòd etiam Geometrici correſpondentes eodem quoque modo inuenientur. Sint itaque Geometrici cum applicatis Arithmeticis.

Arith.	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Geom.	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
Arith.	0	5	10	15	20	25	30	35	40

Sitque datis 3 & 27. reperiendus tertius proportionalis. Tabellam inſpicio, & Arithmeticos 5. Geometrici 3. & 15. Geometrici 27. colligo; duplicoque 15. & fiunt 30. ſubduco deinde 5. & fiunt 25. Concludo itaque quod 25. eſt tertius proportionalis Arithmeticus. Video itaque quinam Geometricus illi reſpondeat, & ille eſt 243. concludo itaque, quod 243. eſt tertius proportionalis Geometricus, & quòd ita ſit 3. à 27. vt 27. ad 243.

Sic datis tribus proportionalibus, queritur quartus V. 3. & 27. 81. Aſſumo Arith. correſpond. 5. 15. 20. Addo 15. ad 20. fiunt 35 ſubduco 5. relinquitur 30. Logarith. numeri 729. qui ſe habet ad 81. vt 27. ad 3. Sic, ſi quæras quadratum Geometrici 9. duplabis Arithmeticum ipſius 10 & erit 20. Logarithmus quadrati 81. vel, ſi cuplas numeri 6165. ſcire radicem; 40. Logarithmum bipartire, & habebis 20. Logarithmum radicis 81. Vel ſi quæras radicem cubam numeri 729. tripartire 30 & habebis 10. Indicans Geometricum 9 radicem cubam ipſius: Et idem aſſerendum licet numeri ſint contrario modo, & dum Geometrici augentur Arithmetici decreſcant, vt monui.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque id, quod ferè fundamentum eſt operis. Similiter proportionatorum Geometricorum æquidifferentes eſſe Arithmeticos, ſeu illi parui ſint, ſeu magni. Nempe eam differentiam Arithmeticam mediare inter duos Arithmeticos duorum Geometricorum, ac inter alios duos Arithmeticos, qui ſint aliorū Geometricorū, ſeu maiorum, ſeu minorum, ſed eandem proportionem habentium: Ita vides, quòd eadem differentia mediat inter 5. & 20 Logarithmos proportionalium Geometricorum 3. & 81. quæ mediat inter Logarithmos 25. & 40. Geometricorum 243. & 6561. nimirum 10. Ratio euidens ex dictis, Nam quot ſint proportionales intermedij Geometrici tot additiones ſunt in Arithmeticis; cum itaque ſimiliter proportionati Geometrici habeant, vel eandem proportionem; vel duplicatam, vel triplicatam, vel quadruplicatam, vel certe vno intermedio, vel duobus, vel tribus ſic, & Arithmetici habebunt, vel eandem differentiam, vel duplam, vel triplam, vel quintuplam, & cæt. Vnde ſimiliter proportionalium Geometricorum erunt æquales ſemper differentiæ in Arithmeticis.

EXPENSIO II.

De ſerie facili Geometricorum reperienda, cui Arithmetica ſeries deſeruiat.

PRogreſſio Geometrica admodum difficilis maximè ſi de prolixa ſerie agatur: vnde ad difficultatem leniendam ijs in numeris ea progreſſio eligenda eſt, quæ fiat per ſubtractionem, vel additionem. Iam enim ſupra 1. par. Tr. 14. pr. 19. innuimus, multas eſſe progreſſiones Geometricas, quæ additione, & ſubtractione obtinentur.

Sed neque hoc quidem ad facilitatem nanciſſendam ſufficit; ſed & fractiones vitandæ, & ſummū numerorū augmentum. Sic modus, quem Tract. 19 part. 1. propoſ. 17. innuimus fractiones non vitat, & proportio dupla fit per additionem. Sed in infinitum prope numerum augetur.

Præſſumpt. 1. Adhoc, vt progreſſioni Geometricę poſſit applicari ꝓgreſſio Arithmetica debet eſſe continua, ſaltem ſecundum aliquam maiorem partem; alioquin ſi Geometrica non per eandem proportionem progrederetur, Arithmetica continua, quæ ſēper per æqualia ſpatia progreditur, ei applicari nequaquam poſſet, & fruſtra applicaretur, quia ſilicet ſimiliter proportionatorum non eſſet æquidifferens, vt debet eſſe ex Coroll. 2. expenſ. præced. Logarithmus.

Præſſ. 2. Duplex progreſſio eſt autem alia continua, & abſoluta; quæ ſilicet nullis tabulis alligatur, alia eſt interrupta, & relatiua, quæ ſinubus apponitur, vt innoteſcant eorū proportiones: Hæc verò non potuit fieri ſine illā, cūm enim proportionales ſinus non ſint in eadem proportione continua, ideo ex præaſſumpto 1. huius expenſ. non potuit ei progreſſio Arithmetica continua applicari: Quare priùs debuit conſtrui tabula quædam continua, ex quâ deinde proportionales numeri Arithmetici applicandi proportionalibus ſinuum decerperentur ſecundùm, quòd illi continui Geometri iſtis diſcontinuis occurrebant, &

ijſdem

iisdem numeris, vel saltem valde proximis respondebant. Sint V. g. continui

32	64	128	256	512	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici

Sitque alia proportio non continua 32. & 64. & 255. 511. quis hic 32. est eiusdem quantitatis, ac 32 in continua Geometricorum serie repetitus dico eius logarith. esse 5. sic quia 64. in non continua est eiusdem quantitatis ac 64. in continua, dico eius logarith. esse 10. Sic Geometrici 255. quia accedit ad 256. esse 20. & 511. esse 25. quia accedit ad 512. & licet vnitas in istis paruis numeris generet differentiam sensibilem, in magnis tamen numeris vnitas est spernenda, vt insensibilis, quid enim est 1. respectu 1000000. centum millium?

Præsumptum 3. Et hinc est, quòd magnus numerus elligendus sit, tum quia differentia, si qua est, reddatur insensibilis in multitudine partium, tum quia, vt propos. 7. Tr. 14. par. 1. in magno numero plorimæ latent proportiones, & ideo in longam seriem in magno numero proportiones distendi possunt.

Præsumptum 4. Tabula quoque, vel series numerorum absoluta secundum duplicem finem, ob quem fit duplex est; alia enim fit ob computos vulgares, vt proportionalibus quibuscunque respondeat, & de hac infra breuiter loquemur; alia, vt ex ea deinde excerpantur numeri Arithmetici, qui finibus deseruire debent, & de hac modo loquimur.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

In prolixam seriem Geometricos faciliter, & sine fractionibus, quæ negotium faciunt, in ordine ad tabulas sinuum Logarithmis exornandas extendere.

PRæceptum primum. Ex 10000000. sinu toto triginta sex proportionales subtractione partis centesimæ educantur, quæ est 100000., idest respectu decem millionum centum millia, ita enim est 1. ad 100. vt est 100000. ad 10000000. Hoc autem fit subtrahendo primo partem centesimam à decem millionibus, & à residuo eiusdem residui partem centesimam, & a residuo hoc posteriori centesimam quoque eiusdem residui partem. & sic successiuè, vt in exemplo.

Quia enim centesima pars residui 9000000. est 99000. ideo subducitur rursus eadem figura 99. cū omnibus zifris posthabitis duabus à primo residuo, & remanet 9801000. cuius etiam centesima pars est idem numerus duabus zifris reiectis, ideo rursus subducitur 98010. à 9801000. Vides itaque facilitatem operis iam, atque etiam securitatem; facilis enim computus, non adeo faciliter errorem admittit.

Habemus itaque 36. proportionales, qui se inuicem excedunt proportione, quæ est inter 1. & 100. inter quos omnes aut centum millia, aut fere millia centum intercedunt.

Cur autem non repetiantur plures est in causa quod reliqui minores non sunt necessarij eò, quòd series proportionalium Geometricarum satis fit, quæ peruenias vsque ad Sinum 45. Graduum, qui est 7071068. Nam istis habitis proportionalibus, à quibus decerpi possint proportionales Arithmetici; qui applicentur sinubus, qui successiuè subtendunt Gradue à 90. vsque ad 45. & reliqui deinde omnes ex istis, vt patebit innotescens.

Prob. autem propos. licet res per se clara sit. Nam cum à quolibet numero semper decima pars illius auferatur, fit, vt quilibet remanens se habeat ad integrum, vt 9. ad 10. quare omnes numeri à quibus decima pars ablata sit, erunt ad numerum se immediatè maiorem tanquam 9. ad 10. propterea que semper in eadem proportione reperientur.

Præceptum 2. Sed quia incipiunt in prosequendo aliquæ fractiones suboriri; cum nequaquam spernendæ sint, ideo additis zifris totus numerus in fractiones redigendus; Sic si ex 1000. partem 100. auferre volo illa erit 10. & residuum erit 990. Cuius pars centesima erit 9. & $\frac{9}{100}$.

Quare si reducas totum integrum 90. in fractiones multiplicando per denominatorem 100. habebis 99000. & 9 $\frac{9}{100}$ huius 99000 numeri comprehendet partes 990. Et hinc est, quod additis duabus zifris ad dextram sit numerus augendus, vt capiat fractiones, & consequenter hæc ab altera, vt integri ipsi, successiuè possit extrahi, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. primi Ordinis.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	00		
100000	00		
9900000	00	100543	7632988
99000			
9801000	00	201087	5265976
98010			
9702990	00	301631	2898958
97029			
9605960	10	402175	0531946
96059	60		
9509900	50	502718	8164934
95099	00		
9414801	50	603262	5797922
94148	01		
9320653	49	703806	3430900
93206	53		
9227446	96	804350	1063888
92274	46		
9135172	50	904893	8696876
91351	72		
9043820	78	1005437	6329864
90438	20		
8953382	58	1105981	3962852
89533	82		
8863848	76	1206525	1595840
88638	48		

8775210 28	1307068 9228828
87752 10	
8687458 18	1407611 6861816
86874 58	
8600583 60	1508155 4694804
86005 83	
8514577 77	1608699 2327791
85145 77	
8429432 00	1709242 9960780
84294 32	
8345137 68	1809786 7593768
83451 37	
8261686 31	1910330 5226756
82616 86	
8179069 45	2010874 2859744
81790 69	
8097278 76	2111418 0492732
80972 78	
8016305 98	2211961 8125720
80163 05	
7936142 93	2312505 5758708
79361 42	
7856781 51	2413049 3391696
78567 81	
7778213 70	2513593 1024684
77782 13	
7700431 57	2614136 8657672
77004 31	
7623427 26	2714680 6290680
76234 27	
7547191 99	2815226 3923668
75471 92	
7471721 07	2915770 1556656
74717 21	
7397003 86	3016313 9189644
73970 03	
7323033 83	3116857 6822632
73230 33	
7249803 50	3217401 4455620
72498 03	
7177305 47	3317945 1088608
71773 05	
7105532 42	3418488 8721596
71055 32	
7034477 10	3519032 6354584

Præceptum 3 Quia verò isti proportionales multo minores numero sũt sinubus, qui subtēdunt omnes arcus à Gradu Nonagesimo vsque ad 45. Ideo inter quoscumque istorum proportionalium alij reperiendi sunt, qui inuicem dicant proportionem, vt vnum ad mille, ita vt sinus totus excedat primum proportionale solùm 10. millibus, & quia fractiones adhuc minutiores suboriuntur; ideo per adiectionem zifrarum effugienda earum difficultas: tot autem addendæ sunt ad dextram, quot reliquuntur ad sinistram ratione iam præcepto 2. tacta, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. Ordinis 2. interposita inter 10000000. & 990000. præc. tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 000	
10000 000	
9990000 000	10009 0438435
9990 000	
9980010 000	20018 0876870
9980 010	
9970029 990	30027 1315305
9970 029	
9960059 961	40036 1753740
9960 059	
9950099 902	50045 2192175
9950 099	
9940149 803	60054 2630610
9940 149	
9930209 654	70063 3069045
9930 209	
9920279 445	80072 3507480
9920 279	
9910359 166	90081 3915915
9910 359	
9900448 807	100090 4354360

Tabula 2. Ordinis secundi interposita inter 7177305. & 7105532. præcedentis Tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
7177305 470	3317945 1088608
7177 305	
7170128 165	3327954 1527043
7170 128	
7162958 037	3337963 1965478
7162 958	
7155795 079	3347972 2403913
7155 795	
7148639 284	3357981 2842348
7148 639	

Geometrici.	Arithmetici.
7142490 645	3367990 3280783
7141 490	
7134349 155	3377999 3719218
7134 349	
7127214 806	3398008 4157653
7127 214	
7120087 592	3398017 4596088
7120 087	
7112967 505	3408026 5034523
7112 967	
7105854 538	3418035 5472958
7105 854	

Quia ergo 7177 cum fractis $\frac{5 \cdot 0 \cdot 3}{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}$ millesima pars proportionalis 7177503. ideo hæc ipsa subducitur, & ad hoc, vt etiam fracti capiant locum, & subtrahi consequenter possint tres ciffræ addendæ, sic enim septem milliones centum septuaginta septem millia, & trecentum quinque vnitates multiplicantur per mille, & septem fiunt milliones millionum, respectu cuius numerus $\frac{5 \cdot 0 \cdot 3}{1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}$ qui erat fractio iam euadit integer.

Si verò quis vellet hunc secundum tabularum ordinem minutiorem reddere posset auferre à singulis quingentesimam partem semper primo auferendo 5000. quæ est quingentesima pars numeri 10000000. & diuidendo residuum per 200. continuè, & quotum, qui prouenit, auferendo ab antecedenti.

10000000 00000	
5000 00000	
9995000 00000	
4997 50000	
9990002 50000	
4995 00125	
9985007 49875	

Præceptum 4. Confectis omnibus istis tabulis, quia neque proportionales sufficiunt: ideo inter quoscumque proportionales eodem modo alij interserendi, & componendæ minutiores tabulæ, quę secundùm decem millesimam partem altera alteri accrescat, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima tertij ordinis inter 10000000 & 9999000. interposita.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 0000	
1000 0000	
9999000 0000	1000 4550242
999 9000	
9998000 1000	3001 9100484
999 8000	
9997000 3000	3001 3650726
999 7000	

Geometrici.	Arithmetici.
9996000 6000	4001 8200958
999 6000	
9995001 0000	5002 2751210
999 5001	
9994001 4999	6002 7201452
999 4001	
9993002 0998	7003 1751694
999 3002	
9992002 7996	8003 6301936
999 2002	
9991003 5994	9004 0852178
999 1003	
9990004 4991	10004 5402420

Tabula vltima tertij ordinis interposita inter 7112967. & inter 7105854.

Geometrici.	Arithmetici.
7112967 5050	3408026 5034523
711 2967	
7112256 2083	3409026 9584765
711 2256	
7111544 9827	3410027 4135007
711 1544	
7110833 8283	3411027 8685249
711 0833	
8110122 7450	3412028 3235491
711 0122	
7109411 7328	3413028 7785733
710 9411	
7108700 7917	3414029 2335975
710 8700	
7107989 9217	3415029 6886217
710 7989	
7107279 1228	3416030 1436559
710 7279	
7106568 3949	3417030 5986701
710 6568	
7105857 7381	3418031 0536943

Præceptum 5. Cum autem iam proportionales inuicem accrescant, vt sinuum, quorum differentię sunt maiores, vel eundem numerum exequent, vel proximè accedant: ideo (nisi maior sedulitas, quam par sit adhibere quis velit) iam non inter omnes proportionales Tabularum ordinis quarti nouos proportionales Geometricos proijciemus; sed tantum inter aliquos, qui nimirum sinui toto viciniores in numeris sunt. Cum enim tabulam non absolutam, sed quæ finibus deseruiat condimus; inde est, quòd illi solùm proportionales sint inueniendi, qui proximè accedunt ad propor-

tiones finuum, & quia finus; quò magis appropinquant finui toto, eò minoribus discrepãt differentijs; inde etiam proportionales inueniendi, quorum proportiones fint minores inter illos proportionales Geometricos, qui magis accedant ad finum totom: Si autem tabulæ absolutæ conderentur, meliùs esset etiam inter omnes interferere, quo enim minores differentiæ, eo exactiores tabulæ absolutæ, Itaque inter hos postremos quarti ordinis proportionales, alios iterum interserimus, qui iuxta centum millesimam partem, & secundùm vnam ex istis partibus singuli proportionales maiores existãt, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quarti interposita inter 10000000. & 9999000. præced. Tabula.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	00000		
100			
9999900	00000	100	0005024
99	99900		
9999800	00100	200	0010048
99	99800		
9999700	00300	300	0015072
99	99700		
9999600	00600	400	0020096
99	99600		
9999500	01000	500	0025120
99	99500		
9999400	01500	600	0030144
99	99500		
9999300	02100	700	0035168
99	99300		
9999200	02800	800	0040192
99	99200		
9999100	03600	900	0045e16
99	99100		
9999000	04500	1000	0050240

Tabula vltima Ordinis quarti interposita inter 710656. & 7105857. præcedentis Tabulæ ordinis tertij.

Geometrici.		Arithmetici.	
7106568	39490	3417030	5986701
71	06568		
7106498	32922	3417130	6036725
71	06497		
7106426	254e5	3417230	6041749
71	064e6		
7106355	18999	3417330	6046773
71	06355		
7106284	12644	3417430	6051797
71	06284		
7106213	06360	3417530	6056821
71	06213		
7106142	00147	3417630	6061469
71	06142		
7106070	94005	3417730	6066869
71	06070		
7105999	88035	3417830	6071893
71	05999		
7105928	72036	3417930	6076917
71	05928		
7105857	66108	348030	6081944

Præceptum 6. Inter autem fingulos proportionales huius, proportionales alij interponendi, qui dicant proportionem, vt vnum ad millionem, vt in hoc exemplo,

Tabula prima ordinis quinti interposita inter 1000000. & 9999900.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	000000		
10	000000		
9999990	000000	10	0000010
9	999990		
9999980	000010	20	00000e0
9	999980		
9999970	000030	30	0000030
9	999970		
9999960	000060	40	0000040
9	999960		
9999950	000100	50	0000050
9	999950		
9999940	000150	60	0000060
9	999940		
9999930	000210	70	0000070
9	999930		
9999920	000280	80	0000080
9	999920		
9999910	000360	90	0000090
9	999910		
9999900	000450	10	0000100

Tandem pro vltimo præcepto inter huius posterioris ordinis proportionales adhuc interserẽdi sunt alij numeri, qui se habeant, vt vnum ad decem milliones, & quia minutiæ sunt minimæ potes sequi, ita vt fiot 100. proportionales interpo-

siti inter primum, & secundum tabulæ quarti ordinis; quibus omnibus creatis deinde Arithmetici apponendi sunt, vt sequenti expensione docebimus.

Et licet inter primum, & secundum quartæ tabulæ 20. proportionales interseri sit necesse; quia in hoc, cum appropinquant sinui toti, sinus vix crescunt, loser tamen alias sufficiet vsque ad quartum ordinem inclusiuè, vel vsque, si cupias exactissimè operari, ad proportionem, quam habent 1. ad millionem, vt præcepto sexto.

Tabula extensa sexti ordinis.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000			00000000
9999999	0000000		10000010
9999998	0000001	2	0000002
9999997	0000003	3	0000003
9999996	0000005	4	0000004
9999995	0000009	5	0000005
9999994	0000014	6	0000006
9999993	0000020	7	0000007
9999992	0000027	8	0000008
9999991	0000035	9	0000009
9999960	0000044	10	0000010
9999989	0000054	11	0000011
9999988	0000065	12	0000012
9999987	0000077	13	0000013
9999986	0000090	14	0000014
9999985	0000104	15	0000015
9999984	0000119	16	0000016
9999983	0000135	17	0000017
9999982	0000152	18	0000018
9999981	0000170	19	0000019
9999980	0000189	20	0000020
9999979	0000209	21	0000021
9999978	0000230	22	0000022
9999977	0000252	23	0000023
9999976	0000275	24	0000024
9999975	0000299	25	0000025
9999974	0000314	26	0000026
9999973	0000340	27	0000027
9999972	0000367	28	0000028
9999971	0000395	29	0000029
9999970	0000424	30	0000030
9999969	0000454	31	0000031
9999968	0000485	32	0000032
9999967	0000517	33	0000033
9999966	0000550	34	0000034
9999955	0000584	35	0000035
9999964	0000619	36	0000036
9999963	0000645	37	0000037
9999962	0000682	38	0000038
9999961	0000720	39	0000039
9999960	0000759	40	0000040
9999959	0000799	41	0000041
9999958	0000840	42	0000042
9959957	0000882	43	0000043
9999956	0000925	44	0000044
9999955	0000969	45	0000045
9999954	0001014	46	0000046
9999953	0001060	47	0000047
9999952	0001107	48	0000048
9999951	0001153	49	0000049
9999950	0001204	50	0000050

Geometri.		Arithmetici.	
9999949	0001254	51	0000051
9999948	0001305	52	0000052
9999947	0001357	53	0000053
9999946	0001410	54	0000054
9999945	0001464	55	0000055
9999944	0001519	56	0000056
9999943	0001575	57	0000057
9999942	0001632	58	0000058
9999941	0001690	59	0000059
9999940	0001749	60	0000060
9999939	0001809	61	0000061
9999938	0001870	62	0000062
9999937	0001932	63	0000063
9999936	0001995	64	0000064
9999935	0002059	65	0000065
9999934	0002124	66	0000066
9999933	0002190	67	0000067
9999932	0002257	68	0000068
9999931	0002325	69	0000069
9999930	0002394	70	0000070
9999929	0002464	71	0000071
9999928	0002535	72	0000072
9999927	0002607	73	0000073
9999926	0002680	74	0000074
9999925	0002754	75	0000075
9999924	0002829	76	0000076
9999923	0002905	77	0000077
9999922	0002982	78	0000078
9999921	0003060	79	0000079
9999920	0003139	80	0000080
9999919	0003219	81	0000081
9999918	0003300	82	0000082
9999917	0003382	83	0000083
9999916	0003465	84	0000084
9999915	0003549	85	0000085
9999914	0003634	86	0000086
9999913	0003720	87	0000087
9999912	0003807	88	0000088
9999911	0003895	89	0000089
9999910	0003984	90	0000090
9999909	0004074	91	0000091
9999908	0004165	92	0000092
9999907	0004257	93	0000093
9999906	0004350	94	0000094
9999905	0004444	95	0000095
9999904	0004539	96	0000096
9999903	0004634	97	0000097
9999902	0004732	98	0000098
9999901	0004830	99	0000099
9999900	0004929	100	0000100

EXPENSIO III.

De Arithmeticis proportionalibus repertæ Geometricorum feriei copulandis.

PRæſſumptum 1. Numeris Geometricis poſt confectis omnes ſeries Arithmetici copulandi ſunt, in quo conſiderandum eſt nullius laboris eſſe; ſi numerorum ſeries altera alteri continua proportione copularetur; ſed quia ita non eſt: at quælibet, & proportionem mutat, & ob fractos in eundem numerum non incidit, hinc eſt, quod induſtria iudeudum ſit, & ingenio.

Præſſumptum 2. Obſeruandum quoque, quòd alicuius quantitatis incommenſurabilis tunc explicatur ſufficienter menſura, cùm inter terminos parùm diſtantes maiorem, & minorem clauditur, ita quòd nec maiore maior ſit, nec minore minor. Termini verò tunc parum diſtant, cùm illi ſunt magni numeri, & parua differentia diſſentiunt, vt 10000010. & 10000040. Si ergo demonſtretur aliquam quantitatis menſuram inter illos limites contineri, ſufficienter expreſſa dicitur, vt ſi dicatur aliquam quantitatem eſſe inter 10000005. & 10000030. Ratio eſt; quia differentia 5. vnitatum reſpectum magni numeri 10. millionum nullius pretij eſt, nullius ſenſus, & ideo quidquid inter illos numeros adeo parum differentes clauditur, vt æquale putatur, cùm nec ea quidem differentia 5. vnitatum illos à ſenſibili æqualitate eliminet, licet quoad intellectum verè ſint inæquales.

THEOR. I. PROPOS. IX.

In progreſſione Arithmeticâ deſeruiente Geometricæ à quocumque numero, prout libet, poſſumus incipere.

PRobatur: Quia nulla naturali connexione connectuntor Arithmetici, & Geometrici. Dum enim quidpiam V.g. ſe mouens deorſum facit 10. paſſus, & ſecundo æquali tempore faciat centum paſſus augendo Geometricè velocitatem multi alij mouentes ſe progreſſiuè poſſunt facere qui quatuor, qui quinque, qui ſeptem paſſus, vt ſecūdo eodem tempore, eoſdem quatuor, vel quinque, vel ſeptem efficiant. Sic alterans, qui producit 3. gradus caloris in primo inſtanti, & in ſecundo 9. comitem, poteſt habere alium debilem calefacientem, qui non niſi vnum gradum caloris ijs ſingulis inſtantibus efficiat.

Præſſumptum Elligatur itaque numerus aliquis V. g. vnitas, qui poſt ziſram addendam ſinui toti, addatur, ſecundo proportionali. Incipimus autem à ziſra iuxta documenta propoſitionis 2. huius partis. Vnitati quoque multas ziſras addimus, vt fiat 1 ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷, vt in illa intercapedine, quæ eſt inter 1. & ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ nempe vnitatem, & decem millionum particolam, in quam vnitas præſuponitur diuiſa, multę fractiones capiant, quæ fortè incidunt, vt experientiâ docebit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Tabulæ totius ſexti ordinis numeros Arithmeticos inſcribere.

HOc faciliter fit. Nam electo primo numero, qui addatur primo proportionali poſt ſinū totum, cui ziſra additur; idem ſemper deinde addendum; ſic ſi primo poſt ſinum totum 9999999 10000000. addatur 1 ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷, ſecundo 9999998.0000001. addendū erit 2 ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷, & tertio Geometrico 9999997 0000003. Arithmeticus ſubiungendos 3 ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷. Verum expeditiùs loco denominatoris 10000000. adduntur numero 3. tot ziſræ, quot intermediant inter eam minutiam 3. & vnitatem ſinus totius. Vnde ſemper denominator decem millionum ſubintelligandus eſt.

Probatur autem ex 2. propoſ. expenſ. 2. Nam in progreſſione Arithmetica, quæ incipit à ziſra aggregatum duorum generat tertium; ſicut duo Geometrici inuicem multiplicati tertium generāt: itaque ſi primo idem primus addatur, generabitur ſecundus, & ſi ſecundus addatur primo generabitur tertius, & ſic conſequenter.

Probator ſecundo omnes Geometrici proportioneles ſeatæ tabulæ expanſæ eandem proportionem habent, ergo ex Coroll. 2. expenſ. 1. huius. Omnes Arithmetici eandem differentiam habebunt. Vnde additus primus Arithmeticus, qui eſt differentia, quâ ipſe diſcrepat à 0. habebitur ſecundus, & ſic ſuceeſſiuè, donec perſeuerant Geometrici in illa continuâ proportione, quam protraximus vſque ad 100. proportinoales, vt vides in ſuperiori exemplo Tabulæ 6. ordinis.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Eodem augmento, vel diminutione augetur, vel decreſcit Arithmeticus proportionalis duorum datorum proportionalium Geometricorum quorumcumque, quo Arithmeticus ſinus totius, & alterius Geometrici proportionalis, ad quem ſimili proportione referatur, ac datus Geometricus ad datum alium Geometricum.

D F C B A

SInt dati Geometrici expreſſi linea AB, & AC, & ſinus totus linea AD, qui ſit ad AF, vt AC proportionalis maior ad AB minorem. Dico, quod proportionalis Arithmetici differentia, ſeu decrementū, qua decreſcit Arithmeticus proportionalis Geometrici AC, vt poſſit applicari Geometrico AB eadem eſt, ac quæ mediat inter ſinum totum AD & proportionale Geometricum AF.

Probator. Quia ſimiliter proportionatorum Geometricorum eſt eadem differentia, augmentum, ſeu decrementom ex Coroll. 2. propoſ 7. huius. Sed eadem eſt proportio ex Hypotheſi inter

Geo-

Geometricos AC, & AB, quæ est inter sinum totum AD, & proportionale Geometricum FA, ergo etiã eadem differentia Arithmeticorum, seu (quod idem est) augmentum, seu decrementum ex Co[roll.] 2. Expens. 2.

COROLLARIVM I.

Hinc deduces quomodo datis duobus proportionalibus, & sinu toto ellicias per regulam Auream quartũ proportionale in eadem proportione V. g. sit datus proportionalis minor secundi quarti ordinis 9999900. & quinti ordinis vltimus 9999900. [illegible], & sinus totus 10000000. Sitque reperiendus proportionalis numerus, ad quem se habeat sinus totus, vt datus maior 9999900. [illegible] ad 9999900. Multiplicetur hic per sinum totum, & diuidatur per 9999900. [illegible], & prodibit quartus proportionalis 99999 99 [illegible]. Verùm, quia hic computus ob magnitudinem numerorum, & fractionum euadit prolixior infrà aliam modum in hac ipsa expensione trademus: Siquidem in hoc computo oportet sinum totum multiplicare in 9999900. & deinde ob diuisionem faciliorem proijcere in fractiones illud multiplicatum, ita vt sint post quinque 9. viginti trea zifræ, & deinde diuidere totum illum numerum per 9999900. 0004929.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Cuiuslibet proportionalis Geometrici in tabulis non reperti Arithmeticus est inter Arithmeticum maioris proportionalis, & minoris.

Quia dantur aliqui proportionales Geometrici, qui in continuam seriem non sequuntur, & de ipsis iam visum est, quòd eandem habent differentiam Arithmeticorum, quæ est inter finitorum, & aliud quoddam proportionale minus, quod in eadem proportione, sit. Ideo inuento illo proportionali ex Coroll. eiusdem propositionis potest euenire, vt euenit sæpius, vt in aliquem numerum Tabulæ sexti ordinis, vel etiam aliarum, cum omnes confectæ fuerunt, & de tabulã sinuum Arithmeticis, Logarithmisque exornanda agatur; non incidat, ideo oportet ex secunda huius expens. praxi videre quinam sint termini proximi, inter quos includatur. V. g. inuentũ est pportionale 9999799 [illegible] ad quem se habet sinus totus, vt ad 9999900. proportionalis 9999900 [illegible]. Sed nullus est proportionalis in tabulis sexta iam logarithmis exornata, quæ talis quantitas sit; sed 9999999 [illegible] est minor; at sinus ipse totus immediatus est maior. Dico ergo quod Arithmeticus proportionalis inuenti includitur inter Arithmeticum sinus totius, & Arithmeticum proportionalis 9999999 [illegible], & ideo quod est inter o. & 1. 0000001 qui termini propinquissimi sunt, cum non differant, nisi solâ vnitate; quæ quidem est pars minima respectu omnium proportionalium Arithmeticorum, qui tabulam totalem intraturi sunt.

Probatur autem. Quia non potest esse æqualis Arithmetico 1000000[1], esset enim Arithmeticus proportionalis Geometrici minoris 9999999 [illegible] non potest esse o. esset enim terminus radicalis ipsius sinus totius: Ergo erit aliquis medius inter o. & 1. 0000001. sicut, & ipse radicalis Geometricus est aliquid medium inter sinum totum, & 999999 [illegible]

COROLLARIVM.

Hinc igitur emergit, quod si accipias aliquid medium inter o. & 1 [illegible] hoc quodcumque illud sit erit proportionalis Arithmeticus Geometrici inuenti; quia cum sint termini propinquissimi ex præassumpt. 2. non differunt sensibiliter à vero; ideoque pro termino Arithmetico proportionalis Geometrici superiùs inuenti 9999999 [illegible]. potes accipere ipsam differentiam, quà differt sinus totus à proportionali inuento, quæ est [illegible]. Igitur Arithmeticus inuenti proportionalis erit o. [illegible], vel aliquid tale, quæ differentia addita Arithmetico 100. 0000100. fiet 100. [illegible] vel 100 [illegible].

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Differentia, quà augescit quodlibet proportionale Arithmeticum à sinu toto est ipse Arithmeticus, si series incipiat à zifra.

Patet ex dictis. Nam cum aufertur terminus radicalis à quocumque termino Arithmetico remanet differentia, quà differt ipse à termino radicali; sed hic terminus radicalis, nempe à quo incipit progressio ponitur o. ex Hypothesi; ergo ablato eo remanet ipse numerus, vt erat: Quare ipse erit terminus, & differentia, quâ differt à termino radicali o. qui est proportionalis Arithmeticus sinus totius.

COROLLARIVM I.

Hinc autem resultat, quod cum idem sit Arithmeticus cuiuscumque Geometrici inter sinum totum, & illum ipsum Geometricum, cui ita est sinus totus, vt alius Geometricus ad alium: Si habeamus illam differentiam Arithmeticam ex præced. Coroll. habebimus quoque differentiam Arithmeticorum quibuscumque Geometricis in simili proportione existentibus applicatorum. Nam ex Coroll. 2. expen. 1. huius, vbi est eadem proportio geometricorum, ibi etiam est eadem differentia Arithmeticorum. Quare cum ex Coroll. prop. 11. huius ita sit 9999900. ad 9999900. 0004500, vt 9999999. 9995499. ad 10000000. eademque quoque erit differentia Arithmeticorum.

At quia eadem est hæc differentia cum Arithmetico ipso ex hac propos. & iam nouimus ex Coroll. propos 11. Arithmeticum ipsum esse .0004924.; hinc est, quod hic ipsa quoque sit differentia, quæ deseruiet etiam pro differentia inter 9999900. 9999900. 0004500. Geometricos eiusdem proportionis cumque huius habeamus Aritmeticum 100. 0000100. si hanc differentiam ei addamus fiet 100. 0005-024. Arithmeticus sinus 9999900. qui cum minor sit suo comproportionali, eius Arithmeti-

cus

cus debet augeri, cum elegerimus feriem Arithmeticam, quæ augetur dum decrefcit Geometrica.

COROLLARIVM II.

HInc obtinebis modum, quo alij omnes proportionales Arithmetici quarti ordini addantur; fiquidem, cùm fecundus Geometricus fit in proportione ad finum totum, vt tertius ad fecundum, & ita confequenter, & iam habeamus logarithmum fecundi ex præc. Coroll. refpectu finus totius nempe 100. 0005024. habebimus quoque logarithmum tertij per additionem eiufdem quantitatis, vt fiat 200. 0010048. & fic fucceffiuè addendo femper eandem quantitatem. Ratio euidens eft ex dictis, quia ita 9999900. fecundus eft finui toti, vt tertius 9999800. 00100. eft ipfi fecundo 9999900. Appofitis verò omnibus logarithmis, vltimus illius tabulæ primę 4. ordinis, qui eft 99990000. 045000. habebit pro logarithmo 1000. 0050240. Dato verò hoc proportionali, & proportionali primo tertij ordinis 9999000 ———, & finu toto quęremus proportionale quartum ex Coroll. propof. 11. h., quod erit 909999. 9559955., quod fe habeat ad finum totum, vt proportionale Geometricum 9999000 fe habet ad 9999000. 04500. Quo reperto ex Coroll. 1. propof. 12. Ipfa differentia, quâ differt à finu toto, erit quoque differentia Arithmetica addenda logarithmo noto 1000. 0050240. Geometrici 9999000. 0450., vt fiat Arithmeticus Geometrici 9999000. hæc autem eft 4400042. quare Arithmeticus erit ferè 1000. 0005024. & quia proportionales quarti ordinis, qui interponuntur inter 9999000. & inter 9998000. 0001400 quilibet fe habet ad fuum fequentem, vt 9999900. ad 10000000. hinc per adiectionem eiufdem quãtitatis 100. 0005024. poffunt omnes formari habito proportionali Arithmetico primi Geometrici 9999000. & fic de alijs interpofitis inter quofcumque Geometricos ordum primæ tabulæ quarti ordinis; fed & omnium tabularum eiufdem ordinis. Ipfos autem proportionales Arithmeticos apponendos Geometricis quinti ordinis habebis, fi fibi addas repertum Arithmeticum 100. 4550242. Ratio eft toties tacta, quia Geometricus quilibet fe habet ad fuum antecedentem V. g. 9998000. 1000. ad 9999000. vt ipfe 9999000. fe habet ad finum totum. Idem quoque ages in exquirendo primo Arithmetico fecũdi ordinis dato vltimo primæ tabulæ ordinis tertij Geometrico 9990004. 4991. primo fecundi 9990000. & finu toto acquirendo quartum proportionale, & ex illo differentiam Arithmeticam addendam Arithmetico iam dato vltimo tabulæ primæ tertij ordinis 10004. 5402420., quo habito cęteri omnes innotefcunt. Vnde totus labor confiftit in primis folum Aritmeticis cuiuflibet tabulæ primæ inueniendis cęteri enim omnes illis datis habentur. Aduerte autem numeros poft punctum effe fractos, & fubintelligi lineam fubductam, & fub linea tot zifræ, quot funt figuræ, & infuper vnitas ad finiftram, quod & in fequentibus obferuabimus.

THEOR. V. PROP. XIV.

Ita eft maius proportionale ad finum totum, vt differentia duorum proportionalium eft ad differentiam finus totius, & alterius ad quod eandem proportionem dicat.

D F C B A

SIt vt priùs datus Geometricus CA, qui fit ad AB, vt AD finus totus ad AF. Dico quoque, quòd ita eft CB differentia ad DF differentiam, vt eft CA finus ad totum finum AD.

Nam fi eft totum ad totum, vt ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum tale erit, vt eft totum ad totum ex propof. 19. lib. 5. Element. Cum ergo fit totus CA ad ablatum AB, vt totus finus AD ad ablatum AF, ergo, & reliquum nempe differentia BC eft ad differentiam reliquam DF, vt eft CA ad totum AD.

THEOR. VI. PROPOS. XV.

Ita eft maior Geometricus proportionalis ad differentiam inter ipfum, & minorem, vt eft finus totus ad differentiam inter ipfum, & proportionalem alterum fimili proportione Geometrica affectum.

MAneat eadem conftructio, vt priùs, Dico, *quod ita eft proportionalis maior* AC ad differentiam CB, vt eft finus totus AD ad differentiam DF.

Probatur ita eft in proportione differentia BC ad differentiam DF, vt proportionale AC eft ad totum finum DA, & *viciffim* ita erit proportionata BC differentia ad AC, vt differentia DF ad finum totum AD; vnde, *& conuertendo* AD erit ad DF, vt AC ad BC.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo datis duobus proportionalibus, & finu toto elicias quartũ proportionale, ad quod fe habeat finus totus, vt proportionalis datus maior fe habet ad minorem. Quoniam ita fe habet maior Geometricus datus ad differentiam, quæ intercedit inter ipfum, ac minorem datum, ficut finus totus ad differentiam, quæ intercedit inter fe, & alium fimili proportione fibi refpondentem, vt Geometrici dati. Ideo dato Geometrico maiori V. g. vltimo primæ tabulę tertij ordinis 9990004. 4991000. & primo tabulæ primæ fecundi ordinis 9990000. habebis differentiam 4. 4991000. Itaque proportionali 990000. & differentia 4. 4991000. & finu toto exquires quartum proportionale; nempe differentiam inter finum totum, & finum eo minorem, fed in confimili proportione, quæ erit 4. 5035015. quam demes à finu toto, & habebis proportionale 9999995. 4963985. quod ita fe habebit ad finum totum, vt 9990000. ad 9990003. 4991000. Iuxta itaque documenta propofitionis 11. huius, quære hoc proportionale in fexta tabula, & non

reperies

reperies, sed aliquid maius nimirum 9999996. 0000005. & quid minus 9999995. 0000009. Inter itaque hos terminos consistet Geometricus repertus 9999995. 4963955. & consequenter etiam Arithmeticus, nempe quid medium inter Arithmeticum 4000000 4. & 5. 0000005. Geometricis terminis applicatos sola vnitate distantibus, quare poterit esse 4. 5036015. ipsis nempe differentiis Geometries. Cum verò Arithmeticus, quo differt Geometricus à sinu toto sit etiā differentia iuxta propositionem 18. & differentia eadem Arithmetica sit similiter geometricè proportionatorum ex Coroll. vltimo expeus.t. huius sequitur, vt Arithmeticus repertus sit quoq; differentia addendo Arithmetico noto 10004. 5402420. vt fiat 10009. 0438435. Arithmeticus Geometrici minoris 9900000. Quo habito omnes habeantur eiusdem ordinis tertij addendo eandem quantitatem antecedenti termino. Sicut, & intermedij omnes, qui pertinent ad quarti ordinis tabulas addendo iisdem Arithmeticis tertij ordinis, à quibus incipit intersitio, primum quarti ordinis Arithmeticum, & sequendo eandem additionem, donec omnes interpositi sint arithmeticis ornati.

Sic, si cupias Arithmeticum primæ tabulæ primi ordinis, eodem modo poteris inuenire. Detur enim 9900448. 8070000. Geometricus secundi ordinis, & 9900000. Geometricus primus tabulæ primæ primi ordinis, quorum differentia est 448. 807000. quæ dat adhibitâ regulâ proportionum differentiam geometricam quarti proportionalis à sinu toto 453. 3298532. quæ differentia subiecta à sinu toto dat quartum proportionale 9999546. 680:468. quòd in tabulis primæ ordinis quarti reperitur cadere inter 9999500. 0100000. & inter 9999600. 0060000. & hoc est minus quidem reperto proportionale, sed maius illo: itaque Arithmeticus numerus quoque erit maior, quam 400. 0020096. & minor, quam 500. 0025180. Vnde differentia Geometrica addita minori Arithmetico dabit proximè Arithmeticum proportionalē inter vtrumque medium paucissimis vnitatibus à verò distantem. Quia ergo quartus proportionalis differt à maiori 9999600. 0060000. & differentia est 53. 325. 8532. Si hanc differentiam, vel quid minus addamus Arithmetico minori 400. 0020096. fiet Arithmeticus 453. 3278628. differentiaque inter Arithmeticos Geometrici 9900448. 8070000. & 9900000. 0000000. Cum autem sciamus Arithmeticum Geometrici 9900448. & cæt. qui est 100090. 4357360 si hac differentiam addamus fiet 100543. 7632988. vnde cum sit virimus secunda tabulæ ad sinum totum, vt quilibet primæ ad suam antecedentem erit quoque hæc differentia inter quoscumque Arithmeticos primæ tabulæ.

THEOR. VII. PROPOS. XVI.

Sicut decrescit, vel augescit quodlibet continuâ progressione Geometrica procedens quoad partes assignatas maiores; ita quoad singulas partes in infinitum minores augetur, vel decrescit.

Probatur. Eo, quia cum se continuè eadem progressione moueat necessariò assignata quælibet pars motus, quæ mensuretur æquali portione temporis augescet, vel decrescet respectu alterius eodem æquali tempore mensurata, quod si quælibet alia pars Geometricè procedens mensuretur alia minori parte temporis, adhuc tamen in eadem proportione erit cum alia parte geometrica, quę eodē tempore mēsuretur, quia cum totum Geometrica proportione semper eadem crescendo, vel decrescendo continuè se moueat singulæ eius partes assignabiles eadem proportione inuicem correspondere debebunt cum sint omnes eiusdem rationis, & essentiæ. Ita si sit linea

V M T S X

A I C H D B

AB, quæ crescat continuè, & Geometricè, & augmentum mensuretur, à linea XV. æqualiter crescente, & Arithmetica, ita quod dum crescit Geometrica, ab A in C illa Arithmetica crescat, ab V in T, & dum hæc se auget à C in D illa moueatur à T in S. Si sumatur VM in geometrica. eiq; correspondeat AI; secundę MT æquali correspondebit IH, quæ in proportione geometrica erit cum AI, vt CD cum AC.

COROLLARIVM I.

Hinc eruitur alius modus Arithmeticos reperiendi qui Geometricis applicari possint V. g. detur numerus Geometricus præcedens 9900448. 807. cuius notum habeamus Arithmeticum 10009. 4354360. cupimusque scire Arithmeticum 9900000. Iam scimus quot proportionales cadunt inter 9900448. & cæt. & proportionale eo immediatè minus 9890548. 359 nempe tot ex 18. prop. 8. Element. quot inter 10000000. & 9990000. nempe 10 tertij ordinis inter quos cadunt 10. quarti, & inter hos quoslibet 10 quinti ordinis, ita quod erunt 1000. proportionales. Quot ergo sunt proportionales Geometrici minores assignati, inter dictos Geometricos maiores, tot erunt partes æquales in differentia applicatorum ipsis Arithmeticorum, & quia illa differentia est 10009 0438435. ideo si diuidatur per 1000. habebimus 10. & 0090438. partem æqualem, qua semper augetur Arithmeticus, dū Geometrici 1000. accrescunt inter vnum 9900448. & cæt. & inter 9890548. & cæt. Geometricos maiores.

Incipiamus itaque distribuere in suos proportionales progressionem. Sic; donec occurrat Geometricus, vel de quo quærimus, vel ei propinquus.

9900448 8070
990 0448

9899058 7522

Quia ergo iste primo eductus iam est minor eo, de quo quæritur, ideo non progrediemur amplius, sed cum debeat esse inter istos maiorem, & minorem, ideo ad hoc, vt illum inueniamus, minutiorem instituemus progressionem sic.

9900448 80700 A
99 00448

9900349 80252
99 00349

9900058 79650
9 90005

I 9900042 89645
9 90054

9900250.

9900240	79903		2	9900032	99641
99	00240			9	90003
9900151	79650		3	9900023	09638
99	00151			9	90002
9900052	79509	B	4	9900013	19636
99	00052			9	90001
9899953	79457	C		9900003	c9635

Erit itaque inter hos duos B, & C postremos cum vnus sit maior alius minor 9900000. de quo quærimus, quare opporteret adhuc inter istos alios proportionales vltimos inuenire in eo ordine, in quo sunt proportionales quinti ordinis, sed isti non possunt esse plures, quam 52. iuxta numerum vnitatum, quę super 9900000. accrescunt in Geometrico B 9900052. vt patet ex quinta tabula. Quia, ergo inter A, & illum, de quo quærimus quatuor Geometrici intercluduntur, ideo quater accipiuntur partes Arithmeticæ superius inuentæ 10. 90438. & fient 40. 361752. qui si rursus multiplicetur per 10. ob proportionales interceptos inter quaslibet eorum minores einsdem speciei, vt in quinto ordine fient 400. 3617520. cui si etiam addantur 52. vnitates, fient 45e. cũ fractis suis addendi Arith. 10009. & cęt.

Vel etiam meliùs accipiantur Arithmeticæ differentiæ iuxta singulos Geometricorum ordines, quia ergo inter primum Geometricum A, & de quo quæritur 9900000. nullus intercipitur Geometricus tertij ordinis, ideo nullus accipitur illius ordinis Arithmeticus, quia verò intercipiuntur 4. quarti, ideo quater accipitur Arithmetica differentia quarti 100 0005024. vt fiant 400 0020096, cui addimus Arithmeticum Geometrici 52. quinti ordinis 9e. 0000052. & fit Arithmeticus quæsitus 452. 0020148 addendus Arith. 10009. &c. vt fiat Geometrici 9900000. de quo quærebatur.

COROLLARIVM I.

NOtabis nostros numeros extremarum tabularum exijsse paulò maiores in Arithmeticis differentiæ proximè 2500. quàm quas composuit ipse Neperus. Ratio verò huius rei est, quia ipsi est primus tabulę primæ 100483. & cæt. nobis verò 100543. & cæt. quia ipse sumpsit aliquid minùs, quàm quòd differentia Geometrici dabat, nos quid maius ipsa eadem differentia sumpsimus, vtpote ad libitum, vt patet ex Coroll. propos. 15.

COROLLARIVM II.

ADuerte quoque Arithmeticos, non solùm crescere per numeros integros, sed etiam per fractiones, quòd in reperiendis illis, qui primis tabularum Geometricis applicantur necessariò fractiones essent admittendæ, quæ per continuam additionem deinde crescebãt in immensum. Vnde spretæ ab initio, deinde magnum errorem poterant causare, incępit ergo crescere series Arithmetica, ne dum simplici vnitate, sed addita fractione 0000001. vt in illa fractione daretur locus, quo possint successiuè, & aliæ, fractiones recipi, & continuè addi. Verùm hæ fractiones in tabula sinuum, seu absoluta Logarithmice contemnendæ, quòd solùm deseruiant ad continuam earum additionem, ob quam successiuè in integros transeunt, quum singulę singulis in progrediendo adduntur.

EXPENSIO V.

De Logarithmis in tabulas sinuum transferendis.

COnfectis omnibus tabulis, & ijs Logarithmorum serie instructis, vltimus labor postulat, vt illos in tabulas sinuum transferamus, vnde sit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Logarithmos tabulis sinuum applicare vsque ad sinum gr. 45. à sinu toto.

DAtum sinum per tabulas supra positas logarithmis instructas quære, vel enim occurret prorsùs idem, vel non pluribus, quam 10. vnitatibus distans, si perduxisti tabulas vsque ad ordinem quintum, quòd, si vsque ad ordinem quartum differet 100. vnitatibus. Quære ergo in tabula sexta, quid vnitates illæ, quibus differũt isti duo Geometri exhibeãt in Arithmeticis, & hoc adde Arithmetico reperti ꝓportionalis si sit minor subducito, si sit maior eo, qui in tabulis logarithmicis inuenitur, eritq; logarith. dati sinus.

V. g. datur sinus 7107995. requiro illum in tabulis proportionalibus, reperioque in tabula vltime tertij ordinis numerum proximum minorem 7107989. cuius logarithmus est 3415020. differtque Geometricus à dato 6. vnitatibus. Reperio itaque has vnitates in tabula sexti ordinis Geometrica, & dant mihi 4. vnitates correspondentes pro Arithmetico competente, quas addo logarithmo 3415089. fitque logarithmus 3415084. Sinus dati 7107995. fracti verò posthabendi, quia illi ad solam continuationem tabularum requirebantur.

Veritas verò huius operationis ostenditur ex propos. 15. Posset etiam reperiri ex Coroll. prop. 12. & ex Coroll. propos. 15. sed facilliùs per hanc, atque certiùs.

COROLLARIVM I.

HInc omnes sinus vsque ad centum facillime dantur per solam inspectionem Tabulę ordinis sexti. Nam cum ibi proportionales sola vnitate decrescant quilibet occurret cum logarithmo addendo spretis fractis, vt modo non ampliùs necessarijs, cum solùm ad condendas tabulas requirantur: sic sinus 9999995. reperies logarith. 7. Sic 9999905. reperies logarithmum 95. cum fracto 0000095. qui spernendus est.

COROLLARIVM II.

REperies quoque sinuum aliorum logarithmos, qui cadunt in tabulam quinti ordinis, vel quarti sic. Dati sinus 9999105. reperitur proximus proportionalis in tabula prima quarti ordinis 9999100. quia ergo ille sinus est maior 5. vnitatibus, logarithmus 900. diminuendus vnitatibus 5. ex tabula sexti ordinis, sed quia adsunt

fracti

fracti satis sensibiles vltra integros, ideo accipiendæ sunt 4. eritque logarithmus 895. vel 895. sinus 9999105. Eidemque logarithmo 35. vnitates ex tabulis sexti ordinis addendæ, vt fiat logarithmus sinus sequentis 9999065. Sicque erit 930. logarithmus ipsius sequentis, & sic de omnibus alijs, vt vsus ipse ostendet.

Ita quoque fecimus in reperiendo logarithmo applicando sinui Gr.45 qui necessarius est ad reliquorum sinuum logarithmos inueniendos. Namque, cum sit sinus ille 7071068. erit inter proportionales primi ordinis 7105531. &c. & 7034475 & cæt. incepimus itaque proportionales secundi ordinis interponere, vt vides hic.

			Logarith.
7105538	480		3418488
7105	538		
— —	—	1	
7098486	888		
— — —	—	2	
7091328	462		
— — —	—	3	
7084837	134		
— — —	—	4	
7077158	897		
7070075	745		

Est ergo sinus quæsitus inter hunc vltimum, & penultimum: quare interiaciemus proportionales tertij ordinis, sic

7077152	8970	
707	7152	
— — —	—	1
7076445	1818	
— — —	—	2
7075737	5373	
— — —	—	3
7075029	95,6	
— — —	—	4
7074322	4607	
— — —	—	5
7073615	0855	
— — —	—	6
7072907	6670	
— — —	—	7
7072200	3763	
— — —	—	8
7071493	1563	

Deinde alij proportionales quarti ordinis interponendi quales sunt.

7071493	15630	
70	71493	
— — —	—	1
7071422	44137	
— — —	—	2
7071351	72715	
— — —	—	3
7071281	01364	
— — —	—	4
7071210	30083	
— — —	—	5
7071139	58873	
— — —	—	6
7071058	87734	

Hic ergo vltimus est valdè propinquus, & differt solum fractis à sinu dato. Accipiamus ergo logarithmos conuenientes ordinis primi proportionali, qui est 3418488. 8721596, deinde ex prima tabula secundi ordinis accipiemus quarti proportionalis logarithmum 40036. 1753740. deinde ex prima tertij accipiemus octaui Geometrici logarithmum 8003. 6301936. tandem ex prima tabula quarti ordinis accipiemus sexti Geometrici logarithmũ iuxta.n. interpositorũ log. 597. 0029847 & omnes in vnam summam redigemus, eritque logarith. sinus Gr. 45. nimirum 3467125 ; . abiectis omnibus fractis.

Præassumptum. Quia vsque ad dimidium tabulę sinuũ tabulas proportionales logarithmicasq; ordinauimus. Modo quomodo reliquis sinubus logarithmi applicandi inueniantur docendum est; & hoc non, quia vsque ad vltimum sinum deduci non possent, sed solum ad laborem leuandum. Ad id verò est necessarius logarithmus dimidij sinus totius. Vnde quomodo reperiatur, tradendum est.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Sinus 45. Graduum est medium proportionale inter sinum totum, & dimidium sinus totius.

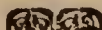
SVpra probauimus propof. 28. expens. 3. cùm ageremus de sinibus inueniendis; quòd dimidium sinus totius AK se habet ad sinum dimidij alicuius arcus EA, vt sinus complementi illius dimidij ED ad sinum totius arcus BE; sed sinus 45. Grad. est æqualis suo complemento, & sinus arcus dupli ipsius est sinus totus; ergo ita se habet AK



dimidium sinus totius ad EF sinum 45. Grad. vt eius, & illi æquale complementum EG ad sinum dupli arcus EB, qui est sinus totus, & consequenter EF, & EG æquales sunt medium inter AK dimidium sinus totius, & BE sinum totum, & ideo si ex eis fiat quadratum illud erit æquale rectangulo ex sinu toto, & dimidio eius facto ex propof. 19. lib. 6. element.

COROLLARIVM.

HInc est, quòd cùm cap. 1. huius tract. propof. 6. & 4. duplatio Arith. æquiualeat quadrationi, & propof. 3. subductio diuisioni. Si logarithmus sinus 45. gr. dupletur, & ab eo duplato subducatur logarith. sinus totius, qui est 0. relinquetur dimidij sinus totius Arithmeticus, & quia supra reperimus Arithmeticum 45. Grad esse 3467125 $\frac{1}{2}$, si dupletur erit 6934251. & subducatur 0. licet nihil ab eo auferatur, erit idem logarithmus sinus dimidij nempe sinus 5000000.



Vu PROBL.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Dato logarithmo dimidij sinus totius, & sinus maioris arcus, quam Gr. 45. cum complemento eius dimidij, reperire dimidij arcus, vel sinus logarithmum.

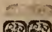
PRæsupponitor, quòd sine appositi omnibus sinibus sui logarithmi à 90. vsque ad grad. 45. & sint alij, quærendi minores dimidio, & consequenter minores, quàm sinus Gr. 45. Vnde, & eorum complementum erit cognitum, cùm arcus, qui quæritur sit minor, quam gr. 45. eius complementum erit sinus arcus maioris, quam Gr. 45. & consequenter eius logarithmus erit notus. Addantur itaque simul arcus dati logarithmus, & dimidij sinus totius, & à summa auferatur logarithmus sinus complementi dimidij ipsius arcus, & residuum erit logarithmus ipsius dimidij.

Probatur autem ex propos. 15. Expens. 8. de sinubus. Nam dimidium sinus totius se habet ad sinum alicuius arcus, vt sinus complementi se habet ad sinum dupli arcus. Vnde rectangulum ex medijs ex propos 18. Elem. erit æquale rectangulo ex extremis, & sic in geometricis si multiplicentur simul extrema, nempe dimidium sinus, & sinus dupli arcus, & diuidantur per complementi sinum, dabit residuum sinum dimidij arcus vt ibi diximus; sed vt propos. 1. expens. 1. h. diximus in Arithmeticis aggregatio æquiualet multiplicationi, & ex prop. 3. subductio diuisioni, ergo aggregatus logarithmus dimidij sinus, cum logarithmo totius arcus æquiualebit eorundem Geometricæ multiplicationi, & subductus logarithmus complementi æquiualebit diuisioni factæ per eundem sinum, & consequenter residuum ex subtractione logarithmica erit logarithmus dimidij arcus. Exemplum verò tale est.

Sit Logarithmus Gr. 45. m. 15. ex tabula tertij ordinis 3415023 complementum dimidij huius arcus est Gr. 67 m. 22 $\frac{1}{2}$ cuius logarith. ex tabula prima per regulas proximè traditas repertus est 801930. logarithmus verò dimidij sinus totius est, vt supra 6934251. Addo itaque huoc dimidij sinus totius logarithmum logarithmo sinus arcus dati 3515023. fitque summa 10349274. à quo subduco logarithmum complementi, remanetque logarith. 9547344. sinus dimidij arcus 22. 37 $\frac{1}{2}$.

COROLLARIVM.

HInc datis omnibus logarithmis sinuum arcuum maiorum, quam grad. 45. obtinere poteris omnes logarithmos sinuum arcuum vsque ad 22 $\frac{1}{2}$ Gr decrescentium, & istis datis obtinebis logarith. arcuum vsque ad 11. Gr. & m. 15. & ex istis rursus omnium arcuum logarithmos vsque ad gr. 5. m. 38. & tandem vsq; ad primum prorsus minutum.



EXPENSIO VI.

De Tabulis ordinandis, & Logarithmis tangentium addendis.

PRæceptum 1. In qualibet paginæ faciæ 9. columnæ, seu areolæ oblongæ distinguantur lineis tali, tum longitudine, tùm latitudine, vt commode numeros capere possint inscribendos, ita quod 61. versus, seu lineas numerorum secundum longitudinem singulæ comprehendant, & latæ, vt 8. numeros capere possint, & si de tangentibus agitur vsque ad 11. excepta prima sinistra, & vltima dextra, quæ duos tantum numeros sua latitudine capere debent, lineamentisque transuersis decem ad maiorem distinctionem decussentur.

Præceptum 2. Primæ columnæ sinistræ G. cum numero graduum, & m. pro indicio minutorum superscribendus; perque totam longitudinē incipiendo à 0. & descendendo vsque ad 60 numeri inclusiuè excrescētes notādi. Nonæ verò columnæ dextræ nihil supra scribendum, sed incipiendum à 60. & decrescentibus numeris perueniendum vsque ad 0. inclusiuè, & tandem numerus 89. & hæc de prima, & secunda facie paginæ primæ; ceteræ verò successiuè habebunt Gr. 1. & 88. sic Gr. 2. & 87. & in reliquis hoc ordine est procedendum.

Præceptum 3. Secunda verò columna sinistra continebit sinus illorum minutorum, qui in prima continentur, sicut, & dextra octaua sinus illorum, qui nona columna extenduntur, & consequenter Graduum, qui supra scripti sunt primæ, & infrascripti nonæ. Hos autē sinus, vel repertos habebis ex tractatu de sinubus, vel deduces ex tabulis sinuum vulgaribus, vt Reinholdi, &c.

Istis autem sinibus dextris applicabis logarithmos repertos vt supra ex Coroll. propos. 16. primo, & secundo, & hi occupabunt 7. dextram columnam. Sinistris verò sinibus applicabis logarithmos repertos ex propos. 19. & isti extendentur per totam columnā sinistram tertiam. sexta verò, & 4. inscribendæ sunt tangentes, & tandem 5. & media remanente differentiales numeri scribendi sunt, qui pro tangentibus apponuntur, Oriūtur autem isti à subductione logarithmorum sextæ columnæ, à logarithmis tertiæ, & id quod remanet à subtractione inter vtrasque tangentes hac media columna scribendum.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Primæ Nonæque columnæ Gradus, & minuta sibi sunt inuicem arcus, & complementa.

PRobatur. Nam cum illa prima incipiat à 0. crescendo ista à 60. minutis super 89. fit, vt quantùm crescit illa prima, tantùm decrescat nona, & consequenter, quòd huic tot minuta, seu gradus defficiant, quot primę aucti sunt, & è contra. Quare simul additi alter alterius complebit numerum, vt fiant 90, Gr. & sic erunt sibi inuicem complementa.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

In prima columna continetur angulus acutus rectanguli minor; in nona dextra angulus acutus eiusdem maior.

PRobatur. Nam ex propos.17. lib.1. element. omnis rectanguli anguli omnes duobus rectis sunt æquales, qui cũ sit vnus in rectãgulo rectus, alij duo simul erunt vni recto æquales; Vnde alter angulus alterius complementum erit, vt sunt arcus, qui prima, nonaque columna continentur, vt dictum est propos.20.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Secunda Columna continentur crura minora minores angulos subtendentia: in octaua verò crura maiora maiores angulos subtendentia.

PAtet, quia in secunda minorum angulorum, & arcuum sinus continentur, sicut in sexta sinus arcuum maiorum, & angulorum.

COROLLARIVM.

HInc est, quod ex sinu dextro octauæ columnæ, & sinistro secundæ, & sinu toto rectangulum triangulum componatur.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Logarithmi tertiæ columnæ sunt Logarithmi proportionis cruris minoris rectanguli ad eius basim, seu Hypothenusam, sicut, & logarithmi septimæ sunt logarithmi proportionis cruris maioris ad eandem Hypothenusam. Suntque sibi inuicem antilogarithmi nempe complementorum logarithmi.

PRobatur prima pars. Nam proportio quam habent crura cum basi tunc innotescit cum basis per crura diuiditur, ita proportio 5000000. sinus Gr. 30 est ad sinum totum 1000000. vt 1. ad 2. quia diuisus sinus totus per eius 5000000. dat 2. Sed ex dictis propos. subductio in logarithmis æquiualet diuisioni: Ergo logarithmus cruris subductus à logarithmo sinus totius dabit logarithmum proportionis cruris cum sinu toto: Sed logarithmus sinus totius est o. Ergo subductus relinquit numerũ, vt erat, & ita ut dum est logarithmus sinus: sed etiam proportionis eiusdem sinus cum sinu toto.

Probatur secunda pars. Quia sinus, quibus applicati sunt, sibi dextrorsum, & læuorsum correspondentes sunt sibi inuicem complementa. Ergo, & logarithmi ipsorum sibi inuicem sunt antilogarithmi.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Tangentium, & secantium, quæ supra sinum totum excrescunt logarithmi infra o. intelligendi; ita quod sint minores nihilo tot vnitatibus, quot sunt in ipso logarithmo.

PRobatur. Nam cum à o. crescant logarithmi nostri, dum à sinu toto ipsi sinus decrescunt necesse est, quòd si dentur aliquæ lineæ, vt sunt Tangentes arcuum maiorum, quam 45.Gr. & omnes secantes, quę crescunt vltra sinum totum, quòd illarum logarithmi vltra o. decrescant.

COROLLARIVM.

VNde logarithmi possunt sumi, & vt defectiui, & vt abũdantes. Abundantes erunt, si intelligantur crescere supra o. vt vsque nunc fecimus: defectiui verò si infra o. decrescere intelligantur, & taliter aliquos intelligere erit necesse, si tangentibus, & secantibus eos applicare voluerimus, quæ vltra sinum totum excrescunt.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si Logarithmos tertiæ columnæ sinistræ, & septimæ dextræ, vt defectiuos considerauerimus erunt logarithmi Hypothenusarum, seu secantium Arcuum, quibus sunt complementa, & Anthilogarithmi.

Sic logarithmi sinuum arcuum dextrorum fient logarithmi secantium sinistrorum arcuum, & è contra.

PRobatur. Nam propos.18 Tr.20. de sinubus probauimus sinum totum esse medium proportionale inter complementum arcus, & secantem eiusdem arcus, & ideo, quòd multiplicatus in se, & diuisus per complementum daret arcus illius secantem: sed quia in logarithmis additio æquiualet multiplicationi, & subductio diuisioni, ideo si o. logarithmus sinus totius addatur ipsi o & ab hac summa subducatur logarithmus complementi arcus V. g. logarithmus arcus dexteri, relinquetur idem logarithmus minus, quam o. secans arcus sinistri, cui arcus dexter est complementum. Erunt verò logarithmi considerandi, vt infra o. deficientes; quòd omnia secans super sinum totum excrescat, vt modò diximus.



THEOR. IX. PROPOS. XXVI.

Differentiales mediæ columnæ sunt logarithmi proportionis cruris maioris respectu minoris, & logarithmi secundarum, seu tangentium, tum arcuum dextrorum, tum sinistrorum, sub diuersa tamen consideratione. Nam ut abundantes sunt differentiales, logarithmique tangentium arcuum sinistrorum minorum Gr 45. at vt defectiui sunt logarithmi tangentium arcuum dextrorum maiorum gr. 45.

PRob. secunda pars. Nam ex prop. 16. tract. 20. habemus, quòd eadem proportio est sinus cõplementi ad sinum arcus; quam sinus totius ad tangentem, & ideo, quod multiplicatus sinus totus per sinum arcus, & diuisus per sinum complementi, exhibeat tangentem arcus; vel è contra multiplicatus per sinum complementi, & diuisus per sinum arcus exhibeat tangentem complementi. Sed in Arithmeticis ex propos. 2. & 3. huius, additio equiualet multiplicationi, & subtractio diuisioni; Ergo si logarithmus sinus alicuius arcus addatur logarithmo sinus totius, qui est 0. & ideo remaneat, vt erat ante, & subducatur ab eo logarithmus sinus complementi dabitur tangens arcus, & si subducatur ab eo sinus arcus dabitur tangens complementi, ideo eædem differentiæ eeunt, & logarithmi arcuum, & logarithmi complementorum, arcuum quidem, vt abundantes, & quatenùs logarithmi sinuum maiorum, quam Gr. 45. subducuntur à sinuum minorum maioribus logarithmis, vt relinquatur tangentis logarithmus; complementorum verò quatenus defectiuæ, & logarithmi maiores sinuum minorum, quam 45. Gr. subducuntur à minoribus logarithmis maiorum sinuum, vt relinquatur tangẽtis logarithmus. Maiores verò numeri à minoribus subducuntur per intellectum; quatenus intelligitur minori tot vnitates deficere, quot sufficiunt ad hoc, vt subduci possit; ita 15. subducitur à 4. cum intelligitur illi 4. vnitates 11. deficere, quas si haberet 4. à 15. posset subtrahi, cùm tunc esset iunctus cum 11; & 4. & 11. faciunt 15. numerus verò 15. à 15. subduci potest, & ideo differentię logarithmicæ sumptæ, vt deficiẽtes, & vt à minoribus logarith licet maiores possint subduci; sunt illæ ipsæ, quas dant minores logarithmi à maioribus subducti. Sicut 11. est eadem differentia, quam dat numerus 4 subductus à 15. & quam dat 15. subductus per intellectum à numero 4.

Probatur prima pars, quod differentiales sint quoque logarithmi proportionis crurum: Nam tunc proportio vnius cruris ad aliud obtinetur, cùm crus minus diuidit maius. Quotiens enim est denominator proportionis: Sed in logarithmis subductio æquiualet diuisioni, & differentiales numeri fiunt è subductione logarithmorum minoris cruris à maioris cruris logarithmis. Ergo sunt logarithmi illi numeri differentiales proportionis vnius cruris ad aliud.

COROLLARIVM.

COllige, quod si tangentium logarithmis vtaris in exercenda regula proportionum, & iubeat, tãgentis logarithmũ debere demi, vel addi, si addi signũ † hoc, quod significat logarithmum tangentis debere sumi, vt abundantem, tunc obediendum est; & cum præcipit regula, quòd subducatur logaritmus tangentis; vel addatur; si signo defectiuo hoc − in tabulis notetur, è contra faciendum.

Logarith.

1	2	3
Sinuum	Tangentium	Sinuum
G.45. vsq; ad 90.		G. ab 1. vsq; ad 45.
0	80	90
4	72	76
8	64	68
12	56	68
16	48	64
20	40	60
24	32	59
28	24	52
32	19	48
39	8	44
40	0	40

Quod concipies à serie numerorum logarithmicorum hic apposita, qui imitantur logarithmos sinuum, atque tangentium in suo progressu.

Series itaque prima cogitetur, tanquam si essent logarithmi minores sinuum arcuum maiorum, quàm 45. Graduum; Secunda sint differentiæ, & tanquam tangentium logarithmi habeantur; Tertia putentur tanquam logarithmi sinuum arcuum minorum, quàm 45. gr. quia sunt maiores Arithmeticis primæ seriei.

Quia itaq; tangens est ad sinum totum, vt sinus arcus ad sinum complementi: differentialis tangentis maiorum arcuum, quàm 45. Gr. & consequenter maior sinu toto, diuidet logarithmum sinus totius 0. & logarithmum arcus maioris, quam 45. Grad. aggregatos, & prodet logarithmum arcus minoris, quam 45. Gr. V.g. arcus logarith. 24. diuisus per differentialem 40. daret logarithmum desideratum; sed quia differentialis 40. est defectiua respectu logarith. 24. ideo addenda est, & fiet 64. logarithmus arcus minoris, quàm Gr. 45.

At si tangens sit minor sinu toto, etiã sinus quæsitus erit minor dato; Vnde logarithmus V.g. 94. additus sinui toti, & minutus differentiali 32. dat logarithmum arcus maioris pariter 32. quia s. hic differentialis 32. consideratur, vt abundans.

Vides itaque, quod quando desideratur logarith. sinus minoris arcus, quam Gr. 45. differentialis, quæ debebat addi subducitur, at quando desideratur sinus arcus maioris, quàm gr. 45. logarithmus differentialis, que debebat addi, etiam additur. Quia si 24. cum differentiali 32. minorem nihilo, facit 56. qui æquat ipsum 56. maiorem nihilo. Ergo 28. cum 32. facit 60. ob additam differentiam 4. quam addit 28. numero 24. & sic 32. cum 32. facit 64 & sic 36. cum 32. facit 68. & cæt. quare addita differentialis logarithmo minori constituet maiorem, sicut ablata minorem logarithmum cum tamen iuxta regulam semper deberet subduci, nisi differentiales deficerent, & inciperent con-

trario

tratio modo à o. crescendo dum sinus desinunt.

Itaque collige regulam Generalem, quod in defectiuis addendis cum abundantibus, seu logarithmis sinuum, qui omnes sunt abundantes, cum differentialibus, seu in logarithmis sinuum, sed vt secantium sumptis, & ideo omnibus defectiuis, addere idem est, ac subducere.

In defectiuis verò ab abundantibus subducendis, vel è contra, subducere idem est, quod addere. Quia scilicet subducendo acquiritur id, quod addendo esset consequendum, vel addendo id inuenitur, quod subtrahendo debuisset reperiri.

EXPENSIO VII.

De Logarithmis numerorum absolutorum.

CVm ex applicatione logarithmorum sinubus arcuum facilitas singularis in regulis proportionum tractanda emerserit, cùm ad inuentionem ipsorum sinuum adhiberetur. Excogitauere Authores numeris quoque absolutis, & naturali propagatione crescentibus logarithmos addere, vt ipsa regula aurea simili facilitate constaret in numeris absolutis assumpta; quod etiam inuentum ab ipso Nepero innuitur, sed obscurissimè, exposuit tamen, vtcumque Henricus Briggius; sed fusiùs operi mandauit in suis Chiliadibus, quæ ab 1. vsq; ad 100000. excrescunt naturali augmento.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

In serie numerorum ab vnitate continuè proportionalium, si numerus quilibet alterum multiplicet. Eius logarithmus erit aggregatum logarithmorum ipsis multiplicantibus se inuicem, applicatorum naturali ordine progredientium.

SInt proportionales ab vnitate numeri in seriē dispositi 1. 2. 4. 8. & cæt. & eorum logarithmi naturali ordine propagati 1. 2. 3. 4. & cæt. Dico, quòd si aliquis V. g. 2. multiplicet aliquē alium nempe 16. & faciat 32. huius facti logarithmum esse aggregatum logarithmi duorum numerorum se multiplicantiū idest logar. 1. & 4. nimirum 5. Sic si 4. multiplicet 32. & faciat 128 logarithmus huius numeri 128 erit aggregatū logarithmi 2. & logarithmi 5. applicatorū numero 4. & 32. quod aggregatum est 7.

Propor.	Log.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Probatur ex dictis prop. 1. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXVIII.

Si aliquoties numerus aliquis in se, & in productum multiplicetur, & vltimum productum diuidatur, genitos excedent quoti ipsi solâ vnitate; addito verò primo termino æquabuntur.

PRobatur. Sit 1024. factus ex multiplicatione 2 in se, & in productos successiuè, erunt geniti 9. at si diuidatur successiuè per 2. Quoti erunt ijdem vtique V. g. 512. postea 256. & cæt. vsque ad 2. sed 2. insuper capit in se semel; Ergo Quoti vnica vnitate vices multiplicationum excedent: at si genitis addamus latus, & primam radicem 2. erunt æquales.

Mult.		Quot.
2		1
4	1	2
8	2	3
16	3	4
32	4	5
64	5	6
128	6	7
256	7	8
512	8	9
1024	9	10

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

Numeri diuisi per 10. quoties fieri potest, quoti tot erunt numero, quot ipsæ figuræ vna dempta ad dextram.

SIt numerus quilibet 1679087. diuidendus per numerum 10. primus quotus erit 167908. secundus erit 16790. tertius erit 1679. quartus erit 167. quintus erit 16. sextus erit 1. ipsæ verò figuræ vna dempta sex restant.

Probatur. Quia tot erunt decimæ, & decimæ decimarum, & cæt. ex propos. 1. tract. 8. quot sunt loca excepto vltimo loco ad dextram, qui est vnitatum locus: Si ergo quilibet numerus V. g. millio per 10. diuidatur habebimus centesimas millium, vel vnam, vel 2. vel 4. & cæt. vsque ad 9. quæ si diuidentur per 10. vel duas, vel tres vsq; ad 9. dabūt decimas millium, quæ si diuidentur per 10. dabunt vnitates millium, idest decimas centesimarum, vel 1. vel 2. vel 3. vsque ad nouem; & si rursus diuidantur, exhibebunt decimas decimarum, & tandem vnitatum decimas. Itaque diuisio per 10. reddit eundem numerum ad locum inferiorem proportionē significantē per decimas ab vnitate crescētē: Quare cū vltima figura ad dextram, iam decimas non significet, diuidi nequit: Vnde quotus ex diuisione 10. in vltima figura haberi non poterit: Quaderè tot erunt quoti si diuidatur numerus aliquis per 10. quot erunt figuræ vltima dempta.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Quot sunt notæ in vno quoque factore, tot erunt in facto, & aliquando vna minus.

SInt multiplicatores 234. & 845. qui inuicem se multiplicent, factus erit 197730. nempe totidem figuris, quot sunt in multiplicatoribus vnitates; at 234. multiplicet 145 genitus erit 24930. nempe minutus vnica figura, ex eo numero figurarum, quo vterque multiplicatus, & generans constat.

Pro-

* Probatur ex regulis multiplicationum tradita prop.14.& 15.tract.8. Nam vltima finistra figura s multuplicãs possint numerũ productum vnitates significantem tertio loco, vt in A. Vel ergo genitus ex destro vltimæ figuræ sinistræ B facit 3. aut ad summùm 4. figuras, vt diximus; si tres facit additis duobus locis CD faciũt quinque; si quatuor additis duobus locis CD, sunt sex: Ergo tot figuræ erunt in genito, quot in vtroque generante, vel tantùm minùs vnu.

234
B 145
3 179 0
936
ACD
234
0

THEOR. V. PROPOS. XXXI.

Si series aliqua producatur numerorum duorum ab vnitate continuè proportionalium donec logarithmum vltimus terminus consequatur, qui ab vtriusque logarithmorum multiplicatione gignitur; Is terminus erit, tum vnius, tum alterius datorum ab vnitate continuè proportionalium terminus.

D	A	B	C	K
0	1	0	0	0
	2	1		3
	4	2		6
	D 8	3	1	9
	16	4		12
1	E 32	5		15
	64	6	2	18
	128	7		21
	256	8		24
	512	9	3	27
2	1024	10		30
	2048	11		33
	4096	12	4	36
	8192	13		39
	16384	14		42
3	32768	15	5	45

Sic series numerorum A in qua dati sint duo numeri 8.& 32. quorum logarithmi 3.& 5. multiplicentur inuicem, & fiant 15. producatur verò series vsque ad 15. terminos ab vnitate.

Dico, quod vltimus terminus 32768. est terminus communis proportionalium datorum numerorũ; si ab vnitate excrescant. V.g. si statuatur primus D 8 ab vnitate, & ratio 1. ad 8. in seriem còtinuetur terminus erit prædictus 32768. & si statuatur quoque primus terminus ab vnitate E 32. & secundùm eam proportionem, quam possidet 1. ad 32. series continuetur, illius seriei quoque terminus erit prædictus 32768. cujus logarithmus 15.

* Probatur. Inter D, & vnitates tres medianæ proportionales: Ergo, si 1. ponatur ad 8. ita 8. ad aliud 264. inter 8. & 64. tres proportionales interserentur ex prop. 9. lib.8. & sic de alijs. Ergo si proportio quinquies repetatur, & producatur vltimus terminus erũt hunc inter vltimũ, & vnitatem 15, termini virtualiter interpositi, idest poterunt interponi, & numeris exarari eiusdem proportionis, quæ est 1. ad 2. cùm propostio 1. ad 8. quæ quinquies repetitur, sit proportio 1. ad 2. ter repetita; Ergo vltimus terminus erit idem, ac prædictus 32768. siquidẽ est iste decimus quintus terminus progressionis proportionis 1. ad 2.

Rursus sit alter terminus primus ab vnitate E 32. & fiat, vt 1. ad 32. ita 32. ad aliud F. & proportio producatur, & extendatur in seriem. quia ergo inter 1. & 32. quinque termini mediant, etiam inter 32. & tertium F quinque termini interponentur, si ergo fiant ex istis tres termini virtualiter erunt 15. quia inter 1, & 32. est proportio 1. ad 2. quinquies repetita; vnde inter vnitatem, & tertium terminum inuentum erit proportio 1. ad 2. quindecies repetita: sed etiam 32768. habet proportionem 1. ad 2. quindecies repetitam, ergo iste erit tertius terminus proportionis 1. ad 32. sed etiam erat quintus terminus proportionis 1. ad 8. ergo est terminus communis harum proportionum.

COROLLARIVM.

Hinc enascitur, quòd duorum numerorum in aliqua serie eiusdem proportionis, sed tamen diuersimodè repetitæ existentium, enascitur inquam, quod quototum numerus reciprocè sit proportionalis numero logarithmorum; ita numerus E 32. quoti, quibus diuidit 32736. sunt 3. logarithmi verò 5. at numeri D logarithmus est 3. numerus verò quotorum; quibus diuidit eundem numerum 32736. est 5. Quare in numero E 32. vt est quototum numerus ad logarithmorum numerum, idest vt 3. ad 5. sic in numero D 8. est logarithmorum numerus ad quotos; nempe vt 3. ad 5. quod si adhibeas alios logarithmos vt K, idem erit nempe, vt 9. ad 15. idest vt 3. ad 5.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Datis duobus numeris in eadem continuè proportionalium serie positis vnà cum logarithmo naturali vnius, exquirere logarithmum naturalem alterius.

Vocamus logarithmos naturales, qui naturali augmento per vnitates propagantur, vt 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. & cæt.

Sint itaque in præcedenti serie dati duo numeri V.g. 8. & 32. deturque huius logarithmus 5. sitque exquirendus logarithmus numeri 8. fiat per multiplicationem numeri 8. in se, & in productum toties aliquis numerus, donec geniti in numero æquent logarithmum 5. & fiant 5. Sitque vltimus productus 32768. ex prop. præc. hic numerus erit æqualis numero illi, qui fieret ex multiplicatione 32. in se, & in factos, qui tot erunt, quot logarithmi naturales numero 8. ascribendi; quia ita est ex Coroll. numerus quotorum termini 32. quibus diuidit vltimum genitum ad logarithmos naturales suos, vt logarithmi numeri 8. ad quotos suos, quibus eũdem vltimum genitum diuidit. Si ergo reperiamus quotos, quibus 32. diuidit vltimum terminũ suum 32768. qui erunt tres habebimus quoque logarithmum ipsius 8. nempe 3, qui debet ascribi in serie prima in qua etiam est logarithmus exhibitus numeri 32. quæ est præced. propositionis series.

1	0	1	0
32	1	8	1
		64	2
1024	2	512	3
		4096	4
32768	3	32768	5

PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duobus numeris, quibuscumque, & alterius logarithmo ad libitum ei applicato alterius logarithmum exquirere.

Sint numeri dati 2. & 10. & huius logarithmus statuatur 100. quæraturq; logarithmus ipsius 2. Primus 2. itaq; se ipsum multiplicet, & genitũ successiuè, vt multiplicationum numerus deficiat solùm vnica vnitate à dato secundi 10. logarithmo, qui logarithmus est 100. ideo sint 99. se cum ipso sint 100. Diuidaturq; rursus quoties fieri potest, & ex propos. 28. quoti erunt 100. quis numerus in se ipsum ductus, si rursus diuidatur faciet numerum quotorum æqualem numero genitorum & vnum quotum supra adiunget, vel æqualem genitis addito primo generante. Numerus itaque vltimo genitus, cuius quoti æquãt logarithmũ 100. a 10. est ille, qui si per 10. diuidatur, quoties fieri potest, ex præc. quoti eius dabũt logarithmum n. 2.

Sed, quia ille numerus ob maximam suam multitudinem haberi laboriosè potest. Siquidem crescit vltra omnem existimationem, poterimus absque eius cognitione habere numerum quotorum, quem quærimus, absque eo, quod eum noscamus. & successiuè diuidamus. Nam cùm numerus quotorum, quando diuisor est 10. sit idem, ac figurarum multitudo vnâ solum demptâ ad dextram ex propos. 32. hinc est, quòd satis erit noscere figurarum numerum, quæ terminum vltimum ex 100. multiplicationibus numeri 2. genitũ componunt, quod ad hoc, vt consequamur breuiùs, & faciliùs, quam fieri possit sit.

PROBL. III. PROPOS. XXXIV.

Numerum notarum, & figurarum in vnaquaque multiplicatione obtinere, absq; totali omnium figurarum multiplicatione.

Fiet id multiplicando solùm tres, aut quatuor, aut quinque figuras ad sinistram, quę nec cum toto numero multiplicentur; sed solum cum duabus, vel tribus V. g. sit numerus 2345. multiplicandus in se ad cognoscẽdum numerum ipsum, vt docuimus tract. 8. propos. 17. ita stabit multiplicatio.

2345
2345
———
11725
9380
7035
4690
———
5499025

Figuræque singulæ cum singulis numeri diuidendi erunt multiplicatæ.

Sed ad agnoscendum tantùm loca sufficiet multiplicare in hoc numero duas extremas figuras, quia ex propos. 27. huius, quot sunt notæ in vno quoque factore, tot erunt notæ, & figuræ in genito aliquando vna dempta. Vnde, vt sciamus quando ea demenda est, vel addenda vltimæ figurę vel duarũ tantùm multiplicatio erit necessaria, aut ad summũ quinq; Siquidẽ alię differentię, quæ ex aliarũ figurarũ versùs dextrã multiplicatione exoriuntur vltimũ numerum non augent, cùm ex propos. 14. tract. 8. non nisi decimæ possint transferri, vel vna, vel duæ vsque ad nouem. Quare oportebit ad summum habere cognitionem quinq; vltimorum numerorum ad hoc vt cognoscamus, an translatio ad summam 9. decimarum in magnis ad sinistram numeris vltimam notam possit augere; ideoque in prædicto numero sufficiet multiplicatio numeri sinistri 2. & 3. & quia ex prop. 15. tract. 8. scimus numeros harum notarum ad tertium locum, & quartum pertinere, idest sic, vt vides in exemplo stabit multiplicatio.

2345
2345
———
5900
4690
———
5380000

Vbi 3. neque per totum numerum, eiusque omnes notas multiplicauimus, sed solum duas extremas, & licet non præbeant eundem numerum, sed minorem; præbent tamen eundem numerum notarum, vt priùs, quæ sunt 7. Et licet in numerorũ tessera, vbi notæ significãt maiores numeros, neque multiplicatio vlla esset adhibenda, oportet tamen multiplicare saltem duas, vel tres vltimas, vt deinde successiuè numerus aliarum figurarum possit haberi, quæ continua duplicatione inueniendæ sunt.

PROBL. III. PROPOS. XXXV.

Notarum numerum multis intermissis proportionalibus inuenire.

Sit numerus 2. cuius notæ inueniendæ sint, quæ in vltimo per centum multiplicationes propagato termino inueniuntur, si id fiat continua multiplicatione laboriosa res est, quare ità instituemus multiplicationem.

Ducatur binarius in se, & fiant 4 deinde 4. in se, & fiant 16. deinde 16. in se, & fiant 256. erunt autem horũ logarithmi, ipsius binarij 1. & quia 4. est ipsius quadratum ex propos. 6. huius, eius logarithmus erit 2. Sic, quia 16. est quadratum ipsius 4 eius logarithmus erit duplum ipsius 2. nempe 4. & quia 256. est quadratum numeri 16. ideo eius logarithmus erit 8. sed, si volumus peruenire ad 10. multiplicetur primus numerus 4. cum hoc vltimo 256. & producetur numerus 1024. cuius logarithmus naturalis erit aggregatum logarithmi 2. applicati proportionali 4. & logarithmi 8 applicati proportionali 256. Vnde logarithmus erit 10 ostendens iam virtualiter per has 4 multiplicationes esse completas multiplicationes decem virtualiter, & licet inter 2. & 1024. nõ sint interpositæ actu, intermediant, tamen virtualiter, & potuissent describi. Sic autem instituendus alius ordo; nam numerus 1024. in se multiplicatus dabit numerum primum, cuius logarithmus naturalis erit 20. & hic primus in se multiplicatus numerum

merum secundum; cuius logarithmus erit 40. & hic secundus in se multiplicatus dabit alium numerum tertium, cuius logarithmus erit 80. & tandem hic cum primo multiplicatus exhibebit numerum, cuius index erit conflatus ex summa logarithmi primo, & tertio applicati, nempe 20. & 80. Vnde erit 100. significabitque vltimum numerum productum continere multiplicationes 100. numeri 2. Veruntamen iuxta praeced. prop. non quaerimus hic ipsum numerum; sed solum notarum, vnde non erit necesse singulas figuras multiplicare, cum singulis omnibus; sed solùm aliquas ad sinistram.

			Propor.	Logar.	Fig. num.
			1	0	
			2	1	
			4	2	1
			16	4	2
			2c5	8	3
			1nc4	10	4
			1048576	20	7
		10	9511627776	40	13
	1c089	3581961463	00000.00000	80	c5
1	3676506002	28c3000000	00000,00000	100	31

THEOR. VI. PROPOS. XXXVI.

Licet numeri naturali ordine progredientes proportionales continuè non sint, adhuc tamen in aliqua magna serie; vbi differentiæ sint paruæ poterunt proximè, vt continuè proportionales vsurpari.

CErtum est, quod minimi numeri in serie continua proportionalium non sunt, & ideo, quod logarithmi illis applicari nequeũt, ex praeass. 3. Expens. 2. huius: at si statuantur, & considerentur in aliqua magna progressione existentes, vt in serie successiua proportionatorum Tabulæ primæ primi ordinis exp. 2. huius, tunc poterunt reperiri proportionales, qui propinquissimi sint numerorum naturalium proportionibus: quia scilicet, cùm illæ numerosissimæ progressiones interualla insensibilia respectu totius termini habeant incidet aliquis proximè V. g. vt numerus naturalis 9. ad 10. sic in præcitata tabula 2. praecit. proportionalia 9043820. ad 10000000. se habent proximè, vt 9. ad 10. spretis diferentijs 43820. sic 8016305. se habet ad 10000000. vt 8. ad 10. & si minores differentiæ essent electæ in maiori numero adhuc proportio V. g. 8016305. ad 10000000. magis accederet ad proportionem 8. ad 10. quia partes adhærentes 16305. minores essent: Quare patet, quòd numeri naturales in aliqua magna serie continua reperiri poterunt, vel ijdem aliqui, vel saltem proximè.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Numerorum ab 1. vsque ad 10. logarithmos reperire.

STatuatur logarithmus numeri 1. cifra, & numeri 10. maximus aliquis numerus sit logarithmus 1,00000 00000 si isti extremi 1. & 10. in aliqua magna serie numerorum proportionalium intelligantur, & imaginentur descripti, vtpote oportet concipere ob logarithmum maximum denarij, quem elegimus 10000. 00000. Oportebit fateri in illa serie adeò magna reperiri tales proportionales, & insensibili differentia dissideant ab ea proportione; quam habent numeri naturales ad denarium s. erit numerus aliquis proportionalis ex praec. qui se habebit proximè saltem, vt 8 ad 10. item alius, qui se habebit, vt 9. ad 10. item, qui se habebit, vt 5. ad 10. parua differentia, & insensibili interueniente. Horum itaque proportionalium perquirendi sunt logarithmi, licet ipsi proportionales, nobis noti non sint.

Quoniam iam nouimus datis duobus numeris, & alterius logarithmo, alterum inuenire, absque alia cognitione proportionalium e cui respondent ipsi logarithmi ex propos. 33. ideo ex eius documentis primo multiplicabimus ipsum numerum in se, & in productum deinde geniti habeant illum logarithmum iam cognitum. Verùm, quia illa multiplicatio, quæ esset 100000. 00000 cum ipso primo termino, nempe tot, quot vnitates in logarithmo dato inueniuntur est moraliter impossibilis. Ideo scias, quòd cum continuata diuisio, quoad fieri possit, deinde sit instituenda per denarium, ad reperiendum numerum proportionalium, & denarius ex 29. prop. h. toties diuidat, quot sunt ipsę notę in ipso numero vnâ demptâ; iden solus numerus notarum nobis est necessarius, numerus inquam notarum, seu figurarum, quę vltimum numerum proportionalem correspondentem logarithmo denarij integrant, & describunt. Id verò consequemur ex propos. 35. huius, & quia

qua-

quatuor proportionslibus peruenimus ad denarium logarithmirum, & alija quatuor ad centenstenarium;quatunr quoque ad millenarium, & sic consequenter, Ideo 4t. proportionalibus peruenirmus ad logatithmum 100000. 00000. ipso primo uumero 2. comprehenso.

Igitur, rum illius vltimi per 33. propos. huius nesciamus quidem numerũ, sed solùm notarũ,quę ipsum confiriunt, quas (si ronfirias progressionum modo ibl tradito) inuenlres esse 30102. 99956. 63. Ideo, si ille vltimus ignotus diuideretur per 10. quoties fieri possee, essent quoti, & proportionales einsdem numeri, minùs vna cuius notæ, & figuræ sunt, nempe 30102. 99956. 62.

Sed ex propos.30. ista diuisio per proportionalem datum 10. quæ fit vltiml termini ex 2. toties geniti, donec obtinear eundem logarithmum denario assignatum, ista inquam diuisio per 20 dat logarithmum ipsius numeri dati 2.cuius quęrimus logarithmum; Ergo logarithmus eius erit Inuentur 30102. 99956 62. & sic fariendum ad Inueniendum logaritmum numeti 3. & ręterorum simplicium vsque ad 10. relictis tamen, qui duplam, vel triplam proportionem dicuntad 2.& 3. vt 4.8. 6.9. de quibus Infra.

Exemplum septenarij.

1	0	
7	1	21
49	2	4
2401	4	4
4764901	8	7
282475249	10	9
79792266 29761 200	20	17
636980 57609000. &c.	40	34
4053621 559000.&c.vsq; ad 68. n.	80	68
323447650. & ręt. vsque ad 85. notas	100	85

Et sic prosequere vsque ad logarithmum denarlj.

Aduerte verò plurimas notas maximè in primis nameris esse multiplicandas, Imo omnes in primis vsque saltem ad logarithmum 20. nam error, qui in principio est vnius notæ fit notarum plurimarum; Sic in istis proportionalibus à numero 2. exortis vnitas prætermissa in numero 1023. causabit in notis logarithmiris 1000. defectum vnius vnitatis, qui defectus excrescet in immensum, vnde in principio multa adhibita diligentia agendũ est, vt præcisus notarum numerus possit obtineri.

Tabula falsa:		A
1023	10	4
1046529	20	7
1095223	40	13
1199513	80	25
1255332	100	31
1575870	200	61
2483363	400	121
6167075	800	241
9718508	1000	301

Hae itaque ratione inuenientur numeri 2.3.5.7. logarithmi, quod satis erit ad alios inueniendos, etnntque, vt in sequenti tabella.

Logarithmi numerorum ordine naturali progredientium intermisso 4.6. 8. & 9. numero.

1	0^0000. 00000
2	030102 99957
3	047712.12547
5	069897.00043
7	084509. 80400
01	100000. 00C00

PROB. VI. PROPOS. XXXVIII.

Numerorum, qui ex datorum simplicium multiplicatione prodeunt, logarithmos inuenire.

INuentis primorum numerorum positorum ab 2. vsque ad 10. logarithmis facile est compositorum logarithmos inuenire ex propos.25. Nam quia numeri, qui ex multiplicatione duorum numerorum resultat, logarithmus est ille, qui ex eorum logarithmorum additione prouenit; si ergo desideras logarithmum numrri 4. qui resultst ex multiplicatione 2. & 2. adde logarithmum numeri 2. Ipsi logarithmo, idest duplica illum, & erit 6020599913. logarithmus numeri 4 Sic si addas logarithmum numeri 2. logarithmo numeri 3. erit numeri 6. logarlthmus 7789151504. Ita si cupias logarithmum numeri 8. addes logarithmum numeri 4. numero 2. & erit 9030899870. & tandem duplirando logarithmum numrei 3 habebis logarithmũ numeri 9 qui est 9542425094. & ne dum istos; sed omnium etiã, qui ex multiplicatione horum proueniunt addendo simul multiplicatorum logarithmos, vt numeri 12, 14. 15. 16. 18. 20. & ręt.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIX.

Alios numeros quoscumque primos super denarium inuenire.

NOn alio modo inuenientur, quàm eo, quo duenari, vel ternarij, vel simplicium in compositorum logarithmos inuenimus.

Sit ergo inueniendus logarithmus, vndenarij dato logarithmo denarij. Multiplicetur in se, & in productum ter; & deinde primum productum multiplicetur cum vltimo producto, & fiet ordo, cuius logarithmus est 10. & numeri notarum 11. erunt. Sicque fiat consequenter donec denarij consequaris logarithmum 100000. 00000. & numerum figurarum illius vltimi termini, quem num. fig. diuides continuè per datum numerum denarij, quod fit auferendo vnam tantum vnitatem, & ille erit logarithmus vndenarij, nimirum 1.0413926852.

Et hic habes exemplum, in quo solummodo quatuor notas multiplicauimus sinistras; quamuis quinque, vel sex ad obtinendum numerum uotarum, certum, & exactum essent multiplicande ad minus in principio.

Numeri multipl.	Logarith.	Num. fig.
1	0	
11	1	2
121	2	3
14641	4	5
21435888 1	8	6
25637424601	10	11
672727969. & cęt.	20	21
4525521984	40	42
2048015025	80	84
1377730560	100	105
189805729	200	209
360240400	400	415
1297008196	800	834
246170600	1000	1042

Et sic prosequere vsque ad 41. multiplicationes singulis multiplicationibus figurarum numerum apponendo, & suos logarithmos; donec logarith. 100000. 00000. qui est denarij consequaris.



TRACTATVS XXII.

De Interfectionibus Planorum.

LIneas vſque adhuc in plano exiſtentes conſiderauimus: modo eas in corporibus ipſis, tanquam eorum ſectiones animaduertimus vt in ſphæricis Theodoſij, Coniciſque Apollonij concipiendæ ſunt. Vnde in primis ſectiones planorum: quæ lineæ rectæ ſunt in hoc Tractatu oportet ſpeculari; de quibus agit Euclides ad initium 11. Sed eorum animaduerſio nobis hoc loco eſt neceſſaria.

EXPENSIO I.

Principia exhibentur.

QVoſdam ante omnia declarare terminos oportet, vt ritè concipiantur. Vnde ſit.

DEFINITIO I.

Linea recta plano orthogonalis eſt: cum omnibus lineis eam tangentibus, & in eodem dato plano exiſtentibus perpendicularis eſt.



Sic ſi linea IB cum omnibus AI, & IB, IG, & IC, & cæt. eam tangentibus in I perpendicularis eſt, etiam plano CABG, in quo illæ ductæ ſunt, perpendicularis erit.

DEFINITIO II.

Planum ad planum rectum eſt; cum qualibet linea recta in vno plano exiſtens, & orthogonalis ſectioni, omnibus lineis eam contingentibus, quæ in altero duci poſſunt, perpendicularis eſt.



Sic, ſi linea AB perpendicularis ſectioni CD in plano CDA exiſtens ſit perpendicularis lineis OS, IB, & BQ. Planum CDA erit perpendiculare plano MN, in quo illæ ductæ ſunt.

DEFINITIO III.

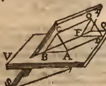
Recta linea ad planum inclinatio eſt angulus acutus, quem illa facit cum rectâ in plano illo exiſtente in perpendicularem illã terminante, quæ e b aliquo ſublimi puncto inclinantis linea cadat.

Sic angulus ABG eſt angulus inclinationis lineæ BA ad planum VT, quòd eo angulum claudens recta tur in G, cum perpendiculari GA, quæ ab aliquo ſublimi puncto; nempe ab A lineæ inclinantis BA cadit.



DEFINITIO IV.

Plani ad planum inclinatio eſt angulus acutus rectis contentus, quæ in vtroque plano ad idem ſectionis punctum ducta, rectos cum ſectione angulos efficiunt.



Si itaque AB, & AC ſint perpendiculares ſectioni BF, & conueniant in punctum B angulus earum ABC dicetur inclinationis angulus planorum VQ & SX.

DEFINITIO V.

Planum ad planum, & linea ad lineam ſimiliter inclinata dicitur, cum prædicti inclinationum anguli ſunt æquales.

EXPENSIO II.

De linearum cum planis habitudine.

CVm ſectiones planorum ſint rectæ quædam lineæ, operæ pretium videre priùs eſt, quomodo rectæ cum planis ſe gerant, ad hoc, vt deinde meliùs planorum ſectiones cognoſcamus.

THEOR. I. PROPOS. I.

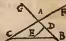
Rectę eiusdem lineæ pars non est in sublimi, altera super planum extensa.

SI plano AC aliquis cogitet ducere lineam, quæ partem extensam habeat in eo, quæ BO; & altera BM eleuetur ab ipso, is fallitur. Nam producta, in ipso plano parte BO, versùs Q, duæ rectæ MS, & QB idem haberent segmentum BO, quod absurdum est, & contra pronunciatum 10. lib. 1. elem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si duæ lineæ se mutuò secent, in vno plano sunt, & omne triangulum rectis constitutum in vno plano est.

SIt triangulum ABC quoddam lineis rectis constitum, & concipiatur, tanquam si nullo plano inhæreret, Dico; *quod si plano superponatur ipsi superextendetur ita*, vt secundùm se totum illi insit, & tangat. Nam si non secundùm se totum tangeret, pars quædam V. g. SDE eleuaretur à plano; Ergo, & lineæ AB rectæ pars AD esset in subiecto plano, pars altera DB ab eo eleuaretur, contra præcedentem propos. & sic dicas de linea BC, quæ parte CE tangeret planum, parte EB in sublime fereretur.



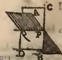
Probatur altera pars, quæ priùs proposita est. Nam in quo plano est triangulum sunt eius latera AB, & AC; in quo verò sunt latera sunt ea quoq; latera ipsa etiam si producantur in F, & G; alioquin lineæ rectæ pars CA esset in plano, pars AF esset in sublimi, quod impossibile est: Quare totæ in plano extendentur, quod vult propositio.

THEOR. III. PROPOS. III.

Omnis planorum mutua intersectio linea recta est.

SEcent se mutuò duo plana AB, & CD in PQ. Dico *hanc sectionem PQ esse lineam rectam.*

Quòd si recta non credatur erit curua: quia verò sectio à superficie amborum planorum secantium suboritur, hæc curuitas orietur à plano AB, vel à plano CD, & sic alterū eorum curuum erit, vel ab vtróque, & sic ambo curua erunt. Nam curua erit ea superficies, in quo vndiq; recta extendi nequit. In situ verò sectionis duo

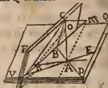


puncta necti possunt recta PQ, quæ non tangeret superficies illas, cum in loco sectionis curuentur cum ipsa sectione in eis existente, vt aduersarij volunt.

THEOR. IV. PROP. IV.

* *Si recta perpendicularis alteri lateri angulo inclinationis alicuius plani justernatur ea erit perpendicularis illi lineæ, & alteri, cuicumque in eodem plano existenti.*

SIt angulus inclinationis CBA, & illi substernatur AC perpendicularis lateri AB; Dico, & hanc esse perpendicularem lineę cuicumque in eodem plano QV existenti.



Assumatur in sectione BX æqualis CA, & ducatur AX ad sectionem, & CX.

Probatur itaq; primò AC etiam esse perpendicularem lineæ AX. Nam angulus CBX, vtpote sectionis rectus est definit. 4. sicut, & BAC angulus ex hypothesi; latus verò AC est æquale ex constructione cruri BX, at crus AB est commune; ergo duo triangula ABC, & ABX erunt æqualia. Vnde, & bases AX, & BC erunt æquales ex 22. primi Elem. Et ideo duo alia triangula ACX, & BCX erunt quoque æqualia; Habent enim ex præced. argumento crura AX, & CB æqualia; crura verò AC, & BX ex Hypothesi sunt æqualia; basis vero CX communis; vnde ex 83. primi Element. anguli CAX, & XBC erunt æquales; sed angulus XBC rectus est, vtpote sectionis BX cum linea inclinationis BC ex definit. Ergo angulus quoque XAC rectus erit.

Probatur autem etiam de lineis quibuscumque. Nam certum est primo esse quoque perpendicularem lineis AD, & AB productis; cum enim XAC angulus sit rectus, ex 10. primi, etiam BAC rectus erit; & eadem ratione cum BAC sit rectus etiā CAD rectus erit. Idē quoq; argumētū poterit fieri de triāgulo AMC; si fiat, vt superiùs BM ęquale crui perpendiculari AC, & deinde eodem modo probando MAC triangulum esse æquale triangulo BMC, & ideo, quòd angulus MAC sit rectus, vt est MBC.

At si manentibus ijsdem omnibus angulus inclinationis plani intelligatur deprimi, vel ipsum planum, & secare eandem perpendicularem in O; si lineæ AO fiat æqualis BN, & ducatur AN, idem argumentum valebit. Nam adhuc rectangula triangula ABN, & ABO erunt æqualia ob idem latus AB, & duo æqualia crura AO, & BN: Propterea triangula quoque OAN, & AON erunt æqualia. Namq; ob basim communem ON, crus AN cruri BO ostensum æquale, & crus AO, & BN ex hypothesi æquale, æqualia quoque erunt triangula OBN, & AON. Vnde cum NBO sit rectus angulus, etiam NAO erit angulus rectus, & sic poterit ostendi de qualibet alia linea.

CO

COROLLARIVM.

HInc elici poteſt: Quod, ſi linea aliqua recta ſit perpendicularis duabus rectis angulum facientibus in aliquo plano, vt AC lineis BA, & AX hęc eidē plano ſit perpendicularis; ſiquidē oſtenſum eſt, talē eſſe omnibus alijs lineis in eo plano exiſtentibus, & eam in A contingentibus. Vnde ex defin. 1. plano quoque VQ erit perpendicularis.

COROLLARIVM II.

DEducitur quoq; eadem ratione lineā CA lateri BA anguli inclinationis perpendicularem, etiam eſſe perpendicularem plano, in quo latus, triangulumque ABC, perpendiculariter inexiſtit, & extenditur. Planumque trianguli CAB inclinationis eſſe quoque plano PS, & QV vtrique perpendiculare.

COROLLARIVM III.

LIneam in plano inclinato, plano, cui inclinat parallelam, eſſe quoque parallelam ſectioni eorundē planorū colligo ſi V. g. linea CP ſit plano QV parallela; eſſe quoque parallelam ipſi ſectioni MX. Ratio eſt, quia illa CP erit rectangula perpendiculari CA, & plano trianguli CAB: Ergo etiam lineæ CB, & ideo æquidiſtans lineæ BX; quę tidem CB eſt perpendicularis.

THEOR. X. PROPOS. V.

Si linea recta tribus rectis ſe mutuò tangentibus perpendicularis ſit, illæ tres rectæ in eodem plano erunt.

SIt linea AB perpendicularis tribus BC, & BD, & BS. Dico eas *eſſe in eodem plano* VQ.

Probatur. Nam, ſi aliqua ex ipſis non eſſet V. g. BS; ſed eleuaretur à plano, vt eſt punctata BS: ducatur per AB, & punctatā BS planum BR. (quod poteſt eſſe ex prop. 3. eum productæ ſe ſecent in B) quod ſecabit planum VQ infra punctatam, quæ ab aduerſarijs aſſeritur ab illo plano VQ eleuata; & ſectio erit BE; cui BA erit perpendicularis; cum duabus BC, & BD perpendicularis ponatur, & ideo ex Coroll. 1. anteced. propoſ. etiam plano per eas ducto VQ, & conſequenter ex defin. 1. etiam lineæ BE. Quare eſſet angulus quoque ABE rectus, vt eſt angulus ABS ex hypotheſi, & ideo pars anguli ABS eſſet æqualis toti ABE; quod eſt abſurdum.



THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ lineæ ab eodem puncto ſectionis incipiant, in perpendicularemque plano terminent; ſi vna erit orthogonalis ſectioni, & altera talis erit.

SIt AB in eadem figura propoſ. 4. perpendicularis ſectioni BX in plano QV, & à puncto B ſectionis BX in ipſam terminent duæ rectæ; nimirum AB in A, & BC in C. Dico, *quòd, ſi vna V. g.* AB *erit perpendicularis ſectioni* BX, etiam altera CB *ſi*-*dem ſectioni* BX *orthogonalis ſit*.

Aſſumatur itaque in ſectione portio BX æqualis perpendiculari AC, & ducatur à puncto C recta CX, & à puncto A recta AX, quo facto, ſic.

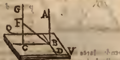
Probatur. Ex progreſſu 1. Triangulum ABC eſt æquale triangulo ABX: Nam angulus ad A rectus eſt ob perpendicularem, & angulus ad B ex Hypotheſi, crus AB commune; crus verò AC ex conſtructione æquale cruri BX. Vnde ex 32. primi Element. erunt æqualia hæc triangula ABC, & ABX, & baſis quoque AX erit æqualis baſi CB.

Progreſſ. 2. Hinc autem rurſus arguitur triangula CBX, & CAX eſſe æqualia: Nam baſis AX eſt communis, BC crus in primo progreſſu cruri AX oſtenſum eſt æquale, crus verò AC ex conſtructione cruri BX. Vnde cum omnia latera quodlibet ſuo correſpondenti, ſint æqualia; triangula ipſa CAX, & CBX erunt æqualia: quare habebunt quoque angulos æquales; ſed angulus CAX ob perpendicularem rectus eſt: ergo, & angulus CBX; quare recta quoque CB incidit in ſectionem XB orthogonaliter.

THEOR. VII. PROP. VII.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano perpendiculares ſint, Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SInt duæ rectæ lineæ AB, & CG eidem plano QV perpendiculares. Dico *eas eſſe quoque parallelas*. Puncta B, & C connectantur, cui fiat perpendicularis alicuius plani ſectio DB; hæc etiam erit perpendicularis lineæ ductæ BF à puncto B ad perpendicularem DC ex præc. hinc autem



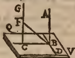
Probatur propoſ. Linea DB eſt perpendicularis tribus AB, & BF, & BC; ergo tres iſtæ ex propoſ. 5. ſunt in eodē plano; ſed etiam ex pr. 2. in eodem eſt GC, in quo reperitur BC, & BF: Ergo omnes quatuor ſunt in eodem plano: Sed anguli ABC. & BCG ex def. perpendicularium ſunt recti. Ergo ex 28. primi duæ AB, & CG ſunt parallelæ, cum faciant ipſi BC angulos rectos, & in eodemq; plano exiſtere ſit oſtenſum.

THEOR.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Si duæ parallelæ rectæ lineæ insistunt eidem plano, quarum vna sit perpendicularis, altera quoque talis erit.

Sint rectæ BA, & GC parallelæ ex def. parallelarum erunt in eodem plano extensæ si sit vna normalis V.g. GC. Dico itaque, quòd etiam BA talis erit. Connectatur B, C linea BC, cui fiat perpendicularis DB; ducaturque BF, & BB ex præc. BB erit etiam rectangula lineæ DB.

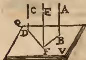


Vnde Probatur linea DB est ad angulos rectos lineis BC, & FB, quæ ex 2. huius sunt in eodem plano; ac linea CG; at hæc est in eodem plano ob parallelismum præsuppositum, ac linea AB: Ergo linea AB est in eodem plano, ac duæ BF, & BC; sed linea DB est perpendicularis duabus FB, & BC angulum in B facientibus. Ergo, & plano, in quo sunt ex Coroll. 1. prop. 4. huius: Ergo ex defin. etiam lineæ BA, cui etiam ad angulos rectos est BC, siquidem GCB est angulus rectus, quòd GC sit perpendicularis, quare ex 32. primi etiam ABC erit angulus rectus: Cum ergo linea BA insistat duabus DB, & BC ad angulos rectos erit quoque ad angulos rectos toti plano QV ex propos. 4. huius, Coroll. 1.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, licet non in eodem cum illâ plano, etiam inter se sunt parallelæ.

Sint duæ AB, & CD eidem lineæ EB parallelæ, dico illas quoque inuicem esse parallelas.

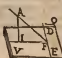


Nam ducantur à puncto F duæ perpendiculares FD, & FB ipsi EF ad lineas CD, & BA hæ perpendiculares erunt in eodem plano VQ ex Coroll. 1. propos. 4. h. Quare ex propos. præced. eidem erunt perpendiculares BA, & CD, quod sint parallelæ perperdiculari FB: quare ex propos. 7. inuicem quoque erunt parallelæ.

PROBL. I. PROP. X.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

Ducatur AF à puncto dato A in subiectum planum, vtcumque, & per F ducatur ED ipsi AF perpendicularis, & huic à puncto E ducatur perpendicularis EI ex 8. primi, cui ducatur perpendicularis AI ex 9. propos. 6. à puncto A. Dico hanc esse perpendicularem plano QV.



Probatur. Nam AFI est angulus inclinationis planorum, in quibus sunt, hinc crus AF, inde FI, & DE erit linea sectionis. Quòd AF, & FI perpendiculares ipsi sint: quare ex Coroll. 2. propos. 4. erit quoque perpendicularis ipsi plano; cùm ducta sit perpendicularis lineæ FE.

PROBL. II. PROPOS. XI.

A dato puncto in plano ad idem planum rectam excitare perpendicularem.

Fiat angulus inclinationis in præced fig. plani AFI ducto priùs à puncto F crure FI: deinde ei ducta sectione perpendiculari ED, cui excitetur à puncto F perpendicularis FA, ex 8. primi, eruntq; FA, & FI in eodem plano: In hoc igitur plano ducatur ab I perpendicularis IA, & hanc dico esse quoque perpedicularem planu QV.

Probatur. Quia est perpedicularis FI cruri anguli inclinationis AFI: vnde ex Coroll. 2 prop. 4. erit etiam perpendicularis plano QV.

EXPENSIO II.

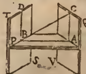
De Planorum intersectionibus.

Visis correspondentijs linearum non in eodem plano existentium restat, vt modo ipsas planorum intersectiones intueamur.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Quæ plana eandem rectam perpendicularem habent, illa parallela erunt.

Sit linea AB perpendicularis vtrique plano QV. & TS. Dico *plana esse parallela*, idest in infinitum producta nũquam se secare.



Nam si dicatur inclinare inuicem, ad eam partem, in qua inclinant, ducatur in plano vtrolibet V.g. ST recta AD à puncto verò B ipsi BD ducatur normalis BP, & huic

pp normalis BC, & tandem conuectatur AC. Istæ AC, & BD lineæ etiam rectæ AB erunt normales ex 7. huius. Sed sunt in eodem plano. Ergo etiã erunt parallelæ.

Quod verò sint in eodem plano ostenditur, nam linea AC ex propof. B. est in eodem plano, ac triangulum ACS: Tres verò AB, & AC, & BO sunt in eodem plano ex propof. 5. quòd sint lineæ BP perpendiculares: Vnde, & AC, & BO in eodem plano erunt, quare

Probatur propof. AC, & BD sunt parallelæ in eodem plano, ergo nunquam conuenient, quare nec plana QV, & TS; in quibus sunt.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Si duæ rectæ se mutuò tangentes ad duas se mutuò tangentes sint parallelæ, & non in eodem plano; plana etiam in quibus sunt; erunt parallela.

SInt duæ AB, & PL parallelæ, quæ tangent duas AC, & PQ parallelas item inuicem: dico *plana, in quibus sunt* QR, *&* XL *esse parallela*. Quod, vt ostendatur; ducatur AD, plano XL perpendicularis, quæ inpingat in planum RQ; vel enim cadet in P, vel extra, vt in D. A puncto D ducatur parallela DF ipsi RP. & ab eodem puncto D alia parallela DE lineæ PQ, quo facto sic.

Stat demonstratio, quoniam DF lineæ PL ex constructione, & eidem ex hypothesi est parallela BA, erunt duæ AB, & DF inuicem parallelę; sic quia DE ex constructione est parallela lineæ PQ, cui ex hyp. AC parallela est ex 9. h. inuicem quoq; AC, & DE parallelæ erunt: Quoniam itaq; BAD, & CAD rectus est, erit etiam rectus ex prop. 19. primi angulus ADF, & ADE: Quare AD plano PQ ex Coroll. propof 4. huius erit perpendicularis: Vnde ex anteced. plana erunt inuicem parallela.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur, communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SInt duo plana parallela A, & L, quæ plano QI secentur. Dico *sectiones* BD, *&* CI *esse parallelas*.

Ducatur enim sectioni BD perpendicularis MN in plano QI, incidet in sectionem plani QI; quæ est CI, si opus sit, producti, vel ergo MNC erit angulus rectus, & sic OB, & CI erunt parallelę, vel minor recto; & sic planum LC ad partes C alteri plano BA vicinius erit; ergo non parallelum contra hypothesim, vel maior recto, & sic MNI erit acutus angulus. Vnde contra rursus hypothesim ad partes L planum LD alteri AB magis appropinquabit: Quare necessariò MNC rectus angulus erit. Vnde cum alterni anguli AMN, & MNC sint æquales ex 28. primi erunt parallelæ BD, & CI.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos; & omniaque per ipsam plana ad rectos angulos erunt eidem plano.

SIt recta AB plano cuipiam QV orthogonalis. Dico, *quod omnia plana, quæ per ipsam ducuntur eidem plano ad rectos angulos sint*. Ducatur itaq; per ipsam planum HISA, & in ipso parallela HI, vel alia quælibet parallela.

Probatur. Quia HI est in eodem plano, & parallela AB erit quoque plano QV perpendicularis ex 8. huius, & sic de quacunque alia: quare planum AIBH plano QV erit orthogonale. Quod si duceas per AB, aliud quodcunque planum eadem demonstratio erit.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Si duo plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos angulos erit eidem plano.

SInt in plano QV duo plana SP, & RT ad angulos rectos; quę se secent in AB. Dico *sectionem* AB *plano* QV *perpendicularem esse*.

Probatur. Nam SB, & BT sectionibus perpendicularis est BA. Ergo ex Coroll. propof. 4. perpendicularis est ad planum QV. Quòd sit perpẽdicularis dua bus SB, & BT: sic ostenditur. Nam planum RT rectum est ad planum QV. Ergo omnia eius vbique superficies talia erit. Ergo talia erit in sectione SA, quare eius sectio SA, nec inclinabit versus S; neque ad alteram partem, sed rectangulis super SA consistet.

Quod autem talis sit respectu BT etiam ostenditur eodem modo, quia planum SP rectum est: ergo eius sectio non inclinabit versus T, sed recta super BT consistet.

THEOR.

plicari, prò vt infinitæ ellipses in cono assignari possunt, sicus, & earum centra.

DEFINITIO IV.

Conus rectus est, cuius linea circumducta efformatrix vbique æqualis est; Scalenus verò cuius ea linea inæqualis est.

Duplicem itaque conum distinguimus rectum, qui, & isoscelius, æquicrurisque appellatur, & Scalenum, qui obliquus quoque apellatur; hic imperfectior est, vtpote duplici axi obnoxius, ille perfectior, & vnius axis: Cæterum in vtroque omnes coni sectiones exhiberi possunt, non vt antiquitas ante Apollonium Pergæum putauit, quæ distinxit tria conorum genera iuxta tres angulorum species, quas à vertice D rectæ ad basim deductæ continere poterant, nempe Rectos ob angulum ad verticem rectum; Obtusiangulos ob angulum obtusum, Acutiangulos ob angulum acutum, in quibus singulis vnicam sectionem ponebant. In recto parallelam, quam apellabant coni recti sectionem in acutiangulo, ellipsim, quam acutianguli, & in obtuso hiperbolem, quam obtusianguli sectionem nominabant.

DEFINITIO V.

Coni oppositi sunt ad verticem circa eundem axem existentes.

Tales sunt ABC, ADE in fig. 2. circa axem eundem positos.

DEFINITIO VI.

Coni sectio est figura à plano diuidente conum in superficie coni effecta.

DEFINITIO VII.

Sectio coni per axem est cum planum secans per verticem, & per centrum circuli transit.

Sectio itaque per axem est DHC in fig. 1. quæ per centrum I, axem ID & per D verticem transit, estque triang[illegible] suo loco ostendemus.

DEFINITIO VIII.

Coni sectio Parabola est cum planum secans parallelum vni lateri sectionis per axem adigitur.

Vt in 1. fig. vox planum est parallelum lineæ CD, quæ est crus trianguli, vel sectionis per axem CDH.

DEFINITIO IX.

Coni sectio Ellipsis est, cùm planum secans vtrunque crus, sectionis per axem, secat, & angulos inæquales efficit illis, quas cum prædicta sectione basis circularis facit.

Sic sectio AGHF, quia angulus DFS, est inæqualis angulo DKI, vel alterno DIK; Sic, & angulus DSF est inæqualis angulo DIA, vel angulo DAS alterno, vt in fig. 3. vocatur ellipsis. Si autẽ angulus [illegible] angulo DKI, vel DFA angulo DIA alterno, vel [illegible] contrario, vt in 4. fig. æquatetur, sectio esset ci[illegible], [illegible] suo loco ostendemus Tract. seq.

DEFINITIO X.

Hyperbola est, cum sectionis planum alteri sectionis per axem cruri ad verticem producto occurrit.

Sic in fig. 2. si GI productum occurrat CA cruri producto vltra verticem in L, dicetur ea sectio Hyperbola qualis est OIN, & si planum secet vtrunque conum ad verticem erunt oppositę figuræ, seu Hyperbolæ.

DEFINITIO XI.

Diameter sectionum est recta diuidens lineas parallelas quaslibet, quæ ducuntur intra sectionem bifariam, & primarius quidem, seu axis, qui rectangulè diuidit, alij autem vocantur coniugati axes.

Sic et in fig. 6. vocatur principalis, & ex generatione diameter primarius, seu axis, quia diuidit bifariam, & orthogonaliter rectas in sectione ductas, quæ dicuntur ordinatæ ad diametrum, seu applicatæ HM, & NV, si verò non ad angulos rectos erit diameter secundarius, seu coniungatus vt in fig. 5. EP, qui LT, & VM licet bifariam diuidat, non tamen ad rectos angulos.

DEFINITIO XII.

Transuersa diameter est illa, quæ inter duo crura trianguli per axem intercipitur.

Talis est in Hyperbola THL, quæ inter crura sectionis per axem AA, & AE intercipitur, & in hac sectione est diameter prolungata; At in ellipsi est ipse diameter absque vlla prolungatione, vt EP in fig. 3. qui si sit primarius, seu axis dicetur transuersus axis. At in parabola nullus est trasuersus diameter, cum enim eius sectio sit parallela vni cruri sectionis per axem, nunquam potest in aliud terminare, quare nec vlla linea in ea poterit in vtrumque crus sectionis per axem incidere.

DEFINITIO XIII.

Vertex sectionum est extremum diametri, cuiuscumque: at vertex supremus extremum axis.

DEFINITO XIII.

Centrum est, quod transuersam diametrum bifariam diuidit.

Punctum, quod transuersum diametrum bifariam discepsit, vocatur centrum, quia in Hyperpebola, vel Ellipsi omnes diametri ad illud punctum concurrunt, at Parabola nullum habet centram, quod diametri omnes sint paralleli, vt ostendetur.

Pręter hęc essent Parametri, & Vmbelici definiendi: sed melius suo loco cum de ijs agemus, natura ipsorum inotescet,

DEFINITIO XVI.

Duæ similes figuræ sunt, quæ cum sint eiusdem speciei segmenta diametrorum ab applicatis facta vnius ad segmenta alterius sunt, vt applicata ad applicatas sub æqualibus angulis.

DE-

DEFINITIO XV.

Æquales sectiones sunt, quæ superposita inuicem conseruantur.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio Coni per axem facta triangulum est.

PRobatur. Nam triangulum est illud, quod rectis clauditur, & tribus angulis constat; In cono autem omnes lineæ terminantes ad verticem rectæ sunt ex def. Cum verò basis sit plana superficies circularis erunt rectæ lineæ per illam extensæ, vnde AB, & EA, & SA tres rectæ erunt. Propterea que tres tantum angulos se tangendo poterunt efficere, ideoque AEB erit triangulum in fig. propos. sequentis.

COROLLARIVM.

HInc que est, quod si fiat alia sectio per axem efficietur aliud triangulum æqualis basis, vt primum. Nam altera sectio per axem EF incidet in centrum F, & rectæ CF, & FD radij erunt in circulo ACBD, vt sunt AF, & FB.

THEOR. II. PROPOS. II.

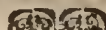
Omnis sectio coni circularis parallela basi circulus est.

PRobatur. Nam cum plana sint æquidistantia erit, vt FB ad OE, sic CD ad LI, & AB ad MK; quare CD ad LI, & AB ad MK erunt in eadem proportione. Ideoque permutando AB ad CD erunt, vt MK ad LI, & ideo dimidiæ AF ad FC vt MO ad OL dimidis: sed AF, & FC sunt æquales ex præced. Coroll. ergo etiam MO, & OL, & ita dicas de reliquis: quare cùm omnes MO, & OL, & cæt. à puncto O ducibiles sint æquales; MIKL erit circulus.

EXPENSIO II.

De Diametro, & Applicatis.

PRoprietates mirabiles sectionum ab ipso diametro, & applicatis incipiunt, vtpote illę, quę magis obuiam sunt, & faciliores intellectui se produnt, maximè quia ferè omnia, quæ de sectionibus dici possunt, in diametro, & applicatis fundantur.



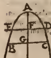
PROBL. I. PROP. III.

Data quacumque coni sectione eiusdem diametrum inuenire.

SIt data quæcumque coni sectio BAC. Oportetque eiusdem diametrum exquirere.

Ducantur, vtcumque in sectione binæ rectæ parallelæ BC, & DE; quæ bifariam secentur in F, & G, ductaq; per puncta diuisionum linea FG occurrat sectioni in A. Dico *rectam* AFG *proposita* BAC *sectionis esse diametrum*.

Ratio est. Quia æquidistant DE, & BC; easque bifariam diuidit in G, & F recta AGF. Vnde ex definitione II. erit diameter.



PROBL. II. PROPOS. IV.

Dato triangulo per verticem, & sectionis diametro Applicatæ longitudinem inuenire.

SIt ABC triangulum per axem coni ductum in fig. prop. seq. in quo detur diameter EG. Interuallo dimidiatæ ML diametri baseos, fiat circulus CF, AD. Accipiesq; EK, quam transferes in diametrum circuli CB à puncto G duces perpendicularē, quę sit DGF, & FD erit applicatę magnitudo; quam deinde applicabis diametro sectionis EG interuallo eodem KE in quacumque sectione, vel Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipsi, & erit applicata.

Probatur autem facilè. Quia applicata est illa, quæ diuiditur bifariam à diametro: sed punctum G est punctum diametri, illudque bifariam diuidit linea DF in G ex 13. lib. 3. el. cum ducta sit perpendicularis diametro CB circuli DCBF ex constructione. Quare erit applicáta, cùm puncta F, D sint communia circuli BD, & sectionis DEF, & sint I, & V in circulo MILV.

THEOR. I. PROPOS. V.

Si parabolæ cuiuscumque ad diametrum binæ rectæ lineæ sint ordinatim applicatæ, erunt quadrata ipsarum ad inuicem, vt interceptæ diametri portiones inter ipsas, & verticem.

SIt Conus ABC, in quo parabola DEF, cuius diameter parabolica EG; applicatæ verò GF, & IK ad diametrum KG, trahaturque EM. Dico, *ita est quadratum factum ex* GF *ad quadratum factum* ex

et s i, *vt* GK *ad* KS portiones diametri inter verticem s, & ordinatim applicatas interceptæ.

Reminiſcendæ eſt 35. propoſ. Eucl. 3. hæc enim in illa fundatur.

Nam in circulis ex 2. b. LVIML, & CDBF parallelis ſe ſecent mutuò diametri LM, & CB cum chordis VI, & FD, & ad angulos rectos in K (angulus enim K rectus eſt, licet id fig non exprimat) vt ex dictis propoſ. 4. huius. Quare, ex ſegmentis LK, & KM conſtituatur rectangulum, & ſegmentis æqualibus VK, & KI conſtituatur quadratum, erunt æqualia: Sic ſi ex ſegmentis BG, GC rectangulum, & æqualibus DG, & GF quadratum conſtituatur, & hæc erunt inter ſe æqualia. Vnde ita erit rectangulum conſtitutum ex CG, & GB ſegmentis diametri maioris circuli ad rectangulũ ex ſegmentis LK, & KM minoris, vt quadratum ex ſegmẽtis chordæ GD, & GF ad quadratum ex ſegmentis chordę IK, & KV. Sed iſtorum duorum rectangulorum altitudines ſunt eædem; ſiquidem ſegmenta LK, & BG; quia ſunt parallela, & inter parallelas KA, GE ſunt æqualia ex prop. 33. primi. Ergo ſe habebunt inuicem, vt baſes GC, & KM ex propoſ 1. lib. 6. Eucl. Quo ſuppoſito ſic probo propoſitionem ex propoſ. 4. Coroll. lib. 6. ſicut eſt GC ad KM, quæ ſunt parallelæ in triangulo SGC, ita eſt SG ad SK. Sed, vt eſt latus GC ad MK, ita eſt rectangulum ex ſegmentis BG, & GC ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM; & æqualem proportionem dicit hoc rectangulum ex ſegmentis diametri BG, & GC ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM, quam quadratum ex ſegmentis chordę DG, & GF ad quadratum ex chordæ KV, & KI, vt diximus. Ergo ex 16. lib. 5. Elem. quam proportionem dicit quadratum hoc GF ex ſegmentis chordæ maioris circuli GF, & GD ad quadratum ex ſegmentis IK, KV chordæ minoris circuli, eandem dicit GS ad KS portiones diametri parabolici à vertice inter applicatas interceptæ; quòd erat probandum.

THEOR. II. PROPOS. VI.

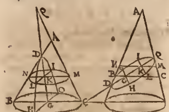
In omni Ellipſi, & Hyperbola quadrata duarum ordinatim applicatarum eam proportionem dicent ad inuicem, quam rectangula portionum diametri interceptarum inter ipſas, & vertices.

Sit conus ABC, ſiue obliquus, ſiue rectus. Hyperbola ODM, vel Ellipſis ODHLIQ, in qui-bus ſint ordinatim applicatæ HGO, & LKI: diametri autem intercepti portiones ſint in ellipſi GD, & GQ, vel QK, & KD intra ipſam. In Hyperbolæ autem extra eam, donec diameter occurrat lateri trianguli CA producto in Q, vt eſt GQ, ita quod GQ, & DG ſint portiones interceptæ, vel QK, & KD.

Dicit itaque propoſitio, *quod ſi fiat rectangulum ex* QK, *&* DK *hoc erit ad rectangulum factum ex* QG, *&* GD *interceptis portionibus tamquam ex duobus lateribus, vt quadratum* KL *ad quadratum erectum ſuper* OH.

Aduertendum verò eſt primo progreſſ. id quod prænotauimus in præced. expenſ. rectangulum factum ex portionibus MK, & KN eſſe æquale quadrato ex KL conſtituto. Sicut, & rectangulum ex lateribus CG, & GB quadrato ex OH confecto, vt probat Eucl. propoſ. 35. lib. 3. & ideo eſſe rectangulum ex MK, & KN lateribus ad rectangulum ex GC, & KG, vt quadratum KL ad quadratum ex GH.

Aduerte, quòd in cono Ellipſis non ſunt deſcripti circuli circa diametros NM, & BC ad vitandam confuſionem; ſed ſunt ſubintelligendi baſi coni paralleli per L, M, O, I tranſeuntes.



Progr. 2. Nota quoq; proportionem laterum MK ad CG in triangulo CQ eſſe eandem ex Cor. prop. 4. lib. 6. Eucl. quæ portionis diametri, cruriſque QK ad crus Q. Sicut ex eadem proportionem lateris KN ad GK latus eſſe eandem; quæ DK ad DG. Quare ſi componatur rectangulum ex QK, & KD lateribus, quæ dicunt eam proportionem, quam latera rectanguli MK, & KN; ſicut, & rectangulum ex QG, & GD lateribus, quæ habent eandẽ proportionem, quam latera CG, & GB erit compoſitâ proportione ex tr. 17. pr. 13. rectangulũ ex QK; & KD ad rectangulum QG, GD; ſicut rectangulum ex MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB.

Quo poſito, ecce patet propoſitio. Quadratum ex applicata KL refertur proportione ad quadratum applicatæ GH, vt rectangulum ex lateribus MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB ex primo progreſſ. Sed hæc proportio rectanguli MK, & KN minoris ad rectangulum maius, ex CG, & GB lateribus eſt eadem, quâ refertur rectangulum ex diametri Hyperbolici, vel Elliptici portionibus QK, & KD ad rectangulum QG, & GD ſegmentis ex 2. progreſſ. Ergo proportio quadrati applicatæ KL, qua refertur ad quadratum applicatę GH eſt eadem quâ rectangulum ex ſegmentis diametri Hyperbolici, vel Elliptici QK, & KD ad rectangulum ex eiuſdem QG, & GD. Quę de Ellipſi dicuntur etiam de circulo debent intelligi.

COROLLARIVM.

Propoſitio vniuerſaliter intelligenda eſt de quocunq; cono, ſiue obliquo, ſiue recto, ſeu applicatę ſint ad angulos rectos diametro, vt in recto, ſeu ad angulos obliquos, vt in obliquo contingit. Vnde colliges duplex genus diametrorum dari vnum, in quo applicatæ ſunt ad angulos rectos, alterum ad angulos obliquos, ſeu in Parabola, ſeu Hyperbola, ſeu Ellipſi.

EXPENSIO III.

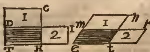
De Parametro.

Parameter est linea quędam assumpta extra sectionem: quæ est extrema proportionalis diametri interceptæ, & applicatę in parabola. At in Hyperbola, & Ellipsi est quoque tertia proportionalis inter diametrum interceptam, & applicatam: sed additâ ei, vel demptâ quędam portione lineæ, quam etiam ostendemus, cuius rationis sit.

LEMMA.

Si sit rectangulum quodlibet, & parallelogrammum rectangulo æquilaterum. Sintque duo alia rectangulum nimirum, & parallelogrammum et æquilaterum; sed primo parallelogrammo æquiangulum; ita se habebit proportione rectangulum ad rectangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum.

Sit primum rectangulum TC, & aliud secundum TI, quæ posita vnum super aliud occupabunt spatium commune DH. Item sit parallelogrammum primum, quodcumque, vt en, sed primo rectangulo TC æquilaterum, & secundum er aliud secundo TI rectangulo item ęquilaterum; sed quæ sint inuicem æquiangula, ita quod vnum super aliud positum, qua parte conueniunt in angulis æqualibus occupent commune spatium tm dicit propositio, quod primum rectangulum TC primo parallelogrammo en dicet eam proportionem; quam secundum rectangulum TI dicit secundo parallelogrammo er.



Probatur. Nam TC rectangulum primum se habet proportione ad en parallelogrammum primum, vt sua pars DH ad suam partem mt, quòd sint super æquales bases TH, & et ex prop.1.lib.6. Eucl. Coroll.

Sed pars hæc DH rectanguli primi, quæ etiam est communis secundo eadem proportione refertur ad partem mt parallelogrammi item primi, quæ etiam est communis secundo parallelogrammo, vt rectangulum secundum TI ad rectangulum secundum er propter eandem rationem ęqualium basium DT, & em.

Ergo arguendo ex 16 lib.5. ita se habet proportione primum rectangulum TC ad primum parallelogrammum en, vt secundum rectangulum TI ad secundum parallelogrammum er, quod est propositum.

Hoc autem Lemma assumitur, vt quando loquimur de rectangulis, idem intelligatur de parallelogrammis illis æquilateribus, dummodo sit ut illa omnia conueniant in rectitudine angulorum, sic hæc parallelogramma inuicem referantur similibus angulis; & æquiangula sint, quod in posterum semper erit obseruandum.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si in omni sectione parabolica, quadratum alicuius ordinatim applicatæ, se habeat ad quadratum diametri parabolici intercepti ab eâ, & à vertice, vt idem diameter interceptus ad contiguam aliquam verticis; erunt quadrata, vel rhombi omnium applicatarum ordinatim æqualia rectangulis, vel parallelogrammis factis à dicta contigua verticis, & intercepto parabolico diametro inter eas applicatas, & verticem.

Detur Parabola, in quâ diameter AC, applicata ordinatim CB, cuius quadratum sit CI dicit propositio. Quòd si se habeat hoc quadratū CI in proportione ad quadratum CL, quod est factum super diametrum parabolicum interceptum inter CB ordinatim applicatam, & verticem parabolæ A. Si inquam CI quadratum, seu rhombus sit ad CL quadratum, seu rhombum in proportione, vt ipsa contigua verticis AP ad diametrum interceptum AC. Tunc cuiuslibet alius applicatæ, vt DH quadratum, seu rhombus, quale est DR. æquale erit rectangulo, seu parallelogrammo, quod comprehenditur ab ipsa contigua PA, & intercepta diametri portione inter verticem, & alteram applicatam AD, quale est rectangulum, seu parallelogrammum PD.

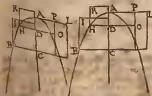
Progress. 1. Aduertendum est ex propos.21.lib.6. Eucl. & ex eius Coroll. figuras similes esse in duplicata ratione laterum homologorum, ita quòd quadratum V. g. CI, sit ad quadratum CL, non vt latus BC ad latus CA; sed proportio debet esse duplicata; nempe gemina vice repetita, quare debet reperiri tertia proportionalis ex 14 prop.6. Eucl. qualem hic ex ea propositione reperimus PA; sic enim proportio est repetita: nam ita se habet PA ad CB, vt CB ad CA; quare PA ad CA habebit eandem proportionem, quam quadratum CI ad quadratum CL, nempe geminatam laterum.

Progress. 2. Reminiscendum est propos.1. lib.6. Eucl. nempe ita esse propter eandem basim CA rectāgulum CP ad quadratū CL, vt altitudines PA, ad AL; & ideo, quòd quadratum CI sit æquale rectangulo PC; siquidem eidem quadrato LC eandem dicunt proportionem; nempe eam ipsam, quam dicit PA ad AC, quadratum quidem CI; quia talem inuenimus PA, rectāgulum verò PC propter basim eandem AC. Quare ex Eucl. prop.7. lib.5. erunt rectangulum PC, & quadratum CI æqualia, quòd, & de Rhombo CI, & parallelogrammo CP intelligendum est ob lemma antepositum, quo supposito.

Progress. 3. Rectangulum PC habet eandem proportionem ad rectangulum DP; quam altitudo eius AC ad altitudinem AD propter basim

AB eandem 1. propos. Euclid.& è contrà.

Quare Probatur propos. Nam propos. 5. demonstratum est quadratum CI esse ad quadratum BR, vt altitudo CA ad altitudinem DA; sed etiam ex 3. progress. quam dicit proportionem AC ad AD altitudines eandem dicunt, & rectangula PC ad PD adiacentia eis, ergo ita erit in proportione CI ad DR quadrata, quam PC ad PD rectangula. Ergo, vt



potrimus *permutatione*, & comparare quadratum males, rectangulo maiori, sicut minus quadratum, minori rectangulo, & ideo ita se habebit quadratum IC maius ad rectangulum PC maius, vt quadratum minus DR ad rectangulum DP minus.

Sed in 8. progressu vidimus maius rectangulum PC, & maius quadratum CI esse æqualia, ergo erit etiam æquale quadratum DR minus rectangulo PD minori, quod comprehenditur à contigua verticis PE, & diametri parabolici portione intercepta AD, & ita dicas de alijs.

COROLLARIVM.

Hinc colliges. Quod cum contigua PA habeat hanc specialem proprietatem, vt rectangula ab ea comprehensa, & diametri portione interceptâ sint æqualia quadratis effectis super ordinatim applicatas speciali nomine insignitur, & vocatur Perameter, quòd sit mensura omnium rectangulorum, quæ æquantur quadratis cuiuscunque applicatæ ordinatìm, quæ in parabola trahitur.

THEOR. II. PROP. VIII.

In omni sectione Hyperbolica, vel Elliptica, si quadratum alicuius ordinatìm applicatæ se habeat ad rectangulum, quod sub diametro transuerso, & intercepto comprehenditur, vt diameter transuersa ad contiguam lineam verticis; Alia quadrata aliarum applicatarum erunt rectangulo, quod sub hac contigua, & intercepta diametri portione inter applicatas, & verticem comprehenditur, æqualia, si tamen figuram similem similiterque positam in Hyperbola addas, in Ellipsi subducas.

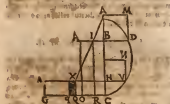
Sit Hyperbola, vel Ellipsis DVC, sitque ordinatim applicata DB, cuius quadratum BM, sit ad rectangulum BO, quod sub portionibus, nempe transuersa AB, & intercepta CB, vel portionibus interceptis. Si ergo quadratum BM sit ad rectangulum BO, vt diameter transuersa AC ad aliquam, quæ sit verticis C contiguam, nempe CP; idest sit duabus BC, & DC tertia proportionalis.

Dicit propositio, quod si sit aliud, cuiuslibet applicatæ VH quadratum HN hoc erit æquale rectangulo, quod fit ab intercepta CH inter applicatam, & verticem pro vno latere, & contigua verticis pro altero CP; sed cum hac cautella, quòd in Hyperbola insuper abundat figura XP similis, similiterque posita, vt totum rect. AH, GX: in Ellipsi verò deficit.



Progr. 1. Rectangulum BO ad rectangulum BR dicit eadem proportionem, quam AC ad CP. Ratio est; quia sunt super eandem basim BC; ex constructione, vnde sunt inuicem, vt altitudines BA ad BI. Istę verò altitudines correspōdent proportione, & ita est BA ad BI, vt CA ad CP. Ratio est, ex Euclid. propos. 4. lib. 6. in Coroll. quia sunt in eodem triangulo parallelæ CP, & BI, Ideoq; rectangulū BO ex BA erit ad BR ex BI, vt CA ad PC; quòd istæ lineæ sint, vt BA ad BI altitudines.

Progr. 2. Prorsùs idem dicendum de parallelogrammis HG, & HQ. Sunt enim super eandem basim CH ex constructione: siquidem debet comprehendi rectangulum HO à lateribus AH, & HC, & rectangulum HQ à lateribus HC, & HX. Vnde erunt inuicem, vt altitudines XH, & HA. Altitudo verò HA ad altitudinem HX dicit eam proportionē, quam AC ad CP cum CP sit ei CX parallela in eodem triangulo ACP, & ideo AC erit ad CP, vt HG rectangulum ad HQ.



Progress. 3. Quadratum BM est æquale rectangulo BR. Ratio est; quia eidem proportionem eandem dicunt; quæ verò eidem proportionem eandem dicunt ex 7. lib. 5. Eucl. sunt æqualia. Dicunt autem eandē rationem eidem. Nam ita se habet quadratum BM applicatæ ad rectangulum comprehensum sub BC, & BA, quam AC diameter ad CP contingentem ex presuppositione. At in progress. 1. probatum est, quod huic eidem CA ad CP dicit eandem proportionem rectangulum BO ad rectangulum BR. Quare, cùm quadratum applicatæ DB, & BR rectangulum eidem rectangulo BO eandem proportionem dicant, quam AC ad CP; necesse est DB, quadratum, & BR rectangulum esse æqualia.

Progress. 4. Probatur itaque ex præmissis principijs propos. Ita est AC diameter ad CP conti-

guam veri iels, vt HA ad HX ob fimilitudinem triangulorum ACP, & AHX, & ex eadem ratione HA ad HX eft in proportione, vt BA ad BT. Ergo etiam parallelogrāmma fuper eis conftituta, & quæ cum eis eandem proportionem habent ex 1. & 2. progr. inter fe proportionalia erant, & ita erit BO ad BR, ficut HG ad HQ; quia lineę BI, & BA ficut, & HA, & HX funt eorum altitudines: Cum ergo fit rectangulum BO ad BR, vt HG ad HQ, poterimus vel permutatione, & inferre, quòd etiam BO rectangulum ad HG rectangulum fit, vt BR rectangulum ad HQ rectangulum.

Sed ex propof. 8. Hæc rectangula BO, ad HG dicunt eandem proportionem, ac quadrata applicatarum nimirum BM ad HN. Ergo etiam eadem proportionem fruetur BR rectangulum relatum ad rectangulum HQ.

Progreff. 5. Sed rectangulum BR ex 3. progr. eft æquale quadrato BM; Ergo etiam rectangulum HQ erit æquale quadrato HN. Quod oportebat oftendere. Vides autem, quòd in Ellipfi rectangulum cx continetur fub CA contigua, & CR diametro intercepta, defficiente tamen figura PX, & in Hyperbola abundante,

COROLLARIVM.

Recta itaque CP contigua vertici vocabitur Parameter, feu latus rectum, feu coeficiens, eo quod iuxta eam menfurentur cæteræ applicatæ diametro, quòd eorum quadrata, vt HN, & BM fint æqualia parallelogrammo fub ipfa, & diametri portione intercepta inter applicatam, vt HQ, & BR, & verticem C; figura tamen PX, vel PI, in Ellipfi deficiente illi parallelogrammo, & abundante in Hyperbola. Et inde iftæ figuræ nomen fortitæ funt quia .n. in parabola quadrata applicatarū æquātur rectangulo fub Parametro, & intercepta diametri portione, vocatur Parabola, ideft æqualis. Quia verò aliquid deficit in Ellipfi ad æqualitatem, eo nòmine, quod fignificat defectum, infignitur: at quia abundat in Hyperbola dicitur talis, quod nomen eft idem ac exceffus.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam colliges illam Hyperbolam, feu Ellipfim effe fpecie notam, cuius diametri tranfuerfi proportio ad contiguam Parametrum fit, vt rectangulum fub AB, & BC comprehēfum ad quadratum BM vel è contra, Siquidem AC eft ad CP, vt AB ad BT, ideft vt rectangulum eiufdem bafis CA ad CI, ideft vt CA ad quadratum BM applicatę, æquale ipfi CI. Vnde ex præc. & omnia alia rectangula à diametro tranfuerfa, & intercepta fimul pro vno latere, & intercepta tantùm pro alio dicent eam proportionem, ad quadratum applicatæ, quam diameter tranfuerfa ad Parametrum; Quoniam enim quadratum BM oftenfum eft æquale in 3. progr. rectangulo BR, & hoc fit ad rectangulum BO ex AB, & BC diametro intercepta; vt PC ad CA ex 4. progreff. conuertendo etiam quadratum ex DB erit ad BO ex BC, & BA; vt CP Parameter ad CA diametrum interceptam.

Sic dicas de quadrato HN, quòd eft oftenfum progreff. 5. ęquale rectangulo HQ, quod eft ad HG rectangulum, vt HA ad HB altitudines, at CQ, ideft HX eft ad HA, vt CP ad CA, & fic de alijs.

COROLLARIVM III.

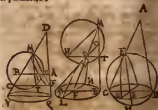
Hæc verò, quæ dicta funt de Ellipfi etiam de circuli circumferentia prorfus militant, vt fi pro Ellipfi fubftituas circulum, eadem oftenfione intelligere poteris.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Cuiufque fectionis in cono Parametrum exhibere.

Sit conus ABC, & exhibita in eo fectio parabola, cuius diameter AE, & EE perpendicularis ad eius applicatam AG. Per tria puncta B, C, a tranfeat circulus BCF, & proiungetur diameter FE ad circumferentiam in H. Dico EH *effe fectionis Parametrum*.

Progreff. 1. Obferuandum eft BGC effe circulum, vtpote bafis coni; ideoque ex 35. lib. 3. quadratum AG effe æquale rectangulo ex BE, & EC; & quòd ex 3. huius quadratum lineę EG quoque æquale fit rectangulo ex diametro fectionis EF, & parametro.



Progreff. 2. Vnde oftenditur propof. Rectangulo BAC, & ideo æquali quadrato eft EG eft æquale rectangulum ex AB diametro, & FH. Ergo EH erit Parameter, vtpote efficiens cum FE diametro æquale rectangulum quadrato ex EG ex 8. h. Cor.

Sit pro fecundo cafu exhibita Hyperbola in cono ACB; cuius diameter tranfuerfa MA; ducanturque AB perpendicularia fectioni LN; & ideo, vt diameter bafis circuli dirimet NL in duo fegmenta æqualia ex prop. 27. l. 5. Cor. Vnde PL erit applicata. Deinde lateri trianguli conici CA per A tranfeuntia ducatur à vertice M diametri tranfuerfæ parallela MH, & per O verticem fectionis TH parallela bafi AB, perque tria puncta T, M, H tranfeat circulus, hic abfcindet VO, quam dico *effe Parametrum*,

Progreff. 3. Ppprænotandum eft PL effe applicatam, cuius quadratum ex 35: lib. 3. æquatur rectangulo ex AP, & AB. Rurfufque ex propof. 8. h. Coroll. 2 effe quadratum applicatæ AL ad rectangulum diametri tranfuerfæ ex MP, & OA; vt Parameter ad tranfuerfam diametrum MO, & ideo etiam rectangulum ex AA, & AB ad rectangulum ex PM. & PO, erit, vt Parameter ad OM diametrum. Ideoque oftendendum eft rectangulum ex AA, & AB, & ideo PL quadratum effe ad rectangulum MA, & AO; vt VO, ad OM, vt fic oftendetur VO effe Parametrum.

Progr. 4. Sic verò oftenditur. Vt BP eft ad MB; ita TO eft ad MO ob parallelas TO, & BA ex

propof.

propof. 4. lib. 6. & AF ad FO, vt MO ad OM ob similia triangula, & æquiangula MON, & FOA: cùm fint parallelæ OH, & FA; nec non, MH, & OA ex constructione. Quare rectangulum ex AF, & FB, & ideo quadratum FL ei æquale erit ad rectangulum ex MF, & FO; vt rectangulum ex TO, & OH ad rectangulum OM, & OH cum ex ijsdem proportionibus componatur earum ratio AF ad FM eadem, quæ TO ad OM, & FA ad FO eadem, quæ OH ad OM, vt hic est videre.

BF, vt TO & FA, vt OM
est ad ad ad ad
FM OM OF OM
Ergo Compositum, vt Compositum
ex BF, & FA f. LF TO, & OH
ad erit ad
FM, & OF OM, & OM

At rectangulum TO, & OH est æquale rectangulo MO, & OV. Ergo rectangulum MO, OV erit ad quadratum æqualis altitudinis OM, & ideo, vt basis OV ad basim OM, vt Rectang AF, & FB, idest FL quadratum ad rectangulum ex FM, & OF. Quarè: Cùm parameter ponatur ad OM ex Cor. propof 6 h. vt FL quadratum ad rectangulum ex FM, & FO, & OV talis sit rationis ad OM; erit OV Parameter.

Sit tandem data ellipsis, cuius diameter FM. & sect o plani axe per axē FCD in Ipso cono cuius basis QV circulus, cuius diameter QV sit sectio quoq; plani DQV, cui agatur ab F extremo diametri parallela FC, & ab alio extremo diametro M parallela lateri OF, sit MT, per q; tria puncta MCT transeat circulus. Dico rectam FO esse parametro æqualem.

Præassumptum. Agatur itaque ostensionis gratia per O parallela basis AB; & à puncto O applicata OI, Igitur ex AO, & OB rectangulum erit æquale quadrato applicatæ OI, ex 35. lib. 3. elem.

Sit etiam ex 6. Coroll. huius quadratum OI, & ideo rectangulum ex AO, & OB erit ad rectangugulum ex diametri segmentis OM, & FO, vt parameter ad diametrum FM,

Probatur propof. ob parallelas FA, & TM, necnon, & AO, & FT triangulum FAO est æquiangulum triangulo FMT; ideoque vt AO ad FO; sic FT ad FM: Rursusque eadem rationem ob parallelas CB, & FC in triangulo FMC erit OB ad OM, vt FC ad FM, vt hic videa.

AO vt FT & OB vt FC
ad ad ad ad
FO FM OM FM
Ergo Compositum, vt Compositum.
AO & OB FT & FC
ad erit ad
FO & OM MF & MF

Quadere rectanguli AO, & OB ratio ad rectangulum FO; & OM erit composita ex ijsdem rationibus rectanguli ex FT, & FC ad quadratum MF; & ideo componendo rationes erit rectangulum ex AO, & OB ad rectangulum FO, & OM, vt FT, & FC rectangulum ad quadratum MF.

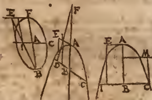
Vnde Quadratum ex OI; quod æquatur rectangulo ex AO, & OB, erit quoque ad rectangulum FO, & OM, vt rectangulum ex FT, & FC ad quadratū FM. Sed rectangulum ex FT, & FC est æquale rectangulo FM, & FO, ex Coroll. I. propof 36 lib. 3 elem. quod incidant in circulum CMO. Ergo ex OI quadratum erit ad rectangulum FO, & MO, vt ex FM, & OF rectangulum ad quadratum FM. Rectangulum verò FM, & FO est æqualis altitudinis quadrati FM. Ergo erit basis FO ad diametrum transuersam FM, vt quadratum OI ad FO, & OM rectangulum, & ideo FO erit æqualis Parametro.

PROBL. II. PROP. X.

Datæ cuiuscumque sectionis contiguam Parametrum inuenire dato diametro, & applicata.

SIt primum Coni sectio Parabola CAF, eiusque diameter AB, cui applicata sit CB; factoque quadrato BM, fiat rectangulum ex BA ei æquale, reperiendo applicatæ BC, & BC ex Euc. prop. 14 l. 6. tertiam proportionalem EA. Nam ex propos. 19. Eucl. 6. parallelogrammum ex BA, & AE constitutum erit æquale quadrato BM. Porrò ex propos. 7. vidimus quadratum CB esse æquale rectangulo sub diametro intercepta, & parametro contigua. Vnde AE Parameter erit.

Si verò daretur applicata, quæ BM Rhombum faceret, quod angulus B non esset rectus esset reperiendum parallelogrammum Rhombo æquiangulum, at æquilaterum ipsi BE.



Casus 2. At detur sectio Hyperbola CAD, cuius diameter FAS transuersa, & interceptaj applicata verò CB data. Portioni BA diametri intercepti, & CB applicatæ reperiatur tertia proportionalis BD, eritque ducta AE æquali AD, & parallela, repertum rectangulum, vel parallelogrammum OA BA: deinde ab extremo datæ diametri F ducatur FD ad D, quę secabit AE in E. Dico AE esse Parametrū.

Probatur. Quòd ex propos 8. rectangulum contentū ab ipsa AI, sit æquale quadrato applicatæ abundans tamen figura ID simili, similiterque posita ac esset rectangulum ex FF, & FD.

Casus 3. Si postremò sit Ellipsis FCA, cuius diameter FAS, & applicata AC diametro interceptæ AF, & applicatæ AC inueniatur tertia proportionalis, prout supradictum est. quæ sit AI, & ex vertice A per I ducatur recta, & ab F vbi terminat diameter, agatur parallela applicatæ CA, quę sit AF. Dico rectam FB esse parametrum. Nam continet FI rectangulum ęquale quadrato ex CA, si tamen deficiat figura IA similis, similiterque posita ex propos. 8. ac EF, & BF rectangulum.

EXPENSIO III.

De tangentibus.

Sicuti circulus suas tangentes habet, ex quibus mirabiles circuli passiones prodeût, ita, & conicæ tangentes; nec minoris vtilitatis sunt, maximè ad descriptionem sectionum.

THEOR. I. PROP. XI.

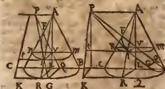
Si conus per axem plano aliquo, sectus sit, & alia sectione ex tribus coni ad angulos rectos ei sectioni, denuò secetur, & electo in sectionis posterioris circumferentia puncto à vertice coni per illud ad circulũ basim eiusdem coni, planum aliquod agatur.

Hoc planum conum secundum lineam rectam tanget.

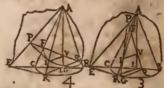
Et diametrum figurarum secabit, & à puncto, quo secat illum recta ducta ad punctum electum, hæc linea sectionem conicam non secabit, sed tantum tanget.

TRes partes habet hæc propositio, sed facilis est probatio; proinde à sola explicatione propositionis habetur.

SIt ergo medietas coni ABC, qui sit per axem à plano aliquo BAC sectus, cui sectioni, alia sectio, seu Elliptica, seu Hyperbolica, seu Parabolica fiat FIG, deinde electo in circumferentia sectionum posteriorum puncto I, per quod, & verticem coni A planum ARP adaptetur. Dico *primo hoc planum tangere totum conum à vertice A vsque ad basim circularem BRC secundùm lineam rectam* ARB.



Probatur. Quia tangit secundùm altitudinem AR, quæ est linea recta, siquidem conus à recta efficitur. Ergo potest cum sit planum totam lineam AR continuo tactu tangere, sed conus ex definitione secundùm crassitudinem est circulare; planum verò in puncto circulum tangit, ergo ille tactus secundum latitudinem non erit amplior puncto, quæ est linea secundùm latitudinem accepta. Dico secundò. Quod si diameter sectionũ, QFP producatur in plano ABC, in quo est, quòd ab hoc posteriori plano PAR secabitur. Nam, vel planum, vt in primâ, vt secundâ figurâ æquidistat; ita vt LR faciat cum RK & LC lineis angulos rectos, & totum planum PARK cum plano LAR. Quare ex 16 Tract. 21. sectio AP erit ad AL ad rectos āgulos. Fiet autē hęc sectio, quiā cum propter angulū acutum R planum AP secatur versus verticem coni A, & inclinet ad planum BAC, secabit in vertice A secundùm sectionem AP planum per verticem ductum BAC.



Quod, si non æquidistet, vt in 3. & 4. fig. sed faciat angulum acutum ERL, tunc clarum est, quod versùs E tandem occurret plano per verticem coni ducto EAB, & faciet in eo sectionem AE. Vnde clarum euadit, quod si versùs eam partem, versùs, quam inclinant inuicem plana, vt F producatur diameter FQ necessario impinget in hanc sectionem AE in P.

Dico tertio, quod si ab hoc puncto P ducatur in plano tangente RPA ad punctum electum I recta PI; quòd continget sectionem, & non secabit. Quod patet. Nam est in plano, quod sectionem in I tangit. Ergo, & linea per punctum I ducta; etiam si prolungaretur, non secaret, sed cum ipso plano contingeret.

COROLLARIVM.

ELicies hinc in figura 1, & 2, cum plana secans ABC, & tangens AK parallelè se habeant applicatam VI esse semidiametrum, cum enim MN sit diameter, patet ex 2. probat. hac, quòd si contingens IE facit angulum rectum, cum VI, & VI facit angulum rectum cum MN, quod necessario V est centrum circuli MIN ex 18. propos. 3. lib. Elem.

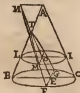
THEOR. II. PROPOS. XI.

Si parabolam rectà contingat linea producta diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta sit ordinatim applicata, erunt interceptæ diametri portiones, vtrinque partes æquales; nempe inter occurrentem, & verticem, & inter applicatam, & verticem,

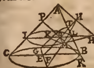
SIt parabola OTF in cono ACB, cuius diameter ET, cuius vertex T; recta verò contingat sectionem in M, vbi, & applicata ON terminat, & occurrat diametro productę in N, & pro primo Casu AN sit parallela diametro TL. Dico *primo, quod portio diametri inter verticem parabolicum OT, & portio TN diametri a vertice vsque ad punctum N tangentis sunt æquales.*

Probatur fatilitèr in isto casu. Nam OI, & AN sunt

sunt parallelæ, & æquales, quod sint inter parallelas CA crus, & XN diametrum; sed cum ex Coroll. propos.18.h. O sit centrũ circuli, TO erit æqualis lineæ OL; Ergo etiam AN erit æqualis NL. Quare, & OT erit æqualis TN: Cùm enim anguli inter parallelas in triangulis OTL, & ATN sint æquales, & bases æquales omnia latera singula singulis erunt æqualia, ex 27. propos. lib.1. elem.



At si linea AN non sit æquidistans; quòd planũ, super quod contingens deducta est non sit æquidistans, vt ex prop.11.huius, & in altera fig. patet, tunc in circulo IML ex propos 25 lib 3.elem.contingens MH erit perpendicularis ad diametrum IR, & ad IL applicata OM, & MX ducta à contactu ad centrum X. Quare ex propos.23. progr 3. Tract 15. erit HI ad OI, vt HL ad LO: ducta igitur parallela ad AH lineam sectionis planorum tangentis, & secantia per punctum n, quæ sit PR. ostendendum est, quod PO, & OR sunt æquales, & ideo etiam OT, & TN. Sic verò ostenditur. Crus HI est ad OI, vt AH ad OP in triangulo AHI, ex Coroll. prop.4.l.6. Eucl ob parallelas AH, & RP. Sed, quæ est proportio HI ad IO, eadem est ex propos. 23. Tract.15. HL ad LO.



Ergo in duobus triangulis ad verticem æquiangulis ALH, & OLR ob parallelas basium, erit etiam eadem proportio AH basis ad OR basim ex 4. lib.6. Elem. vt est HL ad LO, & ideo, vt HI ad IO. & HA ad OP. Quare cum eisdem PO, & OR. crus AH eandem dicant proportionem, quam HL ad LO, erunt æquales ex propos.7. lib.5.

Et quia NR est parallela lateri PA in triangulo PRA, erunt quoque æquales AT, & TR, sicut sunt LO, & OP; Quod si tales sunt, in triangulis æquiangulis ATN, & OTR ob bases parallelas ex prop. 30. & 27. lib.1.elem. OR, & AN, erunt quoque æqualia crura OT, & TN sicut sunt RT, & TA: quod est propositum. Nam sic TO est pars diametri interior, æqualis exteriori TN.

COROLLARIVM.

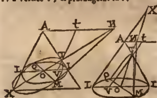
Colllige itaque, quod cùm sit æqualis TN ad NO quadratum ex OM, quod propos. 7. expens. a. Probatũ est æquale rectangulo ab NT portione diametri intercepta inter verticẽ, & applicatã, & parametro comprehenso erit, etiam æquale rectangulo comprehenso ab eodem parametro, & æquali TN inter verticem, & contingentem.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si in Hyperbola, vel Ellipsi contingens ducta sit, & à contactu ordinatim applicata. Diametri portio inter terminum transuersi diametri, & applicatam erit ad portionem eiusdem à vertice sectionis ad applicatam, vt portio à termino transuersi diametri vsque ad contingentem ad portionem, quæ est inter contingentem, & verticem sectionis.

Dvos casus hæc propositio possidet, primus est, si planum contingens sit parallelum plano secanti per verticem, vt in prop.12. est dictum, alter si non sit.

Sit ergo pro primo casu Hyperbola, vel Ellipsis QTM diameter transuersa TX, quæ transeat per centrum O, vt euenit cum plana tangens, & secans per axem sunt parallela, vt dictum est Coroll.1. propos.11. & AN æquidistans diametro coni LOI, à cuius puncto N originem ducit contingens MN, quæ tangat in M, à quo contactu applicata enascatur MO ad angulos rectos ipsi OT. Dico, *quod portio diametri transuersi* XN *inter terminum eius* X, & applicatam OM est in proportione ad portionem OT inter applicatum OM, & verticem sectionis T, quemadmodum XN inter terminum X, & punctum N, à quo oritur contingens, ad portionem NM. Ducatur cruri XL parallela TV à vertice T, & prolungetur in t.



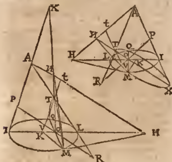
Prob. In triangulo Hyperbolæ LXO, & OTV, sicut est XO ad TO ita est ob parallelam VT Radius LO, vel OI ad suam portionem VO ex Coroll. prop.4. l.6. Eucl. Sed vt est OI ad VO ita est AN ad Nt ob bases parallelas in triangulis ad verticem AtF, & VTI, & æquiangulis ex propos.4. lib.6. Eucl.

Eademque ratione prorsùs XN ad NT, vt AN ad Nt in triangulis ad verticem ANX, & TNt, quorum parallelæ sunt bases t T, & AX. Ergo ex prop.16. lib.5. Elem. vt est NX ad NT, ita est XO, ad TO.

In Ellipsi verò ferè idem argumentum. Nam in Ellipsi, quòd sint XL, & VT parallelæ in triangulis ad verticem OXL, & TOV ita proportionabitur XO ad OT, vt LO ad OV, vel æqualis OI. Sed ob triangula ad verticẽ OTI, ATN inter bases parallelas AN, & OI; ita est NI ad OV, vt AN ad tN: sed in triangulo XAN ob parallelas XA, & Tt, vt est AN ad tN, ita est XN ad TN: Ergo ita etiam erit XO ad OT ex prop.16. lib.5. argumentando, vt est XN ad TN, quòd sit eadem, ac proportio AN ad tN, & hæc eadem, ac OI ad VO, & hæc eadem, vt XO ad OT.

gulis

Sed iam fit fecundus ca fus,in quo planum contingens non fit parallelum plano fecanti, & ideo, quòd AN non fit parallela IL diametro coni. Tūc animaduertendum eft ex progr 2 prop. 23. tract. 15. Quòd HI fe habet ad OI, vt HL ad LO; ducaturque per O çquidiftans PR ad AH, & çquidiftans TV per T lateri IX trianguli per verticem IAL. In triangulo itaque POX Hyperbole, ita eft ob parallelas VT, & PX portio XO ad FO. vt OP ad OV: Supponatur itaque æqualis PO ad OR, quod infra oftendetur, ita itaque erit OP, vel RO ad OV, vt AN ad NT ob triangula inter parallelas oppofita ad verticem ATE, & VTR: Sed ob rationem triangulorum ad verticem inter parallelas ANX, & TNE erit quoq; vt AN proportione ad NE, fic correfpondebit XN ad NT, ergo XN ad NT, ita erit, XO ad OT ob identitatem rationis, cum duabus AN, ad NE, & harum cum OR,vel OP ad OV, & harum cum XO ad OT,



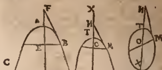
In Ellipfi verò XO eft ad TO, vt OP ad OV ob triangula ad verticem TVO,& POX inter parallelas TV,& PX,& ob eandem rationem æqualis vt oftendatur XO eidem OP erit ad VO, vt AN ad NT, in triangulo autem NAX ob parallelas TE,& AX, ita eft XN ad NT, vt AN ad NT: Vnde ex 16. lib.5. Elem. Ita quoque XO ad OT, vt AN ad TN. Remanet folum probandum, quòd OR, & OP fint æquales. Probatur autem prorfus eadem ratione fo Theor. anteced.in 2. Cafu. Nam ex prop.4. lib.6. proportio PO ad AH eft ex, quæ IO ad IH: fed hęc eft eadem ex propof.23. tract.15. *conuertendo*, ac LO ad HL, & hęc, quę OR ad AH ob triangula ęquiangula ORL, & ALH, ex 21.lib.6. Proptereaque AH eft illis, cui PO, & RO eandem dicunt proportionem. Ergo funt ęquales ex 7.l.5. elem.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Lineas tangentes in fectionibus conicis ducere.

SIt data parabola BAC, & in ea punctum B,& oporteat ducere contingentem illius puncti. Ducatur diameter AE ex I.huius, & ei à puncto B ducatur applicata BE: ęqualis autem fiat AF ipfi AE productę diametro, & à puncto B ad F ducatur recta FB,hęc enim erit contingens.

Probatur; quia ex pr.12.h. tangens linea Parabolę interfecat diametrum EF productam in pares à vertice diftante interuallo AF ęquali interuallo AE applicatę, & vertici interpofito.



Sit deinde data Hyperbola, feu Ellipfis MT, & eius applicata OM,& diameter tráfuerfa AT prolūgata in Ellipfi quantùm oporteat, fi fiat ex prop.9. tract.15. de lineis fecandis, vt XT tota ad fegmentum OT,ita AN tota cum addita TN ad additam TN in Ellipfi erit punctum N,à quo ducta NM tanget Ellipfim.

At in Hyperbola fiat ex propof. 23. tract. 15. de lineis fecand, vt fegmentum OA ad fegmentum OT ita fegmentum aliquod NX in XA parte ad compartem TN, & erit punctum N, à quo ad M ducta MN tanget Hyperbolam.

Probatur ex præced. Quia iam oftenfum eft, quod in Ellipfi TN à vertice, & tangentem intercepta, fit quarta proportionalis trium XO, & OT fegmentorum, & totius AN.

At in Hyperbola, Quod TN fit quarta proportionalis trium totius diametri tranfuerfę fimul, & intercepte OX interceptę OT, & tranfuerfę fegmenti NX,

EXPENSIO IV.

De interceptis diametri portionibus inter contingentem, & alia puncta in ipfo impreffa.

QVę fiunt puncta in diametro ex efficientur ab eius mediate nimirum centro, à vertice fectionis,ab applicata,ab eius extremo, & à contingente, quę omnia puncta diuerfas partes conftituunt in diametro, quę potentia, feu longitudine inuicem comparantur, & cum contingentibus analogiam habent.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, fi ad ipfam recta ducatur æquidiftans ordinatim applicatæ, quadratum eius erit æquale rectanguli quartæ parti contento à diametri portione producta ad tangentem, & parametro contigua.

SIt fectio parabolica SAD, quam contingat BF occurrens diametro in F, ad quam à vertice A ducatur linea EA ęquidiftans applicatę BC. Dico *quod quadratum ex* EA *erit æquale quartæ parti rectanguli ex* AH *parametro, &* AF *diametro producto vfque*

vsque ad contingentem comprehensi.

Progr. 1. Obseruandum est quadratum ex ordinatim applicatis, vt BC ex dictis propos. 7. esse æquale rectangulo, quod fieret ex AH Parametro, & diametro intercepta AC, & quod diximus supra prop. 12. Rectam AB propter contingentem BF esse æqualem rectæ AC; quare, & rectangulum ex AF, & AH parametro, rectangulo, quod fieret ex AC æquali, & parametro AH eodem esset æquale, vnde, & æquale quadrato ex BC, quo supposito.

Progress. 2. Probatur. Assumptum quadratum EAE est quarta pars quadrati ex BC. Ergo, & rectangulo FH ei æqualis ex progr. 1. nimirum rectangulo AF æquabitur.

Prob Antecedens in triangulo BFC crus FC est duplum suæ portionis FA ex progr. 1. Propterea, & BC linea est dupla lineæ EA. Ergo cum figuræ similes, similiterque positæ sint in duplicata ratione laterum homologorum ex prop. 20. lib. 6. Elem. quadratum BC erit quadruplum quadrati EA; nam proportio sic gemina vice repetitur, sic est 1. ad 2. sicut 2. ad 4. & ideo si est latus 1. ad 2. quadrata debebunt esse, vt 1. ad 4. Quare quadratum EA quarta pars quadrati ex BC erit etiam quarta pars rectanguli HF nimirum æquale rectangulo AF.



THEOR. II. PROPOS. XVII.

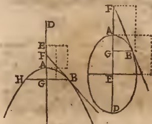
Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, cum diametro conueniens, & à tactu ad diametrum recta ordinatim sit applicata, erit quadrato dimidiæ transuersæ diametri æquale rectangulum sub intercepta ab ordinatim ducta, & centro diametri portione, & sub alia portione inter centrum, & contingentem comprehensum.

Sit primum Hyperbola BAH, cuius vertex A transuersa diameter AD, & centrum E, quod habetur diuiso AD bifariam. Sectionem verò contingat in B recta BF, cum diametro producta in F conueniens, & ad diametrum ordinatim applicata BG. Dico *quadrato* AE *æquale esse rectangulum factum ex* EG, *&* EF.

Iam ex propos. 11. huius habemus esse eam proportionem GD ad GA; quæ est FD ad FA. Ergo componendo simul DG, & GA erit ad GA, vt DF, & FA simul ad FA, diuisis autem lineis DG, & GA, vt vna linea per medium in E erit medietas GE nempe ipsa medietas lineæ DA, quæ est EA, cum GA, siquidem ED cum ipsa AG denuo assumpta complent alteram medietatem.

Diuisis quoque lineis, DF, & FA medietas est ipsa EA: Quare cum ponatur totum GD cum AG ad GA, vt totum DA ad FA erit etiam ex 18. lib. 5. elem. medietas EG ad GA, vt medietas EA ad FA, & *diuidendo* erit quoque medietas EG ad residuum EA, sublata consequenti GA, vt EA ad FE subducta consequente FA. Qua de re AE est media proportionalis. Vnde si iuxta prop. 17. Elem. fiat ex hac AE quadratum: ex duabus verò extremis GE, & FE rectangulum, hæc duo erunt æqualia.

Probatur quoque de Ellipsi ferè eodem modo. Namcùm dictum sit prop. 11. quod proportio GD ad GA sit qualis est proportio FD ad FA. Erit quoque



componendo simul antecedens, & consequens DG, & GA ad solam consequentem GA, vt antecedens, & consequens FD, & FA ad solam consequentem FA, & si dimidiemus has compositas antecedentes, erit pariter proportio AE dimidiatæ ad AG eandem consequentem, vt EF dimidiata lineæ FO cum AF, ad FA eandem consequentem. Quare per conuersionem rationis sumendo excessus GE, & AE, quibus antecedentes EA, & FE superant consequentes suas GA, FA, respondebit proportione excessus GE antecedentis EA ad ipsam antecedentem EA, vt excessus AE antecedentis EF ad antecedentem EF. Quare ex Elem. prop. 17. lib. 6. ex AE poterit componi quadratum, tamquam ex media proportionali, quòd erit æquale rectangulo ex duabus extremis constituto GE, & EF.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Posito diametro transuersa, vt superiori propos. contingenti, centro, & applicata: Rectangulum ex portione à termino transuersæ diametri vsque ad applicatam, & portione ab applicata vsque ad verticem sectionis comprehensum est æquale rectangulo comprehenso ex eiusdem diametri partibus interceptis inter centrum, & applicatam, & inter applicatam, & contingentem.

Sit eadem figura; quę superiùs. Dico *rectangulum ex* DG, *&* GA *esse æquale rectangulo ex* EG, *&* FG *lineis comprehensum.*

Probatur. Nam in Hyperbola ex anteced. prop. conuersa medietas EG est ad AG, vt AE ad FA. Quare *Permutando* erit fundamentum EG ad fundamentum AE, vt terminus AG ad terminum FA. Quapropter cõponendo EG erit ad AE cũ EG, vt AG ad FA cum AG: Linea verò AE cum GE est diameter GD, & FA cum AG est FG. Vnde si fiat rectangulum ex extremis EG, & FG hoc erit æquale rectangulo facto ex medijs DG, & GA. Ex prop. 18. lib. 6. Elem.

Idem dicas de Ellipsi. Nam AE dimidia est ad AG, vt EF ad FA, ergo diuidendo GE compars erit ad GA compartem, vt AE pars ad AF compartem, & *permutando* antecedens GE ad antecedentem AE, vt sequens GA ad sequentem AF. Quare componendo GE erit ad AE, & EG, idest GD, vt GA est ad GA, & AF, idest GF. Quare rectangulum ex extremis GF, & OE æquale erit rectangulo ex medijs GD, & GA.

COROLLARIVM.

CVm rectangulum ex GD, & GA sit illud idem propos. 8. contextu, & Coroll. 2. quod demonstratum fuit esse ad quadratum applicatæ, vt transuersa diameter ad Parametrum. Hinc est, quod etiam rectangulum GE, & GF in vtraque sectione æquale rectangulo ex interceptis diametri portionibus GD, & GA erit ad quadratũ applicatæ, vt transuersa diameter ad parametrum.

THEOR. IV. PROPOS. XVIIII.

Iisdem positis, erit rectangulum comprehensum à portione inter applicatam, & contingentem, & inter contingentem, & centrum mensurata æquale rectangulo facto ex portione diametri inter contingentem, & terminum, & inter verticem sectionis, & contingentem intercepta.

POsitis illis ipsis, quæ priùs; Dico *rectangulum GF, & FE esse æquale rectangulo ex portionibus DF, & FA confectu*.

Probatur ex propos. 17. (cum argumentati fuimus diuidendo) habemus; ita esse in proportione GE ad EA, vt AE ad EF. Quare si componamus eas erit GE simul cum AE, vel æquali ED, vt fiat tota GD ad EA, vel æquali ED tantùm, vt AE, vel æqualis ED simul cum EF, vt fiat tota DF ad EF tantum.

Quare vtendo *permutatione* erit antecedens DG composita, vt priùs ad antecedentem DF compositam. Veluti priùs consequens simplex AE ad consequentem simplicem EF.

Accipiamus itaque excessũ FG super DF sequẽtẽ antecedẽtia DG, & excessum FA super sequentẽ EF antecedentis AE, vel è cõtrà. Ex *diuidendo* erit compars FG ad compartem DF, vt compars FA ad compartem EF. Vnde si fiat rectangulum ex medijs DF, & FA hoc erit æquale rectangulo ex extremis FE, & FG in Hyperbola, sed in Ellipsi idem sequetur: sed *conuertendo*.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Si Ellipsim, vel Hyperbolam recta contingat, rectangulum factum à linea, quæ à vertice sectionis discedit, & alia, quæ à vertice diametri discedit, & ambæ in contingentem terminant est æquale quartæ parti rectanguli diametro transuersa, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AE, cuius vertex A diameter transuersa DA parameter AK tangens AF, discedatque à vertice sectionis A linea, & terminet in contingentem, quæ sit AI, aliaque DH ambæ rectangulę diametro discedãt à termino diametri D, & in contingentẽ productam terminẽt in H, & I. Dico, quod rectangulum istis DH, & AI duabus constitutum est quarta pars rectanguli sub transuersa diametro DA, & parametro constituti.

Probatio ob multas comparationes est parùm laboriosa; ideo eam clariùs, quàm fieri poterit trademus.

Progr. 1. Primo itaque ex præced. propos. rectangulũ ex DF, & FA est rectangulo GO ex GF, & FE æquale. Quare si ex GF fiat quadratum GX, cum sit super eandem basim FG, ac rectangulum ex GF, & FE erit ipsum rectangulum DF, & FA ad hoc quadratum GX, vt ad ipsum hoc quadratum GX rectangulum OG ex OF, & FE, quæ est eadem, ac altitudinum FE ad FG. Ratio est, quia cum DF, & FA rectangulum, & GF, & FE rectangulum sint ęqualia habebunt ex 7. lib. 5. Eucl. eidem quadrato GX eandem rationem, quæ est altitudinum FE ad GF ob eandem basim GF.

Progr. 2. Quo posito obseruandum est, quòd hæc proportio ad quadratum GX rectanguli DF, & FA; componitur ex proportione lateris FD rectanguli ad OF lateris quadrati, quę est eadem DH ad GE ob triangula EFG, & DFH ad verticem inter parallelas bases EG, & DH ex propos. 15. lib. 6 Eucl.

Componitur quoque ex proportione AF lateris rectanguli ad OF lateris quadrati, quę est eadem, ac AI ad GE ob parallelas EG, & IA in triangulo EGF ex Coroll. prop. 4. l. 6. Eucl.

Ergo

Ergo si componantur, vt hic videa:

FD	vt	DH	&	AF	vt	AI
ad		ad		ad		ad
GF		GB		GF		OB

Ergo compositum, vt compositum.

DF	&	AF		DH	&	AI	idest HI
	ad				ad		
GF	&	GF		GB	&	GB	

Vnde DF, & FA rectangulum erit ad quadratum GB, vt ex OH, & AI, idest DI rectangulum ad quadratum GB.

Progr. 3. At ex primo progr. rectangulum ex DF, & FA erat ad quadratum GX, vt AF ad FG ob æqualitatem, quam dicebat cum rectangulo OG illis lineis constituto. Quare si super AG fiant duo rectangula, vnum ex AG, & AF, vt est rectangulum EQ erit ad alterum ex GB, & GF rectangulum GR cum fiut super eandem basim GB, vt altitudines AF ad GF supradictę lineę; Rectangulum verò GE, & BF est ęquale quadratu AAZ ex AA ex 17. huius. Quare quadratum AAZ æquale ipsi EQ erit ad rectangulum GR, vt AF ad FG, quę est eadem, ac ex progr. I rectanguli GO ea GF, & IA ad quadratum GX, & ex prog. 2. rectanguli ID ea HD, AI ad quadratum applicatę GB; quare ex 16. lib. 5. quadratum AAZ erit ad rectangulum GR, vt rectangulum ID ad quadratum applicatę GB.

Progr. 5. Itaque *permutando* erit antecedens quadratum AAZ ad antecedens rectangulum ID, vt sequens GR rectangulum ad sequens applicatæ GB quadratum.

Progr. 6. Reminiscendum verò est ex propos. 18. Coroll. quod rectangulum GR ex GB, & GF est ad quadratum BG, vt transuersa diameter AD ad contiguam parametrum AX: Quare talis etiam proportio AAZ quadrati ad DI rectangulum cum 5. progr. sit eadem, ac GR rectanguli ad quadratum BG.

Progr. 7. Si ergo super DA constituamus quadratum DT, & ex DA, & AX constituamus rectangulum; Quadratum constitutum OAT, cùm sit super eandem basim erit, vt altitudo DA, vel AT ad AX: Vnde dicet eandem proportionem ad suum rectangulum, quam OA ad AX, quæ ex 6. progress. est eadem quadrati AAZ ad rectangulum DHI. Sed quadratum AAZ est quarta pars quadrati DAT, cùm sit super dimidiam AD, quę est distātia centri à vertice ex 6. lib. 2. Ergo, & etiam rectangulum DHI est quarta pars rectanguli DAX parametro, diametroq; transuersa comprehensi.

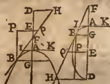


THEOR. VI. PROPOS. XXI.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, occurratque lineæ æquidistanti alicui ex applicatis, & à contactu ad hanc lineam æquidistantem recta parallela diametro ducatur, quæ eam terminet, hæc linea inquam æquidistans à diametro erit secata in duas partes, ex quibus compositum rectangulum erit æquale quartæ parti rectanguli sub transuersa diametro, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis, cuius vertex A transuersa diameter AO, & centrum B, quam contingat linea BF productam in H, à centro verò B ducatur parallela alicui applicatæ BG in vtrasque partes, vt PQ vsque ad Q tangentem, quam parallela AF diametro AD educta à cōtactu B terminet ad aliam partem, dico PQ lineam eductam à centro in tales partes secari à diametro AD, vt illæ *componant rectangulum quartæ parti rectanguli sub transuersa diametro AO, & parametro AX contenti.*

Probatur. Nam ex pr. 19. h. rectangulum sub DF, & FA contentum est æquale rectangulo sub BF, & IG cōtento: Quare erunt latera proportionalia reciprocè ex 14. l. 6 & ita DF ad FG, vt AF ad FA. Sed vt DF ad BG, ita assimilatur in proportione DH ad BG parallelæ in triangulis æquiangulis, & vt AF ad AF, ita AQ parallelę ad AI ob triangula æquiangula AFQ & DFH, ideoq; ex 16. l. 5. erit DH ad BG, sic AQ ad IA, ergo si cōponātur rectāgula vnū ex duobus DH, & AI, aliud ex BG, & AQ sumēdo eas lineas reciprocè scilicet consequentem cum antecedenti pro vno; sicut consequentē, & antecedentem pro alio iuxtà propos. 22. Eucl. 6. erit rectangulum DH, & AI æquale rectangulo BG, seu ęquali PE, & EQ. Sed ex præced. rectangulum DH, & AI est æquale quartę parti rectanguli DA intercepta, & parametro AX. Ergo, & rectangulum PE, & EQ.



COROLLARIVM.

PRæallegatę propositiones de Ellipsi, etiam de Circulo intelliguntur, & sufficit loco Ellipsis circulum substituere, nam eædem rationes militabunt.

EXPENSIO V.

De Vmbelicis.

VMbelicus est quoddam punctum intra sectionem, quod insignes proprietates obtinet, maximè ad ipsarum sectionum descriptionem. Vocatur autem Focus, & Polus, qui in Hyperbola, & in Ellipsi gemini sunt, in Parabola verò vnicus.

PROBL. I. PROPOS. XXII.

Parabolæ Vmbelicum assignare.

INueniatur Pacumeter, & illius quarta pars assumatur, & mensuretur in ipso diametro à vertice sectionis, & illud punctum erit Focus, seu Vmbelicus.

Ostenditur ipsa definitione. Nam definitur, quod sit quarta pars parametri in ipso axe à vertice sectionis assumpta.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Hyperbolarum, & Ellipsium Vmbelicos inuenire, data Axe transuersa, & Parametro.

QVoniam Vmbelicus Hyperbolæ non est tantùm quarta pars Parametri à vertice mensurata Sed latus rectãguli illius quartę parti ęqualis, cuius alterum latus sit trãsuersa diameter addito ei latere ipso, quo clauditur V.g. rectangulo ex diametro trãsuersa MA addito ei MK ęquali XP; In Ellipsi verò dẽpto V.g rectãgulũ ex CD dẽpto CL.

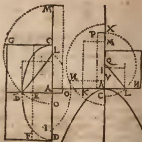
Reperto itaq; Parametro ex 10. propos. & 18. AK: sicut, & diametro transuersa AM; rectangulo ab illis comprehenso MN inueniatur quadratum ęquale NA ex 16. lib.2. Eucl. vt videa factum mediante media proportionali NV ex 16 lib 6, cuius latus diuidatur bifariam in L, coniungaturque LQ, & centro Q medietate transuersę diametri, interuallo QL describatur circulus CLX: Dico puncta X, & C Vmbelicos esse Hyperbolę.

Id verò ostenderur, si demonstretur habere conditiones à definitione requisitas, 1 quod MX, vel ęqualis CA sit latus rectanguli talis; cuius vnum latus sit, nedum transuersa diameter AM.

Sed insuper distantia XM, vel CA, & aliud ipsa distantia MK, vel CA, quod tamen sit æquale quartæ parti figuræ, & rectanguli contenti à diametro transuersá, & parametro.

Probatur verò. Nam quadratum NA ex VN est ex constructione æquale rectangulo MK. Sed huius quadrati quarta pars ex 6. lib.2. Elem. Cor. cum sit ex medietate latere est quadratum LI. Ergo erit quarta pars rectanguli KM, sed huic quadrato paruo LI est ęquale rectangulum AP, ex propos. 16. Eucl. lib.2 Ergo rectangulum AP est ęquale quartę parti rectanguli KM. Rursus comprehenditur diametro transuersa MA, & KM, & aliud latus est ęquale MK, vt patet ex eadem 16. propos. lib.2. Eucl. Ergo habet conditiones requisitas. Vnde distantiæ ab extremis A, & M diametri transuersę, nempe puncta X, & C erunt Vmbelici.

Si verò sit Ellipsis, cuius Vmbelici sint inueniendi.

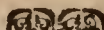


Primo presupponendum est quadratum ex AB applicata ad centrum esse æquale quartæ parti rectanguli sub diametro transuersa CD, & parametro AB; nimirum CF. Nam ex propos. 8. Expeos.2. Coroll.2. ita est diameter CD ad Parametrum AE, vt est ad quadratũ applicatæ AB ad rectangulũ cõprehensum sub portionibus diametri CA, & AD, quæ hic sunt æquales, quãobrẽ hoc rectangulũ erit quadratũ AC Sed ita se habet quadratũ magnũ ex toto diametro CD ad rectãgulũ ex eodẽ CD & AE Parametro, vt ipse diameter CD ad parametrum, quod sit super eandem basim CD. Vnde erit, vt altitudo CD ad AE. Ergo ex 16 lib. 5. elem. quadratum AC ad quadratum ex applicata AB dicit eam proportionem, quam dicit quadratum magnum ex diametro CD ad rectangulum CF; cum sit eadem ac proportio diametri ad parametrum. Sed quadratum AC est quarta pars quadrati magni ex diametro DC ex 6. lib.2. Ergo, & quadratum ex applicata AB erit quarta pars rectanguli CF.

Cum itaque sit quadratũ ex AB quarta pars rectãguli CF ex diametro DC, & parametro AE, reperiatur huic ęquale rectangulum, comprehensum à diametro DC, defficiente tamen longitudine alterius lateris, vel ex 30. lib.6. vel ex 36. lib. 10. & aliud latus erit vmbelicus.

Hęc enim est conditio, quæ exposcitur ad Vmbelicos Ellipsis ex definitione, vel sic: Accipiatur distantia AC, & facto centro in B describatur portio circuli; quæ secabit diametrum in L. & I. Dico L I *puncta esse Vmbelicos*, quod, vt probetur.

Facto centro in L interuallo CA describatur circulus, qui secet axem, in M, & O, & latere AM, & alio AO fiat rectangulum OM; iam manifestum est ex 16. lib.2. Eucl. hoc rectangulum esse æquale quadrato ex AB. Ideo quartæ parti rectanguli CF, ex prædictis, sed hoc rectangulum continetur à diametro OM æqualis CD minus latere OA. Ergo est rectangulum, quod requiritur, & AO distantia requisita ad vmbelicum. Sed LO est æqualis LB, at LB est æqualis AC, ergo etiam ablata communi LA distantia OA est æqualis distantiæ LC. Vnde L erit Vmbelicus, & I alius Vmbelicus.



EX·

EXPENSIO VI.

De inclinatis rectis à contactibus ad focos.

PVncta contactuum, & foci lineis connectuntur, quæ inuicem quibusdam analogijs insignibus referuntur, & ad transuersum diametrum; de quibus quidem speculatio ardua; sed, & singulari velitate secunda.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ à tactu ad vtrumque sectionis Vmbelicum rectæ ducentur lineæ æquales hinc, inde cum contingente angulos efficient.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AD; in qua Diameter transuersa AH; repertique Vmbelici B, & F, tangat verò sectionem recta DG, à cuius tactu ad vtrumque vmbelicum ducantur rectæ BD, & DF. Dico *angulos* BDC, *&* GDF *esse æquales*.

Probatur verò per tres præcipuos progressus. Primus intendit ostendere circulum GF BC super diametrum GC transire per puncta B, & F; quod sic demonstratur.

Rectangulum factum ex AC, & GH ex prop. 19. est æquale quartæ parti rectanguli comprehensi à Parametro, & Diametro transuersa, cui etiam quartæ parti fecimus æquale rectangulum ex BH, & BA comprehensum ex prop. 20 h. Quare cum sint æqualia habebunt latera proportionalia reciprocè ex 10. lib. 6. Eucl. Vnde HG erit ad HB, vt AB ad AC: Iunctis ergo B, & C linea BC, & G, & B linea GB, erunt triangula BAC, & GHB similia; siquidem secundùm propos. 5. lib. 6. Eucl. habent latera proportionalia circa æquales angulos rectos H, & A, & ideo angulus niger G angulo B nigro æqualis: vnde, & reliquus GBH reliquo BCA; Cum ergo angulus B niger, & angulus ACB sint æquales vni recto ex 17. lib. 1. Eucl. fit, vt angulo B nigro additus GBH æqualis angulo ACB in Hyperbola fiat totus GBC rectus; at in Ellipsi ablatis CBA, & CBH nigris remaneat CBG angulus rectus. Deinde idem probabitur de angulo GFC, quòd sit rectus. Nam iunctis recta G, & F, sicut F, & C triangulum GHF erit similis triangulo FAC. Nam *permutando* sicut se habet GH ad HF, æquali BA (cum F sit alter vmbelicus) ita FA æqualis HB ad AC, cum ergo latera sint proportionalia circa angulos rectos H, & A trianguli erunt similia, & reliquos angulos reliquis æquales obtinebunt. Vnde angulus HGF angulo AFC erit æqualis, qui additus angulo GFH conficiet totum angulum GFC rectum ob dictam rationem, quòd CFA æquetur angulo HGF, qui cum HFG æquat rectum in hyperbola, at in Ellipsi relinquet GFC rectũ ablato CFH, & CFA: Quare ex 31. lib 3 Eucl. facto super GC centro in R, circumferentia transibit per puncta F, & B; quod anguli recti probati sint, & ideo necessariò in semicirculo debeant esse.

Progressus 2. Intendit probare; quòd erecta in puncto contactus D perpendiculari LD vsque ad lineam FC prolongatam in L, si opus sit, & producta CB; tres lineæ LC, & DL, & GL in idem punctum conspirent in L. Considerandum est itaque GFC triangulum rectangulum triangulo LCD rectangulo esse ad verticem in Hiperbola, in Ellipsi vnum contineri in alio, & angulum C nigrum hic esse eundem, ibi æqualem: quare, & reliquus angulus reliquo æqualis, & latera erunt proportionalia ex Coroll. 1. propos. 17. lib. 1. Elem.

Sunt autem triangula GBH, & GFC æquiangula. Ex eo, quod rectangula habeant angulum GCF angulo GBF æqualem, quòd sit super eandem circumferentiæ portionẽ circuli GFCB. Quare, & triangulum GFC erit triangulo BAC simile, cui simile in primo progr. probatum est triangulum GBH. Quare erit quoque simile ei BAC triangulo LCD; quod probatum est simile triangulo GFC, vnde & latera proportionalia erũt. Deinde producatur GB vsq; quò occurrat rectæ FL si opus sit, erit triangulum BLC triangulo GLF simile; siquidem in primo progress. anguli GFC, & CBG probati sunt æquales, & recti, & angulus L est communis in Hyperbola in Ellipsi ad verticem.

Cum itaque triangula sint similia BAC, & LCD, erit AC ad CB, vt CD ad CL, & *permutando*, vt AC ad CD; ita BC ad CL. Et propter triangula similia GFL, & BCL, vt BC ad CL, ita est GF ad GL; Quare erit commune latus CL triangulo CDL, & GLF, ac BCL; & latus GL conueniet cum CL, & DL in L.

Progress. 3. Cum ergo angulus GFL in progr. 1. probatus sit rectus, Angulus verò LDG talis factus sit; si diametro GL fiat circulus erunt anguli recti vertices F, & D ex propos. 28. lib. 3. Eucl. in circuli circumferentiã.

Rursus. Cùm angulus CBL, vel quod idem GBC

in

in t. progr. probatus sit recta, & CDL factus talis si diametro CL circumferentia ducatur, hæc transibit per D, & S puncta & vertices angulorum rectorum ex 28. lib.3. Elem.

Cum itaque angulus BLC sit in eadem circuli circumferentia, ac angulus BDC, & angulus idem BLC, vel GLF (in Ellipsi ad verticem) sit in eadem circuli circũferentia GF, ac angulos GDF, erunt angulus BDC, & GDF ad contactum D æquales, vtpote æquales FDI vertio BLC.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Si Hyperbolam vel Ellipsim recta linea contingat, & ab vtroque vmbelico ad tactum binæ inclinentur lineæ: Illa linea, quæ parallela alterutri à centro ducetur ad contingentem erit æqualis dimidio transuersi axis.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AD, quam contingat OD in D, & ad contactum D ab vmbelicis B, & F binæ lineæ inclinentur BD, & FD, deinde à centro R ducatur TR parallela alterutri, aut FD, aut BD, vt est exemplum, donec contingentem secet in T. Dico RT *esse æqualem axis transuersi dimidio* RA, *vel* RH.

Iungatur punctum T cum punctis F, H, & A, & vt in antecedenti figura sit ducta GH perpendicularis ad axem, & coniunctum punctum G, vbi secat tangentem, cum vmbelico F, sitque ducta OF parallela TR vel BD.

Progreff. 1. Probatur itaq; Angulos T (vt ostendam) in triãgulo CTF rectus est, & ideo cum H angulus in triangulo GHF ex constructione sit rectus, poterit ex prop.28. Cor.l.3 El. diametro GF describi circulus, qui transeat per puncta, & vertices angulorum rectorum T, & H, & sic angulos apud G in triangulo FGH, & T in triangulo FTH, vtpote anguli ad circumferentiam, & super eandem peripheriam FH erunt æquales ex 27.lib.3.elem.

Progreff. 2. Itaque ostenditur angulus T in triangulo GTF rectus. Quoniam triangulum magnum OFD est æquicrurum, & OT medietas basis; Ergo FT est perpendicularis.

Est autem æquicrurum: Quia anguli O, & D nigri sunt æquales, angulus enim alternus niger O factus ab incidente CD in parallelas OF & BD alteri alterno BDC æqualis, qui BDC probatus est æqualis in antec. propos. angulo nigro D, vtpote ab inclinatis ad contactum effecti, ergo O, & D æquantur.

Quod autem OT sit medietas basis OD probatur. Nam BR incidens est æqualis RF ob æqualem distantiam vmbelicorum à verticibus H, & A, & centri R ab iisdem. Ergo etiam OT est æqualis TD cum secetur in easdem partes ex 13. propos. lib.6. Elem. à parallela TR ipsa OD, quæ parallela ad extrema coniungit; Quare cum in triangulo OFD æquicrurio FT sit æqualis DT, angulus OTF erit rectus, & TF perpendicularis. Vnde verificabitur, quod per T. & H transeat circulus assumpto pro diametro GF.

Progreff. 3. Ostendendum est deinde angulum ATC nigrum angulo FTH esse æqualem.

Angulus CTF est rectus, ex progr. 1. angulus quoque CAF est rectus ex constructione præcedentis figuræ; Ergo diametro CF circumferentia transibit per C, F, A, & T; Anguli ergo nigri C T A, & C F A, initi super eandem peripheriam A C, & vertices T, & F in peripherijs erunt æquales; sed angulus niger CFA probatus est æqualis angulo nigro HGF in præced. propos. in fine progr. 1. & hic angulus G niger in progr. 1. & 3 huius propos. angulo T in triangulo FTH; Ergo hic angulus FTH est æqualis angulo T nigro trianguli ATC.

Progr. 4. Duo anguli nigri ad T sunt æquales, & angulus CTF rectus ex 1. progr. ergo, & angulus HTA erit rectus. Idem enim vtrisque additur angulus HTC in Hyperbola, & in Ellipsi FTA. Si ergo fiat circulus diametro HA centro R transibit per T anguli recti verticem ex 28. lib.3. Eucl. Vnde TR erit radius est semidiameter æqualis semiaxi transuersæ AR, seu æquali RH.

THEOR. III. PROPOS. XXV.

Si in Hyperbola, aut Ellipsi ab eodem sectionis puncto binæ inclinentur rectæ lineæ ad vmbelicos; in Hyperbola maior minorem quantitate transuersi axis superabit, & in Ellipsi erunt simul transuerso axi æquales.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AC in quibus à puncto circumferentiæ C binæ lineæ inclinentur ad vmbelicos vnam adbouc K altera ad illum B. Dicit, quod in Hyperbola linea maior KC superabit minorem BC portione æquali diametro transuersæ AH, in Ellipsi verò simul sumptæ KC, & BC diametro HA erunt æquales, ducatur GD parallela

GF per centrum F in vtraque sectione.

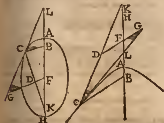
Progress. 1. Primo ostendendum GD in Hyperbola esse æqualē DC, quod demonstratur. Nā triāguli GDC anguli nigri ad basim G C sunt æquales, siquidem GC in parallelas incidens GD, & SC ex 30. lib. 1. Eucl. facit angulos alternos SCG, & G nigrum æquales; sed SCG est æqualis angulo nigro C ex prop. 23. h. Ergo G, & C niger sunt æquales, quare GD crus est ęquale DC ex 17. lib. 1. Elem.

Progr. 2. Prob. quoq; CD esse æqualem portioni DK: In triāgulo enim BKC ob parallelam FD ad basim BC, quia KB est dupla KF etiā KC erit dupla portionis KD ex 2. lib. 6.: quare KD, & DC erunt ęquales, & tota CK erit dupla CD, quæ est æqualis suæ dimidię DC, necnon in eodem triangulo, & BC erit dupla FD ob eandem rationem.

Progr. 3. Cum ergo DG sit æqualis CD: ergo FD, FG eius medietatea duplatæ æquabunt CK, sed BC est dupla FD, & AH est dupla GF præc. propos. Ergo BC, & AH æquabunt totam CK; quod erat probandum.

Idem ostendetur in Ellipsi cum LG in parallelas BC, & FG incidat angulus C niger est ęqualis angulo nigro G interuus, & ad easdem partes externo ex propos. 30. lib. 1. Elem. sed angulus C niger est æqualis, vtpote ad contactum ex propos. 23. huius angulo DCG. Ergo est æqualis angulo G, & triangulum GDC æquicrurum: Ergo CD, & DG crura æqualis

Progr. 2. Probatur quoque in triangulo KBC ob parallelas FD, & BC crus KC esse duplum cruris KD, & BC cruris FD; sicut est KB duplum cruris FK.



Progr. 3. Igitur DG est æqualis DC. Ergo si DG dupletur erit æqualis CK; sic FD, si dupletur, erit æqualis BC. Vnde duplicata GF ęquabit CS, & CK; sed FG simplex ex pręced. propos. est æqualis dimidio diametro transuerso FH. Ergo duplicata erit ęqualis toti AH. Vnde, & BC, & CK erunt æquales toti diametro AH.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

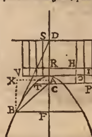
Si parabolem recta contingat linea, quæ à tactu ad sectionis vmbilicum recta linea ducetur, æqualis erit axis portioni, quæ intercipitur inter contingentem prædictam, & Vmbelicum.

Sit Parabola AB, in qua vertex apud A, contingensque DB Vmbilicus C signatus à vertice nempe quarta pars parametri, applicata ad tactum FB, iungaturque CB. Dico, quòd hæc linea CB erit æqualis axi CD, qui intercipitur inter Vmbelicum C, & punctum D, quo diametrum secat tangens BD in puncto D.

Progress. 1. Aduertendum ex propos. 12. huius diametri portiones inter applicatam, & verticem FA, & inter verticem, & contingentē DA esse ęquales.

Secundò. Ex propos. 11. lib. 2. Elem. quadratum ex CB esse ęquale quadratis ex CF, & FB, quòd angulus ad F rectus sit. Vnde erit æquale quadrato FX facto ex FB, & quadrato HD facto ex CF: quadratum verò FX est ęquale rectangulo VD sub DA axis portione, & AV Parametro comprehenso ex Coroll. propos. 12. huius. Quare fit quadratum CB sit ęquale quadrato DH facto ex CF, & rectangulo DV, quod comprehenditur à portione diametri DA, & Parametro AV quadruplo lineę CA ex hypothesi.

Progr. 2. Prob. propos. Quadratum CD quale est DP æquale est quadrato ex CF, quod fecimus DH, & quatuor rectangulis, quibus vnum latus est linea ipsa D R æqualis lineę CF, & aliud linea AC, vel ęqualia R L; siquidem ex ęqualibus DA, & AF ablatis æqualibus D R, & CF residua sunt ęqualia. Insuper est quoque ęquale idē DP quatuor paruis quadratis ex CA qualis sūt P, I, O, H. Nam hæc omnia nempe quadratum maius DH, quatuor quadrata parua T, I, O, H. & rectangula quatuor, vt R.O concluduntur in ipso DP.



Progress. 3. Sed hęc omnia quatuor rectangula, & quatuor quadrata complent, & æquantur rectangulo sub DA intercepta diametro, & AV parametro comprehensum: Nam parameter est quater CA, vnde sub AR ęquali, & AV quadruplici rectangulum quatuor parua quadrata cōprehēdet, & rectangulum sub DR æquali CF, & quadruplici RV quatuor rectangula quale vnum ex illis est SR.

Progr. 4. Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & rectangulo DV ex parametro, & axe AD.

Progr. 5. Sed hoc rectangulum DV ex parametro, & axe intercepta, vt ex 1. progr. est æquale quadrato ex SF; Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & quadrato ex FB.

Sed quadratum ex linea CB à contactu B ad parametrum ducta ex progr. 1. est æquale duobus quadratis ex CF, & FS. Ergo etiam est æquale quale quadrato magno DCP. Cùm ergo hęc duo quadrata sint æqualia; etiam latera erunt ęqualia, & CB erit ęqualis lineę CD, quòd erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc elicies CB esse ęqualem FA, & AC simul positis, quia probata est ęqualis lineę DC, cuius vna pars AD est ęqualis ipsi AF, altera CA ipsa eadem. Quod si CB sit vna quoque ex applicatis, & cadat in punctum T ad diametrum perpendiculariter, vt CT; tunc CT dupla erit CA; quia eodem modo

modo erit æqualis CB inter se applicatam, & verticem intercepta, & eidem CA, vt quartæ parti Parametri.

Alia quoque ratio esset, quod tangens secabit in E, vtpote æquali CA: Ac CF à tactu ad Vmbilicum probata est ęqualis CB diametru inter vmbilicum, & punctum B intercepto.

EXPENSIO VII.

De Diametris secundis,

Non vnus diameter sectionibus conicis inest siquidem pręter illum, qui oritur à generatione, & in ipsa sectione coni est, quę per verticem coni ducitur; aliæ etiam lineę, quę illi diametro æquidistantes in Parabola, vel in Ellipsi, & Hyperbola ad centrum ducuntur, diametri dignitatem obtinere possunt; siquidem, & omnes applicatas, que intra sectionem ducuntur bifariam diuidere possunt; vt ergo id demonstretur.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Si Parabolam recta contingat linea, quæ per tactum diametro parallela ducetur, omnes alias tangenti æquidistantes intra sectionem existentes bifariam secabit.

In parabola BCD, sit tangens CV, diameter VF, & ipsi parallela PG per tactum C ducta; tangenti verò parallela DL intra sectionem, ita vt eius extrema terminentur in D, & L puncta sectionis.

Dico hanc DL bifariam à linea PO transeunte per tactum C secari in I.

Progr. I. Priùs Triangulum TLQ ostendendum est æquale rectangulo QAP; sicut, & triangulum DTF parallelogrammo, seu rectangulo FP.

Quod vt ostendatur, reminiscendum est id, quod diximus propos. 11, huius portionem diametri BA esse ęqualem AV ob contingentem CV; quare ex Euc. lib. I. propos. 39. rectangulum PB erit æquale triágulo BCV ob eandem altitudinem CB, & basim duplicatam BV.

Progr. 2. Reminiscendum quoque quadratum CB, & LQ applicatarum esse ad inuicem, vt BA ad AQ ex prop. 5. huius Exp. 2. sed vt quadratum ex CB, ad quadratum ex LQ, ita est triangulum CVB ad triangulum LTQ, cum ob parallelas CV, & LT sint ęquiangula, & similia, ex prop. 22. lib. 6. Eucl. Ergo etiam erunt, vt BA ad AQ, quę est proportio quadratorum ex applicatis.

Progr. 3. Vt autem BA ad QA, ita est rectangulum BP ad rectangulum QB ob eandem altitudinem ex 1. lib. 6. Eucl. Ergo, & triangulum CVB ad triangulum LTQ erit; vt rectangulum BP ad rectangulum PQ; & *permutando*, itaquoque est triangulum CBV ad rectangulum BP ex 39, quod ei probatum est æquale, vt triangulum LTQ rectangulo QP: Ergo quoque LQT triangulum erit æquale rectangulo QP ex prop. 12. lib. 5. Elem.

Progr. 4. Eadem prorsus est probatio de triangulo DTF; quòd sit æquale rectangulo FP. Vnde non deseruit eam repetere, quibus positis.

Progr. 5. Auferendum est triangulum LQT, & æquale rectangulum QP, & remanebit ablatis æqualibus quadrilatera figura LQFD rectangulo residuo POGQ æquale, quæ prius erant æqualia, ex progr. pręced. 4. & 3.

Progr. 6. Quod si auferatur quinquelaterum commune, & occupans idem spatium FOILQ remanebunt duo triangula æqualia, & similia DIG, & IOL; Quare basis IL erit æqualis basi ID; quod erat probandum. Similia autem sunt, quod anguli apud I sint æquales, vtpote ad verticem, & apud G, & O recti: vnde, & reliquus D reliquo L, ęqualis erit, ideo ex def. I. lib 6. Elem. erunt similia.

COROLLARIVM.

Colligitur itaque omnes parallelas diametro principali, siue ex generatione in Parabola diametri quoque vices, & naturam obtinere. Nam diameter est ille ex definitione, qui per medium diuidit omnes rectas, quæ intra sectionem parallelę inuicem ducuntur.

THEOR. II. PROPOS. XXVIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ ei parallela ducitur intra sectionem, diuiditur per medium à lineâ, quæ à centro procedit, & per contactum deducitur.

Sit Hyperbola, seu Ellipsis ABD, quam tangat recta AC, cui parallela agatur DF, discedatq; à centro E recta ad contactum B. Dico, quod hęc diuidit portionem parallelæ intra sectionem remanentis, scilicet LD in duas partes æquales. Ducantur ad punctum contactus B applicata BP, & ad extrema L, & D applicatæ LO & DI, & tandem à vertice sectionis AS, quæ terminet in S puncto lineę AB, à centro ad contactum ductæ.

Progr. I. Iam ex propos. 17. Expens. 4. huius nosti rectangulum PE, & CE esse ęquale quadrato EA ex AE, ideoq; proportionalia esse latera ex 17. lib. 6. & vt PE ad AE, ita esse AE ad EC, & ideo PE ad EC duplicata esse proportione. Ex hoc itaq; demonstrandum est in primis EBC triangulum esse æquale triangulo SEA cum eidem triágulo BEP eandem dicant proportionem, quam rectangulum CE, EP æquale, quadrato AE dicit.

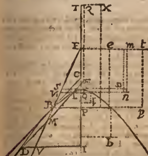
Prob. Dicit eandem proportionem triangulum SEA triangulo BEP, sicut quadratum EA ad quadratū ex PE, eò, quòd SEA, & BEP triangula sint super eandem, basim, ac quadrata EA, & PE: Vnde, tum triangula, tum quadrata erunt in duplicata ratione laterum suorum, nempe eâ quam latus CE ter-

tis proportionalis, vt dixi habet ad EP.

Item rectangulum CP ex PE, & EC est ad quadratum PE, vt altitudo EC ad altitudinem PP ob eandem basim PE: Idest triangulum REC ad triangulum BEP ob eandem altitudinem PE. Cum ergo triangulum AES sit ad triangulum BEP, vt EC ad EP. Rursusque triangulum BEC sit ad triangulum Idem BEP, vt eędem lineę EC ad EP triangula EBC, & ESA ex prop. 7. lib. 5. Elem. erunt æqualia, cum eidem eandem dicant proportionem.

Progr. 8. Quapropter ab eodem triangulo BEP in Hyperbola, si auferatur SEA, & BEC æqualia inuicem, residua remanebunt ęqualia quadrilaterum SEAP, & triangulum BCP.

Pariter si in Ellipsi auferatur à triangulo ABE, & CBE ęqualibus triangulum commune PBE remanebunt rasidua ęqualia triangulum PCE, & quadrilaterum APSE.



Progress. 3. Considerandum autem est rectangulum OZ esse ęquale gnomoni o a m, nam EZ ęquatur parti a m, & EO ęquali reliquo gnomonis AN. Et idem dicas de gnomone p a t eadem ratione, quod æquatur px rectangulo. Rectangulum verò ZO esse ad rectangulum Px ex diametro transuersa, & intercepta pro vno latere, & intercepta solùm pro alio ex prop. 6. huius, vt quadratum EO ad quadratum EP.

Quoniam itaque 1. progr. diximus, ita esse quadratum ex EA ad quadratum ex EP, vt SEA triangulum ad EPB triangulum; erit etiam ex prop. 20. lib. 5. reliquus gnomon P a t, idest Px rectangulum ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SEAP ad triangulum SEA.

Progr. 4. Et ex eadem ratione erit ex EA quadratum ad quadratum ex EO, vt triangulum ESA ad triangulum ENO ob rationem duplicatam suorum laterum, quę sunt eadem in quadratis, & triangulis, vt dictum est progr. 1. Quare, & reliquus gnomon o a m, idest OZ rectangulum erit ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SANO ad triangulum SEA, permutando itaque OZ rectangulum erit ad ASNO quadrilaterū, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA. Itemq; permutando progr. 3. proportiones, ita erit rectangulum Px ad quadrilaterum SAPB, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA.

Quapropter erit eadem proportio quadrati EA ad triangulum SEA hoc est OZ rectanguli ad AOSN quadrilaterum, quam Px rectanguli ad SPBA quadrilaterum. Vnde permutando erit OZ rectangulum ad PX rectangulum, quam SANO quadrilateri ad SABP quadrilaterum.

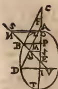
Progress. 5. Proportio verò OZ rectanguli ad PX rectangulum est eadem, quæ quadrati LO ad quadratū BP & ideo eadem, quæ trianguli LFO ad triangulū BCP 26. l. 6. ob parallelas & easdē bases, ob quę sunt similia triangula inuicem, & ideo in duplicata ratione suorum laterum communium quadratis. Ideo quadrilaterum SNAO erit ad quadrilaterum SABP, vt LFO triangulum ad BCP triangulum; Et permutand. Quadrilaterum SNAO erit ad triangulum LFO, vt Quadrilaterum SABP ad triangulum BCP. Sed hæc sunt æqualia triangulum BCP, & quadrilaterum SBAO ex progr. 8. Ergo etiam illa SNAO quadrilaterū, & LFO triangulū pr. 6. Idem probabis de quadrilatero IVSA, quod sit æquale triangulo DPT. Nam supposita eadem consideratione, quæ progr. 3. Ita erit quadratum ex EA ad quadratum EI, vt triangulum ESA ad triangulum EVI ratione eadem: Quare, & reliquus gnomon, idest gnomoni æquale rectangulum ex ST, & IA erit ad quadratum EA, vt reliquum quadrilaterum SAVI, seu in altera ellipsi ABVI ad triangulum STA; & ideo erit rectanguli TI, & IA ad ASIV quadrilaterum quam PX rectanguli ad SPBA quadrilaterum; cum sit etiam horum eadem ratio, quæ EA quadrati ad triangulum SEA ex progr. 3.



Quare permutando erit rectangulum ex TI, & TA ad PX rectangulum, velut ASIV quadrilateri ad SPAE quadrilaterum. Proportio autem rectanguli ex TI, & TA ad rectangulum PX ex TP, & PA est eadem ex 6. huius, quæ quadrati DT ad quadratum BP, & ideo eadem, quæ trianguli DPT ad triangulum BCP æquiangulorum ex 26. lib. 6. elem. sunt enim figuræ similes super easdem quadratorum bases. Ideo quadrilaterum ASIV erit ad quadrilaterum SPBA; vt triangulum OPT ad triangulum BCP ideo permutando quadrilaterum ASIV erit ad triangulum DPT, vt quadrilaterum SBPA ad triangulum BCP; sed quadrilaterum SBPA æquatur triangulo BCP, vt 1. progr. ostensum est. Ergo etiā Quadrilaterū ASVI æquabitur triāgulo DPI.

Progr. 7. Vnde, si ab æqualibus SAVI quadrilatero auferas NSAO quadrilaterum æquale triangulo LOP, quod auferatur à triangulo DPI quod est ęquale ipsi ASVI, reliquum NOVI quadrilaterum restabit æquale reliquo LODI trapezio. Si vero ab vtroque auferas commune spatium quinquelaterum LMVIO, remanebunt duo triangula NML, & DMV æqualia, & ob parallelas, & angulos M æquales ad verticem similia, vnde basis LM erit æqualis basi MD.

 Obser-



Obseruandum verò est in Ellipsi aliquando FD cadere infra ? centrum versus T. Sed tunc idem erit argumentum: nisi quòd à triangulo AS? auferendũ est triangulum En L, linea OI io serie probationis, prog 6. quod sit æquale triangulo ?VI; quod tunc sit infra centrum ? versus T. Et tandem pro vltimo progr. cum sit æquale IDP triangulum quadrilatero ASIN, & triangulũ OIL quadrilatero ASON ablatis istis restat ON lu quadrilaterum æquale quadrilatero OLID; adde vtrisq; AVI, & XIX efficientur æqualia triangulum ON?, & figura irregularis OLUDV?, à quibus ablato cõmuni spatio M?LO erũt æqualia MNL, & MVD triangula insoper, & similia ob æquales angulos alternos V, & N inter parallelas positos, & angulos ad M ad verticem.

COROLLARIVM I.

Hinc deduces omnes protractas à centro in Ellipsi, vel Hyperbola posse habere proprietates diametri; Quod omnes in sectione cõprehensas æqualiter diuidant. Vnde præter diametrum ex generatione tot erunt diametri in sectionibus Hyperbolicis, vel Ellipticis, quot erunt lineæ intra sectionem à centro ductæ, & circumferentiam secantes.

COROLLARIVM II.

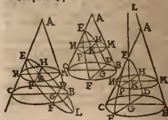
Hinc cognosces, quod quę dicta sunt de ellipsi etiam de circuli circumferentia debent cognosci, vt quilibet pro ellipsi substituto circulo intelliget.

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

* *Quælibet sectio potest in alio cono collocari, cui aliqua ex diametris coniungatis sit axis.*

*Sit diameter cõiungata GB, BL in sectione DKF, cui sint applicatę OF, & KP parallelę, & æquales ipsis ex præc. DO, & HK. Dico hanc sectionem posse in cono collocari aliquo, cui diameter hæc coniugata sit axis.

Applicatę PG duę extremę proportionales inueniantur CN, & GB ex propos. 16. tract. 15. quę ad punctum G perpendiculares applicatæ PG, & GD constituantur, & per eas circulus actus intelligatur diametro CB, & transibit per P mediã proportionalẽ, & D ex eadem propos. 16. tract. 15. A puncto itaq; C per verticem K in plano per BDL transeunte ducatur CA, & à B in eodem ducatur ad verticem diametri transuersę BA, in L in parabolæ verò parallela GK diametro, in quo etiam per punctũ K parallela ipsi CK ducatur NKM, & per PN, NM ducatur planum, quod ex propos. 13. tract. 22. erit parallelũ plano BDCF, in quo diametro NM describatur circulus NPM. Dico, quod iste circulus transibit per P, & N punctæ: Vnde superficies conicæ circumuestiens hos duos circulos sectionem quoque BKND circumuestiet, eo quia sicut probabitur de punctis P, & N applicatarum, quòd per eas transeat circulus MNHP; sic per ratio militet de omni alio circulo, qui diametrum aliam aliquam parallelam diametro CB obtineat, nam transibit per extremum punctum applicatę diametro sectionum, eo puncto, quo diameter circuli transit.



Probatur itaque NPMH transire per puncta P, N applicatarum KP, & KH. Nam rectangulum NK, & KM ęquatur quadrato PK, vel KH, ergo diametro MN circumferentia transibit per NPMH puncta ex propos. 35. lib. 3.

Ostendendũ est itaq; rect. NK, & KM esse ęquale quadrato PK, vel KN, Nam CG est ad NK in Hyperbola, & Ellipsi, vt GB ad KK; sic BK est ad KM, vt OL diameter transuersa ad KL. Ergo si componantur proportiones erit CG, & GK rectangulum ad rectangulum NK, & KM; vt GS, & GL rectangulum ad KS, & KL rectangulum; & ideo, vt quadratum FB applicatę ad quadratum applicatę PK, ex prop. 6. huius, & Thesi; quia GL, GB facimus diametrum. Ergo CG, & GK rectangulum erit ad rectangulum NK, & KM, vt PN quadratum ad quadratum PK: Ideoque *permutando* CG, & GK rectangulum erit ad PN quadratum, vt NK, & KM rectangulum ad PK quadratum. Sed CG, & BB rectangulum est ęquale ex effectione quadrato PG: Ergo etiam ex propos. 7. lib. 5. Elem. NK, & KM rectangulum quadrato PK, & ?N. Vnde circumferentia NPKN transibit per P, & N, & ita dicas de alijs applicatis.

In Parabola quoque idem argumentũ militabit. Nam rectangulũ CG, & NB est ad rectangulũ NK, & KM ob eandem altitudinẽ GK, vel KN, vt CG ad NK, scilicet, vt NK ad KB. Verũ, vt GK ad KB, ita est quadratũ PG ad quadratum PK ex 5. huius. Vnde vt rectãgulũ CN, & GB ad rectangulum NK, & KM, ita quadratum FG ad quadratum PK, & *permutando* rectangulum CN, & GB erit ad quadratum PG, vt rectangulum NK, & KM ad quadratum PK: sed rectangulum CG, & GB æquatur ex effectione quadrato PG, ergo etiam ex propos. 7. lib. 5. NK, & KM rectangulum æquabitur quadrato PK.

COROLLARIVM I.

Hinc est diametros secundarias esse propriè axes, qui licet non deseruiant conicis sectionibus, quatenùs in hoc assignato cono existunt; sunt tamen axes possibiles; quia hæc coni sectio, quæ assignato cono applicata est, ans in eo effecta potest, & in alio cono Scaleno reperiri, & in eo diameter coniugata axis erit, licet non præcipua, eo quod normalis non sit suis applicatis: Propterea etiam proprietates axis obtinebit.

COROLLARIVM II.

HInc quoque fit euidens; quod si FG duæ proportionales extremæ inueniantur ex 16. prop.tr.t5.CO,& GK,& collocata Hyperbola,& Ellipsi sectione ad punctum o ad quæcumque angulum, ita tamen, vt FG sit perpendicularis ipsi toti CB; si deinde per B ducatur recta CB, & ducta NK parallela CK, duabos NK, & PK extrema proportionalis MK inoeniatur, & ducatur BM vsque dum occurrat diametro in L: quod detruncabit BL tali modo; vt rectangulum GB, & GL sit ad rectangulum KB & KL, vt quadratum FG ad quadratū PK: Nā eodem argumenta FG erit ad GL; vt KM ad KL, & CO erit ad OB, vt NK ad KE: vnde compositis proportiooibus rectangulum CO,& GB erit ad rectangulum NK, & KM, idest æquale quadratum PN ad æquale PK, vt rectangulum GL, & GE ad KL, & KK rectangulum, ideoque, vt quadratum FG ad quadratam PK.

In parabola verò, si P N duæ extremæ inueniantur, & calloceantur vt supra ad angulos rectos cum applicata; deinde duabus KM æquali GB, & PK extrema proportinalis inueniatur NK, & parallelæ ad CS constituantur linea CN occurret vertici parabolæ K. Nam ob eandem altitudinem rectangulum CO, & GB erit NK, & KM, vt CG ad NK; idest vt EG ad KG, ideoque, vt CB ad NB. Vnde ex prop 9. lib.6. composita triangula OCB, NKB in vnam rectam cohibunt.

Quare lines diuidens bifariam rectas,& ideo ex pr.28. transiens per centrū poterit esse diameter, si ei addatur in Hyperbola diameter transuersa, idest talis pars extra sectionem; donec occurrat alteri lateri KA trianguli per axem ducti; Talis verò diameter est duplus portionis, quę pertingit à vertice sectionis ad centrum ex definitione centri.

COROLLARIVM III.

PRæl præced. Coroll. poteris quoque quamlibet sectionem coni alicui inserere in quo possibile est reperiri, vt per se patet.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Diametros coniungatas, centrumque in Hyperbola inuenire.

DVcantur FD, & GE parallelæ quomodocumque, & bifariam diuidantur; perque puncta illa medietatum ducatur KA. Nam erit diameter; rursus ductis alijs quomodocumque sibi parallelis HI, & BC diuidantur bifariam, & per puncta diuisionum LA ducatur, & LA erit quoque diameter, quæ conueniet in centrum figuræ ex præc.Coroll. huius; Quare A erit centrum.

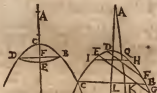
Prob. Diametri enim sunt, quòd bifariam parallelas in sectione diuidant, & A est centrum, quoniam rectæ in centrum procedentes sunt diametri coniugatę, vt propos.28. huius.

Oportet tamen ex præced. 2. Coroll. eis LA, & KA addere portinoem DA,& QA, scilicet diametrum transuersam complere, vt omnimodam diametrorum rationem dignitatemque obtineant, quam prop.6. huius ostendimus.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Hyperbolæ centro Axem principalem inuenire.

EXhibeatur hyperbolę centrum A ex præc.& facto in eo centro ducatur intra sectionem ACB arcus BED, diuisaque peripheria bifariam à centro ducatur AE, *quam lineam assero esse diametrum principalem sectionis, & axem.*



Probatur ducta BD illa à recta AE in F diuidetur bifariam, & ad angulos rectos ex propos.27. El.Cor.6. Cùm ergo BED secta sit bifariam, & normaliter à linea AE, quæ transeat per centrum A, hæc linea erit diameter principalis.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

In Ellipsi diametrorum quamlibet coniungationem inuenire.

SIt Ellipsis ABCD fig. 1. in qua ducatur aliqua HG,& alia illi parallela EF, quæ diuidantur bifariam in I, & K, ducaturque per illa puncta recta AD, & erit vna diameter. Deinde diuidatur bifariam AD in L, & ducatur parallela CB eisdem EF, vel GH, eritque CB altera diameter coniungata.

Ad quod ostendendum interuallo L B ducatur applicata à puncto T, & sit TQ, & TV; connectanturque GQ, & HV, & Dico NG, & NQ esse applicatas, & ęquales, & iden CB transiens per centrum, & bifariam diuidens applicatas esse quoque diametrum.



Probatur. Quoniam AD est diameter, erit, vt AID rectangulum ad ATD rectangulum, sic TQ quadratum ad IG quadratum, sed rectangula ex effectione sunt æqualia; quia fecimus LT æqualem LS; Vnde, & SA æquabitur TD: Ergo quadrata lateraq; IG, & TQ erunt æqualia; vnde QG erit parallela BXI AD; sed, & TQ, & IG sunt parallelæ ex

effectione. Ergo NG, & NQ erunt æquales lineis LT, & LI æqualibus; Ergo, & inter se; quare erunt applicatæ, & CB diameter coniugata.

COROLLARIVM I.

HInc data diametro quacumque ei inuenies coniungatam diametrum, & applicatas: Sit enim data diameter CB; duc ei parallelam HG, quas diuides bifariam in I, & L, & per ea ages rectã AD, quę erit diameter coniugata, huic verò duc parallelas quascumq; vt GQ, & erunt applicatæ diametro CB.

COROLLARIVM II.

HInc eruitur, quomodo data Ellipsi in ea centrum inueniatur, ducatur enim, vt cumque, HG, & ei parallela FE, quas diuides bifariam, & ages per ea puncta lineam AD. Nam cum sit diameter, in illa erit centrum; diuidatur itaque bifariam in L, & DL erit Ellipsis centrum.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

Diametros principales coniugatas in Ellipsi exquirere.

* DEtur Ellipsis VPQH in fig 2 & centro ex superiori Cor. reperto O, ducatur circulus, qui eã secet in quatuor aliquibus pũctis, vt A, D, C, E. Diuidatur itaque AD circumferentia bifariam, & item CE, necnon, & ED, & AC; perque puncta diuisionum ducantur rectę, PH, & VQ, & erunt axes.

Probatur. Nam habent duas conditiones, quæ ad axes requiruntur prima; quòd sint sibi inuicem perpendiculares, secunda, quod vna sit maxima altera minima omnium diametrorum, quæ in Ellipsi duci possunt.

Quod autem sint sibi perpendiculares ducantur diametri AE, & CD, eritque ADE semicirculus, & DEC talis quoque, ablata itaque communi circumferentia DE, erunt æquales arcus AD, & CE, qui diuisi bifariam erunt semiarcus EQ, & LD æquales arcui AD, quibus additis arcui ED erit LDEQ semicirculus, & ideo LQ transibit per centrum. Et quia DE peripheria secta est per medium ea effectione; additis æqualibus erit quoque LDEI secta per medium. Vnde OP erit perpendicularis, vtpote à medio arcus DE, & ideo LDEI ducta. Patet autem, quod etiam AD, & CE sunt diuisæ bifariam, & ad angulos rectos ex Coroll. 6. prop. 27. lib. 3. Elem. Vnde erunt applicatæ orthogonales.

Quod verò VQ sit maxima patet. Nam CA, & DE puncta æqualiter distant à centro, vtpote puncta quoq; peripheriæ, ergo punctũ Q, & V mediũ inter ista, & extimum circulo, erit maximè remotum, & de punctis H, & P contrarium dicas.

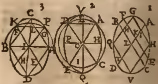
Quod autem punctũ medium V, & Q, sit maximè remotum, patet. Nam circulus per eorum extrema ductus non secat Ellipsim, sed comprehendit, & tangit in V, & Q; vnde omnes alij circuli ei minores secabunt, quare ad puncta sectionum ductæ semper minores erunt radio VQ circuli tangentis, vt sunt OD, & OA.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

In Ellipsi diametros coniugatas æquales, inuenire.

REpertis axibus CD, & BA coniungantur eorum extrema rectis AC, & CB; sicut, & AD, & DB in fig. 3. quæ diuidantur bifariam, & per ea puncta rectæ transeãt HE, EF. Dico *has lineas esse diametros coniungatas, & æquales.*

* Nam, quod sint æquales patet; Quoniã in triãgulis COI, & CIP ob cõmune latus CI, & ęqualia crura CO, & CP, & angulos apud C æquales, vtpote rectangulorum quoque AIC, & CIB erus IB, & IA æquale, & IC commune babentium erunt ex 22. lib. 1. Elem. ęquales anguli PIC, & KIC, quare cũ angulos æquales cõprehẽdãt IS, & IP diametri, ęqualiter remouebũtur ab axe, & ideo erũt æquales. Nam si tales nõ sunt, sit minor IF, & producatur, vt fiat æqualis IK, ducatur arcus PA, & subtensa PK, quia ergo angulus PIC ęquatur angulo CIK erit sinus PL æqualis sinui LK; sed PL est applicata, & ad eundem angulum rectum, cum P sit in ambitu ellipsis, ergo etiam KL, quare K erit etiam punctum Ellipsis, non ergo terminabit IK in Ellipsim in S infra K; quare non erit minor, quam IK, & ideo, nec minor, quàm IP.



Quod verò sint diametri coniugatę patet; Nam ob æqualia triangula CIA, & AID bases AC, & DB æquantur, & sunt parallelę: quare etiam medietates. Cum ergo AC, & AD, coniungant æquales, & parallelas, & ipsę parallelæ sunt, sunt autem AG, & GC æquales ex effectione sicut CF, & FB; Ergo etiam BH, & HD, necnon ED, & EA. Vnde cum bissecent OC, & GA & EH, HD, sic BF, FC, & AE, FH paralelas, & æquales, KE, & FH erunt diametri.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

Applicatarum ad diametros coniugas æquales quadrata sunt æqualia rectangulis ex diametri portionibus.

SIt diameter coniugata in fig. 1. BC æqualis alteri AD. Dico *quadratum applicata GN esse æ*quale rectangulo BN, & NC.

Probatur BL, & LC rectangulum, seu quadratum æquatur quadrato applicatæ LA, quę est dimidium alterius diametri, sed vt rectangulum BL, & LC ad rectangulum BN, & NC ex 6. huius, ita est quadratum LA ad quadratum GN; & ideo *permutando*, vt rectangulum BL, & LC ad quadratum LA, sic BN, & NC rectangulum ad quadratum GN, sed rectangulum

BL,

IL, LC, vt dixi æquatur quadrato LA. Ergo etiam rectangulum BN, & NC æquabitur quadrato GN ex 12.lib.5.elem.

PROB. VI. PROPOS. XXXVI.

Data diametro coniugata alteri in Parabola applicatas ponere, & à dato puncto in ea diametrum ducere.

Sit data diameter aliqua coniungata, vt DC, cui applicatas oporteat ponere: Duatue ipsi CD parallela diameter AB, & altera æquidistás AF, & in puncto F, quo secat Parabolam ab A ducatur AE dico esse applicatam diamatro C.

Patet quia ob æquidistantiam diametrorũ AB, & EF a CD erunt æquales AP, & PE, vt patet. Sit deinde assignatum pũctũ A, à quo oporteat diametrum ducare; ducta ab eo puncto quauis AE, & ei parallela BF, diuidantur bifariam in D, & P, & ducatur diameter DC per P, O, cui ponatur æqu. distans AB, quę ex prop. 27. huius diametae erit.

PROB L. VII. PROPOS. XXXVII.

Diametrum coniugatam in Parabola, & axem inuenire.

DEtur Parabola ABC, & duæ parallalæ quæcomqua ducantur AC, & DE; diuidanturque per medium, & ducatur HIB, & hæc erit diameter quæcomqua ex dafin. 11. h.

Deinde huic BH perpendicularis ducatur FC à puncto C, diuidaturq; bifariam in K, & LK erit axis.

Nam quod sit diametar patet, eo quòd sit parallela diametro BI, quod autem sit axis constat; quia applicatæ FC, vtpota bifariam diuisæ incidit ad angulos rectos, qood sit æquidistans ipsi BI.

EXPENSIO VIII.

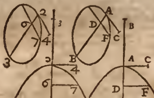
De sectionum æqualitate.

ANtequam perueniamus ad sectionum descriptiones explicandas visum est tractationem generalem, quæ omnibus sectionibus conuenit expedire, & simul quoque eas comparare, vt sciamus, quæ descriptio alteri deseruire possit, & quæ non possit.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

Si binæ Hyperbolæ, seu Ellipses, æquales habeant Parametros axibus transuersis æqualibus applicatas, æquales erunt inuicem.

SInt binæ Hyperbolæ, vel binæ Ellipses FA, & 27; quarum æquales sint diametri transuersæ BA, & 23, & parametri eundem angulum cum diametro facientes, & æquales inuicem CA, & 24. Dico Hyperbolas, vel Ellipses esse inuicem æquales.



Probatur. Nam sumantur æquales diametrorum portiones ad libitum, vt DA, & 3, 6, ex quibus ducantur applicatæ FD, & 6, 7. demonstrabitur enim has futuras ęquales, & pari ratione si alię; & alię portiones sumantur diametrorum, à quibus applicatę ducantur, semper ostendetur eas esse tum in vna, tum in altera æquales, ergo sectiones ipsæ ęquales erunt, cum superpositæ, quod vult definitio 15.h. vt conuenirant applicatæ applicatis, ita, & sectiones sectionibus.

Ostenditur verò assumptum, nempe FD, & 6.7. futuras æquales. Nam ex 8.h.Cor.2. vt est BA transuersa diameter ad AC parametrum, ita est DF quadratũ ad rectangulum AD, DA. Item in alia sectione, vt est 2 3 trãsuersa diametar ad 2 4 parametrũ, ita est quadratũ applicatæ 6 7 ad rectãgulũ ex 6 2, & 3 6 effectum; sed vt est AB ad CA, ita est 2 3 ad 2 4 ob earũ æqualitatẽ ex Thesi. Ergo, vt est rectangulum AD, & DA ad rectangulum 2 6, & 6 3 ita est quadratum DF ad quadratum 6 7: sed rectangula sunt æqualia ob æqualia latera AD ad 6 2, & BD ad 6 3 ex Thesi ob ęquales eaas transuersas. Ergo, & quadrata erunt ęqualia ex FD, & 6 7: quare, & latera eorum DF, & 6 7 erunt æqualia.

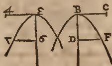
THEOR. II. PROPOS. XXXIX.

Si sint binæ parabolæ, quæ parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad diametros applicatas Parabolæ erunt inuicem æquales.

SInt Parabolę EF, & 3 7. Dico, quod si parametri BC, & 3 4 sint æquales, & in ęquali angulo applicatæ, Parabolas futuras ęquales.

Sumantur ęquales diametrorum portiones ad libitum BD, & 3 6, à quibus applicatę ducantur DF, & 6 7, probabitur de istis, sicut, & de omnibus alijs, quod sint inuicem ęquales. Vnde necesse erit, quod linea parabolica per eadem puncta

ĉta in vtraque transeat. Ex Theor.1. cap.2. constat quadratum FD, esse ęquale rectangulo diametro intercepta DA, & parametro contento.



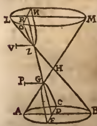
Rectangula autem, tum vnius, tum alterius parabolę sunt ęqualia ob ęqualem parametrum BC, & 3 4, & æqualem interceptam BD, & 3 6 ex constructione. Ergo, & quadrata ęqualia; nempe quadratum ex FD quadrato ex 6 7; quare, & ipsorum latera erunt ęqualia FD, & 6 7, & hinc Parabolę ipsę erunt ęquales, cum super positę, vt patet, vt conuenirent applicatę applicatis, ita, & parabolę parabolis. quę per extrema applicatarum ducerentur, vt vult def.15.h.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Hyperbolicæ sectiones, quæ fiunt in duobus conis ad verticem, quorum bases parallelæ, ab eodem plano, habent æqualem transuersam diametrum, & æquidistantem, & eandem parametrum.

SIt conus LHM positus ad verticem alteri AHB, transeatque per vtrosque idem planum ON^{F}C, quod faciat in eo sectiones Hyperbolicas OZN & FGC, sintque conorum bases inuicem parallelę; nempe LNMO, & ACB^F, dico has Hyperbolas habere eandem transuersam diametrum GZ, & ęqualem parametrum, & ęquidistantem alteri parametro, & inuicem sectiones esse ęquales.

Probatur. Nam triangula AGD, & NMR sunt ęquiangula, cum sint ad verticem, & inter parallela LM, & AB sicut, & triangula DZB, & LZR. Vnde obtinebunt latera proportionalia, & propter hoc eam proportionem, quam dicet BD ad DZ, eandem dicent LR ad RZ, & in alijs triangulis RMG & AGD eam proportionem, quã dicit AD ad DG eãdem quoq; dicet MR ad RN. Quare ex eis poteris componere rectangulum accipiendo duas antecedentes pro vno parallelogrammo, & duas sequentes pro alio, vt ex propos. 23. lib 6. Eucl. colligitur: igitur ex BD, & AD antecedẽtibus componatur rectangulum dicet eam proportionem ad rectangulum cõpositum ex DZ, & DG consequentibus, quam rectangulum compositum ex MR, & RL antecedentibus ad rectangulum ex consequentibus RZ, & RO quemadmodum hic vides.



Cum	BD	ad	DZ	est vt	AD	ad DG
Sic	RL	ad	RZ	vt	RM	ad GR.
Ergo, vt	compositum			ad compositum.		
	BD	&	AD		DZ	& DG
Sic	RL,	&	RM	erit ad	RZ,	& GR.

Progr.2. Sed rectangulum ex AD, DB est æquale quadrato ex applicata ^{F}D, & rectangulum ex MR, & RL quadrato applicatę RO: Ergo quadratum RO habet eam proportionem ipsum ad rectangulum ex GR, & RZ, quam quadratum ^{F}D habet ad rectangulum ex DZ, & DG.

Progr 3. Sed horum quadratorum ad hęc rectangula proportio est illa, quã habet ad diametrũ transuersam ZG parameter PG, ergo erit eadem proportio prorsus parametri VZ ad transuersam diametrum GZ, ac ad eandem diametrum GZ parametri PG, siquidem huius parametri PG est ex 8. h.Cor.2. eadẽ quam habet quadratum ^{F}D ad rectãgulum ZD, & DG, quæ probata est eadem cum illa, quam possidet quadratum OR ad rectangulum GR, & RZ, quę est rursus ex prop. 8. h.Cor.2. eadem, quam habet parameter VZ ad diametrum transuersam ZG.

Cum itaq; eidẽ diametro trãsuersę ZG eandẽ dicant proportionem parameter, PG, & VZ ex 7. lib 5. Eucl. erunt ęquales parametri. Paralleli quoque sunt ob parallelas OR. & FD; cui parametri ęquidistant; siquidem sunt parallelę; quia sunt in basibus parallelis LNMO, & ACB^F; Et eis parametri ęquidistant, quod sint contiguę diametri, vt habetur ex prop.8. huius.

Probatur autem, quod vna sectio alteri sit eadem ex pręc. quia habent parametros ęquales in ęqualibus angulis, vtpote perpendiculares diametro RD, & diametrum transuersam eandem.

COROLLARIVM.

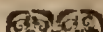
COlligitur hinc oppositarum Hyperbolarum idem esse commune centrum, & communes omnes transuersas diametros, axem quoque communem, communesque vmbelicos, quia erit ad axem transuersam factum rectangulum, (vt docuimus prop.22.h.) ęquale quartę parti rectangulo sub axe transuersa, & parametro conclusi, tum vnius, tum alterius sectionis.

EXPENSIO IX.

De parallelis ad diametrum sectionis à vertice coni ductis.

PArabola diametro nulla potest esse parallela ducta à vertice coni, quia incidit in ipsam superficiem coni. Vnde cum non secet basim, nec rectangulum à segmentis diametri basis factum eius quadrato comparari potest.

Quarè portione cruris trianguli per axem, & diametro parabolico rectangulum constitutum, rectangulo segmentorum, quę diameter parabolicus facit in diametrum basis trianguli per axem, comparabimus.



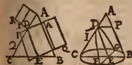
THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

Rectangulum ex basis portionibus est ad rectangulum ex diametro, et intercepta inter verticē coni, & verticē sectionis trianguli per axem, vt Parameter ad eā interceptam.

SIt Conus BAC idem in vtraque figura, in quo parabola CDF, cuius diameter ED, & applicata EF, intercepta portio cruris trianguli per axem AD, & parameter DI. Dico, *quòd rectangulum ex BE, & EC est ad rectangulum ex ED, & DA, vt DI ad DA.*

Quadrato ex FE applicatæ, ideo rectanguli BE, & EC ex 5. huius est æquale rectangulum ex ED, & DI, & ideo ex prop. 22. El. lib. 6. Cor. quadratum DQ ex ED prima erit ad quadratum ex EF secunda, vt ED prima ad tertiam proportionalem DI.



Sed rectangulum ex ED, & AD dicit eam proportionem ad rectangulum ex AD, & DI, quam ED ad DI ob eandem altitudinem AD. Ergo quadratum DQ ex DE dicit eam proportionē ad quadratum EF, vel rectangulum ei æquale BE, & EC; quam ADE rectangulum ad IDA rectangulum, quod sint, vt ED ad DI ex 16. lib. 5. Ergo *permutando* quadratum ex DE erit ad ADE rectangulum eiusdem basis DE, vt rectangulum BE, EC ad rectangulum ex DA, & DI.

Verùm, vt quadratum ex ED ad rectangulum ex AD, & DE, ita est idem rectangulum ex AD, & DE ad quadratum AR ex DA ob eandem altitudinem ED, & AD.

Rectangulum itaque ex BE, & EC erit ad rectangulum DA, & DI ex 16. lib. 5. vt ADE rectangulum ad AR quadratū ex AD, & *permutando* Rectāgulū ex BE, & EC erit ad rectangulum AD, & DE, vt AD, & DE rectangulum ad DA quadratum, ideſt ob eandem altitudinem, vt ED ad AD.

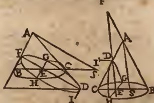
COROLLARIVM.

COlligitur esse quoque proportionem BC quadrati ad CA, & BA rectangulum, vt DI ad DA. Quoniam rectanguli BE, & EC proportio ad rectangulum DA, & DE est composita ex proportione BE, ideſt DF ad DA, eademque ob triangulorum similitudinem ex 4. lib. 6. CB ad CA, & ex proportione EC ad DE, ideſt CB ad BA; quare rursus componendo rectangulum CB, & CB, ideſt quadratum CB erit ad rectangulum CA, BA, vt ID ad DA.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Si Conus per axem sectus sit, & ei triangulari sectioni sit normalis Ellipsis, vel Hyperbola, quarum diametro acta sit parallela à vertice coni, quadratum huius parallelæ est ad rectangulū ex interceptis basis partibus factū, vt trāsuersæ diametri portio intercepta ad parametrū contiguā.

SIt Conus ABC sectus triangulo ABC per axem, sitque sectio Hyperbolica, vel Ellipsica GDH normalis ipsi plano triangulari, cuius diametro FD ducta sit parallela AS. Dico, quod si fiat quadratum ex ipsa AS habebit eam proportionem ad rectangulum ex diametri baseos portionibus interceptis SC, & SB in hyperbola BC, & SC in Ellipsi, vt FD diameter transuersa ad parametrum DI.



Præassumpt. Aduertendum est Quadratum applicatæ EG ex 35. lib. 5. Elem. esse æquale quadrangulo ex segmentis diametri conici AE, & EC; Et transuersam diametrum FD esse ad Parametrum DI sicut rectangulum FE, ED ad quadratū EH applicatę ex prop. 8. h. Cor. 2. Tandem considerandę sunt lineæ in sectionibus, quæ proportionem dicunt. Nam vt FE ad EB ita AS ad SB ob parallelas AS, & FE in triangulo BFE, & BAS ex 4. lib. 6. Deinde vt ED ad EC, ita AS ad SC ob parallelas AS, & DE in triangulis ASC, & CED, in Ellipsi ad verticem.

Quare poterimus conficere duo rectangula ex istis proportionibus composita, vt videa.

FE,	vt	AS	&	DE,	vt	AS
ad		ad		ad		ad
EB		SB		EC		CS
Ergo	compositum	erit,	vt	compositum.		
FE	&	DE		AS,	&	AS
	ad				ad	
EB	&	EC		SB,	&	CS

Assumendo simul fundamenta, quæ non referuntur FE, & DE, & comparando ad suos terminos simul, quæ proportio erit eadem, quæ AS ad AS suos terminos collata quó supposito.

Probatur. Rectangulum ex EF, & ED est ad rectangulum EB, & EC, vt quadratum ex AS ad rectangulum ex BS, & SC. Sed rectangulum FE, & ED ad quadratum HE, hoc est ad rectangulum ęquale ex prop. 35. lib. 3. Elem. CE, EB refertur, vt diameter transuersa ad parametrum FD ex Cor. prop. 8. huius. Ergo quadratum AS erit ad rectangulum BS, & SC, vt diameter transuersa FD ad parametrum ID.

EX-

EXPENSIO X.

De Asymptoto Hyperbolarum proprietate.

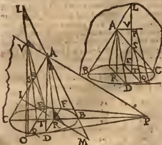
TRiangulum quoddam ambit Hyperbolam, cuius latera singula item ipsi analogiam possident, estque formatum à duorum planorum conum tangentium intersectione, quam cum Hyperbolæ plano extra conum extenso efficiunt, nec huius trianguli inutilis contemplatio, vt ea, quę descriptioni hyperbolarum optimè deseruit.

THEOR. I. PROP. XLIII.

Sint duo plana, alterum, quod conum tangat, alterum, quod illum secet in contactu, & per verticem etiam transeat, & huic secanti Hyperbola sit æquidistans diameter transuersa Hyperbolica à tangente plano in centro secabitur.

DVos casus hęc propositio habet, nam planum contingens conum potest secare planum per verticem secando rectangulè, vel non rectangulè.

Sit ergo primus casus, in quo planum tangens sit ADPQ, quod tangat conum BAC secundùm lineam AD; cui occurrat, secetque aliud planum ductum per verticem A, quod sit ADB, in ipsa linea contactus AD. huic plano FAD ęquidistet Hyperbola EQS. Dico. *quod eius diameter transuersa TL secabitur ab hoc plano tangente DAPQ in centro V,*



Probatur. Nam primo, quòd secet clarum est. Siquidem, si planum BLC interminatum per vtrasque axes AR coni, & TVL Hyperbolæ rectangulum ad eorum plana ducatur. Hoc vtique secabitur à plano tangente DAIQ. Ergo etiam secabit diametrum TVL in illo plano descriptum: Quòd autem à plano tangente DAPQ secetur planum ductum per axes BLC patet; quia planum contingens ADPQ occurret vertici coni in A, & eius axi, ergò necessariò secabit planum per eundem verticem ductum BLC; in quo est vertex etiam, & axis RA.

Quod verò punctum V, sit centrum in quo secat diametrum Hyperbolicum planum contingens ADQP.

Probatur. Nam enim planum ADQP sit rectangulè ad planum per verticem ductum BAD ex hypothesi, cui etiam est rectangulum planum interminatum ductum per verticem; propterea que plana hæc perpendicularia plano BAD, quare, & eorum communis sectio SP, cui etiam plano RAB perpendiculare est planum coni basis BFCD. Ergo ex propos.16.tract.22. & eius communis sectio RC cum interminato BLC est perpẽdicularis; Quare ex prop.7.tract.22. AP, & RC, cum sint eidem plano perpendiculares erunt parallelæ. Cùm itaque AL eas incidat in parallelas AR, & LT angulus L internus angulo BAR externo erit æqualis ex 30. lib.1. Eucl. Quare, cum sint rectangula BRA, & AVL triangula erunt quoque similia. Nam reliquus angulus reliquo erit æqualis, ita dicendum de triangulo AVS, cuius angulus ASV alterno SAR est ęqualis, & hinc est similis triãgulo BAC; Radius autem RB ęquatur RC ex cor pr.15.h.

Probatur itaque assumptum ostendendo SV, & VL eidem AV eandem dicere proportionem, & ideo ex 7. lib.5. Eucl. esse inuicem ęquales.

Nam, vt BR ad RA, ita est ob similitudinem triangulorum AV ad VL. Item quam proportionẽ dicit BR, idest BC ad RA eandẽ dicit AV ad VS. Ergo LV, & SV ipsis AV eandem dicit proportionẽ, quam BR ad RA, & propter hoc erunt æquales; quaderẽ V erit centrum Hyperboles.

Sit iam secundus casus, in quo planum PADOV tangens conum secundùm lineam AD non se secat cum plano FAD rectangulè; dico *adhuc V centrum esse Hyperboles.*

Probatur. Nam tracta MI parallela PV, iam clarum est, quòd secabitur diameter Hyperbolicus à plano PVC, quod transit per AR coni, & axẽ TVL hyperboles, quod verò secet eum plano PVC patet, quia in P, & A cum illo concurrit.

Quod verò V sit centrum demonstratur, quòd sint æquales SV, & VL, eo quia eidem AV eandem dicant proportionem.

Siquidem MR, & RI sunt æquales, vt probabitur: Sed ob parallelas AR, & LT in triangulo LMI ita se habet MR ad AR, vt AV ad VL ob similitudinem triangulorum LAV, & MRA, vt infra ostendam. Rursus eadem VA se habet ad VS, vt RI, idest æqualis MR, vt ostendam, ad RA ob similia triangula AVS, & AIR. Vnde cum eadem VA eisdem SV, & LV eandem dicat proportionem RM ad RA ipsę SV, & LV erunt inuicem æquales.

Sunt autem similia triangula ARI, & SAV, quòd angulus S internus niger sit æqualis angulo SAR externo inter parallelas RA, LT, & angulus SVA alterno VAL sit æqualis, idest angulo ARI, & hinc reliquus reliquo. Sic, & triangula LAV, & MRA sunt similia; quòd angulus niger L sit æqualis angulo nigro A ob parallelas RA, & LT, & anguli V, & R nigri sunt æquales ob parallelas MI, & PV.

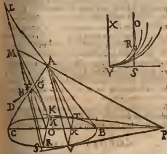
Probatur modo MR, & RI sint in linea MI æquales portiones. Nam ex propos.23 Tract.15. ita se habet CR ad BR, vt CP ad BP. Quamobrem etiam permutando, vt CR ad CP, ita erit BR ad BP; Sed in triangulo PAC, vt CR ad CP, ita RI ad PA ob parallelas PA, & RI, vt ex Coroll. propos.4. lib.6. Eucl. & vt BR ad BP; ita RM ad PA, eò quòd triangula sint ad verticem inter parallelas PA, & MR; Ergo eidem PA lineæ RI, & MR eandem dicunt proportionem, quam CR ad CP, vel quæ eadem BR ad PB; quare sunt æquales.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLIV.

Si planum aliquod contingat conum, & illud duo plana secent, alterum triangulare ductum per verticem coni in ipso contactu secans planum contingens, aliud Hyperbolicum æquidistans à triangulo; sectio hæc contingentis, & Hyperbolici plani accedet semper ad Hyperbolem, sed nunquam eam continget.

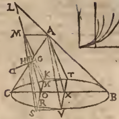
SIt ABC conus, & planum contingens AVMS in in linea VA, siue normaliter ad XV, siue non, quod secetur à duobus planis; primum ductum sit per verticem, vt TAV secans contingens illud VAMS in linea contactus AV; aliud æquidistans KMS, in quo Hyperbola NFR. Dico, quòd sectio huius plani Hyperbolici cum plano contingente AVMS facit sectionem MS, cui Hyperboles crus FR semper accedet; sed numquam tanget, quantumlibet producantur.



* Probatur primò, quòd nunquam tangat; sunt enim plana secantia triangulare TAV, & Hyperbolicum KMS æquidistantia. Ergo VA, & MS sectiones ipsorum in plano contingente AVMS æquidistabunt, quare nunquam conuenient; Sed planum contingens VAMS tangit in linea AV solummodo; ergo numquam tanget MS superficiem coni quantumlibet producantur, & planum contingens; & conus. Ergo neque tanget Hyperbolã RS, quæ in superficie coni reperitur, & idem dicendum de plano ad alteram partem contingente TAMK, vt patet.

* Quòd verò semper accedat ostenditur. Quia quælibet portio circuli inter duas parallelas intercepta, nempe VX ductam ad contactum V, & alteram parallelam OS in altera figura semper magis accedit ad contingentem VS, quò maior est circulus, & portiones SR parallelæ OS interceptę inter peripheriam, & tangentem sunt semper minores, vt est minor IS, quam RS.

Sed quò magis conus producitur, eò magis circulus basis fit maior, ergo minor erit distantia inter contingétem VS, & peripheriã VR illius inter plana parallela TAV, & KMS interceptã, qualis est RS; distantia enim sectionum TV, & XR semper



erit eadem productis planis TAV, & KMS parallelis sed circuli bases cool semper maiores; vnde, & distantia RS semper minor.

Dicentur verò sectio SM, & MK Asymptoti.

THEOR. III. PROPOS. XLV.

Quæ à vertice sectionis ad vnam, seu aliam Asymptotum recta ducetur linea parallela ordinatim applicatæ, hæc poterit describere quadratum æquale quartæ parti figuræ contentæ à diametro transuersa, & parametro.

SInt eadem fig. quę priùs, & ab F vertice Hyperboles ducatur FH, vsque ad Asymptotum MS, vel FG vsq; ad Asymptotum MK, parallela sectioni KS basis BKRC cum plano KMS. Sitque sectionis parameter, seu coefficiens latus FD.

Dico rectã FG, seu FH constituere quadratum æquale quartæ parti figuræ, quam constituit LF diameter transuersa, & parameter FD.

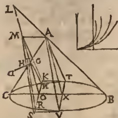
Progress. 1. Probatur. Quadratum constitutum ex MF est quarta pars quadrati constituti ex LF, cum sit latus eius FM, dimidium lateris LF. Ergo etiam quadratum ex FH quarta pars rectanguli ex LF diametro, transuersa, & FD Parametro.

Progr. 2. Probatur conseq. Nam sicut se habet quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD ita se gerit quadratum MF, vt probabitur in 3. progress. ad FH quadratum, & sic se debet gerere quarta pars quadrati FL ad quartam partem rectãguli ex LF, & FD ex 18. lib. 5. Elem. Sed Quadratum ex FM est quarta pars quadrati ex FL descripti, vt dictum est. Ergo etiam quadratum ex FH erit quarta pars rectanguli ex LF diametro transuersa, & parametro FD descripti.

Progress. 3. Remanet itaque probandum quadratum MF esse ad quadratum MF, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD. Nam cum sint super eamdem basim FL, erunt vnum ad aliud, vt altitudines, nempe altitudo quadrati, quæ est LF ad altitudinem rectanguli, quæ est FD, nempe, vt diameter trãsuersa ad parametrum: Sed ex prop. 42. huius, vt est diameter transuersa ad parametrum, ita est quadratum ex AX ad rectangulum ex CX, & XB, vel quod ei æquale ex 35. lib. 3. Eucl. ad quadratum ex XV. Sed, vt quadratum AX ad quadratum XV, tale quoque ob similitudinem triangulorum XAV, & OMS, & MFH reperitur MF quadratum ad quadratum OS, & quadratum FM ad quadratũ FH. Ergo ex 16. l. 5. el. erit eadem proportio quadrati FL ad rectangulum LF, & FD diametri transuersæ, ad parametrum primo

proposita, ac quadrati FM ad quadratum FH.

Quod verò triangula sint æquiangula patet, quia ex parallelis conficiuntur. Nam AZ, & MO existentes in eodem plano sunt parallelæ, sic, & XV, & OR, sicut, & VA, & SM; quia efficiuntur à planis parallelis ATV, & MAS secantibus planum AAC secans per axem, & planum ACTV basim Coni, & planum AVMS contingens, vt patet pr.14. Tr.22.



COROLLARIVM.

Elicitur quadratum MF dimidiæ transuersæ diametri ad quadratum FH esse, vt diameter LF ad parametrum FO; quia ex prog.3. est, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF diametro, & FD parametro. Hoc autem quadratum ex LF est ad rectangulum ex LF, & FO ob eandem altitudinem EL, vt diameter ad parametrum, vnde etiam talis erit proportio quadrati MF ad quadratum FH.

THEOR. VI. PROPOS. XLVI.

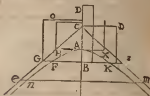
Si in Hyperbola applicata producatur vsque ad Asymptotum hinc, & inde; erit rectangulum factum ex vna portione inter figuram, & Asymptotum intercepta, & ex tota reliqua vsque ad Asymptotum æquale quartæ parti figuræ à transuersa Diametro, & Parametro comprehensæ.

Sit Hyperbola BAX, cuius asymptoti CO, CZ, centrum C, cuius contingens verticem vsque ad Asymptotum AH, sitque applicata producta extra sectionem vsque ad Asymptotum in Z, & O. Dico, quòd si fiat rectangulum ex intercepta inter sectionem, & Asymptotum FG pro vno latere, & ex reliqua ZF pro alio; hoc erit æquale quartæ parti figuræ, quæ sub transuersa diametro AO, & parametro comprehendatur.

Probatur autem. Quia quadratum ex AH, vt ex præcedenti, est æquale quartæ parti figuræ, quæ ex parametro, & diametro transuersa comprehenditur. Sed huic quadrato est æquale rectangulum ex ZF, & FG, ergo hoc rectangulum est æquale quartæ parti figuræ, quæ à diametro transuersa, & parametro concluditur.

Sunt autem quadratum AH, & rectangulum ZF, & FG æqualia, quod eidem AC quadrato eandem dicant proportionem.

Nam ex prop.6.Cor.2.b.vt diameter transuersa ad parametrum proportione respondet, sic rectangulum ex OB, & BA ad quadratum ex AF proportionem dicit, & eandem proportionem dicit quoque ex præced. Coroll. quadratum CA ad quadratum AH, & ea eadem prop. eius progr.3. quadratum CB ad quadratum BG.



Debes autem antequam progrediamur aduertere, rectangulum OB, & BA esse æquale BZD gnomoni, & rectangulum ZF, & FG gnomoni, quid remaneret ablato quadrato FA à quadrato GA, vt ea se patet. Aufer ergo duo proportionalia in eadem proportione nimirū rectāgulū OB, & BA à quadrato BCD, aut gnomon BXO æquale illi rectangulo, & remanebit quadratum CX CA. Aufer quoque quadratum AF à quadrato BG, & remanebit gnomon æqualis rectangulo ex ZF, & FG, quæ etiam vtpote residua rerum dicentium eandem proportionem, ac sua tota, in quibus erant; erunt ex 22. prop. lib 5. Elem in eadem proportione. Eritque ex AC quadratum residuum in ea proportione ad rectangulum ZF, FG, quam totum BC quadratum ad totum quadratum BC, quę est illa ipsa, quam habebat quadratum AC ad AH quadratum. Quamobrem CA quadratū ad rectangulum AH eandem proportionē dicit, quā idē CA quadratū ad rectāZF, & FG, itaque erunt æqualia rectangulum ZF, & FG, & quadratum AH ex 7 lib. 5. Elem. Vnde hoc rectangulum ZF, & FG quartæ parti figuræ, ex diametro transuersa, & Parametro æquabitur, sicut ex præc. prop. æquatur ei quadratum AH. Et idem probabitur de rectangulo GZ, & KZ, eum militer eadem ratio, cùm æquentur ZZ, & 1G.

COROLLARIVM.

Quare colligas velim omnia rectangula ex ZF, & FG, & aliis parallelis, vt ex m n, & n e esse æqualia tum inter se, tum quadrato AH, vt patet, cùm singula sint æqualia quadrato AH.

PROBL. I. PROPOS. XLVII.

Datæ cuiuscumque Hyperbolæ Asymptotos inuenire dato centro, & Parametro contigua.

Rectangulo DV Parametro, & DA transuersa diametro reperiatur quadratum æquale ex propos 14. lib.2. Eucl. & huius quadrati dimidium latus à vertice figuræ A super parametrum mensuratum dabit punctum AH, per quod à centro C transibit Asymptotus CG, & sic producta in aliam partem, quę sit etiam æqualis ipsi AH dabit aliud punctum, per quod à centro C Asymptotus transibit CZ.

Probatur autem ex prop.45. Quia AH lineæ per quam à centro transit Asymptotus subtendit quadratum æquale parti quartę rectanguli à parametro, & diametro transuersa comprehensi. Sed hoc

hoc quadratum ex AH, vel ei æquali ad alteram partem, vtpote ea dimidio eius latere est quarta para quadrati, quod fecimus, æquale dicto ex diametro transuersa, & parametro rectangulo; Ergo etiam huius rectanguli quarta pars erit, & consequanter erit linea, per cuius extremum à vertice sectionis à centro transibit Asymptotus, quod facere oportebat.

EXPENSIO VII.

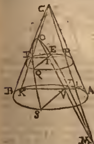
De lineis in sectionibus, vtcumque ductis applicatas, seu parallelas secantibus.

Nos hanc doctrinam faciliter trademus, cùm alij, non nisi post multas præuias propositiones, à quibus dependet, tradant, & non de omnibus simul, sed de singulis, vt videre est apud Ambrosium Vincentium virum in Mathematicis admirabilem, in quo quædam etiam desumemus in sequentibus.

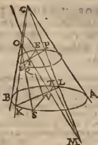
THEOR. I. PROP. XLVIII.

* *Si in sectione Conica qualibet, quæcumq; ducta secet duas parallelas in ipsa sectione, rectangulum ex segmentis illius interceptis ab vna erit ad rectangulum ex interceptis ab alia segmentis, vt rectangulum ex segmentis vnius ad rectangulum ex segmentis alterius parallelarum.*

* Sit conus ABC, & triangulum LKC à vertice descendens; at non per axem, & in sectione TOS faciat sectionem MO, sintque sectiones effectæ à circulis parallelis in illa parallelæ SQ, & TS. Dico rectangulum MV, VO lineæ OM secantis conicam figuram in O, & M esse ad rectangulum MI, IO, vt rectangulum TV, VS ad rectangulum EI, IQ parallelarum.



Probatur. Rectangulum LV, & VK ex propos. 35. lib. 3. Eucl. est æquale rectangulo TV, & VS ob eundem circulum, in quo se intersecât; & eadem ratione PI, & ID æquatur rectangulo EI, & IQ: Sed vt PI ad LV; sic est IM ad VM, ob parallelismum in triangulo eodem IMP, & vt ID ad VK, sic OI ad VO ob parallelas in triangulo eodē KOV, ergo si cōponātur proportiones, & fiant rectangula, ita erit rectangulum ex PI, & ID ad rectangulum LV, & VK, vt IM, & OI rectangulum ad rectangulum ex MV, & VO, vt hic vides.



PI	vt	IM	&	ID	vt	OI
ad		ad		ad		ad
LV		MV		VK		VO

Ergo compositum, vt compositum.

	PI; & ID		IM & OI		
Erit		ad compositum		ad compositum.	
	LV & VK		MV & VO		

Quare etiam rectangulum EI, & IQ erit ad rectangulum TV, & VS, vt rectangulum MI, & OI ad rectangulum MV, & VO, quod erat probandum. Quod verò sectio V. g. MTOS parabolę, & MO sectio in ea, & latus trianguli MC conueniant in M patet. Nam cum sit planum TOS parabolę, cruri AC parallelum non erit parallelum cruri CM. Vnde conueniet, cum eo crure CM; sed illud est in superficie coni. Ergo conueniet cum eo in superficie coni. Sed puncta plani parabolici in superficie coni sunt ipsa linea flexa parabola. Ergo ipsa in M incidet; sed sectio MO est in plano parabolę, & in plano triāguli, cū sit eorū communis sectio. Ergo ibi debebit esse vbi planum parabolæ cruris trianguli coniungūtur in M scilicet in ipsa flexa SOTM.

In Ellipsi patet; quia si secat latera trianguli CBA per axem; tantò magis, & reliquorum triangulorum minorum intra conum ductorum. In Hyperbola CM crus potest non conuenire cum sectionis SOTM plano, sed neque secabit Hyperbolam altero extremo M; quod requiritur in propos. Siquidem si sectio OM conueniret cum Hyperbola etiam contra Thesim cum MC conueniret; quia totius trianguli ACL, cuius sectio est, & plani Hyperbolici, tantùm crura, vtpote sectiones superficiei conicę in superficie conica sunt. Nota verò, quod sectio OM potest etiam secare axem, vt dedimus exemplum in Hyperbola.

THEOR. II. PROPOS. XLIX.

Si duæ parallelæ duas alias parallelas in qualibet conica sectione intersecent erunt rectangula segmentorum proportionalia.

SIt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis TAOL parallelę in ea XL, & AB alias parallelas intersecantes TV, & CD, & per puncta intersectionum F, & H ducatur XZ. Dico, quod rectangulum AH, & HX erit ad rectangulum ex KF, & FL, vt rectangulum TH, & VH ad rectangulum CF, & FD.

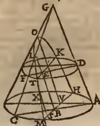
Probatur rectangulum AH, & HB ad rectangulum AF, & FL erit ex preced. vt rectangulum HZ, & HX ad rectangulū ZF, & FX. Verùm vt ZH, & XH rectangulum ad ZF, & FX rectangulum ita est quoque ex prec TH HV rectangulum ad CF, & FD rectāgolū, ergo cum sint eædē vni tertię proportioni istę proportiones rectanguli, nimirū AH, & HZ ad AF, & FZ rectangulum, erit quoque AH, & BH rectangulum ad XF, & FL rectangulum, vt TH, & VH rectanguli ad CF, & FD rectangulum, quod erat probandum.

THEOR. III. PROPOS. L.

Si in parabolâ, qualibet parallela secent diametros, erit intercepta diameter ad interceptā diametrū vt ex segmētis vnius parallelæ ad rectāgulū ex alius segmentis.

EXponatur conus. In quo parabola HOLM, & triangulum, sed non per axem AGC secet eam in BL, & circulos basi paralleloa in OF, & AC, qui etiam circuli secent parabolam in AT, & HM, quæ sectiones erunt parallelæ, sicut etiam sectio BL lateri AG ea Coroll. 3. propos. 4. tract. 22. eo, quia totum planum parabolicum ei AG sit parallelum, & ideo etiam erit parallela diametro principali VO, ex propos. 9. eiusdem tract. & ideo LB erit diameter. Dico itaque EX, & EC rectangulum esse ad HE, & EM rectangulū, vt EL ad LB.

Probatur. Nam rectangulum OF, & EF ad rectangulum AX, & XC ob æquales, vtpote inter parallelas, sunt ad inuicem, vt altitudines XF ad BC; sed XF, & BC ita est EL ad LB. Ergo rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB, & XC est, vt LE ad LB & ideo vt rectangulum KE, ET ex 35. lib. 3. æquale DE, & EF rectangulo ad HB, & XM æquale rectangulo AB, & BC.



COROLLARIVM I.

HInc habes BL esse ad LB, vt VO ad OE eo, quòd sint, vt parallelę eędem AB ad OE ex 16. l. 5. El. & ideo MB, BH esse ad CB, EX, vt MV, VH ad TE, EX rectangula; quòd sint ex prec. vt LX ad LB, vel VO ad OF. Ideo vt LB, BX ad LX, BE, vel OV, VE ad OI, IV rectangula ob eandem altitudinem in eadem proportione, ac linearum. Vnde permutando MB, BH erit ad MV, HV. vt LB, BX ad OV, IV rectangulas. vt LB ad OV, & sic alias proportiones potex permutare.

COROLLARIVM II.

HInc haurire licet ea rectangula esse æqualia ex segmentis à diametro aliquo factis, quibus ipsi diametri insistunt æquales, quoniam MB, & BM rectangulum erit ad BX, & ET rectangulum ad SX ad XL, sed hæ lineæ SX, BL sunt æquales ex Thesi, ergo etiam rectangula EXT, & MBM.

EXPENSIO VII.

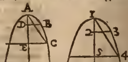
De similitudine Figurarum.

DEfinitio duarum figurarum similium ab Eutocio 3 æquiponderantium, & Apollonio Conici sexto allata est, quòd segmenta diametrorum inter verticem, & applicatas vnius ad applicatas suas, proportio sit, vt segmenta alterius ad suas applicatas, cui Mydorgius lib. 4. con. eam conditionem addit, quam demonstrat omnino necessariam, quod applicatarum ad diametrum anguli sint ęquales in vtraque figura.

THEOR. I. PROPOS. LI.

Omnes parabolæ in quocūq; cono similes sunt.

SInt datæ parabolæ CXA. & 431, quæcumque, & data diameter in prima AE applicatæque CE, & AD repertoque in secunda diametro 15. fiat angulus 415 æqualis angulo CAB apud 1, & A, & ducatur 45 à puncto, in quo 41 Crus trianguli secat figuram iuxta eundem angulum, ac CB applicata facit cum diametro AX; Deinde fiat, vt AE ad AD sic 15 ad 12, & ducatur altera applicata 32.



Progr. I. Probatur ex prop. 5. h. vt 12 ad 15, & ideo ex effectione, vt AO ad AB, ita quadratum 32 ad quadratum ex 45, & ideo, vt BO quadratum ad CX quadratum, & ideo cx 26. l. 6. El. erit etiam latus 32 ad latus 45, vt latus XO ad latus applicatæ CB.

Progress. 2. Postea considerandum est ob duos angulos ex effectione æquales apud 1, & 5 ipsis B, & A triangula 145, & CAX esse ęquiangula ex Cor. prop. 17. lib. 1. Elem. Et ideo esse 45 ad 51, vt CE ad EA. Et vt 31 ad 21; Sic EA ad DA. Sed erat in 1. progr. 32 latus ad 45 latus, sic BD ad CX, & nunc vt 45 ad 51, sic CB ad XA, & vt 51 ad 21; sic EA ad DA. Ergo ex æquo, vt 32 ad 21; Sic BO ad DA; Et sic ostendetur de alijs, quæ possent trahi. Cum ergo sit 32 applicata ad segmentum diametri 12 in vna parabola interceptum, vt

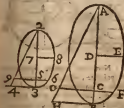
In

inaltera applicata BD ad diametri interceptum segmentum DA, & idem argumentum fit de alijs angulique applicatarum sint æquales. Parabolæ erunt similes ex definitione 16. h.

THEOR. II. PROPOS. LII.

Si binæ Ellipses, seu Hyperbolæ, sint quarum vna, habeat segmenta intercepta inter verticem, & applicatas ad alterius segmenta, vt applicatæ sibi ad applicatas alterius in angulis æqualibus; illæ erunt figuræ similes.

SIt figura 3 6 8. in qua sit segmentum 3 5 ad segmentum BC alterius, vt 5 6 applicata ad CF applicatam, & idem fit de alijs omnibus segmentis in angulis æqualibus ACF, & 3 5 6. Dico figuras esse similes.

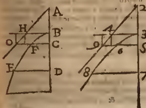


Probatur. Ite ponitur 3 5 ad CB, vt 5 6 ad CF. Ergo permutando erit quoque 3 5 ad 5 6, vt CB ad CF, vel conuertendo 5 6 ad 3 5, vt CF ad CB. Ergo cùm sint in angulis æqualibus, figuræ erunt similes ex def. 16. huius.

THEOR. III. PROP. LIII.

Hyperbolæ duæ, seu Ellipses, quarum diameter transuersa vnius ad contiguam parametrum sit, vt alterius intercepta diameter ad suam contiguam parametrum in angulis æqualibus, illæ figuræ erunt similes.

SIt Hyperbola, seu Ellipsis 3 6 8, & DFB, & sit intercepta diameter 3 2 ad parametrum 3 4, vt AB intercepta alterius ad BH parametrum. Dico eas figuras esse similes.



Probatur. Fiat, vt 2 3 ad 3 5. Sic AB ad BC, & ducatur CO, & 5 9. Sicut etiam 2 9, & AO per extrema parametri; Triangula erunt æquiangula ex 5. l. 6. cū ponatur 2 3 ad 3 4, vt AB ad BH ex Thesi.

Quia itaque triangula sunt æquiangula, erit 5 9 ad 3 4, vt CO ad BH, & vt 3 4 ad 3 2, sic BH ad BA, & vt 2 3 ad 3 5, sic est effectione est BA ad BC. Ergo ex æquo, vt 5 9 ad 3 5, sic est CO ad CB. Sed CO ad CB habet proportionem duplicatam CF ad CB, sicut etiam 5 9 ad 5 3 eius quæ est 5 6 ad 5 3, quia ex propos. 8. huius BO rectangulum quadrato CF, & 3 9 rectangulum est æquale quadrato 5 6. Vnde ex 19 lib 6. sunt CO, & CF, & CB veluti etiam 5 9, 5 6, & 5 3 in continua proportione. Ergo erit 5 6 ad 5 3, vt CF ad CB vt tract. 16. propos. 8 & idem poterit ostendi de segmentis 3 7, & BD sicut de applicatis 7 8 & DE, & quibuscumque alijs. Cum ergo sit 5 6 applicata ad interceptam diametri portionem 5 3, vt CB ad CB in æqualibus angulis C, & 5 eum applicatæ parallelæ sint parametris figuræ; ex defin. 16. similes erunt.

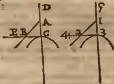
COROLLARIVM.

IDeò figuras eas esse similes indicabis, cum rectangulum ex diametro intercepta, & segmento V. g. 2 5, & 5 3 est ad quadratum applicatæ 5 6 vnius, vt rectangulum AC, & CB ad quadratum CB alterius. Quia enim est 2 5, & 53 rectangulum ad quadratum 5 6, vt diameter transuersa 3 2 ad parametrum 3 4, & rectangulum AC; & CB ad quadratum CF. vt AB ad BH erit diametri transuersæ 2 3 ad parametrum vnius 3 4, vt AB diameter transuersa ad BH parametrum alterius. Vnde figuræ similes erunt ex prop. præc.

THEOR. IV. PROPOS. LIV.

Si duæ hyperbolæ sint, quarum vna obtineat transuersam diametrum ad ductam à vertice ad Asymptotum, vt alterius diameter transuersa ad ductam similiter, illæ Hyperbolæ erunt similes.

SIt CA semidiameter transuersa in Hyperbola AB Asymptotus, & EA ducta à vertice. Sicut alterius 1 3 semidiameter 1 2 Asymptotus 3 2 ducta à vertice ad Asymptotum: Dico, quòd si sit 1 3 ad 3 2, vt CD ad CA eas Hyperbolas esse similes.



Probetur. Quadratum ex 3 2 ex propos. 45. h. æquatur rectangulo ex semidiametro 3 1, & ex dimidio parametri 3 4. Ergo cum ex Thesi ponatur 3 1 ad 3 2, vt AC ad CB erit etiam 3 1 semidiameter ad semiparametrum CB s. in duplicata ratione AC ad CB, vel 1 3 ad 3 2 ex Coroll. prop. 2 lib. 1.

lib.6. Elem. Quare, & tota diameter 3 5 ad totam parametrum suam eam habebit rationem, quam CD tota diameter ad parametrum suam CE ex prop.18. lib.5. Elem. quare ex præced. figuræ erunt similes.

COROLLARIVM I.

QVod si adsint duæ Hyperbolæ, quæ sint in Asymptotia æquiangulis, & etiam a 3, & ca sint applicatæ ad verticem in angulis æqualibus, tunc illæ Hyperbolæ erunt similes, quod ob æquiangula triangula, ita sit 3 1 ad 3 2, vt CA ad C B.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque eas figuras esse similes, quarum rectangula contenta sub parametro, & diametro transuersa sunt similia; quia etiam tunc erit diameter vnius ad suum parametrum, vt diameter transuersa alterius ad suum quoque parametrum ob similitudinem triangulorum sub ijs contentorum.

EXPENSIO XIII.

De descriptione vniuersali Sectionum.

EX principijs, proprietatibusque explicatis iam conuenit fructum excerpere, & descriptionem Sectionum, tum ad Specula Vstoria perpoliendа, tum ad Parallelos Solis in Horologijs Solaribus describendos, tum etiam in motibus planetarũ per Ellipses explicandis deseruientẽ explicare; Secundùm itaque diuersa principia, quæ tradidimus, sic sunt diuersi modi Sectionum describendarum, & in hac Expensione modos docebimus vniuersales omnibus sectionibus deseruientes.

PROBL. I. PROPOS. LV.

Data basi sectionis alicuius, & diametro, & angulo ab illis facto sectionem describere per puncta.

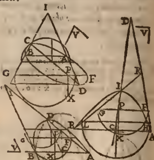
HOc prob. fundatur in secunda expensione de diametro.

Sit itaque primò data sectionis basis AB, quæ erit etiam coni, nimirum applicata illa, quæ per centrum basis coni transit; ideoque cum transeat per centrum erit semidiameter, quòd verò pertingat ad sectionem erit applicata.

Hac AB itaque data, & diametro sectionis CD, & angulo V, quem facit applicata cum diametro, sic describetur quælibet sectio.

Applicabitur diameter tota DC ipsi applicatæ, & basi BA secundùm angulum datum V, ad eius medietatem C, ita vt CA, & CB sint portiones æquales; duceturque à puncto B, vel A, quæ pertingat ad verticẽ diametri D recta AD, & in parabola ab alio extremo B educetur diametro parallela BI. In hyperbola autem AB, quæ trãseat per verticẽ diametri intercepti I, & occurrat AD in E; in Ellipsi verò coniunges aliud extremum diametri C, & basis B, producesque quantùm placuerit.

Ducta deinde FG parallelis, & HL, & etiã pluribus ad exactiorẽ descriptionẽ inter FP, & FG reperies mediam proportionalem ex prop. 16. lib. 6. Eucl. qualis vna est PA; quas medias proportionales omnes applicabis diametro CP interceptæ à pũcto P secundùm angulum datum mensurando eas in lineis GP, productis vbi est opus, & per extrema earum puncta duces manu æquabili flexam lineam; illa enim sectionem requisitam repræsentabit.



Probatur. Nam lineę repertę, quarum vna est PX sunt applicatæ, ergo per extrema earum transibit sectio. Consequentia patet ex definitione applicatarum. Antecedens verò propositio probatur, quia quadratum ex applicata prop.5. & 6. huius, est æquale rectangulo ex diametris basium coni confecto, quæ à diametro sectionis intercipiuntur, quales ibi in fig. aliarum prop. sunt LE, & KM, sunt ME & KN. Sed HL in ista fig. FA, & cet. sunt parallelæ diametro basis coni AB, consona verò est IAA, vel BBA, ergo, & etiam ipsæ diametri basium coni sunt; quare eorum rectangula ex segment. PF, & FG, & cet. facta erunt æqualia quadrato PA, & cet. ex Probl.14. lib.2. Eucl. & ex prop.19. lib.6. Ergo erunt applicatæ.

PROBL. II. PROPOS. LVI.

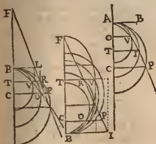
Dato parametro, & diametro intercepta, Sectiones conicas per puncta delineare.

HÆc descriptio fundatur in 3. Expensione. Detur ergo Parameter applicata AB alicuius parabolæ, & diameter, cuiuscumque longitudinis ad placitum AC. Eligantur in ipso quælibet puncta V. g. punctum C, inter AB, & AC inueniatur media proportionalis CP hæc erit applicata, sic si electo alio puncto T inter AT, & Parametrum AB inueniatur media proportionalis TI, hæc erit applicata, sic facias in puncto O, & reperias OV. Nam hę omnes, & quascumque alias inueneris, erunt applicatæ: quare si per extrema puncta manu æquabili ducas lineam, hæc erit parabolica sectio.

Quod vero CP, & TI, & cęt. sint applicatæ patet. Nam in parabola ex prop.6. h. rectangulum ex Parametro, & intercepta portione diametri inter verticem, & applicatam est æquale quadrato ipsius

Ipſius applicatę, ſed ſi ſuper CP, & quamlibet aliam, ita inuentam fiat quadratum hoc erit æquale rectangulo ex CA diametru intercepta, & AB Parametro: Quoniam eſt media proportionalis inter vtraſque lineas AB, & AC ee conſtructione, vnde fit ex Prop. 19. lib. 6. Eue. quòd quadratum mediæ ſit æquale rectangulu extremarum. Ergo CP, & aliæ ſimiles inuentę erunt applicatæ ex pr. 7. h.

Si verò deſcribenda ſit aliqua Hyperbola, vel Ellipſis, & detur diameter tranſuerſa FB. Parameter verò contigua iu Hyperbola, & iu Ellipſi BI. Ab extremo diametri BF per extremum Parametri I ducatur recta FI.



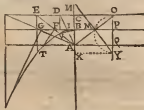
Deinde electis quibuslibet punctis C, & T ducantur in vt producta, ſi opus fuerit parallelę TV, & CP ipſi LL, interq; TS, & TR inueniatur media proportionalis TV, nã TV erit applicata. Sic ſi inter CB lineam, & CP inueniatur media proportionalis CO hæc erit applicata. Quare ſi inueniantur plurimę aliæ, babebimus puncta, per quæ ſuaui manu ducta linea Hyperbolicam ſectionem, vel Ellipticam exprimet. Quod verò ſint applicatæ patet. Cum ſint medię proportionales V. g. TV inter TB, & & VR erit ex TV quadratum æquale rectangulo ſub TR, & TS contento; Sed hoc rectangulum eſt æquale rectangulo TI, ſub TB, intercepta diametro, & ai paramerro, ſi addatur figura IR in Hyperbola auferatur iu Ellipſi ſimilis, ſimiliterq; poſita, ergo TV erit applicata, quia continet quadratum iuxta propoſ, 8. huius æquale rectangulo ſub Parametro BI, & intercepta diametro contentu deficiente ei in Ellipſi fig. IR, vt ibi requiritur, vel abundante in Hyperbola, vt fiat rectangulum TI ſub parametro BI. & intercepte TB contentum, & ſic aſſeras de omnibus alijs ſimiliter inuentis. Quapropter ſi per extrema puncta earum, cùm plurimæ iuuentæ fuerint ducatur flexa, hæc erit Ellipſis, vel Hyperbola.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Datis Vmbelicis, & vertice, & poſitione ſectionum, eas in eodem plano deſcribere per puncta.

Sit datus vertex parabolæ B, & Vmbilicus A diſtantię BA fiat ęqualis BC, perq; puncta B, C ducantur in vtramque partem perpendiculares CE, & BG, & ab Vmbelico A ad D, & S pũcta, vt placet in OE rectæ ducantur AD, & AS; & alię ad libitum, quæ ſecabunt lineam BG in I, & F, à quibus punctis excitentur perpendiculares IV, & FT; à punctis verò D, & S perpendiculares ad CS educantur DV, & ET; Nam hæ ſe interſecabunt, cum prioribus orthogonalibus IV, & FT in Punctis V, & T, per quę à vertice B neceſſariò parabola ducta tranſibit.

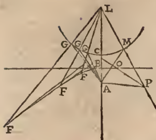
Hæc deſcriptio fundatur in propoſ. 16 huius, pro cuius oſtenſione inſpice dextram partem fig.



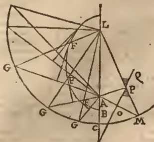
Ibi enim probatur, quod à vertice parabolæ ducta ad contingentem, quę eſt ibi SA, & hic BM ſit æqualis quartæ parti figuræ ſub diametro intercepto, & parametro cõtentæ, & in ipſius probationis progr. 1. quod quadratum applicatæ, quæ ibi eſt CA hic XY ſit æquale rectangulo, quod ſub intercepta diametro inter contingentem, & ſectionis verticem, vt ibi eſt AP hic BN, & Parametro continetur. Si ergo hic probetur, quod quadratum MC à vertice in MV perpendicularem ipſi AO ductæ ſit ęquale quartæ parti quadrati, cuius latus XY, hęc erit applicata, & Y punctum, per quod parabola tranſit, & NY contingens, Id verò ita probatur MA eſt æqualis MO ob æquidiſtantes CO, & SP, & AQ. Vnde, & AM erit æqualis PM ob parallelas OY, & CA, & ſimilia triangula POM, & MAA. Quamobrē quadratum ex dimidia MA, vel PM erit quarta pars quadrati totius BP, quale quadratum ex YC; Sed hoc quadratum PM eſt æquale rectangulo ex PY, & PO, vel PQ ęquali ob rectangulum triangulum OMY Ergo hoc rectãgulum erit quarta pars rectanguli contenti ſub PY, & ſub linea quadrupla ipſius PO, vel PQ æquali CA: verũ PY æquat BN; ſiquidẽ ex propoſ. 12. BX, & BN æquantur. Vnde etiam PY, & BN, quod, & ab æquiangulis triangulis MBN, & MYP conſtat. Linea verò QP eſt æqualis ipſi BA, cuius quadrupla eſt parameter; Igitur quadratum ex XY erit rectangulo ex BN, & parametro, æquale: Vnde XY latus applicata erit, per cuius extremum Y tranſibit ſectio parabolica.

Si verò ſit Hyperbola, vel Ellipſis datis duobus Vmbelicis A, & L, ſumatur BC æqualis AB, & centro L interuallo LC portio circuli deſcribitur, quam eductæ à centro L, ſecent quæcumque rectę quomodocumque in punctis MCCGH; Et ad hæc puncta ab vmbelico A rectæ ducantur AM, & AG, & cęt. quibus bifariam ſectis V. g. in O, è punctis medietatum perpendiculares excitentur, quæ lineas ab L vmbelico productas ſecent in BFFP. Dico puncta F, F, F, F eſſe in Hyperbolæ, vel Ellipſis ambitu.

Probatur. Nam LC eſt æqualis diametro tranſuerſę; Vmbelici enim ęqualiter ſunt remoti ab extremis diametri tranſuerſę in hyperbola, quidem extra diametri trãſuerſæ extrema, in Ellipſi verò intra eam; quare diameter tranſuerſa in Hyperbola



perbola est minus linea AL distantia vmbelicorum gemina BA, qua distat vmbelici à vertice, in Ellipsi verò maior est. Sed in vtraque figura talis est LC, cum deficiat in Hyperbola AB, & BC æqualibus; in Ellipsi verò abundet Ergo LC diameter transuersa est. Quo posito, si probetur angulos ad P esse æquales PO erit tangens ex propos. 23. huius, & propter hoc erit punctum P in Hyperbola, siquidem ibi ostenditur tangentem cum duabus emissis ab vmbelicis angulos efficere æquales.



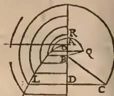
Sed id facillè ostenditur. Nam triangula MPO, & POA cum sint rectangula, & habeant PO latus commune, & MO, & OA crura æqualia, ex propos. 17. lib. 1. Eucl. habebunt etiam angulos apud P æquale APO, & OPM. Quare, & in Ellipsi QPL erit æqualis cum sit ad verticem angulo MPO, & consequenter angulo OPA. Ec hinc cùm prouenientes ab vmbelicis LP, & PA faciant cum PO angulos æquales in Hyperbola MPO, & OPA in Ellipsi QPL, & APO, linea PO erit tangens, & punctum P punctum contactus. Vnde erit in ambitu Hyperbolæ, vel Ellipsis. Accedit, quod ob æqualitatem triangulorum PMO, & OPA, basis PM est æqualis basi PA: quare LP in Hyperbola superat diametrum transuersam LM, vel LC linea PA. In Ellipsi verò addita linea PA ipsi LP, vt fiat LM diametro transuersę æquatur LC iuxta id, quod exigit prop. 23 h.



PROBL. V. PROPOS. LVIII.

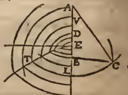
Datis Conicæ sectionis, Vmbelico, & vertice, eam per puncta promptiùs describere.

SIt primùm describenda Parabola, & datus sit Vmbelicus B, & vertex A. Extendatur diameter AB, quantum opus fuerit, & sumpta in eo RA æquali AB vltrà verticem, deinde plurima alia puncta, vt O, & D sumantur, & ab illis ducantur perpendiculares OQ. & DL, deinde interuallo DR, vel OR, nempe ea distantia, quà vnaquæque educta DL, & OQ distat ab R, centro verò Vmbelico ipso B ducantur arcus, & vbi secant eductas in Q, & L, vel C, ibi transibit ambitus Parabolicus.



Probatur ex illis, quę diximus propos. 26. huius. Nam omnis linea, vt ibi probatum est, quę ducitur ab vmbelico ad applicatas, qualis est BC, vel BQ, est æqualis distantiæ eius à vertice in diametro sumpta; nimirum distantiæ DA, vel OA, & insuper distantiæ, quam vmbelicus habet à vertice AB, vel AR; quare BC, quæ est æqualis distantię DR, & BQ distantiæ OR, cum applicata CD, vel OQ conueniet necessariò in puncto Q, vel C ex prop. 26. huius Coroll.

Si verò sit Hyperbola, vel Ellipsis, in qua dentur Vmbelici B, & A, vertex E. Lineæ EA accipiatur æqualis, quæ sit EM: deinde centro A ducantur plurimi gyri interuallo maiori, quam AE, in Hyperbola, quorum vnus sit LT. Et in Ellipsi non maiori, quam AE, sed maiori, quàm BE, quorum vnus TV. Rursusque interuallo O, & quolibet ex circulis ductis facto centro in vmbelico B alij circuli ducantur, quorum vnus sit TV in Hyperbola radio DL, in Ellipsi verò LT radio DV, vbi se intersecant in T, illud punctum T, & alia similia erunt in circumferentia sectionis conicę. Vnde linea per ea ducta Hyperbolam, vel Ellipsim imitabitur.

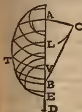


Probatur verò ex ijs, quæ ostendimus prop. 25. huius. Nam in Hyperbola. Lineæ, quæ ab vmbelico ad contactum ducitur, quæ ibi est, EC

debet

debet esse maior, quàm alia, quæ ad eundem contactũ ab alio vmbelico ducta est, vt ibi est BC quantitate diametri transuersę, talis aotẽ est AC in hac figura. Nam comprehendit diametrum transuersam DA, quæ remanet subductis duobus vmbelicis DB, & EB, & insuper cõprehendit totam DL, quæ est mensura lineę BC; Ergo AC est ęqualis lineę BC, & diametro transuersę AD.

Sed in Ellipsi ex eadem propos. duę lineæ ab vmbelicis ad ambitum eius inclinatę simul sumptę debent esse ęquales diametro transuersę tales verò sunt BC, & CA. Nam BC est equalis diametro transuersæ BA, & CA lineę BD; Siquidem tota AD est diameter totus, & semper gyri accrescunt tali ratione, vt eâdem quantitate, quâ priùs ducti crescunt, eâdem posteriùs ducti decrescãt, quemmodum etiam docuimus prop. 25. tract. 18. vnde patet, quod Ellipsis ibi descripta est ꝓpriè sectio coni Elliptica.



EXPENSIO XIV.

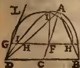
De circumscriptione figurarum conicarum.

SIcut agit Euclides de circumscriptione circuli circa figuras rectilineas, ita, & hic breuiter debemus agere de circumscriptione figurarum, saltem circa triangula; cùm illa sola omnibus figuris possint inscribi, quę à sectione coni deriuant.

PROBL. I. PROPOS. LIX.

Circa datum triangulum Parabolam circumscribere.

SIt datum triangulum BAD, cuius basis AD diuidatur per medium in C, & à vertice A ad diuisionem C recta ducatur, cui parallela DL excitetur à puncto D. Electis verò in AC, quibuslibet punctis; vt F t ducatur basi parallela HH, inter autem eius portiones GF, & FH, inueniatur media proportionalis ex Eucl. prop. 16. lib. 6. et, & transferatur super FG, & fit FI. Dico, quòd per punctum I transit parabola, cuius ambitus per BAID transeat. Vnde si plurimæ aliæ ducantur, vt FG, ab alijsque punctis in AC ad libitum assumptis, & mediæ proportionales, vt EI inueniatur plurima puncta obtinebimus, per quę parabole ducatur.



Probatur. Nam quoniam EI est media proportionalis inter FH, & FG; quę est æqualis DC erunt trea proportionalee; vnde ex Cor. prop. 20. lib. 6. Eucl. quadratum ex tertia CD erit ad secundę quadratum EI, vt DC ad FH lineas.

Sed, quòd EH, & CD sint parallelę in triangulo CAD, ita erit CD, vel CE ad FH, velut respondet proportione AC, ad AF ex Cor. prop. 4. lib. 6. Euc. Ergo quadrata CD ad quadratum FI, ita erit proportione, vt AC ad AF: quare latera horum quadratorum erunt applicatę ex prop. 5. huius, & sic per extrema earùm I, & D transibit ambitus parabolę, cuius vertex A.

PROBL. II. PROP. LX.

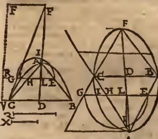
Circa datum triangulum describere Ellipsim, seu Hyperbolam etiam specie notam.

SIt triangulum quodcumque ABC, circa, quod describenda sit Hyperbola, vel Ellipsis, quę potest esse indeterminata, & quęcumque illa sit, & & tunc ducta DA, quę diuidat basim BC per medium à puncto C ducenda erit ad DA productam in F, quod libuerit punctum, recta CF.

Quod sit proponatur sectio conica specie nota, cuius diameter sit ad parametrum, vt Z linea ad X lineam.

Primo lineis DC semibasi, & AD reperiatur tertia proportionalis R.V, vt exhibemus in hyperbola exemplum, rectangulumque DR erit ęquale quadrato ex media DC constituto, vtpote constitutum ab extremis, nempe DV ęquali DA, & VR.

Secundo fiat, vt X ad Z, ita RV ad DF reperiendo nimirum quartã proportionalem eo. Dico, quod exhibebitur specie nota Hyperbola, vel Ellipsis, cuius diameter transuersa sit ad contiguam parametrum, vt Z ad X: quia nimirum rectangulum FV sub FD, & DA contentum dicit eam proportionem ad rectangulum DR super eandem basim DV constitutum, quam altitudo DF ad altitudinem VR ex I. lib. 6. Eu. ergo etiam rectangulum EV ita est ad ęquale quadratum ex DC; Sed VR ad DF se gerit ex constructione, vt X ad Z vel *conuertendo* DF ad VR, vt Z ad X. Ergo etiam rectangulum EV ad quadratum ex OC. Ergo etiam diameter transuersa FA talis erit ad Parametrum; qui semper est in quacumque figura conica, vt rectangulum sub ED, & DA ad quadratum ex DC, quę debet esse vna ex applicatis in Hyperbola, vel Ellipsi, quę circumscribatur circa tres vertices B, A, & C.



Sit ergo describenda Hyperbola, vel Ellipsis circa EAC, iam siue sit specie nota, siue non, siue CF ducta sit fortuitò ad DF, siue ad describendam specie notam sectionem, electa sit FD modo predicto eodem pacto describetur.

A puncto quolibet V g. L ducatur basi BC parallele LM, quę pertingat vsque ad FC, vel CA in G,

 inter-

interque LG, & LH inueniatur media proportionalis LI, quę hinc inde transferatur ab L versus B, & G, & fit LI. Dico, quod Ellipsis, vel Hyperbola transiens per B, A, C vertices, transibit quoque per I in linea EG punctum signatum, & sic de quibuscumque alijs, quæ à punctis in DA electis trahuntur, & inuentis eodem modo proportionalibus erit dicendum. Vnde plura puncta poterimus venari, per quę Hyperbola, vel Ellipsis ducatur. In Ellipsi verò etiam in FD idem efficiemus, & Ellipsim completam consequemur, quę transeat per BFCA vertices.

Probatur autem. Quia tres sunt proportionales ex constructione LG, & LI, & LH. Ergo quadratum ex media est æquale rectangulo ex extremis ex Eucl. prop. 19. lib. 6. quo posito, si probetur rectangulum ex VD, & DA lateribus esse ad rectangulum ex FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum ex LI ostendetur ex propos. 6. h. DC, & LI esse applicatas, hoc autem sic ostenditur.

Nam in triangulo FDC ob parallelam GL ad basim DC, ita est DC ad LG, vt DF ad FL, & eadem DC ob eandem rationem in triangulo DAC ita est ad LH sicut DA ad LA. Si ergo ex antecedentibus in prima combinatione componatur quadratum; nimirum DC, & DC, & ea antecedentibus in secunda rectãgulum DF, & DA; quadratum DC, & CD erit ad rectangulum ea consequentibus in prima combinatione, & LG, LH, vel huic æquale quadratum ex LI, vt rectangulum DF, DA ad FL, & LA rectangulum ex consequentibus in secunda combinatione, vt est regula Rectãgulorum proportionalium Tr. 17. propof. 13. vt in parallelogrammis proportionalibus latera proportionalis antecedentia sunt in vno, & consequentia in alio, vt hic vides.

DC	vt	DF	&	DC vt DA
ad		ad		ad ad
LG		FL		LH LA
Ergo Compositum,		vt Compositum.		
DC & DC		DF & DA		
erit ad		ad		
LG & LH	vt	FL & LA		
Idest LI				

Vnde patet, quod ita est rectangulum FD, & DA ad rectangulum FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum FL, vnde DC, & LI erunt applicatæ, & consequenter à vertice A per eorum extrema I, & C transibit Hyperbola, vel Ellipsis.

EXPENSIO XV.

De Parabolis specialiter describendis.

Visis Sectionum conicarum vniuersalibus regulis, quę scilicet in omnibus tum Hyperbolis, tum Ellipsibus, tum Parabolis adhiberi possunt, oportet etiam aliquas speciales descriptiones docere, quæ à singularibus vnius cuiusque speciei proprietatibus ortum habent.

PROBL. I. PROPOS. LX.

Parabolam per puncta describere data diametro, & applicata.

Sit data applicata AB, & diameter quæcumque AC. Diuidatur AB, in quas libuerit partes æquales V. g. in quatuor, & diameter AC in tot alias æquales, quę quadratum numerum prędictarum applicatæ AC partium exęquent V. g. 16.

Si ergo rectę ducantur ęquales applicatæ partibus, & ei parallelę à diametri partibus, quæ quadrato partium in applicata assumptarum respondeant V. g. vnam si assumpseris, quoniam quadratum vnius est vnum, duces à prima parte diametri D ęqualem DH vnicę parti applicatæ: Si duas à quarta parte diametri educes LX, ęqualem duabus partibus, quoniam quadratum duarum est quatuor; si tres à nona parte deduces MN, & cęt. Si ergo per puncta CHXNA ducas flexam, hęc erit Parabola.

Probatur. Nam ex propos. 2 huius, ita se habet AC intercepta ad CL interceptam, vt quadratum AB ad quadratum LX; sed quadratũ AB est 16. & quadratum applicatę LX est 4. Linea verò CA est 16. & linea CL est 4. Ergo ita se habet AC ad CL, vt quadratum applicatę AB ad quadratum applicatę LA, & ita dicas de alijs.

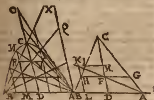
Possent etiam trahi à partibus applicatę AB, quę essent ęquales AD, vt AL, aut AM successiuè semper diminuendo dempto quadrato à singulis partium, à quibus deducitur, vt vides factum in punctatis N, X, & N: Nam à prima N ablatum est quadratum vnius; quòd à prima parte, & viciniori diametro deducatur, si à K quadratum duarum partium, quòd à gemina. Possent quoque trahi à CX contingente verticem, & parallelam applicatæ, quę secundum quadrata partium distantium à C excrescerent.

PROBL. II. PROPOS. LXII.

Parabolam circa datum triangulum describere.

Sit triangulum ACB; circa quod oportet Parabolam delineare. Diuisa per medium basi BA in D, ducatur CD, & in illa sumptis quibuslibet partibus

partibus V. g. 7; docatur ab angulo A per 7 parallela ad basim AB, quæ sit GM, & vbi secat eruncs oppositum angu'o A parallela ducatur ad CD, quę sit LB occurrens A ab angulo A ducta in K. Dico K punctum esse Parabolæ, quæ transit per A, C, B, vertices trianguli dati.



Probatur autem; Quia, si ducatur BN, hæc erit applicata. Quare punctum B, vtpote extremum applicatę erit in Parabola. Quod verò BN sit aplicata patet, quia est media proportionalis inter NT, & DB. Vnde luata doc. 59 huius erit applicata, quòd verò sit media proportionis ita patet. Nam in triangulis ADF, & FHK æquiangulis, quòd sint ad verticem inter parallelas DF, & HK, ita est AD, vel æqualis DS ad FH, quæ æquatur NB, & lineę DL, sicut DF, vel æqualis LH ad HK idest est DS ad OL, vt LH ad HK in triangulis quoque ad verticem, & inter paralleles IHB, & LUE, sicut est LH ad HK, ita LB ad IB, quamobrem, & reliqua DL, quę est æqualis lineæ NB; ad reliquam NI eodem pacto se habebit, vt LB ad IK, & LN ad NK, & DE ad FH, vel NB: Si ergo sicut se habet OB ad NK, ita se habet NK ad NI; patet. NK esse mediam proportionalem inter DB, & NI.

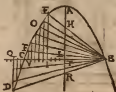
Nota idem sequi, seu parallelæ sint producta basi equidistanter, vt in fig. hac BX, seu ab equidistantibus ducantur diametro parallele, vt MK ab MF, quę occurrant hinc AX, seu in in altera fig. AM ab RV ad AN, seu æquidistantes diametro, vt MN. seu ZK, sic nec interet, si ab angulo A, siue ab eogulo C, vel B emitantur. Ita nec interet eu partes, per quas transeunt, sint in ipso diametro DC, vt BV à quæ transit per V, seu in eius parallela intra partes in diametro producto assumptas; vt per R ducitur RR, seu extra, vt AX, ad quam ducitur BX, seu in partes in diametro producto assumptas, & ducitur AO, quę tamen partes in CO producto debent esse æquales ijs, quę intra diametrum CD sunt assumptæ.

PROBL. III. PROPOS. LXIII.

Parabolam producere, seu resarcire.

Sit Parabola BAC, quam oporteat restaurare ab B vsque ad F, seu producere à C vsque in D. Resarciatur ergo primo reperiendo diametrum quemcumque AL, & applicatam quamcumque BC, à puncto itaque B, vbi applicata sectionem tangit, è regione partis restaurandæ ducatur ad B, & ad F extremas oras abruptæ partis rectę BS, & BF, secabant diametrum in H, & L: Pars ergo diametri intercepta in quot libuerit partes æquales diuidatur V. g. in 5. & à F per eas rectæ ducantur, vt BO. Deinde ab ijsdem orijs, & F ducantur diametro parallelæ BR, & SV, patique intercepta IV in totidem partes diuidatur V. g. rursus in 5. & ab istis parallelæ diametro ducantur, quæ primò ductis à B occurrent. Nam puncta in quibus occurrunt V. g. Dicunt in eadem parabola. Vnde per eam ducta linea BOF partes in parabola abruptas coniunget.

Ostensio verò eadem, quæ antecedentis propos. vt patet ex ipsa constructione, sicut, & sequentis operationis.



Similiter, & partes extendentur. Diuisa enim TC in quaslibuerit partes sicut, & diameter TA tot ex ijs partibus diametri V g. 3 transferantur in productam diametrum TR; & tot ea partibus applicatę TC transferantur in ipsam productam OQ, à quibus duisionibus parallelæ diametro educantur, vt QO, que occurrant lineis, quę à puncto B per partes in diametro TR producta signatis transeant: Nā puncta mutui concursus, vt puncta OQ. & N erunt ea, per quæ parabola producenda transibit.

EXPENSIO XVI.

De Hyperbolarum particulari descriptione.

Hyperbola ex Asymptoto, quā sola habet inter figuras, particulares sibi vendicat descriptiones, quarum plurimos modos diversis problematibus exponemus.

PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Datis Hyperboles transuersa diametro, & eiusdem ratione ad contiguam parametrum in dato angulo Hyperbolem in plano per puncta describere.

Sit data AD dimidia transuersæ diametri, & proportio eius ad contiguam parametrum, quę sit vt R ad S. Angulus verò, si ita placet, deiu rectus. Inter lineas R, & S reperiatur media proportionalis CD, & iam vt R ad S, ita erit ex Coroll. prop. 8 t. lib. 6 Eucl. quadratum ex AD ad quadratum ex CD; Talis autem etiam est ex prop 44. h. progr. 3. & Coroll. portio diametri transuersæ ad parametrum, nempe quadrati AD ad quadr. CD; ideoque Coroll. prop. 3. huius hyperbola erit specie nota, & AC & AF erunt Asymptoti ex prop. 47. huius, quę sit describenda.

A punctis in diametro AD producta, quibuscumque placuerit, duces æquidistantes ad applicatam ad verticem DF, qualis est EI, Auferesque quadratum DE à quadrato ES; ita tamen, vt id, quod remanet quadrati latus existat, quod fiet ex prop. 31 l. 6 vel 11. l. s, si ad id interuallū ES ex puncto C, veir ducas portionē circuli, quę secet diametrū in

o. Nam recta DC erit latus quadrati tale, quod cum quadrato DF erit æquale quadrato IE. In triangulo enim rectangulo FOO quadrata crurum OF, & OO sunt æqualia quadrato basis FG æqualis IE. Quare OO est latus talis quadrati, cui deficit quadratum ex DF, ad hoc vt æquetur quadrato IE.

Si ergo DO transferatur in IE, vt fit IT, dico IT esse applicatam, per cuius extremum T à vertice D transeat Hyperbola in specie nota.

Probatur autem. Nam sicut est diameter transuersa ad Parametrum, ita est rectangulum ex AI, DA pro vno latere, & pro alio ID ad quadratum ex IT, ex 8. h.

Progress. 1. Quoniam, si auferatur quadratum AO à quadrato ex AI remanebit rectangulum sub tota diametro transuersa, cuius dimidia est AD, & IO pro vno latere, & ID seorsim pro alio, qui est gnomon IAI, vt patet, & à quadrato IE quadratum DF ablatum fuit in praxi, & remansit IT.

Progr. 2. In triangulo autem AQI ob parallelas CD, & QI; vt est AD, & DC, & ideo etiam eorum quadrata ex AD ad illud ex DC. Ita ex 26.l.6. simili proportione alludit quadratum ex AI ad quadratum ex QI. Aufer itaque proportionalia antecedens AD quadratum primæ combinationis ab antecedenti quadrato AI secundæ combinationis; sicut, & consequens CD, vel DF quadratum à consequente QI, vel IE quadrato, vt fecimus prog. 1. & remanebunt residua adhuc proportionalia. Nempe gnomon IXI, vel quod æquale rectangulum ex AI, AD pro vno latere, & IO pro alio ad quadratum ex IT ex prop. 22. lib. 5. Elem.

Progr. 3. Sed quadratum AD ex constructione est ad quadratum ex DC, vt diameter transuersa ad parametrum: Ergo etiam rectangulum AI, & AD, nempe toto diametro pro vno latere, & DI tantùm pro alio refertur ad quadratum IT, vt diameter transuersa ad parametrum, & vt R ad S, ergo ex propos. 8. huius erit punctum T ad hyperbolam, quod erat ostendendum.

Si verò libeat Hyperbolem specie non notam describere, trahantur AD, & DC, cuius placet longitudinis nullo habito respectu ad datas S, & R, & cęt. vt priùs exequantur.

PROB. II. PROPOS. LXV.

Dato Asymptoto, & dimidia transuersa diametro cum Angulo Hyperbolam per puncta delineare.

DVobus modis potest hoc in opus reduci, vel per lineas diametro transuersę parallelas, & iuxta proportionem datam. Vel per lineas ei perpendiculares.

Sit ergo primus modus. Et dentur Asymptoti AB, & AL, diametrique transuersę dimidium AD; sitque ad parametrum diametri transuersæ data proportio, vt quadratum CR ad quadratum CA.

Ducta AG parallela BN, & in ea electis quibuslibet punctis, vt S, ducantur parallelæ ad diametrum AD, vt EF; fiatque AF tantæ longitudinis, vt eius quadratum sit æquale duobus quadratis AE, & AD eas seorsim componendo rectangulè, & ducendo basim ED, quæ æquet FE; nam ex pr. 47 l. 1. Euc. Quadratum basis in rectangulo est æquale duobus quadratis crurum. Et EF dabit punctum F, quod erit in Hyperbola, cuius vertex D, & proportio diametri ad contiguam Parametrum, quam quadrati ex RC ad quadratum ex AC. Et sic erit, si eodem artificio alias producas.

Ostendendum est autem, quòd FX sit applicata ex eo, quòd eius quadratum se habeat ad rectangulum AX, & DA, vt vno crure, & DX pro alio, vt transuersa diameter ad parametrum. Nam tunc sic constabit ex prop. 8. huius FX esse applicatam, & ideo extremum F lineę EF esse in Hyperbola.

Id Probatur verò. Nam ex constructione quadratum EF est æquale quadrato IE, & AD: quadratum verò idem EF est etiam ęquale quadrato eidē AD. & rectangulo AX, AD, & DX, quod sit ęquale hoc rectangulum residuo gnomoni quadrati ex AX, vel EF ablato quadrato AO. Ergo hoc rectangulum ex AX, AD pro vno crure, & DX pro alio erit ęquale quadrato ex linea FX.

Sed in triangulo CRA ob parallelas EX, & CR, vt est quadratum CR ad quadratum CA; ita est quadratum EI, & consequenter rectangulum AX, AD, & XD sibi ęquale ad quadratum ex XA linea, quę est ęqualis applicatę FX.

Vnde rectangulum ex AX, AD, & XD erit ad quadratum ex AF, vt diameter transuersa ad parametrum; cum tale sit quadratum CR ad quadratum CA ex præsupposito.

Secundus modus est, vt datis Asymptotis AB, & AL semidiametro transuersa AD, & angulo ADL ducantur ad diametrū transuersam perpendiculares, vt VO, & vbi occurrunt Asymptotis, vt in O erigantur perpendiculares æquales ipsi LO, qualis est OM, & vbi terminat in M ducatur rursus perpendicularis MY, quantùm sufficit. Deinde centro V radio VY portio circuli ducatur OY, & vbi secat MY in Y demittatur perpendicularis YT. Nam punctum T erit in Hyperbola.

Probatur facilè. Nam ex Eucl. prop. 16. lib. YT est media proportionalis inter TI, & TO. Quare eius quadratum, nempe ex YT erit æquale rectangulo IT, & TO ex prop. 19. lib. 6. Eucl.

Sed rectangulum per cuius latera in lineam extensa transit hyperbola, vt IT, & TO ex propos. 42. Coroll. est ęquale quadrato ex YT, vel æquali DL ex constructione. Ergo inter IT, & TO

in

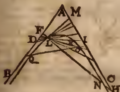
in puncto T transibit Hyperbola, cuius vertex D.

PRORL. III. PROPOS. LXVI.

Datam Hyperbolam resarcire, etiam sit eius, non nisi vnicum punctum constaret, vel vlteriùs producere. Datis eius Asymptotis, & vnico eius puncto.

Sint dati Asymptoti AB, & AC, & punctum L, Ex puncto L ducantur plurimę lineę ad vtrũque Asymptotum, vt FH, & DI, & distantiæ minores ad vnum asymptotum, quàm ad aliud puncti L transferátur super eandem lineam ad alterum extremum, quo tangit aliud asymptotum. V. g. DL transferatur in BI, eo quod sit minor DL, quàm LI, sic FL in HN; Nam puncta Q, O, L, B, N, & si quę alia inuenta fuerint, erunt in eadem Hyperbola.

Probatur verò ex eò, quòd in Hyperbola puncta ab vtroque Asymptoto ęqualiter remota, signata in eadem linea in Hyperbola reperiantur; Qualia sunt FL, & NH; sicuti BI, & DL, & cęt.



Reperiuntur autem, quia quęlibet ducta in sectione Hyperbolica, vt LN ex propos. 28. huius potest deseruire pro applica, cum in duas partes æquales ab aliquo diametro secundario diuidi possit ex propos. verò 46. Coroll. habemus, quòd rectangulum ex ambobus applicatis, quas diuidit diameter, vt tota LN cum intercepta inter sectionem, & vnum ex asymptotis, vt FL pro vno latere, nimirum tota NF, & intercepta inter sectionem, & alterum Asymptotum, vt NH est ęquale rectangulo facto ex LH, & LF: quare habebunt latera proportionalia ex Eucl. propos. 10. & erit in eadem proportione NF ad NH, sicut LH ad FL. Ergo componendo ita erit NH, & NF simul, nempe HF ad NH; vt LH, & LF simul, quę est eadem FH ad LF, cum ergo LF; & NH eidem FH eandem dicant proportionem erunt inuicem æquales ex 7. propos. lib. 5. Eucl. Quare cum quælibet hyperbola transeat per puncta æqualiter ab asymptotis remota, vt N, & L alicuius quomodocumque lineæ ductę, ista puncta L, & N, vel B, & L, vel O, & Q taliter signata erunt in Hyperbola.

COROLLARIVM.

Hinc ergo patet quaslibet interceptas, vt FL, & NH, quascumque inter sectionem, & Asymptotos esse ęquales inuicem, vt ex ostens. propos.

EXPENSIO XVII.

De Descriptione particulari Ellipsium.

Sicut singulari descriptione Parabolas, & Hyperbolas prosecuti sumus, sic, & Ellipses, quę propter duos axes coniugatas, quos habent, diuersas descriptiones obtinere queunt.

PROBL. I. PROPOS. LXVII.

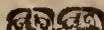
Datis Ellypsis extremis diametris, eandem in plano per puncta quotlibet describere.

Centro C interuallo assumpto dimidio diametri maioris CD describatur circulus circa maiorem diametrum BD; rursùsque eodem centro C circa minorem AF, & à communi centro C radij exeant, qui transeuntes per circumferentiam minoris in S secent circulum maiorem in OE, vt sunt CE, à quibus punctis E perpendiculares EP ad diametrum BD descendant, quibus occurrant in O puncta I I rectę connectentes: Nam vbi secant perpendiculares EP ab iisdem radijs dimissas, vt in O, ibi erit punctum Ellipsis, & per eam intersectionem O transibit.

Id verò ostendetur probando rectam OP, vel ML esse applicatam; eò quòd rectãgulum DM, MB ex intercepta diametri trãsuersę segmentis ex propos. 6. h. se habeat ad quadratum ML, vt quadratũ BC, quę est loco rectanguli ex intercepti diametri portionibus BC, & CD ad quadratum CF minoris diametri, quæ, & locum applicatę tenet. Vnde si per F transibit ambitus Ellipsis transibit quoque per L.



In triangulo rectangulo CMV ob parallelas MV, & PQ ex prop. 4. Coroll. lib. 6. Eucl. ita est CV, seu CB ęqualis ad VM, vt CQ ad PQ, vel LM ęqualem. Ergo permutando ita erit CV, vel CB ad QC, vel æqualem CF, vt VM ad ML. Si ergo ex CB fiat quadratũ hoc se habebit quadratũ CQ; Vt quadratũ ex VM ad quadratũ ML ex 26. l. 6. El: sed hoc quadratum VM, eò quòd VM sit media proportionalis inter segmenta BM, & MD, vt patet ex 13. lib. 6. Eucl. est ęquale rectangulo ex segmentis diametri BM & MD. Ergo rectangulum ex segmentis diametri, DM, & MD se habet ad quadratum ML, vt rectangulum, quadratumque ex BC ad quadratum CQ, vel CF, quod erat ostendendum.



PROBL.

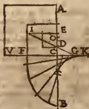
PROBL. II. PROPOS. LXVIII.

Datis Ellipseos extremis diametris Ellipsim per puncta describere.

SInt dati Ellipseos diametri extremi xv, & AB bifariam inuicem, & ad rectos angulos se secantes. Sumpta circino eorum semidifferentia CO, qua nimirum semidiameter CV minor est, quã semidiameter CA, accõmodetur à G puncto minoris diametri ad libitum electo versus C, ducta arcua portione, qua secetur diameter maior in D, vt DG æquet CO, ductaq; GDI fiat DI æqualis semidiametro minoris. Dico itaq; quod extremũ I erit in Ellipsi, cuius ambitus per extrema aliũ A, V, A, B, transeat. Vnde si plurimæ ex istis lineis, sic ducantur habebimus multa puncta, per quæ ambitum Ellipseos ducere poterimus, vt vides factum in ambitu AB.

Probatur autem ex eo, quòd ducta AI sit vna ex applicatis, quare I eius extremum erit in circumferentia Ellipsis.

Quòd autem sit applicata, ostenditur ex eo, quòd quadratum semidiametri minoris, simulque applicatæ CV se habeat ad rectangulum, simulque quadratum ex segmentis CA, CA diametri transuersæ AB, vt quadratum dictæ EI ad rectangulum ex



segmentis BE, & BA diametri transuersæ AB. Vnde ex doctrina pr.6.h. erit applicata. Quod verò res ita se habeat ostenditur. In triãgulis ad verticẽ & rectangulis, & ideo æquiãgulis, & similibus IDE, & CDG, vt CD ad DE, ita erit GD, æqualis ex constructione CO ad DI, quæ æquatur lineæ OA. Igitur vtendo argumento compositionis ita erit CDE simul ad suam partem ED. Velut AEC simul ad suam partem AO: Et ita quoque erunt eorum quadrata, nimirùm quadratum EC ad quadratum DE respondebit proportione, vt quadratum AC ad quadratũ AO, vel æqualis CV, aut OI ex 26.l.6.

Considera verò, quòd, si auferatur quadratum ex EC à quadrato CA remanebit gnomõ VEA æquale rectangulo ex BE, & BA. Sicut si quadrato ex DI auferatur quadratum DE remanebit quadratum ex EI, (nam in triangulo rectangulo DEI duo quadrata crurum sunt æqualia quadrato basis ex 47. lib.1. Elem.) Ablatis ergo proportionalibus quadratis EC ab AC, & DE à DI, quæ item proportionalia sunt in eadem proportione, remanent rectangulum BE, & BA, vel gnomon VEA, & quadratum ex EI ex pr.19.l.5. proportionalia, ac sua tota. Erit ergo vt quadratũ AC, quod stat loco rectãguli ex segmentis diametri ad applicatæ, & semidiametri minoris CV quadratum, sic rectangulum ex BE, & BA segmentis ad quadratum lineæ EI, & conuertendo; Vnde EI erit applicata.

EXPENSIO XVIII.

Sectiones omnes describere ope parallelogrammi.

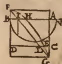
OPortet etiam docere modum descriptionis sectionum, quæ ex datis figuris oriuntur, inter quos non infimæ sortis est ea descriptio, quæ ex dato parallelogrammo in opus deducitur.

PROBL. I. PROPOS. LXIX.

Dato quocumque parallelogrammo ex illo Parabolam efformare.

DVctis parallelis AB, & CD vni laterum, & diametro FG inter AB, & IB ponatur BH, sic inter CD, & LD media proportionalis ED; puncta I, & H, D, E erunt ad parabolam.

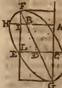
Probatur. Quoniam AB, & CD latera æqualia sunt, erit IB, & AB rectangulum ad CD, & LD rectangulum, idest quadratum HB ad quadratum ED rectangulis æqualia ex propos.19. lib.6. Elem. eò quod sint formata ex medijs proportionalibus, vt altitudo IB ad LD. Sed IB, & LD est vt FB ad FD ob parallelas ex 4 lib.6. Ergo HB quadratum erit ad ED quadratũ, vt FB ad FD, & ideo HB, & ED ex 5. huius erunt ad parabolam.



PROBL. II. PROPOS. LXX.

Ex parallelogrammo quocumque Ellipsim delineare.

SIt datum BG parallelogrammum, & in eo diameter GF, sintque ductæ parallelæ alteri laterum AB, & CE, & inter AB, & BI media fiat BH, & inter CD, & DL media DE. Dico GH, & B, E esse ad Ellipsim.



Probatur. Ita est AB ad CD, vt BG ad DG; rursus ita est BI ad DL, vt BF ad FD. Ergo rectangula composita ex ijsdem proportionibus AB, & BI ad rectangulum CD, & CL erit, vt BG, BF rectangulum ad GD, & DF rectangulum, vt hic vides.

AB	vt	BG	&	BI	vt	BF
ad		ad		ad		ad
CD		DG		DL		FD

Ergo compositum vt compositum.

AB	& BI	erit		BG	&	BF
	ad				ad	
CD	& DL			DG	&	FD

Quare rectangulum AB, & BI erit ad CD, DL, idest æqualia quadratum HB ad DE quadratum, vt rectangulum BG, & BF ad rectangulum DG, & FD: quare ex 6. h. puncta H, & E erunt ad Ellipsim.

PROBL. II. PROPOS. LXXI.

Dato Parallelogrammo quocumque Hyperbolam delineare.

Sit parallelogrammum OG, & producta CD in K ducatur per F linea KD, fiatq; triangulum CKD, & ductis AX, & CD parallelis lateri OF; inter lineas AB, & BI inueniatur media HB, & inter CD, & LD media ED, & puncta E, & H erunt ad hyperbolam.

Probatur ob similitudinem triangulorum KB est ad KD, vt AB ad CD, & vt BF ad DF sic IB ad LD. Componantur, itaque ex istis proportionibus rectangula.

KB vt AB & BF vt IB
ad ad ad ad
KD CD DF DL

Ideo compositum erit, vt compositum.

KB & BF AB & IB
ad ad
KD & DF CD & LD

Quare, & quadratum HB equale rectangulo AB, & IB erit ad quadratũ DE æquale rectangulo CD, & DL, vt rectangulum KB, & BF ad rectangulum KD, & DF: quare puncta H, & F ex 6. huius erunt ad Hyperbolam.

EXPENSIO XIX.

De transumptione figurarum conicarum ex circulo.

Sicut ex dato parallelogrammo sectiones deducimus, sic & ex dato circulo eas adipiscimur, & tantò potiori iure, quantò circulus sectionibus maiori accedit annalogia.

PROBL. I. PROPOS. LXXII.

Dato circulo quocumque Ellipsim quamcumque describere.

Sit datus circulus ABC, ex eo describemus quamcumque Ellipsim, si statuamus eius diametrum pro diametro Ellipseos minori, & ad libitum eligamus maiorem V. g. DF.

Diuidemus itaque AB, in quas placuerit equales partes, & trahemus perpendiculares ad diametrum, vt est OE, & EC. Diuidemus quoque FD in totidem partes, & erectis ad ea puncta diuisionum perpendicularibus, quę æquales sint prioribus in circulo tractis quælibet similium suæ correspondenti V. g. KG erit æqualis EC, & LQ correspondenti OI, & per extrema earum ducemus æquabilissimam lineam curuam, quæ erit ambitus Ellipseos.

Id verò ostendetur demonstrando LQ esse applicatam sicut KG, quòd ita se habeat rectangulum, & quadratum ex segmentis diametri FK, & & KD ad rectangulum ex segmentis DL, & LF, vt quadratum EC, se habet ad quadratum LQ. Nam ex prop. 6. hæc est proprietas essentialis applicatarum ellipticarum.



Probatur autem. Nam cum AB, & DF sint diuisæ in partes numero equales erit tota ad medietatem suam, vt alia tota ad medietatẽ, sicut, & V. g. sex partes ad duas vnius sæpe EI ad AB erunt quoq; vt partes sex ad duas alterius, vt DL ad LF. Igitur, & quadratum ex medietate EX, ita erit ad rectangulum ex EI, & IA, vt quadratum ex medietate ED, ad rectangulum ex DL, & LF, cum ex ijsdem proportionibus cõponãtur reste EI, ad AI, & DL ad LF &c. Sed rectangulum BI, & AI est æquale quadrato IO, cum IO sit media proportionalis inter BI, & IA. Ergo, & quadrato LQ huic equali, sicut, & quadratum EC, vel EX est equale quadrato KG. Quare ED, DK, & KF rectangulum erit ad rectangulum ex LD & LF lineis, vt quadratum KG ad quadratum LQ.

COROLLARIVM.

*Hinc autem ellicies sufficere ad formandam ellipsim ex circulo, si lineam datam, vel maiorem, vel minorem ita seces proportionaliter, vt ab applicatis, seu sinubus in circulo secatur, vel vt ipsę applicatę, sinusque erescent.

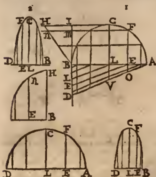
Sit semicirculus ABC, in quo diuiso in partes ęquales ducti sint sinus CL, & EF, & cęt. seceturq; AB primùm in partes æquales, iuxtà quas sinus ipsi sunt, ita, quod XI sit æqualis LC, & BM sit æqualis EF, & cęt. deinde iuxtà partes lineę AI detruncetur BH in partes proportionales ex propos. 10. lib. 6. ita quòd sit EH, ad AI, AN ad BM, & cęt. Dico sinus BH, & XN, & alij similes sinubus prędictis LC, EF, & alijs dispositi per puncta A, L, & alia in quibus priùs erant suis extremis esse in ellipsi.

Probatur. Ita est BN ad BM, vt EF ad LC: Ergo etiam quadratum ex BN ad quadratũ ex HB erit, vt quadratũ ex BF ad quadratũ ex LC ex 26. l. 6. sed quadratũ EF est æquale rectangulo BB, & EA, itemq; quadratum LC est æquale rectangulo ex AL, & LX. Ergo rectangulum XB, & BA ad rectangulum AL, & LA habebit eandem proportionem, quam quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Ergo etiam eandem, quam quadratum ex BN ad quadratum ex EH;

cum

eum fiut in eadem proportione cum prędictis ex BF, & LC quadratis. Cùm ergo ex BH quadratum fit ex BH quadratum, vt rectangulum ex AB, & BB ad rectangulum AL, & LB; lineę BH, & BH erunt ad diametrum AD applicatæ in punctis B, & L. Vnde earum extrema puncta erunt in Ellipsi ex 6. h.

Idem dicendum. Si iuxta diuisiones diametri AX diuidatur proportionaliter aliqua alia linea, seu maior, vt AD, seu minor, vt SD. Nam si illi lineæ, vt factum est seorsum applicentur sinus LC, & BF quilibet ad suum punctum correspondens, horum sinuum extrema puncta erunt in Ellipsi.



* Probatur. Nam quia AB ablatum est ad GA ablatum, vt AB totum est ad AD totum, erit etiam reliquum BB ad reliquum OD, vt AB est ad AO. Quare rectangulum AO, & OD erit compositum ex ijsdem proportionibus; quibus AX, & EB componitur. Sic quoque AL ad AV erit, vt AB est ad AD. Quare, & residuum LB ad residuum VD erit, vt AL ad AV: quare, & rectangulum ex AV, & VD, quod est quadratum componetur ex ijsdem proportionibus, quibus quadratum ex AL, & LB. Cum ergo rectangulum ex UA, & OD sit compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum ex AB, & SB erit ad rectangulum, seu quadratum AV, & VX compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum, seu quadratum AL; & LB, vt rectangulum AB, & EB ad idem quadratum ex AL, & LB: Sed rectangulum ex AB, & BX ad quadratum ex AL, & LB est, vt quadratum ex BF ad quadratum ex CL: Ergo etiam rectangulum ex AO, & OD est ad rectangulum ex AV, & VD, vt quadratum ex BF ad quadratum ex LC. Quare BF, & LC erunt applicatę ad diametrum AD, & earum extrema puncta in Ellipsi reperientur.

COROLLARIVM I.

Possunt etiam Ellipses è circulo desumi, etiam, si diameter circuli, seu ei proportionalis sumatur pro secunda diametro in Ellipsi, & ei ad angulos obliquos eosdem applicentur, seu sinus, seu sinubus proportionales paralleli; dabunt enim puncta, per quę ducta Ellipsis circundabit diametrum secundariam.

COROLLARIVM II.

QVin etiam describetur Ellipsis, si tùm Sinubus, tùm portionibus diametri proportionales sumantur, vt est videre in fig. 2. Nam rectangulum AL, & LD est ad rectangulum m, & sn in fig. 1. vt est AL, LB rectangulum ad SS, & BA rectangulum, quòd est vt quadratum ex LC ad quadratū ex EF; Quadratū verò LC ad quadratū SL est, vt quadratū AH, vel æqualis LC in fig. 2. ad quadratum BN, vel æqualis BF. Quare ex ęquo rectangulum BL, & ID erit ad rectangulum BE, SD erit, vt quadratum LC ad quadratum SF. Quare LC, & BF erunt applicatæ in fig. 2. ad diametrum DB.

PROBL. II. PROPOS. LXXII.

** Ellipsim dato circulo, & minori diametro per puncta describere.*

* SIt datus circulus, seu quadrans BC, & diameter minor Ellipsis BD; diuidaturque circulus in quaslibuerit partes CZ, ZG, GP, & tandem PB ducantur que rectæ CZB, ZGT, GPV, & cęteræ si adsint ad diametrum productum AK; ab ijsdem quoque punctis perpendiculares ducantur ZL, GH, PI, & deinde à vertice D, diametri minoris BD ducatur ad punctum diametri K, in quod cadit CZB recta DK, & à puncto M, in quo secat ZL ducatur recta ad T; quę sit MT, in quod cadit ZGT rursùsque à puncto N, vbi hæc postremo ducta secat perpendicularem GH ducatur recta NV ad punctum V, in quod cadit GPV, & sic agatur successiuè de alijs. Si ergo per puncta DMNOB flexa æquabili manu ducatur, hæc erit Ellipsis quarta pars, & puncta illa DMNOB erunt in Ellipsi.



Probatur Progr. 1. quia (vt ostendam) in Ellipsibus ita est BC ad BD, vt ZL ad ML, & è contra conuertendo. Ergo conuenient in vnicum punctum I. Alioquin si aliqua non transiret per punctum I, sed alibi V. g. per X, & perueniret ad punctum D ex Curuil. propos. 4. Element. esset BC ad BD, vt LZ ad BL, quia enim DXK recta esset, vt dicunt aduersarij, & perueniret ad punctum K per X lineę DA, & LX essent in eodem triangulo parallelæ, sed etiam CE esset ad DE, vt BL ad LM, quia DE, LM sunt in Ellipsi, vt presupponimus quapropter cum XL, & ML eisdem LZ eādem proportionem diceret, quam CE ad BD, essent inuicem æquales ex propos. 9. lib 5 Elem. quòd est absurdum. Ergo DK transibit per punctum M, per quod transit Ellipsis.

Progress. 2. Quod verò CE in Ellipsibus sit ad DE, vt ZL ad ML, patet. Nam in circulo ita est quadratum BC ad quadratum ZL, vt rectangulum ex BE & BB ad rectangulum ex segmentis diametri LB, & residuo segmento LBB, quod ex propos. 35 lib. 3. Elem. quadratum ex BC, & rectangulum ex segmentis diametri BE, & residuo BB sint ęqualia sicut

etiam ZL quadratum, & rectangulum ex LF, & reliquo LEB segmento euisdẽ diametri, sed etiã quadratũ BE ad quad. ML, vt rectangulũ SB, EB ad rect. ex ijsdem SL, & LEB diametri portionibus circuli simulque Ellipsis ex prop. 6. h cum ergo in eidem proportione rectangulorum referantur EC quadratum ad LA quadratum, vt DE quadratum ad LM quadratum erunt ex propos. 16 Elem. 5. In eadem proportione. Quare, & latera erunt in eadem proportione ex 26. lib. 6. & erit EC ad LZ, vt ED ad ML; quare permutando, quoque erit EC ad EO, vt LZ ad ML.

PROBL. III. PROPOS. LXXIV.

Dato circulo, seu circuli portione Parabolam describere.

FIant æquales lineis BA, & AC ductis à vertice A segmenti ABCD ad peripheriam ipsius applicatæ GL ad HB, quæ tamen debent esse æquidistantes tangenti circuli MA: Si deinde per puncta GF ducatur flexa, hęc erit *Parabola*.

Probatur. Nam vt est GL quadratum ad FH quadratum, sic intercepta LA est in proportione ad interceptam AH. Ergo ex 6. h. AFG est parabola.

Hoc autem ostenditur. Nam ex prop. 29. lib 3. El. angulus NAB æquatur angulo ABD, & ob parallelas MN, & BH angulo AHB. Quadere ABO angulus ãgulo BHA erit æqualis; angulus verò ad A est communis. Ergo triangula ABO, & BAH erũt ęquiãgula; ideoq; similis; Ideoque AH erit ad AB, vt AB ad AD, quadere AB erit media proportionalis, & AH, & AO extremæ. Vnde rectangulum ex DA, & AH æquabitur ex progr. 19. lib. 6. quadrato BA, idest quadrato HF. Et idem concludes de quadrato CA idest LG, quòd sit æquale rectangulo ex OA, & AL. Ideoque quadratum CA erit ad quadratum BA, vt rectangulum ex AD, & AL ad rectangulum AD, & AH; sed hæc rectangula ob eandem altitudinem AO ex prop. 1. lib. 6. Elem. sunt vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum CA ad quadratum BA erit, vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum GL ad quadratum FH, quæ lineis CA, & BA æquantur erunt, vt LA ad HA. Vnde GFA ex 5. buius erit Parabola, & AO Parameter.

PROBL. IV. PROPOS. LXXV.

Dato Circulo Hyperbolam describere.

TAngentes, quæcumque AD, & CB pro applicatis cõstituantur à pũctis A, & C, quibus intersecant diametrum ML productum, quæ erunt AD, & CB, flexaque BDM per extrema applicatarum ducta erit Hyperbola.

Probatur. Quadratum CA tangentis est æquale rectangulo ex CL secantis, & CM ex propos. 36. lib. 3. Eucl. sicut, & quadratum AO tangentia est æquale rectangulo AL secantis, & AM. Ergo vt est BC quadratum ad quadratum OA; sic rectangulum ex CM, & CL ad rectangulum LA, & AM. Quare ex 6. huius BC; & AD erunt applicatæ Hyperbolæ, cuius diameter transuersa ML.

Idem efficies; si vtaris tangentibus MZ, MN pro applicatis VS, & IT, & pro interceptis diametri portionibus parte exteriori secantium SZ, & ON, quas transferas in TM, & VM. Itaque eadem ratione quadratum tangentis IT, vel ZM æquabitur rectangulo YZ secantis, & exteriùs assumptæ SZ, idest rectangolo ex FL, & FM; sic tangentis quadratũ MN, idest ęqualia VS ęquabitur rectãgulo ex NS, & NO, vel VL, & VM, & ideo quad. VX erit ad quadratum TI est, vt rectangulum ex VL, & VM ad rectangulum ex TL, & TM. Quapropter erunt ex 6. buius VX, & TI applicatæ hyperbolæ; cuius diameter transuersa ML.

EXPENSIO XX.

De mutua sectionum trasſumptione.

DEductioni sectionum à circulo, & rectangulo debet iure succedere mutua earum transformatio, atque transumptio, & modus docendus est, quo data vna sectione, altera ex illa extrahatur.

PROBL. I. PROPOS. LXXVI.

Data Parabola ex ea Hyperbolam transcribere, vel è contra.

SIt HC diameter, & ordinatim applicatæ in parabola BD, & CE; cuius parameter AH; Quadratis igitur DB, & BH fiat æquale quadratum ex FB; Iterum quadratis EC, & CH fiat æquale quadratum

 tum

tum ec ex 11. lib.2. & puncta c, F extrema erunt ad Hyperbolam.

Sit AH æquale Parametro Parabolæ. Igitur BH, & HA rectangulum æquabitur quadrato DB, & ideo si addas quadratum BH; erit rectangulum ex AB, & BH quadratis DB, & BH æquale, & ideo quadrato BF ex Thesi æquale. Sic dicendum de quadrato BC æquale rectangulo AH, & HC; addito, ei quadrato HC quadrata ex BC, & CH, idest quadratum CC ex Thesi eis æquale, erit etiam æquale rectangulo AC, & CH. Quapropter ita erit FB quadratum ad quadratum CG, vt AB, & BH rectangulum ad rectangulum AC, CH, ideoque BF, & GC erunt applicatæ Hyperbolæ ex prop.6.huius, cuius diameter intercepta HA.

PROBL. II. PROPOS. LXXVII.

Data Hyperbola, in qua quadrata applicatarum sint æqualia rectangulis, ex interceptis diametri portionibus Parabolam describere.

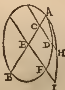
Detrahatur in præced. fig. à quadratis applicatarum TB, & GC quadrata interceptarum diametri portionum SH, & CH ea 33.lib.6 & quadratorum residuorum latera erunt applicatæ Parebolicæ ad easdem diametri portiones BH, & HC.

Probatur. Nam quia ex Thesi GC quadratum æquatur rectangulo AC, & CH. Ergo ab eis vtrisque ablato quadrato CH erit quadratum CE æquale rectangulo AH, & HC. Rursus si à BF quadrato, & ab AB, & HB rectangulo dematur quadratum BH erit quadratum DB æquale rectangulo AH, HB; at quia ista rectangula conficiuntur ex eodem latere HA eruunt inuicem, vt altitudines CH ad BH. Ergo etiam quadrata EC ed BD erunt vt CH ad HB; Ideoqs CE, & DB erunt applicatæ Parabolæ, cuius parameter HA.

PROBL. III. PROPOS. LXXVIII.

Data Ellipsi Parabolam describere.

Sit Ellipsis AB, & in ea diameter coniugata æqualis alteri AB, & applicatæ DC, & EF; Fiatque quadratum HC æquale quadratis ex DC, & AC, & quadratum FB æquale quadratis FB & BA. Et CH, atque TB horum quadratorum latere erunt applicatæ in Perabola,



Probatur ex prop.35.Tr 24. cum AB sit diameter coniugata erit rectangulum AC, & CB æquale quadrato CD, & ita quoque AE, & EB æquale quadrato FE: Addito igitur quadrato AC rectangulo AC, & CB fiet totum rectangulum ex AB, & AC æquale quadratis DC, & CA; sic addito quadrato AE rect. ex BA, & essiet totum rectangulum ex AB, & AE æquale quadratis BE, & BA eiusdem altitudinis AB; ideo erût inuicem, vt altitudines AC, & BE; sed quadratum HC rectangulo ex AB, & AC ea effectione æquatur; sic etiam EI quadratu rectangulo ex AB, & AE. Ergo ita erit quadratum ex CH ad quad. EI, vt AC ad AE. Quare CH, & IE erunt applicatæ parabolicę.

PROBL. IV. PROPOS. LXXIX.

Data Parabola Ellipsim describere.

Ex parabole describetur Ellipsis adhibita fig. præc. ex propos.33.lib.6. Auferatur quadratum AC portionis diametri à quadrato CH, & latus DC residui quadrati statuatur pro applicata diametri coniugatæ æqualis alteri.

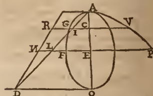
Probatur. Nam quia HC quadratum æquatur rectangulo AB parametri, & AC; si auferatur ab vtrisqs quadratum ex AC remanebunt æqualia quadratum DC, & CA, CB rectangulû; sic dicas de rectangulo AB, & AS, & quadrato EI à quibus si auferatur quadratum AE remanebunt EF residuum quadrati, & AE, & EB rectâgulû çqualia. Quare erit vt quadratum DC ad quadratum FE; ite CA, & CB rectangulum ad rectangulum AE, & EB. Quare ex 6. huius DC, & FE erunt applicatę Ellipticæ.

Quod verò rectangula applicatarum quadratis æqualia sint eiusdem basia patet, quia habent eundem Parametrum, & AB Parabolæ datæ erit Parameter, at in Ellipsi erit diameter coniugata æqualis alteri, eo quod BEA rectangulum remanet æquale quadrato FE, & sic de alijs.

PROBL. V. PROPOS. LXXX.

Data Ellipsi Hyperbolam describere.

Fiat rectangulum isosceles AOD, deinde ductis in Ellipsi CG, & EF applicatis secabunt AD in I, & L, fiat quadrato CG æquale rectangulum CI, & CB, & quadrato ex FE æquale rectangulum EL, & LN. Erit ADR triangulum, & recta transibit



à puncto D per extrema N, & R. Nam cum sit CI, & RI rectangulum ad EL, & LN quadratum, ideſt vt CA, & CO rectangulum ad AE, & EO rectangulum habebunt ea rectangula proportionem ex lateribus compositam, sicque stabunt.

Compos.

Compof.			vt	Compof.		
CI	&	IR		CA	&	CO
	ad				ad	
EL	&	LN		EA	&	EO
Ergo	latera			latera		
CI	vt	CA		IR	vt	CO
ad		ad		ad		ad
EL		EA		LN		EO

Sed CO, & EN, vt ID ad LD, & ideo erit, vt RD ad ND, qoare ID, RD latera ftipantia parallelas IR, EN eruot rectæ, quòd triangula fint fimilia RID, & NDL ex 5. lib. 6. & ideo pofita vnum fuper aliud in angulo D conuenleot, & eadem crura efficient.

Si rectaogulo igitur CI, & CR fiat quadratum æqoale VC, & EL, & AN rectangulo quadratum AP æquale, erunt VC inter CI, & CR, & PA mediæ proportionales inter EN, & LE. Quare ex prop. 59. erunt VC, & PE applicatæ Hyperbolicæ, & P, & V puncta ad Hyperbolam.

PROBL. V. PROPOS. LXXXI.

Datam Hyperbolam ad Ellipfim reuocare.

HOc fit auferendo quadratum CA ab VC in fig. preced. & EA ab AP, & cęt. & latera, quæ refiduorum quadratorum contexunt latera erunt applicatę in Ellipfi; cuius diameter tranfoerfa eft eadem, ac diameter Hyperbolica, quę poteft etiam effe diameter fecundaria, licet figura fit de folo axe.





TRACTATVS XXV.

De Sectionibus corporum sphæroïcorum per planas superficies.

VIdimus Sectiones Sphęrę per planas superficies, relationes, proprietates, & dependentias; modo sectiones corporum, quæ aliquid sphærici possident per planas superficies contemplandæ, quæ deinde ad proiectiones, tum sphæræ, tum circulorum, seu orthographicè, seu stereometricè mirabiliter deseruiunt.

EXPENSIO I.

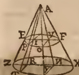
De sectione Coni, cuiuscumque per planas superficies.

SEctio coni post sphæram celebrior, vtpote, quę tres mirabiles sectiones exhibeat Ellipsim, Hyperbolam, Parabolam, & insuper triangulum, & circulum, & licet iam de coni sectionibus egerimus, non tamen pro vt etiam pro basi Ellipsim posidet, de ijs tractauimus; quemadmodum nunc agere oportunum iudicamus.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio coni Elliptici parallela basi Ellipsis est.

PRobatur, quod in cono AXZ, cuius basis ZTX sit Ellipsis, quod, & sectio parallela FOPE sit Ellipsis. Nam vt NA ad VA, sic XN ad FV, & sic NZ ad VE, & NY ad VO, & permutando, ob parallelas in triangulis AAN, & NAY, & ANZ, quorum commune latus est NA. Vnde etiam rectangulum XNZ ad rectangulum FVE erit ex 26. lib. 6. vt NY quadratum ad VO quadratum. Eodemque modo concludes, quod XR sit ad FI, vt RZ ad IE, & RT ad IP: sint in eadem proportione, & permutando, ac RA ad IA, ex quòd in triangulis ob parallelas similibus ex 4. l. 6. constat. Quare pariter XR, & RZ rectangulũ erit ad rectangulum FI, IE, vt quadratum RT ad quadratum IP. Itaque XN, & NZ rectangulum est, ad FV, & VE rectangulum, vt quadratum NY ad quadratum VO, & conuertendo FV, & VE rectangulum est ad XN, & NZ rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum YN, & vt XN, & NZ rectangulum ad XR, & RZ rectangulum, ita est quadratum YN ad quadratum RT cum XQZ ex Thesi sit Ellipsis, vt autem XR, & RZ rectangulum ad FI, & IE rectangulum, ita est quadratum RT ad quadratum



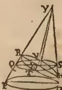
PI, ergo ex æqua erit FV, & VE rectangulum ad FI, & IE rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum IP: quare ex propos. 6. Tract. 24. FOPE Ellipsis erit.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis sectio coni circularis scaleni, quæ angulos alternos efficiat æquales basi, & ipsa quoque circulus est.

SIt conus OYP, cuius basis circularis OP, & circulus æquidistans, & parallelus QVTS. Iam notum est ex præc. tr. pr. 2. quod si OP basis sit circulus, fore etiam circulum QSVT. Quo supposito ducatur alius circulus, qui cum isto QVST angulos alternos æquales efficiat, ita quod angulus H conclusus latere conico OY, & diametro HR, sit ęqualis angulo Q clausus latere coni QR, & diametro QS. Et superficies RTH, QTS supponantur perpendiculares triangulo per axem OYP, quare TX, & XV sectio, OYP plano perpendiculariter incumbet ex 16. tract. 22.

Re itaque ita concepta Probatur propos. Angulus apud R in triangulo RQX est æqualis angulo apud H in triangulo AHS. Anguli quoque ad verticem X sunt ęquales ex prop. 12. lib. 1. Ergo ex propos. 17. lib. 1. Coroll. 2. hæc duo triangula sunt æquiangula: Quamobrem latera erunt proportionalia, quæ circum æquales angulos ex propos. 4. lib. 6. Propterea; ita erit crus XQ ad crus XR alterum, sicut crus XH ad crus XS alterius trianguli.



Sed

Sed ex propos.18.lib.6.si quatuor rectæ proportionales fuerint illud rectangulum, quòd constituitur à medijs V.g. ex cruribus XH, & RX est æquale rectangulo ex extremis constituto, nempe vt QX, & XS.

At ex propos.35. lib.3. rectangulum QX, & XS constitutum æquatur quadrato, ex planorum semisectione XT, aut XV constituto, quia sunt lineę, quæ in circulo se intersecant. Ergo pari ratione Rectangulum ex XR, & XH erit eidem quadrato æquale ex semisectione cõstituto: Quare ex dictis pr.35.l.6 el. hęc duo puncta erũt in circuli circũferentia. Quapropter RTHV circuli circũferentia erit, cùm idem argumentũ valeat, etiã si sectio TV fiat aut superius, aut inferius, dummodo parallela sectioni iam factæ planorum RTVH, vel QTVS,

COROLLARIVM I.

* Hinc est in Cono scaleno duos axes reperiri. Quia duo centra sunt circulorum, à quibus à vertice Y axis ad quemlibet duci potest, quæ non coincidunt in idem punctum, nempe basis rectæ, quæ fieret, qui, & esset axis coni propriè dictus, & basis obliquæ.

* Ponantur enim æquales RX, & XH: Dico XQ, & XS inęquales esse, & ideo punctum X circuli QTSV centrum non esse. Quod si æquales dicantur, ostenditur sine absurdo id esse non posse.

Nam RXQ, & XHS sunt triangula ad verticem ex hypothesi, æqualia quoque crura ambientia æquales angulos ad verticem X, scilicet XS, & QX sicuti RX, & XH ex Thesi, ideo bases ęquales habebunt QR, & HS. Quare cum anguli apud Q, & H remaneant æquales etiam bases XS, & RX opposite illis angulis septis à cruribus æqualibus erunt æquales ex 32. lib.1. sed XS ex ęqualis ex aduersarija ipsi QX. Ergo QX, & XR erunt bases æquales. Quare ex 14. lib.1. Elem. anguli R, & Q erunt æquales: Quadere R, & H, vtpote tertio Q æquales erunt æquales anguli alterni, & ideo ex 28. lib.1. QR, & HS essent parallelæ: quod est absurdum.

Cum igitur lineæ QX, & XS æquales esse nequeant axis basis QTVS nõ poterit esse basis RTVH etiamsi has bases ponas esse Ellipses. Ideoque nullæ Ellipses, vel circuli in conis habebunt communem axem, nisi paralleli.

THEOR. III. PROP. III.

* *Omnis sectio Coni Elliptici, quæ secet vtrumque latus, in qua possit esse maior axis æqualis alteri axi circulus est.*

Sit in cono ADE sectio BC, cuius semiaxis BO maior possit esse æqualis axi alteri OG. Dico BFCG esse circulum.

Probatur. Nam BO, & OC, rectangulum ex radijs est ad quadratum OO, æqualia, vt BI, & IC rectangulum ad IL quadratum, & permutando sed BO, & OC quadratum æquatur quadrato OC; Ergo, & BI, & IC rectangulum æquabitur quadrato IL, cumque BOC axeis asseratur, Ergo ex 35.lib.3. BFCG erit circulus.

COROLLARIVM.

Illum conum Ellipticum nullam basim posse habere, quæ sit circulus, si saltem BC axis qui deberet esse maior factus perpendicularis vni laterum trianguli per axem DAE sit maior adhuc, nã tunc axi minori FG etiam cęteræ omnes ex Cor. propos.17. lib.1. Elem. erunt maiores ipsa CH; Quod si accidat perpendicularem BC posse esse minorẽ, tunc aliqua alia longiór erit æqualis. Vnde in eo cono poterit fieri aliqua sectio circulus.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

In Cono quocumque Ellipses parallelæ similes sunt.

Sint duę Ellipses parallelę in quocumque cono, sine elliptico, seu circulari AEB, nempe MLIK, & ADBC. Dico eas esse similes.

* Probatur. Quod sint similes, vt FE ad CE; sic AF ad MO, & ita CF ad LO ob parallelas MO & AF in triangulo MEF, & CF ad LO in triangulo CEF, sed CE, & LO sunt applicatæ, & MO, & AF portiones diametri, ergo ACDB, & MLIK erunt Ellipses similes ex def. 16. Tract. 24.

THEOR. V. PROPOS. V.

* *Omnis sectio coni Elliptici non parallela basi etiam Ellipsis, est si vtrumque latus secet trianguli per axem.*

Sint AAB, & CFD duæ Ellipses, & sit obliqua basi XEK. Dico eam esse Ellipsim.

* Probatur. Dictum est pr.53, Cor. Tr.24. AIB rectangulum esse ad COD rectangulum, vt quadratũ EI ad quadratũ OF ob ellipses parallelas, quę similes sũt ex prec. Sed vt AI ad CO; sic XI ad XO in triangulis æquiangulis ob parallelas AXI, & CXO. Pariterque vt IB ad OD ita ob eandem rationem IK ad KO.

Componendo igitur proportiones

cum AI vt XI & sit IB vt KI
ad ad ad ad
CO XO OD OK

Ergo compositum vt compositum.
AI & IB erit XI & KI
ad ad
CO & OD XO & OK

Quare etiam vt rectangulum XI, & KI ad rectangulum XO, & OK sic erit quadratum EI ad quadratum OF ex propos.16. lib.5. cum sit eadem proportio quadratorum, ac rectangulorum AI, & IB ad CO, & OD. Vnde ex 6. tract.24 XEFK erit ellipsis.

THEOR.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Hyperbolæ parallelæ in Cono similes sunt.

IN cono GLN secto triangulo per verticem ELF ab intersectionibus BD, & FB circulorum RBS, & GFN duæ hyperbolæ parallelæ CMFB, & ATBD discedant et diametri transuersæ producantur vsque ad Q. & K. Sint autem hæc omnia plana perpendicularia triangulo ex generatione GLN. Dico has sectiones parallel... esse Hyperbolas.

Intelligatur l.oun sit satis expressa ab L vertice in aliquod punctum I producta linea, & à puncto, quo secat diametrum vtrumque T, & V duę perpen dicu lares ad idem planum LNQ erigantur IM, & VT; & ex prop. 8. Tract 25. erunt parallelæ quoque.

Quo posito probatur, cùm BQ, & DB sint parallelæ, & segmenta ipsarum erit rectangulum ex BV, & VA ad rectangulum ex DA, & XD, vt rectangulum ex QI, & IC ad rectangulum ex QB, & EC; quòd latera obtineant proportionalia. Vt autem rectã gulum ex BV, & AV ad rectangulum ex XD, & DA, ita est TV quadratum ad SD quadratum ex 6. h. Et vt rectangulum CT, & QT ad rectangolum ex QB, & BC, ita est quadratum MI ad quadratum FB. Ergo erit etiam TV quadratum ad quadratũ ED velut MT quadratũ ad quadratũ FB ex 16. l. 5. Quare talia quoque erũt latera ex prop. 16. lib. 6. Elem. s. erit TV ad DB, vt IM ad BI; sed est etiã AV ad AO, vt TC ad CB ob parallelismũ linearũ AD, & CB: Ergo hyperbolæ erũt similes BTBD, & CMFB ex prop. 53. Tr. 24. de conicis.

De circulis, & Parabolis non est difficultas. Nam omnes parabolæ, & omnes circuli sunt similes, vt ostendimus.

Et omnes quoque in cono circulari sunt parallelæ figuræ, cùm circulus basi sit parallelus, at parabula lateri.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

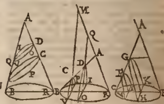
Æquidistantes in eodem cono sectiones, non possunt esse eadem.

SIt primùm sectio parabola in cono ABC per axem secto plano ABC, & parabolę XGH, & FIV æquidistantes.

Dico, quòd hæ sectiones non sunt vna alteri eadem.

Probatur. Quia obtinerent parametrum ex propos. 39. Tr. 24. æquale, si essent sibi eędem, sed nequeunt consequi æquale parametrum. Ergo eędem esse non possunt.

Probatur minor de Parabola. Quoniam ex pr. 41. Cor. Tract. 24. si componatur rectangulum ex cruribus BA, & AC, id habebit eam proportionem ad quadratum BC, quam AG, vel AF portio cruris à verticibus sectionum, & coni intercepta ad parametrum contiguam; Sed portio AF est maior, quam AG; ergo etiam maior Parameter parabolæ IFV quã parab. XGH. Quare nõ sunt eędẽ.



Sit deinde data sectio Hyperbola, vel Ellipsis in conis AXB æquidistantes. Dico non esse easdem inter se.

Probatur. Nam ex 38. Tract. 24. conic. diametri transuersæ essent inter se æquales; sed CN, & DQ tales non sunt. Ergo neque sectiones sunt ęędem inter se; Assumptum verò ostenditur. Nam AC maior est, quam AD. Ergo etiam transuersa diameter CN maior est, quam DQ in ACN; & ADQ triangulis ęquiangulis. Vnde Ellipses, aut Hyperbolę non erunt inuicem æquales, si sint parallelæ.

EXPENSIO II.

De Coni sectionibus in lineam desinentis.

SPecies est coni, qui cum basim rotundam obtineat, non desinit tamen in punctum, sed in lineam, vt conus repræsentat ABCF, de hoc etiam aliqua dicere necessarium videtur.

THEOR. I. PROP. VIII.

* *In Cono, qui desinit in lineam rectam habente pro basi circulum, vel Ellipsim reliquæ omnes parallelæ sectiones, seu intra seu vltra basim, si producatur illius coni superficies, sunt Ellipses.*

SIt Conus, cuius basis circulus ACBD, vel ellipsis desinatq; in lineam EF. Dico, quod si in eo fiat aliqua sectio vt GMPH parallela basi illa sectio exhibebit Ellipsim.

* Probatur ex ea proprietate Ellipsis, quòd consequatur diametros inæquales, & quòd omnia applicatarum quadrata inuicem, ita se in proportione gerant, vt rectangula sub interceptis diametri portionibus comprehensa. Sint ergo applicatæ IM, & OP. Dico, quòd ita est quadratum IM ad quadratum OP, vt rectangulum ex GI, & IH ad rectangulum ex GO, & OH.

Probatur. Nam ita est MI ad DN, vt est SI ad SN, & ita est PO ad VR, vt TO ad RT. Lineę verò TO, & IS sunt æquales, sicut, & SN, & TR: Vnde possunt computari pro eadem: Quamobrem etiam

erit

erit MI ad DN, vt PO ad VR, eo quòd sint eædem proportiones vel tertiæ ex 16. lib. 5. nempe BI ad AN, vel TO ad TR. Cum ergo sit MI ad DN, vt PO ad VR erit permutādo MI ad PO, vt DN ad VR. Quare etiā quadrata ex 26. l. 6. ex illis lineis effecta.



Sed vt se habet quadratum ex DN ad quadratum ex VR, ita est rectāgulum ex AN, & NA partibus diametri interceptis ab applicata DN, vt rectangulum ex AR, & RB partibus diametri interceptis ab applicata VR ex 35. lib. 3. Elem. vel ex 6. Tr. 24. cum sit basis circulus, vel Ellipsis. Ergo etiam ita erit quadratum ex MI ad quadratum ex OP, vt rectangulum ex AN, & NA ad rectangulum ex AR, & RB: Sed rectangulum ex AN & NB est æquale rectangulo ex GI, & IH ob parallelas EA, & FB, ob quas æqualia sunt segmenta diametrorum æqualium GI, & AN, sicut, & IH, & NA. Et ita quoque rectangulum ex AR, & RB ex æquale rectangulo GO, & OH ob eandem rationem segmentorum æqualium. Ergo quadratum ex MI ad quadratum PO, est vt rectangulum ex OI, & IH ad rectangulum ex GO, & ON. Quaderè erit Ellipsis figura GMPH, cum circulus esse nequeat ob diametros inæquales, quia equidē est maior DN semidiameter, quàm MI; sicut, & maior est SN, quam SI, cum quibus ij diametri eandem proportionem dicunt.

EXPENSIO III.

De sectione sphæroidis per planas superficies.

AD inuestigandum superficies corporis sphęroidis, & solliditatē, vtile est scire sectiones, quæ in ipso exhiberi possunt; ad quam expensionem ineundam operæ pretium est definitiones agnoscere.

DEFINITIO I.

SEmiellipsis in orbē circa suum diametrum, voluta, donec redeat ad idem punctum, à quo discessit sphæroidem circumscribit.

DEFINITIO II.

AXis eius est idem axis, circa quem Ellipsis efformatrix circumuoluta est, & punctum huius medium centrum ipsius est.

THEOR. I. PROP. IX.

Omnis sectio recta ad axem sphæroidis circulus est.

PRobatur id faciliter ab efformatione sphæroidis, cū enim Ellipsis ABCD se circūgyrando fecerit spęroidem, omne punctum eius circulum efecit. Quare punctum E se gyrando per F in H



circulum delineauit, sed hic est parallelus basi BIC, actę normaliter ad axem AD sphęroidis eo, quòd se girando punctum E non muter distantiam à puncto F: Ergo axi circulus EFH erit normalis, alterique circulo BIC parallelus.

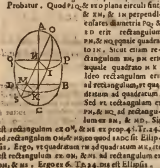
THEOR. II. PROPOS. X.

Omnis sectio sphæroidis axi obliqua Ellipsis est.

SIt secta sphęroides ABCD piano obliquo OTAS ad axem. Dico *illam esse veram Ellipsim.*

Sectio ABCD primigenia sphæroidem constituens, sit plano OIKS recta, nempe transeat per aliquam illi plano perpendicularem; patet enim hoc fieri posse absque alia probatione; Et eidem plano primigenio ABDC perpendiculare quoque planum PSQ. & BK D secet obliquum OIAS in N puncto: quo obliquum secat axem, & in M aliquo alio puncto; Sintque hæ duo plana recta ad axem AC: Sectiones itaque IN, & KM erunt perpendiculares ex propos. 16. Tract. 22. plano primigenio BADC, & eius sectionibus lineis PQ, & AD, & plana PIQ, & BKD erunt circuli, & parallela, vt axi orthogonalia; quibus positis, ita.

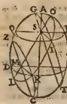
Probatur. Quod PIQ, & BKO plana circuli sint, & KM, & IN perpendiculares diametris PQ, & BD erit rectangulum PN, & NQ ęquale quadrato IN. Sicut etiam rectangulum BM, DM erit æquale quadrato MK: Ideo rectangulum erit ad rectangulum, vt quadratum ad quadratum: Sed vt rectangulum ex PN, & NQ ad rectangulum ex BM, & MD, Sic



est rectangulum ex ON, & NS ex prop. 43. Tr. 24. ad rectangulum OM, & MS, eo quod BADC sit Ellipsis, Ergo, vt quadratum IN ad quadratum MK, ita est rectangulum ex ON, & NS ad rectangulum ex OM, & MS. Ergo ex 6. Tr. 24. DIS est Ellipsis.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Omnes Ellipses in sphæroide sunt similes, si sint parallelæ.



SIt constructio, vt præcedens, Sectioque primigenia sphæroidis ABCD, & plana circulorum perpendicularia eidem sectioni primigenię sint PNQ, BKD, & eidem quoque duæ Ellipses parallelæ perpendiculares TIO, & QKZ erunt, & intersectiones IS, & KM perpendiculares ex prop. 15.

36. Tract. 28. per quas agatur planum OIKL.

Prob. Sectiones GIT, & ZXC esse similes rectangulũ ex OS, SL ad rectãgulũ ex OM, & ML ex pr. 68. præc. Tr. vt rectãgulũ GS, & ST ad rectãgulũ ex ZM, & MC: sed vt rectangulum ex OS, & SL ad rectangulum OM, & ML, ita est quadratum IS ad quadratũ MK ex præc. Ergo etiam rectangulũ ex TS, & SG ad rectangulum ex ZM, & MC, vt quadratum TS ad quadratum MX. Quare etiam ex 16. lib. 6. SG, & ST lineæ erunt ad MZ, & MC, vt TS ad KM; quare ex def. 16. Tr. 24. sectionum similium, erunt similes sectiones GIT, & CXZ parallelæ.

EXPENSIO IV.

De sectionibus Conoidis parabolici.

Quoniam egimus de præcipuorum corporum sectionibus, parabolicum Conoides inter corpora mathematica non infimum locum obtinens præterire non licet. Tres autem sectiones in ipso fieri possunt præter primigeniam, ex qua generatur, Circulus, Parabola, & Ellipsis.

DEFINITIO.

Conoides Parabolicum Parabola circa suum axem voluta formatur, & axis eius est axis eiusdem parabolæ genitricis.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Si sit Conoides parabolicum, cuius basis circularis, & sectum sit plano basi parallelo, sectio circulus erit.

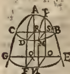
Sit EAG corpus Conoidale Parabolicũ, in fig. pr. seq. & planũ BNC intelligatur æquidistans basi, quæ sit circulus EFG. Dico *hoc planum esse circulũ.*

Probatur. Nam eius ambitus formabitur à puncto C per motum parabolæ circa axem AQ. Et cum illud punctum semper æquidistanter basi moueatur, cumque perimetrum parabolæ maneat semper inuariatum punctum illud C per D, M, B sẽper in æquali distãtia, à cẽtro R, & circulo GFNE mouebitur, vt patet. Quare CDMB circulus erit.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Omn. sectio Parabolici Conoidis æquidistans axi Parabola est.

Sit Conoides Parabolicum EAG Axis AQ; sintq; parallelæ sectiones OPMN, & altera QANF per axem AQ. Sintque circuli paralleli BMNC, & ENFG, & perpendiculares Parabolę primigenię EACG. Dico OPMN *sectionem axi* QA *parallelam esse parabolam.*



Probatur OP est diameter coniugata in parabola primigenia EAG. Ideoque BS, & SC rectangulum est ad EO, & OG rectangulum, vt PS est ad OP ex propos. 50. Tract. 24. sed ex BS, & SC rectangulum est æquale quadrato SM, & rectangulum ex EO, & OG quadrato ON. Ergo quadratum SM ad quadratũ ON erit, vt SP ad OP, quę est ex prop. 5. Tract. 24. proprietas parabolæ.

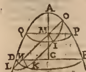
PROBL. III. PROPOS. XIV.

Omnis sectio Conoidis parabolici ad axem obliqua Ellipsim efformat.

Ducantur paralleli basi circuli BND, & PMQ, qui secent OIKL planum sectioni primigeniæ BAN normale. Eruntq; MI, & KN intersectiones planorum perpendiculares intersectionibus BN, & PQ, & OL ex prop. 16. Tract. 22.

Dico itaque OIKL *obliquum planum axi* AC *esse Ellipsim.*

Probatur. Cum PM, & MQ rectangulum quadrato MI, & BN, & ND rectãgulum quadrato NK sit æquale eo, quòd sint circuli vt ax. pr. 35. El. l. 3. erit rectangulũ PM, & MQ ad rectangulum BN, & NB vt quadratum IM ad quadratum NK ex propos. 7. lib. 5. Vt

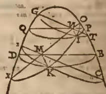


autem rectangulum PMQ ad rectangulum BND, ita ex propos. 48. Tract. 24. est rectangulum OML ad rectangulum ONL. Quare rectangulum OML erit ad rectangulum ONL, vt quadratum MI ad quadratum NK, hæc autem ex propos. 6. Tract. 24. est proprietas Ellipsis prima, & essentialis.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Ellipses in Conoide Parabolico parallelæ sunt similes.

Sint duæ, GIT, & XKC parallelæ Ellipses. Dico *eas esse similes.*



Prob. Supposita eadẽ prorsus constructione, quę propos. 33. eum, & fit iisdẽ verbis eadẽ demonstratio. Rectangulũ ON, & NX est ad rectãgulum OM, & MX ex prop. 48. Tract. 24. vt rectãgulũ GN, & NT ad rectangulum ex SM, & MC; Sed vt rectangulum ON, & NX ad rectangulum OM, & MX, ita est quadratũ SN ad quadratũ MX ex 14. h. Ergo etiã rectangulum ex TN, & NG ad rectangulum ex SM, & MC, vt quadratum IN ad quadratum MK. Quare

etiam

etiam ex propof.26. lib.6. Elem. ita erit NG, & NT lineæ ita erunt ad SM, & MC, vt IN ad KM: quare ex def. Ellipſes GIT, & SKO erunt ſimiles.

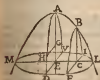
THEOR. IV. PROPOS. XVI.

In Conoide Parabolico Parabolæ axi æquidiſtantes ſimiles, & æquales ſunt.

PArabola TBF detur parallela axi AE, & parabolæ per axem VAD. Dico *eam eſſe ſimilem, & æqualem ipſi* VAD.

Detruncetur AG ex axe æqualis ac diametro, & ducatur applicata GH, quæ erit parallela ED.

Probatur, Quia vt AG ad AE, ita eſt quadratum GH ad DE, & quia LAM parabola eſt; erit LCM rectangulum ex Cor.1.prop. 50.Tr.24 de Conicis ad LCM rectangulum, ideſt ex 35. lib 3. illi CL, CM æquale FC quadratum ad quadratum DE æquale LE, EM rectangulo, vt CB ad AE: ſed GH quadratum eſt ad quadratum ED, vt AG ad E, ideſt BC ad AA. Ergo cum CF quadratum ad ED quadratũ eãdem proportione alludat, vt GH quadratum ad idem ED quadratum erunt æqualia GH, & CF quadrata. Ergo, & lineæ GH, & CF. Quare cũ diametri ſint æquales, æqualeſque applicatæ, parametri quoque, vtpote æqualium applicatarum quadratis rectangulorum cum diametro latera erunt æqualia. Vndæ parabolæ erunt ſimiles, & æquales, vt ex definitione.



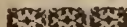
EXPENSIO V.

De ſectione Conoidis Hyperbolici per planas ſuperficies.

COnoides Hyperbolicum recipit omnes ſectiones planis diuerſimodè illud ſecantibus; nempe circulum, Ellipſim, Parabolam, & Hyperbolam; de Circulo nihil dicemus, cùm pateat ex antecedentibus oſtenſionibus Circulum exhibere ſi planum ſecet Conoidem, Hyperbolicum parallelũ baſi, & eãdem prorſùs demonſtratio eſt, quam adhibuimus in Parabola. Vnde ad alias ſectiones oſtendendas accedimus.

DEFINITIO.

COnoides Hyperbolicum ab Hyperbola circa ſuum axem v luta formatur, & axes eius eſt idem, ac generantis Hyperbola.



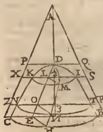
THEOR. I. PROPOS. XVII.

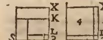
Si planum ſecet Conoidem Hyperbolicum parallelè ad aſymptotum figuræ ex generatione; illa ſectio eſt parabola.

SIt Conoides Hyperbolicum TDV, & figuræ ex generatione eidem TDV Aſymptoti ſint AA, & AC; ſitque DA parallela Aſymptoto AC; per quam agatur planũ DHE Dico *figuram* DHE *eſſe Parabolã.*

Ad quod oſtendendum conſtituantur ordinatim applicatæ parallelæ baſi 2 K, & 3 V hinc inde, & extendantur vſque ad Aſymptotos in X, & Z, R, 2, & quia ſunt parallelæ baſi plana IMK, & TNV circuli erunt, ſitque QP tangens ſectionem parallela ipſi XS. Quibus perfectis erunt omnes æquales, vtpote inter parallelas lineæ DP, LX, OZ.

Probatur igitur. Quoniam 2 X eſt ſecta, vtcumq; in L ex propoſ.6. lib.2. El. erit quadratum totius 2 K æquale duobus rectangulis ex ſegmentis 2 L, & LK, & quadratis ex ijſdẽ 2 L, & LK, vt in quad. 4. vides. Quadratum verò maius ex LX; q. ſit æquale DP æquatur rectangulo ex KX, & XS, ex pr.46. Tr 24. q. facit gnomonem circa 2 K; ſiquidẽ 2S & K2 integrat vnã portionẽ, & 2 K alteram ſub altero latere KX, vt eodem modo rectangulũ ex LK, & L2 faciet gnomonẽ conclu ſum prędicto gnomone ambiens quadratum ex 2L, vt in quadrato XS eſt videre. Quare quadratum X2 æquabitur quoq; duobus rectãgulis vni ex 2K, & KX, & alteri 2L, & XL, vnà cum quadrato 2 L, ſiquidem hæc omnia ambit quadratũ, cuius latus 22. vel 2X. Si ergo auferatur quadratum paruum 2 L communè vtriſque, & gnomon, ideſt rectangulũm XK, KS, & quadratum maius ex LK, quæ inuicem æquantur remanebit gnomon intermedius, nempe rectangulum ex LK, & LI æquale duobus rectangulis LK, & L2. Sed rectangulum IL, & LK æquat quadratum ML ex 35. lib 3. Ergo etiam duo rectangula ex LX, & L2 æquabunt quadratum ML.





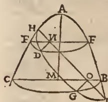
Idem dicas de rectãgulis duobus O 3, & OZ, quę æquabunt quadratũ ON. Et ideo erunt rectangula duo ex 2L, & LX ad rectangula duo ex 3 O, & OZ, vt LM quadratũ ad quadratũ NO. Ideoq; etiã erit medietas, nempe vnicum rectangulum ex 2 L, & LX ad medietatem rectangulum vnicum 3O, & OZ, vt quadratum ML ad quadratum NO. Sed rectangulum ex 2 L, & LX ad aliud ex 3 O, & OZ eſt, vt baſis 2 L ad 3 O baſim ob eandem altitudinem ęqualium LX, & OZ: baſis verò 2 L ad baſim 3 O eſt, vt DL ad DO. Ergo quadratum ML erit ad quadratum NO, vt DL ad DO, quę ex prop.5. Tract.24. eſt proprietas parabolæ.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis sectio conoidis Hyperbolici ad axem obliqua Ellipsim exhibet si secet utrumq; latus sectionis per axem.

Sit sectum Conoides Hyperbolicum BAC duobus planis parallelis ad basim, Hyperbolęque primitiuæ BAC normalibus FDE, & BGC, quę secent planum aliud obliquum axi AM, & eidem sectioni primitiuæ normale HDGL. Dico hoc planum Ellipsim exhibere.

Probatur. Nam cum plana normalia sint ad hyperbolem primitiuam BAC sectiones DN, & GO erunt quoque normales propos. 16. Tr.22. quare rectangulum ex FN, & NE erit æquale quadrato DN, & rectangulum ex BO, & OC quadrato OG: Sed rectangulum ex FN, & NE est ad



rectangulum BO, & OC, veluti rectangulum ex HN, & NL est ad rectangulum ex OH, & OL ex prop. 48. Tr.24. Conic. Ergo rectangulum ex HN, & NL est ad rectangulum ex HO, & OL, vt quadratum DN ad quadratum OG: quæ est proprietas Ellipsium ex 5. Tract.24.Conic.

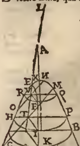
COROLLARIVM.

Ellipses parallelas in Conoide Hyperbolico esse quoque similes eadem autem figura est, quæ in parabolico Conoide, & eadem ostensio.

THEOR. III. PROPOS. XIX.

Omnis sectio Conoideos, quæ transeat per centrum hyperbolæ primitiuæ Hyperbolam format.

Sit centrum hyperbolę primitiuæ A, & ipsa sectio BMNC, quæ etiam exprimat Conoidem hyperbolicum, sitque sectio TEPI, quę producta transeat per centrum A. Dico *hanc esse hyperbolã.* Sint plano Hyperbolæ primitiuę ANC normalia, & basi circulari parallela plana QFR, & PIH, ipsaque sectio TAP. Sit quoque ei aNC normalis, & FV, & T^F sectiones erunt normales intersectionibus QR, & PH. Ducantur postea applicatę VN, & TM diametro TA ad puncta V, & T.



Prob. Rectangulũ ex VQ, & RV est ęquale quadrato V: Sic rectãgulũ ex PT, & TH est ęquale quadrato TI. Ergo, vt quadratũ ad quadratũ, ita rectãgulum ad rectangulum. Sed rectangulum ex QV, & VR est ad rectangulum NV, & VO, idest quadratum sunt enim ęquales, vtpote applicatę, veluti rectangulum ex PT, & TH ad rectangulum ex MT, & TC, idest quadratũ ex 49. Tr 24. Quadratũ verò NV ad quadratũ MT est, vt rectãgulũ ex diametro transuersa LV, & VA ad rectãgulũ ex TE, & LT ex pr.6. Tract.24. Ergo etiam ex 16. lib.5. quadratum VF ad quadratum TI, vt rectangulum LV, & VA ad rectangulum ex LT & TE, quę est proprietas Hyperbolarum ex prop.6. Tract.24. Conic.

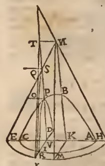
THEOR. IV. PROPOS. XX.

Asymptoti hyperbolæ in hyperbolico Conoide sunt ijdem, ac hyperbolæ in eodem plano existentis, & coni asymptotici sectione effectæ.

Sit Conoides hyperbolicum, atque adeo eius sectio per axem, & ex generatione ABC, cuius Asymptoti NE, NH; qui, & conũ Asymptoticũ formant NERH, sitque sectus tum conus HNE, tam conoides AAC plano VSR, in quo formentur duę ellipses, altera quidem ex sectione coni HNE a effecta, altera DPI sectione Conoidis hyperbolici ABC producta. Asymptotus verò Hyperbolę conicę SR, sit TX.

Dico itaque TX asymptotum hyperbolę conicæ SR esse quoque asymptotum hyperbolæ conoidalis DPI.

Probatur. Nam superficies conoidis ABC semper quidem accedet ad superficiem coni HNE, numquam tamen illam assequetur, eò quòd formetur à circumgiratione trianguli ex HNE asymptoticis, & ituti, quibus hyperbola semper accedit, licet numquã assequatur ex prop. 44. tract.24 Quamobrem Hyperbola conoidalis DPI, vtpote in superficie conoidis existens cum ipsa superficie conoidis semper quidem accedet, numquam tamen assequetur Hyperbolam SR conicam, & à superficie coni effectam, sed & SR semper accedit ad asymptotum suum TX, & numquam assequitur; Ergo etiam Hyperbola DPI accedet ad TX asymptotum, sed illum non assequetur. Quare etiam ex hyperbolæ conoidalis DPI erit Asymptotus, quod accedendo quidem ad SR accedentem ad TX accedat quoque ad TX; quam consequi non potest, cùm nec hyperbolam SR, quæ nec ipsa acquirere potest XT numquam obtinere queat.



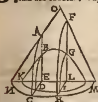
COROLLARIVM.

Hinc est hyperbolas SR coni, & DPVI conoidis esse similes; quia cum habeant eosdem asymptotos ductis SQ, & PO erunt diametri rectę applicatę sub angulo recto ipsi axi VT; quare erit vt TS ad QS, sic TP ad PO. Vnde sectiones ex prop. 54. tract.24. similes erunt DPI conoidis, & SR coni asymptotici. THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXI.

In Conoide omnes Hyperbolæ parallelæ sunt similes.

SIt conus asymptotieus MON hyperbolę primigeniæ XBG conoidis, & hyperbolæ in conoide LGI, & KDE, in cono autem FHL, & CAE. Dico DEB, & IGL esse similes Hyperbolas.



Probatur. Nam ex Coroll. prop. 20 huius DBE Hyperbola Conoidis est similis Hyperbolę CEA coni ex prop. autem 6 b. CAE est similis HFL hyperbolæ, & hæc ex Coroll citato hyperbolæ LGI; Ergo Hyperbolę ILG, & DBE sunt similes.

EXPENSIO VI.

De sectionibus Cylindrorum per planas superficies.

CYlindri quoque sectiones considerandę sunt, & quidem si Cylindrus basim circulum possideat, patet, sectiones basi parallelas esse circulos basi ęquales, sic si sit Ellipsis, patet quoque, omnes sectiones basi parallelas æquales esse Ellipses, quod ne in apertis immoremur per se manifestum prælupponimus, sicut, & omnem sectionem axi parallelã esse Quadratũ, vel Rectãgulũ, vel Rhombum, vel Rhomboidem in manifestis est. Igitur es solummodo de Cylindri sectione afferemus, quæ minùs clara sunt.

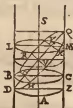
THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si sectio fiat in Cylindro, cuius bases sint circuli ab aliquo plano obliquo axi, sectio hæc Ellipsim repræsentabit.

PRobatur. Nam illam proprietatem Ellipsium consequitur, quod habeat diametros inæquales, quos circulus non obtinet, & tamen, quod quadrata applicatarum ad diametrum sint inuicem in proportione illa, qua rectangula sub contiguis diametri portionibus comprehensa.

Nam quod sint duo inæquales diametri, patet; Quod VR sit diameter idem, qui basis Cylindri OZ, qui est circulus: at verò diameter QO longior erit, vtpote basis in rectangulo QDZ diametro circuli ZD.

Quod autem quadrata applicatarum ad diametrum QD quales sunt XK, & OH, se habeant ad inuicem, vt intereeptarum diametri QO portionũ rectangula, nempe sub QK, & KD ad rectangulumex QO, & OO Prob. Nam ex prop. 35. lib. 3. quadratum XK est æquale rectangulo ex MK, & KL; cùm in circulo sint ductæ; & idem dicas de quadrato OH, quod erit æquale rectangulo ex CO, & OB eò quòd sint quoque in circulo. At rectangula habent inuicem eam proportionem, quę ex lateribus componitur ex prop. 23. lib. 6. quare proportio rectanguli ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL componetur ex proportione CO ad MK, & OB ad KL. At proportio CO ad MK est eadem, quę QO ad QK ob parallelas MK, & CO in triangulo CQO: Et proportio OK ad KL est eadem, ac proportio OD ad KD. Eadem ergo erit proportio ex CO, & OB rectangulum ad MK, & KL rectangulum: quæ est rectanguli OO, & OQ ad rectangulum KQ, & KD, vtpote, quia hæc rectangula ex lineis dicentibus inuicem eandem proportionem sint composita: Sed illa rectangula nempe ex CO, & OK ad rectangulum MK, & KL dicunt eam proportionem, quam quadratum HO ad quadratum XK, cùm istis rectangulis ostensa sint ęqualia. Ergo etiam rectangulum ex OD, & OQ ad rectangulum ex QK, & KD, erit vt quadratum OH ad quadratum XK: quæ est proprietas Ellipsium ex propos. 6. tract. 24.



COROLLARIVM.

OMnes Ellipses parallelas in Cylindro esse æquales patet; quoniam habent æquales axes ob eorum parallelismum.

Vnde etiam patet, quòd, & si bases cylindri sint ellipses, esse quoque sectionem obliquam axi Ellipsim, eò, quòd ex 6. Tract. 24. fit Ellipsium æqualiũ, vtpote quod prò eadem computari possint BO, & OC rectangulum ad KM, & KL rectangulum, vt quadratum HO ad quadratum KX; quare etiam rectangulum ex OD, & OQ prædictã ratione erit ad rectangulum DK, & KQ, vt quadratum OH ad quadratum KX. Vnde ex 6. Tract. 24. DHXQ Ellipsis erit.



TRACTATVS XXVI.

DE PROIECTVRIS PARS PRIMA.

De Orthographia.

Roiectionum vſus ampliſſimus, tum horologijs, tum iſtrumentis mathematicis, V.g. Aſtrolabio, & Quadrantibus; tum Coſmographiæ in planum ad circulos longitudinis, & latitudinis proiciendos, & tandem, & maximè Architecturæ ad proicienda corporum, ſingularumque planicierum delineamenta perutilis. Et hinc proſpectiuæ, cùm priùs illud, quòd iuxta diminutionem ocularis proſpectus repreſentatur in planum extendere oporteat, & ipſa quoque corpora, ſuperficieſque in planum proicere.

EXPENSIO I.

Quid, & quotuplex ſit proiectio?

PRuiectiouis nomen diuerſo ſenſu vſurpatur: Nã apud Vitruuiũ, quidquid extra ſuliditatẽ, vel columnarum, vel parietum profertur; vt corniceſ Cymacia Curuhides, baſiumque crepidines pruiectura appellatur, quòd extra ſuliditatem promineat, & quaſi pruiectum fuerit. At hic proiectionem dicimus figuram quandam in plano deſcriptam, quę rem, ſiue planam, ſiue ſulidam imitatur à plano, vel omnino, vel ſui aliqua parte eleuatam. Aliqui verò, vt Agullon lib. 6. Optices exiſtimãt proiectiunem pertiuere ad Opticam, & eſſe Opticę partem: quod minimè cuncedimus: quare hęc quęſtio inſtituta eſt, vtpote huius per neceſſarię operationis naturam perſpectam habeamus.

DEFINITIO.

P*Roiectio eſt ſuperficiei aliam ambientis in planum impreſſio.*

Solet definiri pruiectio, quod ſit *rei ſolidæ in planum tranſcriptio*. Verùm ſi hæc definitio, pro vt verba ſuuant, intelligatur, omnino impuſſibilitatem inuuluit: ſiquidem res ſulida nunquam poteſt in planum tranſcribi; ſed ſolùm illius ſingulæ ſuperficies: quibus ſuper planum deſcriptis; deinde res ipſa ſolida repreſentatur; & licet hoc ſenſu intellecta, vera euadat; aptiùs tamen videtur definienda. *Impreſſio, aut veſtigium alicuius ſuperficiei in plano impreſſum, quæ aliam ſuperficiem ambiat, & ita illam aliquo modo repreſentet*; Nam quòd propriè tranſcriptio non ſit patet, quia circulus à plano eleuatus in planũ proiectus per perpendiculares fit Ellipſis. Nun poteſt antẽ dici per deſcriptiunẽ Ellipſis trãſcriptus circulus; qa alterius ſpeciei figura eſt, quis enim affirmabit tranſcriptum hominem in figura, aut in effigie alicuius bruti?

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Duplex eſt proiectio, alia vocatur Orthographia. Alia Stereographia.

PRobat. auctoritate Mathematicorum, qui ita ſufficienter diuiſiſſe pruiectiouem arbitrati ſunt, tum quia ſuperficies, quę aliam ambit duplex ſolùm eſſe poteſt, nempe ſibi, ſuiſque partibus parallela, vt priſma, & Cylindrus. Aut non parallela, ſed in vnum punctum cuntendens ad inſtar coni, aut Pyramidis; Si ſuperficies illa ſit parallela ſibi, ſuiſque partibus, dicitur eius impreſſio facta iu plano urthographia: ſi verò ſit ad modum pyramidis, vel coni in punctũque cunueniat, dicitur Stereographia, Et hinc vtraque definietur.

DEFINITIO.

*O*Rthographia eſt ſuperficiei in aliam incidentis in planum orthogonalis impreſſio.*

Per hoc enim dicitur orthugraphia, à verbo gręco ὀρθὴ: quud eſt recta, quod ſcilicet illa ſuperficies directè in planum incidat, & in eam imprimatur.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

* *Orthographia non naſcitur à diſtantia oculi infinita, quæ lineas viſuales rem viſam lambentes orthogonaliter in planum imprimat: Eſt con Franciſcũ Aguilon lib. 6. opticor. in præfat. ad prop. 16.*

PRobatur. Nam lineæ viſuales numquam ſunt

paral-

parallelæ, sed in oculum tandem coniunguntur. Dices. Quod data infinita distantia fierent parallelæ. Respond. negando. nam primò non est hæc distantia possibilis, & ideo frustratoria est suppositio, & absurda; se.undò etiam si daretur nullis fieret visio, quę determinatos limites habet; qua si infinitè distaret oculus, etiam infinita rei visæ fieret diminutio; sed infinita diminutio in nihil terminat; Ergo nihil videretur. Tandem aeque ea distantia data lineæ essent parallelę; quia semper essent lineę visuales; quę essentialiter in oculo conueniunt. Neque dicas esse parallelas putatiuè, & iuxta ęstimationem; Quia licet id esset verum quoad praxim, non tamen abstractè, & spectata linearum visualium naturâ: Mathematici verò de abstractia loquuntur, vt dictum est tract. 3. expens. 2.

DEFIITNIO III.

Stereographia est superficiei in punctum terminantis, & aliquam aliam superficiem ambientis impressio in plano.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Stereographia non nascitur ab intuitu oculi, cuius lineæ visuales transeuntes per corpus aliquod in subiecto aliquid describant. Est contra Aguil. lib. 6. Optic. passim Stereographiam oculo tribuentem.

PRobatur primò. Quia, vt ostendemus, si Deus dederit, cùm de prospectiua agemus, Oculus debet esse remotus à rebus, quas videt, cum ex Arist. sensus super sensibile non faciat sensu. At verò Centrum Stereographum admittitur super ipsam sphęram: vnde illud punctum non potest præsupponi pro pupilla, cum pupilla super sphęram nihil omnino videret.

Probatur secundò. Quia alio modo planum stereographum se habet, ac planum; quo res visę describuntur, nam hoc interponitur inter centrum concursua linearum coni, & rem describendam: illud verò in planum collocatur post rem describendam, vt sit priùs centrum, deinde res describenda, & tandem planum, in quo describenda est.

Probatur tertiò. Manente re visa, & oculo in eadem distantia, si planum mutetur rea eodem modo oculis apparet, & tamen in ipso plano lineæ à puncto, in quo est oculus, ductę aliam descriptionem faciunt priori, quæ cum res erat immota, imprimebatur dissimilem. Ergo descriptio hæc non pendet ab oculo: sed à subiecto, & à puncto, quod, siue sit oculi, seu sit quodcumque aliud punctum, à quo proiectrices proueniant, & pertingentes corpus describendum in subiectum, in quo facienda est descriptio, se conferant.

Probatur quartò. Quia Stereographia repræsentat omnes superficies corporia, tum superiores, tum inferiores, & quascumque alias; quod non facit oculus. Nam solum extrinsecum ambitum rei, quem lineę visuales lambunt in subiecto retrò rem visam manente intuetur descriptum.

CONCLVSIO IV. PROPOS. IV.

Tria Proiectionem immutant, situs rei, situs plani, & eorum distantia.

PRobatur de situ, tum rei, tum plani. Quia, vt patebit, diuersimodè res firmata, vel planum collocatum, descriptionem variat superficierum; ita vt transferat, etiam, & in alteram speciem lineas superficies, angulosque commutet. Distantia quoq; totius subiecti, licet in Orthographia nihil immutet; in Stereographia tamen valdè figuras alterat, & in diuersam magnitudinem diducit.

DEFINITIO IV.

Linea, vel planum primigenium est illud: quod representandum proponitur.

DEFINITIO V.

Lineæ proiectrices, vel superficies sunt à terminis lineæ, vel plani primigenij discedentes, & in subiectum planum, in quod proiectura cadit; terminantes.

DEFINITIO VI.

Planum proiectorium, & illud: quod proiectionem recipit.

EXPENSIO II.

De Orthographia Partium superficiei.

PRiùs agemus de orthographia, quam de stereographia, cùm sit facilior, & vt eius sternamus fundamenta, in primis de partibus superficiei agemus; nempe de puncto, lineia, & angulis.

Præassomptum. Licet orthographia, etiam lineis plano non perpendicularibus: sed cum eo certum, & semper æqualem angulum facientibus V g. 30. Grad. posset operi demandari. Sic enim omnes lineę sub eodem angulo incidentes in planum essent parallelę posset colligi ex Tr. 22. de sectionibus planorum.

Veruntamen hoc sensu orthographia non sumitur: nisi aliquando necessitas postulet. Sed sęper intelligitur fieri p perpendiculares ipsi plano; tum quia certiores sunt, tùm quia finia orthographię est loca corporum, situationesque reperire, quę videntur esse illę, ad quæ corpora suo ipso pondere feruntur; pondus verò orthogonaliter in subiectum planum incidit.

THEOR. I. PROP. V.

Linea parallela plano subiecto in lineam æqualem proicitur, non parallela, seu curua in lineam breuiorem; perpendicularis in punctum.

PAra 1. Probatur. Lineę proiectoriæ BI, & AF proicientes lineam AB incidunt in planum AB

AB ex hypothesi orthogonaliter; Ergo etiam ipsi lineę AE, & consequenter lineę plano parallelæ proiciendę FI; cùm linee proiicienda parallela in prima parte propos. ponatur plano, & ideo lineę AE. Ideoq; angulos rectos efficiet ad F, & I. Vnde AI FE erit parallelogrammũ ex def. 25. tr. 3. siquidẽ in eodem plano lineę erunt ex propos. 2. tract. 22. Ergo ex propos. 33. lib. I. Elem. lineę FI, & AE erunt æquales.

Probatur secunda pars. Et sit linea proiciende GH obliqua plano EA. Cum GH, & GO, & OH, & ED se secent ex propos. 2. cit. erunt in eodem plano. Itaque ponatur; quòd GO faciat angulum rectum cùm Orthographicis V.g. DH; erit itaque GHO triangulum, cuius angulus O rectus, & ideo maior alijs; ideoque basis subtensa maiori angulo recto maior cruribus ex propos. 19. lib. 1. Elem. Perinde GH proicienda linea obliqua erit maior crure GO, quod est æquale lineę proiectæ BD.

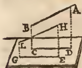


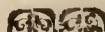
Tertia pars quoque patet. Quod proiciatur linea plano perpendicularis in punctum. Quia LM orthogonalis, sed etiam orthographica LC transiens per ipsam orthogonalis est. Ergo cum ipsa eadem est: sed omnis linea in planum incidens imprimit punctum: Ergo etiam LM in planum proiecta imprimet punctum C.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Lineæ parallelæ, aut in eodem, aut in diuerso plano, licet obliquæ sint plano orthographo, in lineas parallelas proiectæ transeunt.

SInt lineæ AB, & HL, aut in eodem, aut diuerso plano. Dico eas in parallelas, proiectas profundi CD, & EG. Nam proiectrices AD, & HE, sicut, & CB & LG ex prop. 7. Tract. 22. sunt parallelę, & AB, & HL ex hypothesi. Ideoque ex propos. 13. eiusdem Tract. etiam superficies per eas ductæ AC, & HG erunt parallelæ: Ideoque ex propos. 24. eiusdem Tract. sectiones CD, & EG, vt à superficiebus æquidistantibus factæ erunt parallelæ.





THEOR. III. PROP. VII.

* *Omnis angulus in triangulo omnibus cruribus parallelis plano orthographo proicitur in angulum æqualem: At cruribus non parallelis, & basi parallela obtusior proiectus erit.*

Ac cruribus non parallelis angulus proiectus erit acutior, qui lateri magis obliquo opponitur.

SIt AXT angulus proiciendus, & sint crura omnia AX, & TX, & TA parallela plano POV. Dico angulum OVP proiectũ esse æqualem angulo AXT. Patet, quia cum sint superficies proiectrices VOXT, & XVAP ex Thesi perpendiculares plano orthographo POV, ideoq; etiã erunt plano parallelo AXT proiciẽdi anguli, ideoque angulus AXT, & PVO ex propos. 4. Cor. 2. tract. 22. erunt anguli inclinationis, qui ex 18. Tr. 22. vbique sunt æquales quocumque loco inter plana inclinata accipiantur.



Probatur 2. pars, quia triangulum IXL habens basim IL parallelã plano VOP magis accedet ad sectionem XV superficierum proiectricum, ergo maiorẽ angulũ causabit, quam si non accederet, sed rectangulè se haberet, vt AXT ex prop. 22. tract. 22. sed rectangulè se habens cum sectione VX ex parte prima propos. h. angulum proiectum eundem effecit. Ergo IXL angulus basi parallele, & cruribus obliquis maiorem angulum OVP efficiet.

Probatur 3. pars. Quia quò minus obliquè incidit angulus AXL eo maiorem angulum inclinationis causat ex prop. 20. tract. 22. Ergo quò magis obliquè intercipietur, idest quantò magis inclinabit ad proiectrices superficies, eò erit angulus inclinationis planorum PVO acutior; sed angulus inclinationis planorum est angulus proiectus, vt p. 1. h. pr. Ergo quò magis inclinabit eò faciet angulum proiectum acutiorem.

COROLLARIVM.

ELicies tamen, quod si alterum crus anguli recti sit parallelum plano etiam si obliquo altero crure; semper in angulum rectum proici. Eo quia si XAT parallelo plano existens ponatur angulus rectus linee XA incidet, ne dum in lineam TA normaliter. Verùm defin. 2. Tract. 22. in omnes ab A procedentes in superficie TAOP existentes, vt in AL: quare XAL angulus rectus sicut XAT, sed XAT facit angulũ rectũ proiectũ ex pr. 7. h. vtpote in plano parallelo ipsi plano orthographico, ergo, & XAL obliquuo crure proiectus fiet angulus rectus.

EXPENSIO III.

De proiectione superficierum in genere.

VIsis partibus superficierum, nempe lateribus, & lineis; modo ipsarum figurarum proiectiones sunt inspiciendæ.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omnis superficies plano perpendicularis in planum proiecta transformatur in lineam æqualem lineæ parallelæ plano, quæ inter lineas proiectorias intercipiatur.

SIt V. g. superficies circulus LPMI, lineæque extremæ proiectricea, quę lambant extremas margioes superficiei fiot, FA, & IE, interqoe eas intercipitur linea FI. Dico, quod AE æqualis ipsi FI est proiectio circuli.

Probatur primò, quod proiectio superficiei perpendicularis, sit linea; Omnis superficiei sectio linea est, propos. 3. tract. 22. Quamobrem superficiea proiectrix in plaoo Orthographico lineā imprimet. Sed cū superficie perpendiculari proiicienda LPMI est eadem superficies proiectrix. Ergo lineā tantùm imprimet. Quòd verò sit eadem cum superficie proiicienda proiectrix superficiea, patet; qoia cum ambæ sint perpendiculares, & per eios extrema FI traoseat necessariò vna superficies sit; quòd si non esset voa superficies: super superficiem posita superficies faceret grassitudinem, quod contrà enoceptum superficiei est.



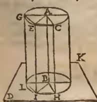
Probatur secunda pars. Nam illa erit longitudo lineę proiectæ AE, quæ latitudo superficiei rectangula. Neque enim potest esse longior, qoia excederet superficiem proiicientem; Ergo erit æqualis lineæ FI, quę inter proiectricea lineas AF, & EI orthogooaliter intercipitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Superficies parallela plano in æqualem, & eandem specie superficiem proicitur.

PRobatur, & exemplum sit circolus, ex quo licebit argumentari ad quamcumque aliam figuram.

Sit itaque circulus CEG, cuius centrum A, perque eius circumferentiam CEG transeat superficies proiectrix, quæ circa illum curuabitur, vt superficies cylindrica, eiqoe erit orthogonalis, cùm sit perpendicularis plano KD, cui circulus pooitur parallelus, & ideo EI, GL, CH, & axis BA plano KD ex hypothesi perpēdicularea, erūt parallelæ ex 7. Tr. 22. & æqualea. Ergo lineæ conioogętea AB, & EI ex propos. 33. lib. 1. æquales eruot; sic CA, & BH, sic AG, BL, & sic quælibet aliæ: sed AG, AE, & AC sois extremis sunt in circumfereotia circuli; ergo etiam BH, BI, & BL.



Et idem erit de qualibet alia figura, v. g. si lo circulo descriptū sit octangulum, aut triangulū, aut etiam sioe circulo; vt patet lo figura ACEG, & ei æquali BHIL, proiectæ in planum KD.

THEOR. III. PROPOS. X.

Partes cuiuscumque superficiei, vel laterum eius, quæ in lineam proiectæ fuerint, in ipsa linea proiectionis distinguere.

SIt proiicienda pars FG V g. circuli FLMI fig. pr. 5. vel 8. io planum; ducantur, à puoctis terminantibus perpeodicularea FA, & GE, eritque factum, quod desideratur.

Patet, quia omnis linea, seu curua, seu recta orthogooalibus plano io lioeam proicitur. Ergo etiam pars FO in lioeam AE proiecta erit, cum FA, & GE proicieotes sint perpeodiculares.

De partibus verò lineæ orthographo plano parallelę ono est difficultas vlla, cùm ex propos. 9. demonstrauerimus OM, & CO esse æquales, vnde figura proiecta diuidenda erit iuxta æqualitatem partium figuræ primigeoiæ.

EXPENSIO IV.

De superficiebus rectilineis proijciendis.

VSque huc facilia tradidimus, & quasi principia exhibuimus; nuoc autem ipsam artem tractamus; & de proiectione superficierum rectilinearum agimus; non quidem cum omnium eorum latera sunt parallela plano, neqoe, cum ipsa superficies est ei perpeodicularis; satis enim de hoc vniuersaliter egimus antecedenti expens. sed modo, aut cum tantùm vnicum, aut alterum latus superficiei est plaoo parallelum, aut nullum, sed omoinò à parallelismo discrepat.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Superficiem rectilineam, cuius vnum, vel alterum latus sit parallelum plano orthographo, in planum proicere dato angulo inclinationis.

IAm notum est, quinam sit hic angulus inclinationis ex def. 4. tract. 22. oempe linearū, quæ cùm sectione, quam imprimit io plano superficies ei inclinana, angulos rectos faciūt, & licet multoties plaoum proicieodum planum orthographum non secet; adhoc tamen si exteoderetur, cum ad illud ioclinet, tandem secaret, eique sectioni latus plaon parallelum, parallelè se haberet ex Cor. 3. propos. 4. Tract. 22. Vel plaoum orthographicum accedere posset ad figuram proiicieodam, & tangere secundùm latus parallelum. Huic ergo contactui, quem faceret, lineę perpendiculares altera

alteræ in vno, alia verò in altero plano existentes, angulum inclinationis constituunt, quem angulum notum præsupponimus; Et sit angulus A, cuius latus AB insistat perpendiculariter lateri GF figuræ proiciendæ EHFGI nimirum lateri plano orthographo, ex hypothesi parallelo, & propterea sectioni, vt ex Cor. 3. prop. 4. tr. 22. de Intersect. diximus. Ideoque perpendicularis OB in fig erit eadem, ac AB in angulo inclinationis. Transferantur itaque anguli pentagoni proiciendi I, & H, in lineam DE anguli inclinationis ope HK, & KE. Deinde interualla OA, & EO transferantur in latus AB inclinationis; nimirum OE, in AL, & OB in AB, & à punctis L, & B deducantur perpendiculares ad AC existenti in plano orthographo, quæ incident in M, & C. Quia itaque FG ponitur parallela plano ex prop. 5. huius in plano delineata, & proiecta erit eiusdem mensuræ, nempe linea 34. & quia est quoq; 34. parallela lateri FG, ipsi linea AC anguli inclinationis erit perpendicularis, & omni lineæ, quæ sit parallela ipsi sectioni ex Coroll. 3. prop. 4 tract. 22. Linea verò 34. talis est, cùm sit, vt dixi parallela FG lateri proiciendo sectioni parallelo, & prop. 9. Ideoque linea 57. erit eadem, ac AC. Puncta itaque M & C in eam transferantur eodem interuallo ab A, & sint 8. & 7 & per 8. parallela agatur lateri 3 4 & sit 2.6. Et quia HK, & KI cùm sit paralla lateri FG, est etiā parallela plano ideo in figura proiecta, & genita erit ei æqualis 2 8, & 8 6. Coniungantur itaque puncta 2 7. 6. 3. 4. rectis, & iam erit pentagonum proiectum.

Quod patet ea ipsa operatione; simul enim operando ipsam operationem ostendimus. Nam puncta H, & I à media OB non sunt immutata, quo ad distantiam, quia distantia eorum mensuratur per parallelam KI sectioni DB, & plano, ideoque ex propos. 5. huius manet eadem. At verò distantia à sectione FG, cum per OA mensuretur, quæ non est parallela plano, decurtata est iuxta prop 5. eo decremento, quod à perpendicularibus LM, & BC exhibitum est in lineæ AC plano orthographo ducta & pūcta 134, & 6 sunt illa ipsa, quæ lineæ orthographicè LM, & BC imprimerent, cùm tum quoad latitudinem, tum quoad longitudinem, ac puncta M, & C distent à lineis, & 3. 4. & 7 5.

THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Superficiem rectilineam, cuius nullum latus sit parallelum plano orthographo; dato angulo lateris figuræ cum sectione, & inclinationis plani proicere.*

*SIt Sexagonum ABCD, & cęt. & angulus inclinationis datus X, & sectionis PO cum latere DC angulus, quòd enim nullum latus sexagoni sit plano parallelum, neque erit ipsi sectioni. Quoniam, si esset aliquod latus sectioni, esset etiam parallelum plano, vt ex Coroll 2. prop. 4. de Intersect.

Ducatur GQ perpendicularis sectioni, eique à singulis angulis ducantur perpendiculares AG, & FH, & BI, & cęt. quę cum sint perpendiculares GQ, erunt parallelæ sectioni, quæ quoque illi orthogonalis est; ideoque eorum longitudines erunt æquales longitudinibus linearum proiectarum ipsas exprimentium ex prop. 5. h.

Distantiæ verò angulorum normales in linea QG à sectione PO notentur punctis G, H, I, & cęt. Quia igitur QN, vtpote perpendicularis, sect est linea anguli inclinationis ex def. 4 tr 22. Ideo stabit loco lineæ RM, & ideo in linea RM à R transferenda sunt omnia interualla QG & QH, & QI, & cęt. quæ erunt RM, & RT, & cęt Ductis itaque perpendicularibus ML, & RT, & cęt. habebimus omnes prędictas distantias angulorum à sectione; sed in linea RL, quę est in plano orthographo, nimirum RL, & RT, & reliquas perpendicularibus translatas. Ideoque ducta rursus sectione 5 6 perpēdicularem ei faciemus lineam 5 2, quæ exprimet alterum latus anguli sectionis RL, transferemusq; decurtatas angulorum distantias RL in 5 2, 2 T in 5 7, &c. perque puncta 2, 7, & alia ducemus punctatas 2 8, & 7 3, & similes; quæ exprimunt in figura transferenda lineas AG, & HB, & reliquas, quæ vt diximus sunt eiusdem longitudinis, cum sit parallelę plano orthographo, ac ipsę in plano proiectæ ipsarum vicarię; Ideoque lineæ vicaria 2 8 erit æqualis lineę AG, & linea 7 3 lineę HB, & sic de reliquis: Igitur per omnia puncta terminantia ducantur rectæ, & illæ latera sexagoni proiecti efficient.

Probatumque id est in ipsa serie proiectionis; dum singularum operationum ratio reddita est.

COROLLARIVM.

IN omnibus figuris proiectis plano non parallelis angulos, lateraque variari, obliquioraque latera magis decurtari, vt ex propos. 5. huius potest colligi. Et angulos, quorum latera opposita magis obliqua sunt minores fieri; Quorum verò aliquod latus parallelum plano orthographico fieri maiores iuxta ostensa propos. 7.

EXPENSIO V.

De proiectione superficierum circularium.

NVnc de curuilinearum superficierum proiectione sermo est, quæ immensos vsus habet, tum in Gnomonica, tum in Architectura, tum in Prospectiua. Ideoque sicut digna studio, sic non difficilis euadet, illis, qui præcedentia legerint de sectionibus corporum, & maximè conorum.

THEOR. I. PROPOS. XIII.

Proiectus circulus obliquus plano orthographo Ellipsis est.

SIt circulus ABD inclinatus ad alium, seu circulum, seu quodcumque aliud planum ACD orthographum, & superficies proiectria perpendicularis plano, quæ rectis BE, & GI, & PH exprimatur *hæc signabit in plano* ACD *Ellipsim* AED.

Trahantur ex punctis B, P perpendiculares diametro GV, & PL. Rursusque VI, & HL coniungentes puncta incidentiæ, tum proiicientium, tum perpendicularium sectioni AD.

Probatur itaque propos. Linearum VI, ad LH applicatarum quadrata dicunt ad inuicem eam proportionem, quam ex AV, & VD rectangulum ad rectangulum ex AL, & LD.

Quoniam VG est applicata ad diametrum. Vnde ex propos 35. Elem. lib. 3. erit eius quadratum æquale rectangulo ex AV, & VD; Et tale erit ob eandem rationem quadratum LP æquale rectangulo ex LA, & LD ex eadem propos. 35. lib. 3. Elem. Sed cum triangula VGI, & LHP sint æquiangula ob latera parallela, quibus ambiuntur ex propos. 15. Tract. 22. & propos. 18. ita erit VG ad LP, vt VI ad LH, & ita quadratum ex VG ad quadratum ex PL, vt quadratũ ex VI ad quadratũ ex LH ex 26. l. 6. Ergo quadratum ex VI ad quadratũ LH habebit eam proportionem, quam rectangulum ex AV, & VD ad AL, & LD rectang. quæ est proprietas, tum Ellipsium, tum circulorum ex pr. 6. Tr. 34. sed circulus esse nequit, cum semidiam. EI sit minor; quam semidiameter circuli TD; Ergo erit Ellipsis circumferentia, quæ per puncta H, & I transit, & sic dicas de quibuscumque alijs punctis.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Proiectura Ellipsis, aut circulus est, aut Ellipsis, si sit obliqua plano orthographo.*

SIt ABD Ellipsis in fig. præc. & superficies proiectrix ab ipsius ambitu decidat in planũ subiectum; quæ exprimatur rectis GI, & PH, & quibuscumque similibus plano ACD perpendicularibus, ab eiusque incidentia formetur circumferentia AHID. Dico *hanc aut esse circulum, aut esse Ellipsim.*

* Probatur. Ductis, vt supra rectis VG, & LP, & perpendicularibus ad sectionem AD, quæ erunt parallelę, & VI, & LH coniungentes puncta incidentiæ V, I, & L, H simul, ob parallelismum triangulorum VGI, & LHP, quod in anteced. prop. ostensum est, VG est ad LP, vt VI ad LH. Sed quadratum ex VG ad quadratum ex LP, est vt rectangulum ex interceptis diametri portionibus AV, & VD ad rectangulum AL, & LD. Ergo etiam erit quadratum ex VI ad quadratum ex LH, vt rectangulum ex AV, & VD ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando*, quoque erit quadratum ex VI ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum AL, & LD. Vel igitur quadratum ex VI dicit proportionem ęqualitatis ad rectangulum ex AV, & VD, vel non. Si dicit proportionẽ ęqualitatis. Ergo etiã quadratũ LH dicet proportionẽ ęqualitatis ad rectãgulũ ex AL, & LD ex 12. l. 5. Quare AED erit circulus ex propos. 35. lib. 3. Elem. Vel non dicunt, & sic erit Ellipsis, cùm vt Ellipsis in se se redeat, & cõsequantur eius diametro AD applicatarũ quadrata eã proportionem, vt rectangula ex interceptis diametri portionibus, quam requirit propos. 6. Tract. 24. Si enim est VI quadratum ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando* erit VI quadratum ad LH quadratum, vt rectangulum AV, & VD ad rectangulum AL, & LD: quæ est conditio ad Ellipses requisita.

Intellige verò propos. etiam si sectio, quam facit cum plano non sit diameter, nec maximus, nec minimus, sed aliquis intermedius.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Situs, seu proiectio parabolæ parabola est.*

DEtur ABC parabola, & eius proiectio AOC. Dico *hanc proiectã figurã esse quoq; parabolã.*

Ducatur diameter BM orthogonalis sectioni AB, eiusq; proiectione facta à proiectrice superficie BOM, & ab eo applicatę DG, KM, & à punctis D, & G, & K, & M earum extremis proiectrices descendant DE, & GF, sicut, & KN, & MP, connectanturque puncta incidentiæ E, F, sicut P, N proiicientium, rectis, quę sint FE, & PN, & rursus per puncta E, & O recta EO.

Probatur progr. 1. Nam applicatę EF, & DG, vtpote quod DG sit parallela plano ęquales sunt ex propos. 5. huius. Sic etiam applicatæ KM, & PN ob eandem rationem: Sed vt est DB ad KB diametri portiones, ita ex 5. pr. tr. 24. est quadratũ applicatarum DG ad quadratum KM, ergo etiam erit portio DB ad portionem KB, vt quadratum EF ad

quadratum NP. Quod suppositu.

Progr. 2. vt est HB ad HO, ita est HD ad HA, quare etiam erit residuum DB ad BO, vt totum HA ad totum HB ad 28. l.5. Et pariter, vt HA ad HO, ita est HK ad HN, vnde erit etiam ex prop. 28. lib. 5. Elem. residuum KB ad residuum NO, vt totum HA ad totũ HO, Ergo ex 16. lib. 5 ita erit DA ad BO, vt KB ad NO, cùm eidem rationi, quę est inter HA, & HO sint eędem rationes. Quare *permutando* erit DA ad KB, vt BO ad NO: Sed vt DA ad AB, ita est quadratum ex DB ad quadratum ad KM, & quadratum ex BF ad quadratum ex NP ex progr. 1. Ergo vt BO ad NO interceptę portiones, ita est quadratum BF ad quadratum NP, quę est proprietas Parabolę ex prop.5. Tract.24.

THEOR. IV, PROPOS. XVI.

Proiectio Hyperbolę Hyperbola est.

SIt Hyperbola ABC in fig. superiori, cuius projectura AOC. Diameter HB perpendicularis sectioni AC, transuersaq; XB. Applicatę verò DO, & KM. Deducunturque DB, & KN, & BO, nec non & NP, & BF proiectrices, & item XZ quę extremum transuersę diametri X proiicit in Z, ducaturque ZH, quę transibit per puncta O, N, B, vt ex propos. 10 huius constare potest, cum diameter tota, sit proiecta in HZ, eiusque partes sint in B, N, & O, connectantur tandem puncta FB, & PN. Cùm itaq; lineę BD, & KM applicatę sint parallelę sectioni, erunt etiam parallelę plano orthographo ex Coroll. prop.4. Tract.23. Ideoque ex propos. 5. h. BF & NP erunt sis ęquales.

Probatur. vt est rectangulum ex XD, & DB ad rectangulum ex XK, & KB, ita est quadratum DU ad quadratum EM; Sed superiori propos. argomentati sumus, vt est XH, ad HZ, ita est DH, ad HA, & HB ad HO, ablatis ergo proportionalibus HP, & HB; residua remanebunt proportionalia, ex prop.28. lib.5. Elem. Ideoque erit DX ad EZ, ita DB ad BO, nempe in ea proportione, ac sua tota XH ad HZ, ideoque *permutando* erit DX ad OB, vt EZ ad BO, & eadem ratione, vt XB ad KB, sic ZN ad ON. Ergo etiam rectangula ex lateribus proportionalibus ista composita ex propos. 26. lib. 6. erunt proportionalia, Ideoque erit rectangulum XD, & DB ad rectangulum ZE, & OS, vt rectangulum XB, & KB ad rectangulum ZN, & NO; Quare *permutando*, vt rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK & KB. ita rectangulum ZE, & OB ad rectangulum ZN, & NO. Sed, vt est rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB, ita quadratum in Hyperbola ex applicatis DO ad quadratum KM, & ideo, vt quadratum ex BF ęqualis, vt supra dictum est ipsi DO ad quadratum ex NP ęquali ipsi KM. Igitur ex 16. lib.5. erit, vt rectangulum ZE, & BO ad rectangulum ex ZN, & NO, tale quadratum BF ad quadratum PN, quę est proprietas Hyperbolarum, vt ex propos.6. Tract.24.

COROLLARIVM I.

HInc elicies modum proiiciendi omnes figuras flexas regulares: nempe Circulos, Ellipses, Parabolas, Hyperbolas. Sufficit enim proiicere diametrum sectioni perpendicularem, & basim parallelam sectioni, seu ipsam sectionem V.g. in fig. pr.13.h. AD, & TB, vel in fig. pr.14 si sit parabola AC, & HB: Si sit hyperbola AC, & HB, & XB. Data enim basi, & angulo, & diametro iam pr.55. Tract.24. docuimus describere, quamlibet ex istis figuris. Sicut etiam propos. 57 data gemina diametro intercepta in Ellipsi sectionis describemus proiecturam, & poterimus quoque vti alijs modis prædictis, tum ex Tract.24. tum ijs, quibus supra sumus in describendo figuras rectilineas dummodò plura puncta inueniãtur, & per extrema flexa ęquali manu ducatur; vt potes videre in figura hic apposità, in quà dato angulo inclinationis HAP, & diametro CB perpendiculari sectioni ex ductis à partibus circumferentię, vt libet V.g. 5. parallelis sectioni, & Ideo plano orthographo, & eorum distantijs in AP translatis, & deinde proiectibus lineis in AO deductis, quę est in plano orthographo, & distantiis OS, & cęt. in ML, & LM translatis ductisque perpendicularibus ipsi LM, vt MB, & cęt. & tandè longitudinibus CH in NK, & alijs applicatarum translatis in alias parallelas ipsi NK dabunt puncta, perque ęquabili manu flexa linea deducta exhibebit Ellipsim, in quam transfunditur circulus, eo fito, quam exhibet angulus A, & planũ AP, in quo est circulus super planum OA pendulus; plura verò de iis agemus, cum de superficiebus corporum proiiciendis, & in planitiem redigendis sermo erit.

COROLLARIVM II.

ELicere hinc potes Cylindros parabolicos, & Hyperbolicos, qui superficie plana constant, & altera parabolica, seu Hyperbolica, vt figura ABCO pr.15.h. satis repręsentat sectiones ex hyperbolas, seu parabolas; quod euidens est ex praeced. nam superficies proiectrix est eadem, quę Cylindri Parabolici, seu Hyperbolici.

COROLLARIVM III.

HInc deducitur, quod quocumque sit planum Horthographum secet parabolicum, seu Hyperbolicum primigenium semper figura eiusdem speciei describetur; quia illa sectio planorum poterit esse applicata in aliquo diametro secundaria: vnde semper omnes aliæ applicatæ ei erunt parallelæ, & eædem demonstrationes valebunt;

EXPEN.

EXPENSIO VI.

De speciali proiectura circuli in ordine ad sphæram proiciendam.

IN proiectione circulorum sphærę scimus principalem aliquando diametrum proiciendi circuli, & punctum contactus alicuius paralleli cum illo, & Ellipsim illius circuli representatiuam volumus exarare. Quapropter hanc Expens. specialiter ordinamus ad id rectè peragendum.

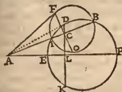
LEMMA PROPOS. XVII.

Si aliqua in circulo sit secta, vt pars maior sit ad minorem, vt tota cum adiecta aliqua ad adiectam extra circulum, etiam alia ab eius extremo in circulum cadens talis erit, si à puncto sectionis illius perpendicularis in hanc demitatur: Nam ita segmentum maius ab hac perpendiculari factum erit ad minus, vt tota cum adiuncta est ad adiunctam extra circulum remanentem.

SIt secans AB ita diuisa in C, vt BC ad CI pars maior ad minorem intra circulum existentes; sic tota BA ad partem exteriorem IA. Quod fiet ex tract.15. propos.23 si super BI fiat circulus, & ducatur AF tangens, & à contactu ducatur perpendicularis CF. Nam vt ibi demonstratur BC erit ad CI, vt BA ad IA. Si itaque secans BA talis sit, & ducatur AP per centrum, & à puncto C perpendicularis cadat in L. Dico, quod erit quoque PL maior ad LB minorem internæ partes, vt tota PA ad segmentum exterius BA.

Progress.1 Probatur. Nam producta LC in D, & à D ducta punctata DA; hæc erit, vt ostēdam contingens. Vnde ex cit. Lemmate ita erit PL ad LB, vt PA ad BA.

Quod verò DA tangens sit ita probatur.



Quadratum ex CF, & CO æquale est rectangulo ex FC. & CI: Ideoque rectangulo sibi æquali ex 35. lib.3. Eucl. DC, & CK. Huic ergo rectangulo ex CD, & CK comite ei quadrato CL æquatur CF, & CO quadratum cum eodem quadrato CL.

Progress. 2. Rectangulo verò ex CD, & CK addito quadrato CL æquatur quadratum LD ex 7. lib.2. Elem. Ideoque CF, & CO quadratum cum quadrato CL erit æquale quadrato LD.

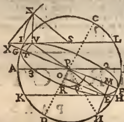
Progress. 3. Quadrata LA cum CL sunt æqualia quadrato CA ex II. lib.2. Elem. & hoc CA cum CF quadrato sunt æqualia quadrato AF. Ergo quadratum CF, & CO cum quadrato CL, & quadrato LA sunt æqualia quadrato FA.

Progress. 4. Pone loco duorum quadrati LC, & quadrati CF, & CO quadratū LD ex prog. 2. eis æquale, eritq; quadratum FA æquale quadratis LD, & LA. Sed ex II. lib 2. Elem. istis eisdem est æquale quadratum DA. Ergo hæc duo quadrata inuicem erunt æqualia: Sed quadratum FA est æquale ex 36. lib.3. Elem. rectangulo ex BA, & IA. Ergo erit etiam æquale quadratum DA: Quare ex prop. 37. lib.3. DA tangens erit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Dato situ diametri, & puncto circumferentiæ proiecto in aliqua proiectione sphæræ proiectionem circuli, qui per illud incedit inuenire.

DEtur proiectio alicuius sphæræ, vel circulorum. In ea V.g. BCAD paralleli plano orthographo, BA perpendiculari maximo, LI, & FK perpendicularibus parallelis, & cęt. In hac autem proiectione sit notus diameter circuli maximi FG, & punctum 2, in quo tangit parallelum HK, & huius circuli proiecturam inuenire oporteat.



Ab 2 dato puncto descendat ad diametrum FG perpendicularia EM, & prolungetur in N circuli punctum, & à puncto N linea NP ad centrum tendat: Rursusque à puncto 2 parallela diametro FG ducatur XO, segabitque primo ductam in Q. Itaq; linea PQ erit æqualis semidiametro minori Ellipsis representantis circulum per punctum 2 incedentem.

Probatur. Nam Tr.24. Conic Probl. 2. Prog. 2. propos.71. Ita est in Ellipsi alicuius circuli diameter maior DP ad minorem ZP, vt applicata circulo NM ad applicatam Ellipsis EM, sed vt NM ad NE: Ita ex 2. lib.6. Eucl. NP ad QP, Ideoque ablatis NE, & NQ ex 19. lib.5. Eu. vel ex 2. lib.6. erit NM ad EM, vt NP, vel æqualis DP ad QP, vel æqualem ZD. Cum itaque obtineamus DP diametrum maiorem, & ZP minorem; Ellipsim poterimus describere, trāseuntem per 2 applicatę ME extremum ex dictis de Ellipsibus Exp.19. Tract.24. Conic. quæ per C, 2, F quoque transeat.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis duobus diametris Ellipsim in plano circuli representatiuam exhibere.

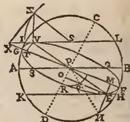
Sint dati duo diametri proiecti FG, & 23. Dico per illos duos diametros decurtatos Ellipsim nos posse describere, & hoc docuimus propos. 15. Tract. 24. Nam hic datur basis 23 diameter GF, & angulus ab istis factus 2 PM. Vnde Ellipsim iuxta doctrinam illius Problem. delineabimus.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Dato puncto tantùm in aliqua sphæra proiectura, per quod alicuius circuli transeat circumferentia, ipsam Ellipsim circuli expressiuam in plano consignare.

Sit datum punctum V in parallelo proiecto LI, oporteatque reperire diametri maioris situm, ex quò deinde cętera conficiantur, vt priùs.

Fiat, vt LV ad VI ita tota LX ad IX adiunctam, quod fiet ex tract. 15. prop. 23. si erigatur perpendicularis VZ; quæ secet semicirculũ LZI, & ductâ ZS à Z, tangens ZX ei rectãgula ducatur, & LI producatur in X: Nam ex prop. 23. citati tractatus 15. ita erit LX ad IX, vt LV ad VI. A puncto deinde X ducatur per centrum P recta PX. Nam FG erit axis maior Ellipsis.



Probatur ex prop. 13. Tract. 24. Nam ducta VT applicata habebit eam conditionem, quę requiritur ad diametrum, & ad tangentem VX, erit enim FX ad GX, vt FT ad TG. Vnde FG erit diameter VX tangens; & VT applicata: Quod autem tota XF sit ad partem exteriorem GX, vt pars interna maior FT est ad minorem TG interiorem.

Patet ex Lemmate 1. huius. Quod si LV ad VI, sic vt LX tota ad adiunctam IX; quod etiam talis erit FT intercepta ad TG, vt FX tota diameter cum adiuncta ad GX adiunctam, quod TV cadat ab V vbi perpẽdicularis ZV cadit, & FX ab extremo X ducta, quod est lineæ diuisæ, vt LV sit ad VI, vt LX ad XI.



TRACTATVS XXVI.

PARS SECVNDA.

De Stereographia.



Qvamuis Stereographia possit in opus redigi puncto concursus linearum proicientium à re proiecta distante, sicut, & supra Orthographia per lineas plano non rectangulas exerceri, nihilominus; quia Stereographia specialiter sphæræ circulis proiciendis instituta est, & in hunc scopum præcipuum ante omnia collimat; ideo concursus linearum proicientium in superficie ipsius sphæræ in primis sumitur. Quamuis etiam remotum ab ipsa re proiecta sumatur, cum de alijs rebus proiciendis, & etiam de ipsa sphæra, non tamen in ordine ad cęlestes motus, agitur,

EXPENSIO I.

De proiectura lineæ.

Hic itaque lineas in circulo præcipuè considerabimus, vtpote, quod Stereographia sit ad proiectionem corporis sphærici in ordine ad cęlestem sphæram destinata, & quia corpus cęleste luminosum circa sphærã se voluens, eiusq; circulos radijs incurrens tali modo vmbras eorũ in planum, profunderet; hinc Stereographia inuenta, & ad id destinata; vt cælestes corporum opacorum proiectiones à luce effectas imitetur, cuius hic prima principia iactamus.

PRIN-

PRINCIPIVM.

Bi vniuscuiusque rei proiectio est, vbi lineæ proiectrices à puncto proiectionis obuenientes, & margines rei lambentes in planum incidunt.

Sic CD est proiectio lineę AB, quia lineę CI, & DI proiectrices extrema B, & A lambentes in planum CD incidunt, & ibi eius situm determinant respectu puncti A, & B in fig. pr. 1. seq.

DEFINITIO I.

Punctum proiectionis dicitur, ad quod omnes lineæ extrema rei projiciendæ lambentes concurrunt.

DEFINITIO II.

Lineæ verò proiectrices dicuntur illæ, quæ ab hoc puncto distedentes, extremaque rei projiciendæ lambentes in planum cadunt.

Talesque sunt IC, & ID.

DEFINITIO III.

Planum Stereographum est illud, quod diuidens sphæram bifariam omnes lineas proiectrices terminat.

Poterat quidem planum Stereographum supponi sphæræ, sed cum stereographia instituta sit ad nobis exhibendas celestium circulorum vmbras, & nos simus in centro, planaque, quæ apud nos sunt, aut per centrum transeunt, aut ei proxima sunt insensibiliter respectu immensitatis sphærarum, hinc est, quòd planum stereographum per centrum agatur, & in eo circulus maximus sphæræ reperiatur.

THEOR. I. PROP. I.

Linea plano Stereographo parallela in lineam maiorem proicitur, sed partibus proportionalibus correspondentem.

Sit linea in sphæra AB, & à puncto I descendant lineæ proiectrices CI, & ID, quæ intercipiant lineam proiectam CFD in plano Stereographo existentem.

Dico s hanc esse maiorem primigenia AB.

Patet. Quia est AB ad CD ob parallelismum linearum, vt BI ad CI. Sed CI est longior quam BI: Ergo etiam CD erit maior, quàm AB ex propos. 12. lib. 5. Elem.



Probatur secunda pars. Nam ducta IF. Dico, quòd vt partes lineæ primigeniæ AH ad HB, ita se habebit DF ad FC, quod probauimus propos. 4. Elem. in Coroll. 2.

THEOR. II. PROP. II.

Linea obliquata plano Stereographo in lineam proicitur maiorem.

Probatur. Nam Triangula CEF, & AEB sunt æquangula: siquidem in triangulis FPE, & ESA nigri apud E, & B anguli ęquantur ob radios subtensos ęquales, angulus totus AEB apud E, & FPE apud P recti, & ideo æquales, quamobrem etiam reliqui A, & S. In triangulo ergo sachabemus angulum S nigrum æqualem angulo A nigro trianguli BEA, angulus verò AEB rectus cõmunis, reliquus ergo C æquatur angulo B ex 17. l. 1. El. Cùm ergo triãgula sint æquiangula erunt similia, & latus EF trianguli FEC sit maius latere EA trianguli SEA erit etiam basis SC lineæ proiecta maior quam primigenia BA.



COROLLARIVM.

Hinc dignoscitur, quo pacto, ne dum diameter, sed etiam singulæ eius partes in planum stereographum proiciantur: sufficit enim dato angulo inclinationis APC deducere lineas proiectrices à centro E radioso per partes A, V, P, vsipsius in ipsum planum. Nam ipsę suis extremitatibus notabunt partes C, K, P, in CP plano proiectas.

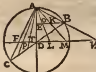
Sic, si dentur proiectæ partes ad partes primitiuas reuocare poteris lineas proiectrices deducendo ad centrum ipsarum.

THEOR. III. PROPOS. III.

Omnes Stereographicæ lineæ cuiuscumque partes augentur musicâ proportione.

Loquimur de lineis. Ne dum ab aliquo puncto circuli per æquales partes diametri ductis: sed quibuscumque in quibuslibet distantiis, & qualibet lineâ ductis; dummodo per illius partes æquales à puncto dato trahantur.

Sit A punctum datum, & in lineâ BC partes ęquales quęcunque, & per eas ductæ AP, & AT, & cæt. Dico eas esse in proportione musicâ, & DF esse ad DT, vt differentia PS ad differentiam TP.



Probatur ex prop. 11. tract. 10. de progr. Nam DF incidit in triangula basium æqualium quæ, sunt partes in linea CD. Ergo incidentes FD partes FD, PD, & TD decrescent in proportione musicâ. Sic dicas de partibus ND, & DM, & LD. Nam BE parallela

ND

ND incidit in triangula basium æqualium lineę DB. Ergo in proportione Harmonicá BE erit ad OA, vt differentia BE ad EO differentiam. Sed ob parallelas AB, & DN ex 4. lib. 6. vt est ND ad LO, sic EA ad EO, & vt EB ad EO, sic est BE ad AO, vt autem AB ad EO, sic MN ad ML: Ergo ex 16. lib. 5. Elem. vt NO ad LD, sic differentia NM ad differentiam ML.

EXPENSIO II.

De proiectura circuli.

POtest duobus modis proici circulus, vel in ordine ad sphæram proiciendam, de qua re multa apud Aguilonium reperies, vel in ordine ad quemcumque circulúm proiciendum; de proiectione prima hic agemus de alia expens. sequenti.

THEOR. I. PROPOS. IV.

Circulus perpendicularis in rectam proicitur lineam indefinitam.

PRobatur. Nam, quòd sit linea, iam id demonstrauimus de omni proiectura perpendiculari. Sed quod sit linea nullis conclusa terminis ita ostenditur vtendo schemate prop. seq.

Sit centrum proiectionis A, & debeat deduci à puncto A linea proiectrix, & tangat extremum marginem circuli AGC 9, ad hoc, vt totum circulú exprimat, aut cum proiectrice AC faciet angulum rectum, aut minus recto. Si faciet minus recto, vt AB ex prop. 18. lib. 3. secabit ipsum circulum, & pars circuli AI, vel AII extra remanebit: Debebit itaque ipsi AC esse perpendicularem, & contingere circulum in A, vt AO; Ergo erit parallela plano orthographo. Quare numquam illud secabit. Ergo linea expressiua circuli in plano orthographo numquam à linea proiectrice terminabitur, cum ei parallela sit. Erit ergo indefinita.

PROBL. I. PROPOS. V.

Perpendicularem proiecturam circuli, & partium eius in plano transcribere.

DVcto plano DB transeunte per cẽtrum E circuli proiciendi AGC 9, & situato puncto proiectionis A, vtlibet: sed consuetè ad extremum lineæ CA plano orthographo DB perpendicularis, diuidatur in 12. partes V. g. transeantque per singulas lineę proiectrices à puncto A. V. g. AB per partis primæ extremum 1; sic AH per extremam partis 2. & sic de cæteris. Partes namque HB, & GH, & GF, & cæt. erunt in plano partes circuli perpendicularis ipsi plano proiectæ.



Probatur. Nam quoad ipsius circuli proiecturam iam ex præced. propos. visum est esse lineam indefinitam BA.

Quoad verò partes proiectas; ostenditur. Quoniam lineis rem proiciendam extrema stringentibus decernitur: Tales autem sunt partes proiectæ HB, & HG, & cæt. Siquidem lineæ proiectrices eas determinantes transeunt per extrema partium circuli 1. 2. AI, & 2. G, & cęt. in quas dispescitur.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Circuli partes æquales in partes inæquales proiciuntur, quarum illæ maiores, quæ ad perpendicularem magis accedunt.

DIco in partibus proiectis EL, & LF esse maiorem LF, quàm EL; quia magis à perpendiculari EA abscedat.

Probatur; Quia anguli, vtpote æqualibus peripherijs insistentes CA 5. & 5 A 4. sunt ęquales, erit angulus CA 4 diuisus in duas partes; Quare ex propos. 3. Eucl. vt est AF ad EA, ita erit LF ad LE: Sed AF est maior, quam AE, vtpote basis angulo recto subtensa: Ergo etiam FL maior erit, quàm LE, & ita de cæteris.

THEOR. III. PROP. VII.

* *Tres partes proiectæ circuli in lineam, quæ æquali numero partium interpositarum distant à quadrante proiecto ducunt proportionem Geometricam continuam, & diameter semper est media proportionalis.*

SIt quadrans proiectum in EA linea. Dico EG EF ad EG, ita esse vt EG ad EH.

* Probatur ex prop. 7. de angulis Tr. 19. Nam EO æquatur EA; anguli verò FAG, & GAH sunt æquales cum æqualibus peripherijs insistantur. Ergo ita erit EF ad EG, vt EO ad EH, & eadem ratione EL erit ad EO, vt EO ad EB, Quare diameter EO erit semper media proportionalis.

COROLLARIVM.

*HInc patet omnia rectangula EL, & EB, sicut, & EF, & EH, & sic de alijs esse æqualia; quoniam æquantur quadrato EG, quod EO sit ex propos. 19. lib. 6. Elem. intereas semper eadem media proportionalis.

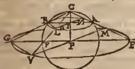
THEOR. IV. PROPOS. VIII.

Circulus parallelus plano Stereographo proiectus est circulus maior: centrumq; in eadem proiectrice linea, cùm vero centro est; Partes quoque maiores quidem; sed proportionales.

SIt in sphęra ACB, circulus ALa parallelus Stereographo plano EG. Dico hunc circulum in circu-

circulum maiorem PVe profundi.

Quod patet ex dictis in Conicis, cum enim omnes lineæ à puncto proiectionis lambentes circuli circumferentiam conum constituant ex ijsdem, clarum est, quòd, si productæ alio plano parallelo, vt est Stereographum secentur in eo circulum describturas. Coni enim, cuius basis circulus ex propos. 2. Tract. 34. omnis sectio parallela basi circulus est.



Dico 2. Centrum circuli proiecti P cum centro circuli proiciendi t io eandem lineam PC proiectricem incidere. Quot patet ex prop 2. tract. 35. Cor. Nã solus conus scalenus habet duos axes hic verò conus rectus est, vnde habebit vnicum axem: axis autem ex def. per centra transit basium.

Probetur tertia pars, quod partes circuli proiecti sint quoque proportionales primitiuo.

Cum planum stereographum ponatur parallelum, plano circuli primitiui, si GCV planum illa secet sectiones BL, & GV erunt parallelæ ex proo. 16. tract. 11. Quare erit, vt CL ad LB; ita CV ad VG in triangulo CVG. Propterea que *permutand* erit, vt CL ad CV, sic LB ad VG. Sed CL ad CV, sic est CL ad PV: Ergo vt diameter t' ad diametrum PV, sic LB subtensa ad VG subtensam: quare etiam arcus eas subtendens toti circumferentiæ erunt proportionales ex propos 39 lib 6. Elem.

Patet verò esse maiores, quia CL est ad BL vt CV ad VG, sed maior est CV, quam VG: ergo ex 14. lib. 5. etiam GV subtensa, quàm BL: Quare etiam maior erit ex propos. 6. lib. 36 peripheria GV, quam BL.

COROLLARIUM.

Hinc facilè patebit modus, quò circulus parallelus plano stereographo imprimatur.

Nam ex prædictis Theor. 2. ex propos. 6. sufficiet inuenisse diametri ipsius longitudinem, & inde centrum patebit, si diuidatur bifariam.

Partes quoque singulæ proicientur, si circulus proiectus in tot partes æquales diuidatur, in quot primigenius diuisus est: Aut eodem centro descripto circulo primitiuo, per singulas eius partes ad ambitum proiecti radij transeant; qui in circulo proiecto notent primigenij singulas partes.

THEOR. V. PROPOS. IX.

Circulus plano Stereographo obliquus proicitur in circulum maiorem; sed cuius centrum cum centro primitiui in eadem linea proiectrice non fit.

Iam supra dictum est Tract. præc. propos. 2. quòd si planum secet subcontrariè conum; cuius basis circulus sit; etiam sectio ipsa circulus erit.

Sic itaque circulus in sphæra quicumque BKCNL & lineæ proiectrices eius peripheriam vndique lambentes, vt est BA, & CA, & LA, & DA, & cet. conueniant in A centro proiectionis. Dico, quòd si continuentur vsque ad planum Stereographum m n, cui BA perpendicularis est: quod planum secabit superficiem conicam, quam integrant, subcontrariè, & ideò quod peripheria MNGK erit circuli ex propos. 2. tract. 35.

Probatur. Ille enim est sectio subcontraria, cum planum secans cum superficie coni facit angulos æquales angulis, quos facit cùm eadem superficie, basis primitiua coni: sed planum MN facit cum superficie protensa coni eosdem angulos, quos facit circulus planus ZBOL basis, cuius vertex A, ergo secat subcontrariè.

Ad id autem probandum eligantur duo puncta quæcumque. Erit enim par ratio de istis, & de omnibus alijs V. g. C, & D in circulo sphæræ, & à vertice A per D agatur linea vsque ad planum in G, & sit AG descripta super planum circuli ACOE, ideoque fiat de puncto C ab A vertice agendo lineam AC descriptam super semicirculum ACDE, & productum vsque dum tangat planum m o in N. Ita quod concipiatur superficies plana semicirculi ACDE prolungata, & peruenire vsque ad N, & imprimere suæ sectionis vestigium in plano lineam NG. Transibit que per G, cum sit ADG recta in eodem semicirculi extensi ACOE plano. Ducesque in eodem plano CD rectam communis sectio plani circuli ZCL minoris basis coni, & semicirculi ACDE.

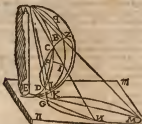


Probandum est itaque DC plano basis extensam eosdem angulos facere cum lineis coni NCA, & ADG, ac cum ijsdem facit NG linea plani stereographi.

Angulus itaque CAB apud A cum sit angulus ad circumferentiam insistit arcui CFBS: sic angulus apud D nimirum CDA pariter ad circumferentiam in D substernitur reliquo arcui CA. Quapropter erit anguli apud A complementum vsque ad semicirculum BCA, cumque anguli ad circumferentiam sint subdupli angulorum ad centrum, ideo semicirculus BCA. vt eorum mensure centralis quadrans erit: nam dimidium arcus BDC esset mensura anguli æqualis ad centrum, & dimidium arcus CA esset anguli ad centrum mensure æqualis reliquo angulo apud D. Ideoque simul angulus CAB, & CDA æquant angulum quadrantis. Nempe rectum, & CDA est complementum alterius CAB. Sed huius quoque anguli CAB est complementum angulus N acutus. Quoniam angulus NBA rectus est ex hypothesi in triangulo NAB.

Ergo

Ergo reliqui anguli erunt æquales vni recto, cùm omnes trianguli anguli ex propos.17. lib.1. Elem. tantùm duobus rectis æquales sint: Quare eiusdem anguli CAE erit angulus N complementum, vt CDA. Ergo erit æqualis angulo CDA. Quoniã verò angulus CAD in triangulo CAD deseruit etiam triangulo NAG, & angulus N ostensus est æqualis angulo CDA; reliquus quoque ACD erit æqualis reliquo NGA ex 17. lib.1. Cor.3.



Idem autem argumentum contexes de quibuscumque alijs angulis. Quare sectio plani stereographi erit subcontraria: vnde MNGK circulus erit.

Probatur secunda pars. Quoniam subcontraria sectione circuli non se intersecant per centra ex Coroll. propos.2. Tract 25. nempe eorum sectio per centra vtriusque non transit. Vnde linea ab A transiens per centrum I non transibit per centrum circuli proiecti MNGK.

PROBL. II. PROPOS. X.

Circulum obliquum in planum stereographicè proijcere, polosque eius, & centrum assignare.

INuenienda priùs est pars circuli centro A remotissima, parsque propinquissima, si non sit cognita. Id verò fiet ducendo per puncta C, & D polos circuli dati circulum maximum CABDS. Namq; ex prop.22. 3. partis sphęr. is circulus arcum BA habebit, qui inter omnes, qui ad circumferentiam obliqui circuli FBGD duci possunt breuissimus erit, & ACE, qui erit maximus, & designabit distantiam maximam in E, & minimam in B à centro proiectionis A.

Transeant itaque per inuenta puncta E, & B lineæ proiectrices AE, & AB, & dabunt M, & I puncta, per quæ circulus proiectus debet incedere, & eius diametrum MI.



Secundo. Bifariam diuidatur MI, & centrum in P circuli proiecti obtinebimus.

Tertio. Transeant proiectrices per polos C, & D, & polos in plano proiectos cõsequemur N, & H. Itaq; seorsim circulus OQ ipsius sphęræ describatur; sẽper enim in omni proiectione hic circulus pręsupponitur; cùm sit sectio ipsius sphæræ, cùm plano stereographo, eo quia planum stereographum ex definitione secet sphæram bifariam. Sitque I n 2 m; assumaturq; distãtia O M, & sit 1 3. deinde distantia PH, & sit 3 2. centro itaque 2 interuallo 2 3 describatur circulus 3 5; eritque circulus proiectus. Deinde OM ab 1 in 7, & distantia NH, & transferatur ab 3. in 6. eruntque poli 7. & 6. circuli proiecti 3 2. vt vides in fig. pr.12. h.

* Potest etiam reperiri centrum circuli independenter à lineis AH, & AI circuli proiectricibus si fiat angulus trianguli EAH ad A alteri angulo trianguli LAP ducendo AP ad A, æqualis. Nam P erit centrum circuli: Quia enim angulus E trianguli AEK æqualis est angulo ad A eiusdem trianguli ob æqualitatem laterum EK, & KA, & est etiam æqualis angulo I, quòd sit sectio subalterna, vt pr. 2. & 9. h. si fiat alius angulus IAP ad A, erunt duo anguli quoque æquales I, & A in triangulo API: Quare etiam latera subtensa erunt æqualia AP, & PI.

Sed ob similitudinem triangulorum subcontrariorum etiam triangulum AES est simile triangulo AHP. Siquidem angulus apud E, trianguli EAS est æqualis angulo apud H trianguli subalterni HAI, ex 2. vel 9. h. angulus verò EAS addito communi PAE vtrisque æqualibus HAK & PAI angulis est æqualis angulo HAP: sed triangulum AKS est isoscelum ob radios æquales; ergo etiam tale erit triangulum APH. Vnde crus AP erit æquale cruri PH, & cruri PI, vt supra ostensum est, hæ itaque portiones erunt, æquales HP, & IP, ideoque P centrum erit.

* Idem quoque consequi poteris, si diuisa bifariam AI in L ducas perpendicularem LP, quę secet planum stereographum in P, vt patet ob API ęquicrurum triangulum.

PROBL. III. PROPOS. XI.

Partes circuli obliqui in planum Stereographum proijcere.

MVltis modis hoc Problema potest in opus deduci nos quatuor seligemus, ad quos alij ferè reducuntur: Primus ope polorum; Secundus ope secantium: Tertius ope chordarum: Quartus ope sinuum.

THEOR. VI. PROPOS. XII.

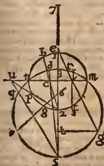
Quæ à centro poli circuli proiecti discedit, & per partem aliquam circuli sectionis sphæræ transit, ea in partem proiectam circuli proiecti incidit.

SIt sectio sphęrę SIGM, & circulus proiectus EC-ID. Polusque in eo proiectus N. Dico quod CN transiens per SF partem circuli sectionis sphęrę ęqualẽ parti HV circuli obliqui HVS proiciendi cadit in idem punctum C, ac linea proiectrix AC.

Iam ostẽsum est tr.23. pr.16. p.3. circulũ minorem



rem AVF transeuntem pec polom superum circoli sectionis sphęrę A, & allum polū L circuli obliqui, HVC, & sectione AL proicientem polum A in H, detruncare ab vtroque circumferētias ęquales HV, & AF1 si ergo superficies huius circuli extendantur vsque ad C, & fit ANC superq; eſt à puncto A centro proiectionis simul, polulque circuli sectionis ato extendatur linea proiectrix recta transiens per V perueniet in C, & secabit NC, quæ est sectio eiusdem superficiei exteosę circoli AVL cū plano BD proiecto; pars ergo NC; quę à linea proiectrice traosiunte per V decernitur, illa etiam determinatur per CN, quæ transit per F, & troncat partem AF, à circulo sectionis æqualem parti HV circuli obliqui proiciendi.



Dato itaquė circulo sectionis 2 1, & circulo proiecto 3 5, & cognita parte circuli, quæ V. g. sit duodecima circuli proiciendi, dato quoque polo 6. Ducatur à polo 6. per 8. sextam partem rectis 6. 8. Et hæc terminabit 5 9 partem duodecimam circuli primitiui exprimentem.

THEOR VII. PROP. XIII.

Linea in circulo sectionis à diametri extremo perpendiculari sectionis ducta ad sectionem per datam partem dat in sectione punctum, per quod, & extremum diametri eiusdem proiecti alia ducta partem à prima abscisam exprimit.

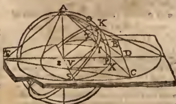
SEcundi modi fundamentum hoc est in eadem fig. quę superiori modo. Sit superficies BAC, quæ secet circulum obliquum in HV, & extendatur in BC; hęc imprimet sectionem BC, quæ erit chorda subtendens arcum exprimētem arcum HV, vtpote, quòd proiectricibus AA, & AC per extrema arcus primitiui H, & V traoseuntibus determinetur, itaque planum circuli obliqui HVI, & HV sectio eius extendatur, donec occurrat cū plano ABC plano orthographo. Sectioque HK eius cum plano primitiui circuli HVI occurret taodem, eum angulus OHV nō fit rectus sectioni HK sicubi V. g. in K. Et etiam sectio CB ob angulum acutum HBC cōcurret cum HK; cùm ergo concursus iste fit plani BAC, & etiā plani primitiui HVI; atq; insuper plani orthographi BKO, ergo erit aliquod punctum sectionis KH; quæ erat plani orthographi, & primitiui. Sed etiam est plani proiectoris AAK; erit igitur punctum K in quod orthographum, & primitiuum, & proiectorium coocurreot. Verùm etiam AF subtensa arcui AF æquali arcui HV concurret in K. Ergo æquo pacto, ac linea secans HV monstrabit punctum K. Quod autē AF in punctum K concurrat; patet; quia angulus ad Q. tum trianguli HQK, tum triangali AQK recti sunt: anguli autem ad A, & H sunt æquales; quia insunt peripherijs circulorum æqualibus FIO, & VIT. Ergo triangula ęqualia, & crus KQ eiusdem longitudinis, & ideo AF basis concurret ad punctum K. Vnde, cùm AF secans circulum sphæræ, & abscindens arcum æqualem arcui HV obliqui HVI, indicet idem punctum K, in quo debet concurrere BC subtendens eiusdem HV proiecturam, poterimus eius vice vti ad inueniendum punctum K.

Sit itaque circulus sphæræ 1, 2, & pars in eo 2 P comprehendens ex 24. partibus, in quibus diuisus est earum 5. Ducatur 2 P per P vsque ad interſectionem m n productam in oe Si igitur 5 u ducatur; hęc subtendet arcum 5 9 q, qui repreſentat arcum 2 P ęqualem circuli inclinati ex prec. arcui fundamento. Sic ducta 2 b signabit punctum c, per quod 5 d ducta determinabit arcum 3 d proiectū.

THEOR. VIII. PROPOS. XIV.

A puncto, in quod parallela plano proijciendo à puncto proiectionis cadit recta per sinus extremum circuli sectionis ducta, dat in proiecto circulo partes proiectas.

FVndamentum tertij modi est, si in obliquo circulo ducto sinu IV, & proiectrice AC, quæ transeat per I 2 per has duas lineas agatur planum CIVRA, quod secat planum orthographum in linea



a linea CVS, nam quę hoc planum incidet in planum AB lineæ expressum, parallelum plano circuli proiciendi XIS, & consequenter incidet in punctum S. Siquidem si planum AB ponatur parallelum plano circuli primitiui XIS, etiam sectiones plani eas erunt parallelæ ex prop. 15. Tract. 22. de intersect. cumque IV sit parallela XZ etiam eidem erit parallela AB.

Si autem sit arcus PX æqualis arcui KS, etiam sinus XV, & TV ęqualiũ residuorũ IS, XS erunt ęquales, & ideo idem sinus versus VS erit: quare sinus versus SV circuli sectionis PXS exhibebit punctum idem V, per quod transit SO.

Sit ergo, vt priùs, circulus sectionis I S, & proiectus 3 5, & e punctum O, quod parallela plano proiciendo OA, vt in fig. prop. 10 h. à centro proiectionis A deducta in planũ imprimit, & ducatur à parte f; circuli sectionis ad diametrũ m o normalis, quę cadet in l. Ab c itaq; puncto per l ducatur e g, & hæc determinabit arcũ 5 g, & representantẽ arcũ f 2, & arcũ 3 I representãtẽ eũdẽ f s ad eã partem, quæ partes sunt minores in circulo proiecto.

THEOR. IX. PROPOS. XV.

Si per puncta proiecta primigenij circuli, quibus chordæ diametrum secant perpendiculares ducantur, hæ à circulo proiecto partes abscindent proiectas, eruntque chordæ proiectæ.

QVarti modi fundamentum est. In figura pr. 14. Ducatur in circulo proiciendo chorda IO perpendicularis diametro; hæc secabit diametrum in T. Transeat ergo superficies, seu lineæ SA, & CA, & eam proiciant in CB: Sectio eam terminabit in punctis C, & B, in qua lineæ proiectrices arcuũ KI, & XO terminant, idẽ CB eosdem arcus in circulo proiecto designabit, transibitque per punctum D, quod cum superficies BAC transeat per T erit punctum T proiectũ, eritque orthogonalis diametro DZ, sicut IO orthogonalis est ipsi diametro XZ circuli primitiui, cùm tota superficies CBA sit ei diametro, & plano circuli PXA orthogonalis.

Si itaque ex propos. 2. h. puncta quibus chordæ diametrum primitiui circuli secant, proiciantur, cum ipso circulo, & sit illorum aliquod punctum e, ducaturque t g; hęc signabit arcum 5 g circuli proiecti exprimentem arcũ circuli primitiui.

THEOR. X. PROPOS. XVI.

Partes proiecti circuli, quo propinquiores perpendiculari à centro proiectionis prouenienti, eò minores sunt.

SInt iuxta secundum modum partes in circulo proiectæ ABOD, quæ in circulo originario, seu etiam sectionis, cum in vtroque, vt ostensum est, æqualitate consentiant, sint BF, FO, GO, HG omnes inuicem ęquales. Dico, quod istæ partes inuicem æquales proiectæ, efficiuntur inuicem inæquales, & quod minor est illis, quæ puncto V, quod imprimit perpendicularis V propiùs accedit,

Probatur. Ducta punctata HX parallela ipsi LO; maior est proportio OH ad HV, quam XH ad HV (vt dicam) quare etiam est maior, quàm OL ad LV, cum punctata sit parallela, ipsi LO, & ideo eadem sit proportio HX ad HV, quę LO ad LV: sed proportio OH ad HV est eadem, quæ OI, ad IV ob angulos æquales ad H ex prop. 3. lib. 6. Elem. Ergo maior erit proportio OI ad IV; quàm OL ad LV. Vnde, & ex propos. 6. Tract. 19. maior erit angulus OLI, quàm ILV, & sic ostendes de alijs.

Quod autem HO habeat maiorem rationem ad HV, quàm HX ad HV ipsam patet ex 8. lib. 5. Nam est maior HO ob angulum maiorem externum HIO, quem subtendit, quàm HX, quæ subtendit angulum internum minorem HVX minor est autem angulus internus externo ex pr. 17. Cor. 13 l. 1. Elem.

COROLLARIVM I.

HInc est manifestum partes circuli, quæ in maxima medietate sunt LDC esse maiores partibus primitiui circuli: sicut totus arcus est maior, at verò, quæ sunt in altera medietate minores illis, quæ in circulo primitiuo sunt; quia etiam totus iste arcus est minor, & cum tot sint partes in medietate proiecta, quæ minor est medietate primitiua, quot sunt in ipsa, hac medietate necessariò erunt omnes minores, & hoc sufficiat ad rem per se claram confirmandam, licet alioquin non prorsùs ratio conuincat.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque, illum esse maiorem radium in circulo proiecto, qui per vtraque centra transit, tum circuli primitiui, tum circuli proiecti, reliquos verò esse maiores, qui propinquiores sunt centro circuli proiecti. Ratio est, quia radij ducuntur à centro proiecto, qui non coincidit cum centro circuli proiecti, vt docuimus. Vnde cum hoc punctum sit extra centrum, euenit, vt docet Euc. lib. 3. Elem. propos. 15. maximum esse, qui per centrum transit, reliquos verò eò esse maiores, quo centro propinquiores.

EXPENSIO III.

De proiectura superficiei cuiuslibet independenter à sphæra.

PArtes alicuius lineæ proiectæ eam proportionem musicam dicunt, quam ostendimus propos. 3. & ita proiciuntur, vt prop. 2. Coroll. h. Possunt autem lineæ proiectæ esse maiores primigenijs, ìcu minores prout intercipitur planum, in quo sunt inter punctum proiectionis, & planum, proiectionem recipiens V. g. in fig. prop. 3. TF est minor, quam FC, quia linea TF proiecta inter primigeniam TF, & punctum A interponitur, at ND proiecta maior, quam AF primigenia, quia hæc

hec interponitur inter NO, & A, & quæ dicuntur de lineis eadem intelligenda sunt quoque de superficiebus, vnde duplex genus proiectionis potest deduci; alterum dicetur rectum, cùm interponitur planū, in quod fit proiectio inter planum originarium, & proiectionis centrum; alterum inversum, cum planum originarium interponitur inter centrum proiectionis, & planum proiectionem recipiens.

THEOR. I. PROP. XVI.

Omnes lineæ, quæ sunt perpendiculares plano Stereographo, seu in proiectione recta, seu inversa proiectæ in punctum collimant à plano originario æquè remotum, ac centrum proiectionis, lineæ verò parallelæ plano Stereographo in parallelas originario transeunt.

PRæsupponendum est planum Stereographum, idest proiectionem recipiens esse plano originario ex instituto hominum rectangulum, ideoque etiam id præsupponimus.

Itaque sit punctum, seu centrum proiectionis C, sit planum originarium STVM, in quo scilicet est figura proicienda LMNV. Planum recipiens proiectionem sit QHR, cui perpendicularis linea proicienda VN. Dico primò, quòd ista linea NV proiecta imprimit lineam SH, quæ in punctum R producta terminat, quod punctum æquè remotum est à stereographo plano HRQ, in quod fit proiectio eadem distantia perpendiculari, qua remouetur punctum C centrum proiectionis.

Probatur. Nam quia NV ex thesi est normalis plano stereographo HRQ; erit etiam normalis eius sectioni QZ: & si plano stereographo HRQ ducatur planum CST parallelum per centrum C; erit quoque NV perpendicularis eius sectioni TS. Quare si intelligatur superficies proiciens NVC extensa vsque ad T; ita, vt sint eius sectiones CT, & RZ, erit quoque prædicta TNV sectio superficiei proiectricis perpendicularis sectionibus RZ, & CT, vtpote in planis CTS, & RZQ iisdem existentibus ex def. 3. tract. 22. Quare CTS, & ZRQ erunt anguli inclinationis planorum ex prop. 4. Cor. 2. tract. 22. & ideo anguli æquales ex prop. 18. tract. 22.

Transeat ergo per C planū CSM normale vtrique plano CTS, & STVM; Sectiones itaque CS, & ST rectum angulū continebunt. Quoniā ex 16. tract. 22. sectio ST duorum planorum CTS, & TVMS erit ad rectos āgulos plano CSM, & ideo sectioni CS, & SQ ex def. 2. tr. 22. in plano CSM existenti. Sed QZ est parallela lineæ ST ex effect. ergo etiam perpendicularis plano CSM ex 8. tract. 22. & ideo sectioni SQ, & RQ ex def. 2. tract. 22. Sunt ergo æquiangula triangula CTS, & QRZ, vtpote, quòd sint rectangula, & angulos CTS & RZQ æquales obtineant. Sed etiam crura TS, & ZQ sunt æqualia: Siquidem lineæ TZ, & SQ parallelæ sunt, vtpote ostensæ normales sectioni QZ. Ideoque ex 33. lib 1. Elem. æquabuntur inuicem crura parallela QZ, & ST. Cum ergo in triangulis æquiangulis ex 4. lib 6. sit ST ad SC, vt QZ ad QR, & TS & QZ sint æqualia, SC, & QR æquabuntur ex 14 l. 5. Quamobrem sectio RZ plani proicientis CNV terminabit in R, quod habet eandem eleuationem à plano primigenio SV, ac punctum C mensuratam per rectas CS, & RQ æquales, & normales: hoc autem punctum R vocabitur centrum proiectum.

Probatur secunda pars, quæ est, quòd lineæ parallelæ plano stereographo, vt est LN in parallelas plano primigenio STVM transeant. Quoniā enim linea proicienda LN, vel MV est parallela plano HRQ erit etiam parallela cōmuni planorū sectioni ex 4. tract. 22. Coroll. 3. quæ est QZ, cùmque QZ sit perpendicularis plano SCQR perpendiculari planis CTS, & QRH, etiam ipsa eidem plano normalis erit: ideo planū HIC per illam ductū ex 15. tract. 22. plano CSRQ erit ad rectos angulos; quare, & eorum communis sectio IH eidem plano ex 16. tr. 22. ad rectos angulos erit: Propterea que HI, & QZ ex 7. tract. 22. erunt parallelæ; ideoque, & plano STVM parallela erit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Superficiem rectangulam proijcere.

POtest hæc superficies proicienda obtinere aliquod latus parallelum plano, in quo facienda est proiectio, vel nullum parallelum.

Sit ergo primus casus, in quo sit parallelogrammo ABCD proiciendum. Determinetur centrum proiectionis F, & centrum proiectum E, & ad E centrum proiectum ab H, & G extremis lineæ GH, quæ intercipitur inter latera proicienda AB, & CD ducantur rectæ. Assumpta autem distantia HD transferatur ab H in L, & ducatur FL, quæ secabit EH in P. Ducaturque parallela PX sectioni HG. Rursus assumpta distantia HC transferatur ab H in M, & ducatur FM, quæ secabit HE in I. Itaque si per I ducatur parallela IV sectioni HG, illa claudet rectangulum PIVX iam proiectum.

Id autem ostendetur, nam posito, quo HG sit sectio planorū primigenij, & orthographi, qualis in fig. 1. præced. est ZQ. Ducantur perpendiculares FT, & EH, & HT erit distantia duorū planorū, quæ in fig. præced. propos. sunt QRZ, & SCT V. g. erunt lineæ CS, & RQ à centris primigenio C, & proiecto R descendentes. Igitur HO erit interuallum distantiæ, quā linea proicienda distat à linea sectionis, V. g. in præced. fig. 1. interuallum QH. Vnde sicuti ibi I est punctum M proiectum, sic hic

a erit

R erit punctũ proiectum. Sed I punctũ ex pr. 10. par. 3. tract. 16. distat eodem interuallo, ac R à linea MQ: quia triangula MIN, & MRO ob bases æquales MN, NO eandem altitudinem possident. Ergo ducta parallela per I habebit eandem distantiam, ac per R, ab MQ, linea sectionis planorum primigenij, & orthographi. Ergo IV erit ea linea proiecta, cum vt ostendimus debeat esse parallela lineæ sectionis MQ. Sic dicas de linea PZ, quæ erit linea DA proiecta. Latera verò DC, & AC exprimentur per lineas PI, & ZV: quia tendunt ad centrum E proiectum, vt ostensum est præcedenti propos. part. 3.

Si verò sit data superficies ABCD irregularis; vel nullum latus habens sectioni MQ parallelum per A ducatur latus parallelum PQ. & per A latus AY, & normale YC per C. Item sectioni perpendicularia latera PR. per B, & SQ per D, & parallelas MB, & DN ab vno quoque angulo, quas omnes parallelas & normales proicies; normales, quidem in AA, & YE, & cæt. tendentes ad centrũ; parallelas verò in 3 4, & 7 9 & 1 6, & cæt. & puncta X, Z, & I, O, & cæt. representabunt intersectiones D, A, B, C, in quibus etiam anguli figuræ BACD terminant in suis decussationibus. Igitur per puncta XOZI rectæ ductæ facient XOIZ planum proiectum, cuius primigenium est ABCD.

COROLLARIVM.

EX supradictis disces propos. 1. tract. 16 p. 8. quod si NO, & OZ sint æquales, & sic successiuè, etiam distantiæ, & interualla proiecta futura esse harmonicè proportionalia; nempe RK esse ad RS, vt KR ad RS differentiæ, & ex propos 3. eiusdem si NO erit pars aliqua V. g. $\frac{1}{6}$ lineæ NT lineæ RR erit $\frac{1}{7}$ RR $\frac{1}{8}$ RS $\frac{1}{9}$, & cæt. in infinitum. Vnde altitudines superficierũ erunt RK ad RS, vt $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ sibi inuicem, & sic consequenter. Et quidem si institutum meum non esset me continere in principijs rerum, & doctrinarum, hanc quidem mirabilem progressionem prospectiuæ praxibus subigerem, & quàm benè scenicis deseruiat ostenderem: sed id est alius voluminis, si Deus dederit.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis circulus, seu Ellipsis proiecta in planum, nec parallelum, nec basi subcontrarium in Ellipsim transformatur.

PRobatur. Est sectio coni à stereographo plano ad angulos rectos basi coni insistenti, seu etiam ad quemcumque angulum. Sed omnis sectio coni Ellipsis est, si planum non sit parallelum basi, vel subcontrarium, vt supra ostendimus, ergo etiam hæc sectio stereographa Ellipsis erit; Quod autem circulus proiectus, vel Ellipsis sit sectio coni, idest fiat in plano conum secante. Patet ex definitione stereographiæ factæ à superficie coni ca planum primigenium subiectæ.

COROLLARIVM.

HInc patet centrum Ellipsis proiectæ non habere idem centrum cum centro circuli, vel Ellipsis primigeniæ: nisi accidat, quod sit parallelum planum stereographum plano proiciendo, vt constat ex Coroll. 1. propos. 2. tract. præced. Nec vnquam circulum repræsentare, etiam si circulus sit primigenius, nisi sit, aut planum proiectionis parallelum ipsi, aut subcontrarium.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Quemcumque seu Circulum, seu Ellipsim plano Stereographo transcribere, eorumq; partes repræsentare.

CVm circulus, seu Ellipsis proiecta, Ellipsis sit, potest eodem modo describi quò supra diximus Ellipses describi posse in tract. 14. Conic. Expens. 13. & propos. 8. & 9. & 10. huius, quæ verò reponuntur ad descriptionem ex cognitione coni stereographi, & conus ipse à distantia data à plano, in qua fig. primigenia reperitur, facilè obtinetur, & à dato, aut axe, aut diametro aliquo ipsius primigeniæ figuræ. Sed libet hic modum ordinarium ostendere, quò vtuntur artifices.

Sit conus ABC, & sectio eius quæcumque RI, quæ producatur vsque ad eandem altitudinem coni ABC in D; Sit verò semibasis coni semicirculus FTC, in quo applicatæ ZY, & NP, quarum puncta extrema sunt exprimenda in Ellipsi, cuius axis RI. Ducatur ab R, & ab applicationum punctis ad verticem A lineæ AE, & AN, & per L, & K, quibus punctis diametrum RI secant, ducantur parallelæ ON, & OM vsque ad crura trianguli conici per axem EC, & AB: metiatur verò RR semidiameter in V, & per V, & D ducatur VD, quæ transibit per O, & KH, quæ transibit per H ob triangula VMF, & XKE, & eiusæqualis altitudinis ex propos. 10. tractat. 16. part. 2. Nam conueniunt in H, & O, per quæ transit OH. Postea metiatur QF æquali vni alteri applicatæ, ducatur ad D linea QD, quæ in X secet OF productam in V. Et dico LZ, & OX esse applicatas in Ellipsi, cuius diameter, seu axis RI.

Probatur in triangulo OXC, ita est OX ad XO, vt XD ad LD. In triangulo autem ita ita est XM ad ML, vt KS ad LT: quare poterimus componere proportiones, & rectangula constituere proportionalia, vt vides in hoc specimine.

HK

HK	vt	KI	&	KG	vt	KB
ad		ad		ad		ad
LN		IL		LO		LB

Ergo compositum, vt compositum.

HK	&	KG	KI	&	BK
ad		ad	ad		ad
LN	&	LO	IL	&	BL

Sed iki & tn rectangulum est æquale quadrato applicatæ diametro à puncto s scilicet xs sicut OL, & LN rectangulũ applicatę diametro NO ad angulos rectos, quæ est LT; ergo, vt sx & IK rectangulum ad rectangulum IL, & LB. Sic quadratum xs ad quadratum LT: Sed xn æquatur rectæ ss, & LB rectæ LT. Ergo xG, & LK erunt applicatæ, vtpote quod sit ex quadratum ad quadratum ex BL, vt tk, & xs rectangulum ad tL, & LB rectangulum ex 6. tr. 24. Quare remanet ostendendum, quod ox sit ęqualis as, & LR æquetur ipsi TL.

Id verò ostenditur. Nam, vt ON diameter ad NC diametrum, ex prop. 44. lib. 6. Elem. ita est sinus LT ad sinum similis arcus MP. Est enim ex Coroll 1. prop. 4. lib. 6. OL ad LN, vt SM ad MC, ideo OL erit quoque ad mediam proportionalem LT, vt SM ad suam mediam proportionalem MP. Ideoque etiam *permutando* OL erit ad SM, vt LT ad MP: quare etiam ON erit ad NC, vt TE ad MP, sed etiam EL se habet ex 1. Coroll. prop. 4. lib. 6. ad QP æqualem ipsi MP, vt VX æqualis ON ad æqualem ea ipsi NC ex constructione. Ergo LT, & LR æquales erunt ex 7. l. 5. quia æquales QS, & MP eandem dicunt proportionem ON, ad NC.

Eodem modo probabis de linea SX, quod sit æqualis lineæ ZO, quadere ZG, & LK erunt applicatæ.

COROLLARIVM I.

Hinc discet quomodo alia, & alia puncta poterimus reperire, donec tot sint, quæ sufficiant ad rectè trahendam Ellipsim vt vides in fig. hic apposita.

Imo ex prop. 10. Tract. 16 de prog. armonicis part. 2. cum omnis triangula sint eiusdem altitudinis V. g. KHA, & ASD loco trianguli ASD deseruiet triangulum KHA, & loco trianguli AMD poterit deseruire triangulum KND: Vnde vnica diagonalis AN sufficiet ad omnium triangulorum altitudinem exhibendam; quę sit eadem, ac ea, quæ in DM successiuè inueniretur, itaq; puncta D, F, S, C, P, & cęt. vsque ad M erunt in Ellipsi præbentibus successiuis altitudinibus triangulis SVS, KHA, & KQD. KTS, SEZ. & tandem SNO, quæ altitudines deberent reperiri in perpendiculari DM. Et idem fiat super YN, ducta TF si placeat aliam Ellipsim delineare.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam facilè aliquis quamlibet figuram circulo inscriptam delineabit, vt patet si puncta a, applicatarum AC V. g. intelligantur pro angulis alicuius figuræ circulo inscriptæ, siquidem etiam applicatarum suo extremo s in Ellipsi angulum figuræ rectilineæ exprimet, & sic de alijs.

COROLLARIVM III.

Hinc etiam patet: quomodo quælibet figura, etiam si non possit circulo inscribi, proiciatur, quia saltem poterunt pluribus circulis illius anguli circumscribi, quarum puncta extrema si proiciantur, erunt quidem in plurium Ellipsium ambitu; sed tamen coniuncta figuram irregularem proiectam referent.

COROLLARIVM IV.

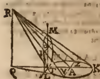
Hinc quoque patet quomodo partes alicuius circuli proiciantur. Nam in fig Coroll FD, & FA, & SC, & cęt. exprimunt partes circuli n e, & e m, & mk, & patet etiam quomodo partes circuli primigenij equales; in Ellipsi tamen proiecta eius vicaria non sint æquales.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Circulum, seu figuram rectilineam in Ellipsim proiectam transfundere Stereographicè.

Sitque ista circulus, seu figura proiicienda orthographicè. Detur verò altitudo centri proiectionis AH, & sectio plani stereographici sit YOZ & distantia à perpendiculari HM, quæ sit OL, & L sit punctum H proiectum, idest in quod ab H demissa perpendicularis caderet. A singulis punctis in peripheria signatis C, A, B, E, D perpendiculares ducantur, ad EA ab ijsque rectæ in centrum H conducantur, itaut ab ijsque à punctis C, A, B, E, D, rectæ in L conspirent, deinde ducta seorsim PG in C à puncto P singula interualla ex linea IO desumpta trasferantur, vt IO translatum est in PQ, & OG in QG, perque singula puncta perpendiculares ad PG, ducantur, vt QS, & VT; quarum longitudines à C sumantur in vtramque partem ex VT sectione, quę scilicet correspondent in ijsdem punctis V. g. CF applicabitur QS, quia à puncto D, tum DL, tum OH tandem deriuant, & postremò per extrema puncta CFS, & cęt. ducemus flexam, & erit Ellipsis, vel rectam, & erit figura rectilinea proiecta in Ellipsi inscripta.

* Ratio huius operationis est, quia PG est diameter, at VY, & SQ sunt applicatæ. Ergo per extrema earum puncta transibit Ellipsis. Quod vt capias inspice fig. hic appositam, in quâ circulus basis coni stereographi KTR est KZTV, trianguli autem per axem KRT ducatur planum normale stereographum MILT; item triangulo per axem KRT ducatur planum normale ZVR, itaque TK erit diameter circoli, sicut TM erit Ellipsis; quia cùm plana MZTV, & ZRV sint normalia triangulo per axem KRT; etiã cõmunes illorũ sectiones AV, & OI ad rectos angulos erunt ex prop.16. tract.22. & ideo ex def.2. tr.22. sectionibus TK; & MT; vnde istæ sectiones diametri erunt, & OI; AV applicatæ, hæc quidem applicata primigenia, & OI applicata proiecta & punctum O erit illud, cui applicatio facienda est,

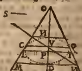


Itaque sectio AR plani ZVR, & trianguli per axem KRT erit illa, quæ decernet altitudinem TO, idest in præc.fig. OS. Hoc itaque triangulum AVR proiciatur orthographicè; planumque VRQ normale plano ZTV imprimet sectionẽ VQ discedentẽ ab V puncto, & terminantẽ in punctum Q quod imprimit RQ sectio planorũ plano ZTV normaliũ proiectoris VRQ, & triãguli per axem KTR producti in Q; Quare si IO applicata proiciatur quoq; ipsa proicietur in sibi parallelam LT. Siquidem superficies proiectrix eadem ex prop.8. h.p.1. ac superficies MILT, quod sit normalis plano ZVLQ recipiens proiectionem, faciet sectionem TL ex 16. Tract.22. plano KTR normalem, vtpote à planis normalibus effectã ZVQ, & MILT plano RTQ. Vnde ex 7. tr.22. parallelæ erunt, & ideo ex pr.8. h. par. 1. æquales. Itaque cum in triangulo per axem KTR in sectione TM obtineamus punctum O applicationum ad axem TM, vt in orthographia AVQ longitudines applicatarum, nempe TL, vel in præc.fig. 10, & ꝯ poterimus Ellipsim proiectam delineare.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

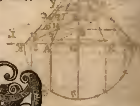
Dato diametro Ellipsis proiectæ, & diametro proiecto circuli, vel Ellipsis primigeniæ reperire diametrum alterum coniungatum.

Sit ductus diameter Ellipsis proiectæ NP, & diameter proiectus QC, & oporteat reperire diametrũ ellipsis alterũ cõiugatũ TL. Rectangulo NVD fiat æquale quadratum S ex 14. lib.2. Deinde fiat, vt latus quadrati S ad latus PN dimidij diametri; ita applicata VC ad aliud, & prodibit PL ex propos.13 lib.6. & dico TPL duplam LP alteram esse diametrum ellipsis coniugatam.



Probatur. Illa est diameter coniugata, quæ cum possit deseruire pro applicata per centrũ quoque transit, vt colligitur ex propos.32. tract.24. Sed PL talis conditionis est. Ergo erit diameter coniugata.

Probatur. Nam vt latus quadrati S ad latus quadrati NP semidiametri, ita fecimus VC ad PL, & ideo ex 26. lib.6. vt quadratũ S, idest rectangulum æquale NV, & VD ad quadratum, seu rectangulum NP, & PD, ita quadratum VC ad quadratum PL, Ergo PL erit applicata, sicut PT equalis. Sed etiam transit per centrum P, cum sit ND datus diameter diuisus bifariam. Ergo erit diameter Ellipsis, quo habito poterimus duobus diametris datis omnibus modis tract.24. assignatis Ellipses proiectas describere; Vnde si habeas tantùm vnicum diametrum ellipsis proiectæ, seu parallelum, vt hic plano stereographo, seu obliquum, quæ ex dictis prop.17. huius venari poteris ellipsim proiectam circuli expressiuam delineabis faciliter ambus datis.





TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRIÆ PARS PRIMA.

De Trianguli plani cruribus dimetiendis.



Rigonometria pars eſt Mathematicæ adeo neceſſaria; vt ſine illa vix alterum pedem in huius ſcientiæ progreſſu mouere quis poſſit. Duplex eſt autem; altera, quæ in menſuratione triangulorum planorum rectilineorum occupatur: altera, quæ ſphærica triangula etiam menſuris ſubigere conatur: in hac 1. parte de triangulis rectilineis agemus.

EXPENSIO I.

De triangulorum rectorum menſuratione per ſinus, vel tangentes.

IN eo conſiſtit trigonometria, vt exibitis duobus angulis, vel lateribus, vel angulo, & latere, cęterorum, tum angulorum, tum laterum cognoſcamus menſuras; & quidem ſi agitur de lateribus tantùm id independenter à Tabulis poteſt operi demandari ex ijs, quæ ſecundo libr. Elem. dicta ſunt prop. 11. at cum latus datur, & angulus ex quibus, vel angulus, vel latus aliquod perquiritur; vſus tabularum eſt neceſſarius. Hic autem omnimodam ſolutionem triangulorum docere animus fert, illã verò, quę ſolummodò laterum eſt, planimetriæ reſeruabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

In omni triangulo rectangulo, ſi baſis eſt radius; etiam duo crura ſunt ſinus arcus, & ſinus complementi illius arcus.

SIt triangulum rectangulum ABC. Statuamuſque baſim AB eſſe radium alicuius circuli. Dico, quòd duo crura AC, & CB ſint, vel ſinus CB, vel complementum DB.



Probatur. Quoniam baſis AB ponitur radius alicuius circuli, ille circulus, vt FBE circumſcribatur centro A, & ab A parallela AF ducatur cruri CB. Etenim quia CB eſt parallela radio AF, ſinus erit: Quapropter DB erit ſinus complementi: Sed AC; vtpote, quòd ſit inter parallelas eſt ei æqualis; Ergo AC crus eſt quoque complementum. Quòd autem FBE arcus ſit quadrans patet; quia angulus ACB ponitur rectus: Ergo & angulus CAD rectus erit ob parallelismum linearum CB, & AD ex propoſ. 30. lib. 1. Elem.

Poteſt etiã oſtendi pr. 17. l. 1. Cor. ex eo, quod in rectãgulo triangulo anguli reliqui nigri ſint ęquales vni recto, vnde alter alterius complementum erit, & ideo crura ſubtendentia ſinus arcuum inuicem erunt arcus, & complementum.

THEOR. II. PROPOS. II.

In omni triangulo, rectangulo ſi crus quodcumque, vt radius ſumatur; crus quidem alterum erit tangens; baſis verò ſecans.

PRobatur. Nam ducto arcu punctato altero crurum pro radio deſeruiente V. g. AC, crus CB tangens erit circuli punctati, & AB ſecans ex prop. 20. lib 3. Sic ſumpto arcu CB pro radio ducto quadrante punctato CK. crus AC tangens erit, & AB ſecans. Ergo ſi crus pro radio aſſumatur alterum crurum vices tangentis obit, & baſis pro ſecante deſeruiet.

COROLLARIVM.

HInc colligas, quod vt radius diuiſus in 10000000. eſt ad ſinum in partes æquales illius diuiſum in tabulis repertũ in proportione, ſic baſis in qualibet alias partes diuiſa erit ad crus in eaſdem partes diſtributum, quia partes ſinuum explicant proportionem ſinus totius ad quemlibet ſinum: Quare poſſumus datis duobus tabularum numeris, & altero numero, cui quæratur eiuſdem

eiusdem rationis quartus, id per regulam proportionum eacerpere, & sic dicas de taogentibus respectu sinus totius. Vnde sequeotis problemata prodeunt ad solutionem rectangulorum deseruientia.

PROBL. I. PROPOS. III.

Data basi, & angulo adiacente, latus oppositum angulo dato reperire.

SIt data basis AB 30. pedum, angulus verò adiaceens niger A sit notus Gr. 15. & eius sinus primis tantùm ootis ad sinistram expressus (id enim io istis sufficit) fit 258. & sinus totus 1000. Quia ergo habemus proportionẽ expressã basis ad sinum es anguli; ideo dices si 1000. basis partes dant 30. partes in ipsa, quid 258. partes cruris dabunt ex ijs 30. basis. Multiplicatus itaque vltimus cum medio, & geoitus per primum diuisus exhibebit pedes 7. [illegible] pro latere quæsito BC. Et adoerte, quòd 000 assumimus totum sinum, tùm quia in Trigooometria practica id non est necessarium, tum ob maiorem perspicuitatem exempli, cum minor numerus à Tyronibus faciliùs capi possit. Relioqui aotem semper possunt quatuor figuræ ad dextram.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Data basi, & angulo adiacente quærere latus adiacens angulo dato.

SIt data basis AB 30. pedum, & angulus A G. 15. niger, & quæratur latus adiacens AC. Accipiatur eius complementum Arcus G. 75. cuius sinus 965. Postea vteris regula dicendo, Si 1000. basis partes daot 30. quid 965? & exhibebunt pedes 28 [illegible], idest [illegible].

PROBL. III. PROPOS. V.

Dato angulo adiacente basi, vel opposito cruri alicui reperire angulum dato oppositum:

OFferatur angulus A 25. Grad. Quia duo anguli in rectangulo æquiualent vni recto ex Coroll 9. prop. 17. lib. 1. si subducatur angulus A ab angulo recto basi opposito 90. G. remanet angulus B niger 65. G.

PROBL. IV. PROPOS. VI.

Data basi, & crure: quærere angulum, cui crus opponitur.

SIt data basis pedum 30. AB, & latus alterum BC pedum 25. volo agnoscere angulum A. Dices itaque.

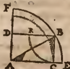
Si 30. daot 10000000. vtendo toto sin. si placet, quid 25?

Dabuntque partes 8333333. Quære itaque in tabulis sinum hunc, quem non inuenies quidem. Sed proximè minorem 8338431. Gr. 56. m. 56, qui assumetur pro angulo quæsito, in mensuris rerum materialium tractandis.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Data basi, ac crure inuenire angulum, cui illud crus adhæret.

SIt data basis AB 42. pedum, & crus adiaceos AC 39. & volo agnoscere aogulum adiaceotem nigrum A. Hoc itaque efficiam, quærendo priùs sinum anguli B, vt in præced. dicendo.



Si 42. dant 10000000. quid 39? Et dabit sinum 9285714. quem requires in tabulis, & proximè minorem sinum consequeris 9284859. qui est sinus Gr. 68. m. 12. Cum ergo angulus B sit G. 68. m. 12. ex probl. 5. inuenies alterum adiacentem expetitum subtrahendo Gr. 68. m. 12. à Gr. 90. vt efficiatur angulus adiacens requisitus A Gr. 21. m. 48.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Data basi, & crure reperire crus alterum

SIt data basis AB 53. pedum, crus CB 43. & requirat quis crus AC.

Primo inuestigabis sinum anguli A cruri dato oppositi ex prop. 3. h. dicendo.

Si basis 53. dat sinum totum 10000000. quid crus pedum 43. & reperies proximum sinum 8113207. nempe Gr. 54. m. 13. & sinus eius complementi Gr. 36. m. 47. erit 5987907.

Dices itaque rursus si 8113207. sinus dat pedes 43. quid sinus complementi 5987907? Et regula proportionum offert pedes 31. & $\frac{2}{3}$ ferè pro crure quæsito.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Dato crure, & angulo adiacente, quærere basim.

SIt datum crus 59. AC, & angulus ei adiacens A niger 27. Gr. exquiraturque basis AB.

Primo inueniendus est angulus oppositus B ex 6. prop. huius, qui est 63. Gr. & eius complementum; assumendusque est sinus ipsius p. 8910065.

Itaque regula proportionis exquires; si 8910065. dant pedes 59; quid 10000000. sinus totus? & exhibebit pedes 66 $\frac{1}{4}$ ferè, quę erit basis.

PROBL.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Dato crure, & angulo cruri opposito reperire basim.

SIt angulus datus A Gr.30. & crus oppositum BC pedum 15. & sit inuenienda basis AB.

Sinus Gr.30. est 5000000. Dices itaque adhibenda proportionis regulam. Si 5000000. dant pedes 15. quid sinus totus 10000000? & prouenient pedes 30. pro basi.

PROBL. IX. PROPOS. XI.

Dato crure, & angulo cruri opposito quærere latus alterum.

SIt datus angulus A G.32. cuius sinus 5299142. & cuius complementum est BG 58. & sinus 8480481. Crus verò oppositum angulo dato sit pedum 20. Dices itaque adhibendo regulam auream. Si sinus 5299142. dat pedes 20. quid 8480481? exhibebitque operatio pedes 32. & aliquid ampliùs pro crure altero.

At per tangentes id efficies facilliùs ob sinum totum, qui primo loco venit, & ita erit regula proportionum ordinanda, si sinus totus 10000000. dat pedes 20. quid tangens complementi Gr.58. dati, quæ est 16003347? & exerent pedes 32. & $\frac{1}{10}\frac{6}{100}$. Quòd si detur angulus adiacens, poteris tamen accipere angulum oppositum, cum alter alterius sit complementum ex Cor.9. propos.28. lib.1.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Datis cruribus duobus angulos reperire oppositos.

SIt datum crus AC 32. pedum, quod statues loco sinus totius, & aliud CB erit tangens oppositi anguli A, quod sit pedum 25. Dices ergo regula aurea, si crus pedum 32. dat 10000000. quid 25? & dabit tangentem 7812500. quæ proximè est tangens Gr.38. Subduces itaque hunc angulum inuentum à Gr.90. & residuum erit alter angulus B Gr.52. oppositus cruri AC, nam ex Coroll.9. propos.17. lib.1. Elem. alter angulus est complementum alterius.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Datis duobus cruribus quærere basim.

HÆc propositio executioni demandatur dependenter ab antecedenti, nam datis cruribus priùs inueniemus angulum ex quo iuxta prop.9. & 10. reperiemus basim dato crure, & angulo acquisito, vel opposito cruri, vel adiacente.

Hæc autem omnia problemata à duobus propositionibus primis euidentiam desumunt. Omne enim crus in triangulo rectangulo potest esse, aut tangens, sinus, aut secans, hinc est quod possit diuidi, aut cogitari, vt diuisum in eas partes, in quas quilibet sinus diuisus est, seu tangens, seu secans, quæ sunt æquales illis, in quas sinus totus diuisus animaduertitur. Quare si habeam diuisum crus aliquod in alias partes V. g. in pedes possum deuenire in cognitionem alterius cruris, in pedes diuisi.

Cum enim partes sinus AB sint æquales partibus sinus BC, & pedes item cruris AB sint æquales pedibus cruris BC; fit, vt partes sinus AB ad partes sinus BD sint in eadẽ proportione, ac partes cruris eiusdẽ AB ad partes cruris BC. Quapropter permutando ita erunt partes sinus AB ad pedes cruris eiusdem AB, vt partes sinus BC ad pedes eiusdem cruris BC, vnde datis tribus partibus AB, & eiusdem pedibus, & partibus BC deueniemus in cognitionem pedum BC eiusdem.

PROBL. XII. PROPOS. XIV.

Sinus in tabulis non repertos emendare.

QVoniam aliquando, imo ferè semper sinus, qui ex calculo exeunt, non sunt ijdem præcisè, qui in tabulis reperiuntur; hine oportet regulam assignare, ob quam, quis in cognitionem proximioris sinus, quàm fieri possit, deueniat.

Sit datus sinus 8333333. qui non reperitur in tabulis; sed proximè minor 8332431. Gr.56. m.26. & maior proximè 8334039 Gr.56. m.27. Subducatur minor à dato 8333333. & residuum erit 902. Item idem minor subducatur à maiori reperto 8334039. residuum erit 1608. Dices itaque regula proportionum, si 1608. dant 60. quot secunda dabunt partes 902? & exeret numerus secundorum 33. Itaque sinus ille datus 8333333. erit Gr.56. m.26. sec. 33.

Ratio petitur ex Cor.1. pr.15 tr. 20. de sin. Vbi sinum vnius Grad. vix à linea recta differre ostendimus, & tantò minùs arcus vnius minuti: vnde assumimus vnicum minutum, vt lineam rectam, & ideo datum arcum, vt lineã rectam vnius secundi, nempe pro ipsa portione sinus subtensa vsurpamus, tanquam notam in partibus arcuum, & in partibus sinus totius ex ratione propos. 13. huius & minorem subtẽsam perquirimus, vt innotescat in partibus arcus, à quo sensibiliter non differt.

PROBL. XIII. PROPOS. XV.

Arcuum in tabulis non repertorum sinus cognitos proximè exhibere.

QVia sinus in tabulis, vt plurimùm vsq; ad minuta tantũ calculata sunt, & aliquãdo diligẽtior calculus exposcit, vt etiam secundorum sinus obtineãmus. Inde est, quòd ex antec. prop. ratione possimus etiam sinum reperire: Nam sit datus arcus Gr.56. m.26. sec.33; Et differentia inter sinum Gr.56. m.27. sit 1608. Dices itaque regula proportionũ; si sec.60 quibus differt arcus minor à maiore dant par. 1608. quid m.33.? & exhibebit operatio partes 884. quæ additæ sinui minori 8332431. facient sinum 8333315. parùm differentem à superiori.

EXPENSIO II.

De triangulorum rectangulorum mensuratione adhibitis logarithmis.

OPortet priùs noscere, quomodo ipsi logarithmi cuiuslibet dati numeri ex tabulis logarithmicis eruantur, antequam ipsorum logarithmorum sinubus annexorum calculum doceamus.

Si quis commodè velt vti logarithmis oportet numeros exhibitos esse maiores, vel tribus saltem, vel quatuor notis expressos. Alioquin, si duabus tantùm notis exprimantur, superfluum erit ad logarithmos recurrere, cùm facilis se se offerat calculus sine ipsis, & minùs præcisè inuenti logarithmi, minùs quoque calculum præcisum dabunt.

Si verò numerus sit maior 7. figuris sc. quàm quòd ij, qui in tabulis, sinus exarati sunt illi per 10. aut 100. Sunt diuidendi abiectis duabus figuris ad dextram, vel tribus; vt ad eundem numerum redigantur, & tandem illo numero quærendus est sinus in tabulis, vel tangens, qui illi prorsùs conueniat, vel saltem ab eo parum differat, & illius sinus logarithmus erit, etiam logarithmus numeri dati.

Sit datus numerus 394. augeatur quatuor zifris & fit 3940000. & reperiemus simillimum sinum 3942093 cuius logarithmus est 9308731. qui quæritur. Item sit datus numerus 439765294. maior, quàm, qui in tabulis reperiri solet, abijciantur duæ figuræ extremæ 94. & quæratur reliquo 4397652 sinus simillimus 4396780, cuius logarithmus est, qui quæritur 8217154.

Regulæ quidem traduntur à Nepero, & alijs, quibus logarithmi non præcisi ad præcisos redigantur: sed istæ, iam ob additiones plures laboriosæ esse incipiunt; Vnde iam logarithmi instituti ad leuamen laboris, effecti grauioris operis, visu suo non minuere laborem, sed augere videntur, & propterea à nobis prætermittuntur, maximè; quia ad Geodesias ordinarias præcisio adeo exquisita, scrupulosaque superflua sit.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

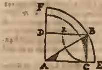
In rectangulo logarithmus cruris æquatur logarithmo anguli oppositi, & logarithmo Hypotenusæ.

PRobatur. Nam basis AB rectanguli ABC deseruit pro radio, & crus BC pro sinu anguli oppositi, ex prop.1. huius. Vnde radius 10000000. partes se habebunt ad quascumque mensuras basis V. g. pedes, vt BC sinus anguli oppositi, in ijsdem partibus sinus totius expressus ad pedes BC cruris ex prop.13. ostensione; Sed in quatuor proportionalibus logarithmus mediorum æquatur logarithmo extremorum. Quare logarith. sinus totius erit logarith. primi proportionalis, secundi erit logarith. sinus totius, vt pedibus constantis tertij verò logarith. sinus A anguli oppositi, quartus ignotus; itaque aggregatum mediorum logarithmorum secundi, & tertij proportionalis æquabitur logarithmo quarti, & primi s. sinus totius, sed primi logarithmus ponitur in tabulis 0. Ergo proportionalis quarti logarithmus. Cum additio zifræ illum non augeat, æquabitur logarithmorum mediorum proportionalium sc. sinus anguli, & pedum datorum basis, seu sinus totius, vt in pedibus cogniti: vnde ille logarith. erit logarith. cruris BC in pedibus noti.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

In rectangulo logarithmus cruris est æqualis aggregato ex logarithmo tangentis oppositæ, & logarithmo reliqui cruris.

QVoniam si crus BC statuatur pro radio alterum crus AC est tangens, ideo erit, vt radius ad se, vt notum in alijs partibus, quæ sint V.g. pedes est, vt crus velut tangens ad se, vt notum quoad easdem partes s. pedes ex osteus. propos.13.



Cumque in quatuor proportionalibus aggregatum mediorum æquetur aggregato extremorum logaritmus tangentis AC, & logarithmus pedum cruris alterius CB aggregati erunt æquales aggregato logarithmico sinus totius CB, & pedum cruris AC. Sed logarithmus sinus totius est 0 Ergo logarithmus pedum cruris AC erit aggregatum logarithmorum cruris AC, vt tangentis, & CB, vt pedibus mensurati cruris.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Hypothenusa cruris, & angulo, quem crus subtendit, duobus quibuslibet datis tertium reperire.

DEtur basis AB pedum 30. idest vnciarum 360. & additis quatuor zifris 3600000. & angulus A Gr.15. & quæratur crus. Sinus 2588190 G.15. cuius logarithmus est 13516255. Sinus verò simillimus basi 3600000. est 3602683. logarithmusque 10209063. Vniantur simul isti duo logarithmi, vt vides.

$$\begin{array}{r} 13516255 \\ 10209063 \\ \hline 23725318 \end{array}$$

Quæraturque hic logarithmus 23725318. & ei simillimus 23725832 inuenietur, qui dabit sinum 931395. aufer itaque quatuor figuras iuxta quatuor zifras, quas basi addidisti ab ipso sinu, & erunt vnciæ 93. idest pedes 7. & $\frac{9}{12}$, vel $\frac{3}{4}$, vt proximè inuenimus propos.3. Pro crure quæsito.

Aliud quoque exemplum erit. Si detur basis AB vnciarum 360. Angulus verò A Gr.15 & quæratur crus adiacens AC. Accipe sinus complementi

eradi logarithmum, nempe Gr.75. cuius logarithmus est 301544. Addequu logariahmo finus basis quatuor zifris adauctæ supra inuentæ 10209063. & fiet logarithmus 10510607. qui quæsitus in tabulis oon inuenitur quidem; sed ei simillimus 10515669, qui dat sinum 3493899. abiectis itaque quatuor figuris; quia quatuor zifras addidimus basi sino, prodibunt 34. & 9. vnciæ, idest 29. pedes $\frac{1}{6}$, vt proximè inuenimus propos. 4. pro cruru.

Tertio pro casu, quo sinus totus venit tertio loco. Sit data basis 360 vnciarum, crusq; 300. vnciarum sc. 25. pedum. Auge vtrumque 4. zifris, vt fiot basis quidem 3600000. at cruris 3000000. & deinde reperi ei simillimos sinus basis quidem, vt supra, cuius logarithmus est 10209063. at verò cruris sinus 3001510. cuius logarit. est 12034696. Auferatur itaque ab hoc logarithmo logarithmus basis, & remanebit 1825633, qui quæsitus in tabulis inuenietur ei simillimus 1814293 qui est Gr. 56. m. 26. vt reperimus pr. 6. pro angulo quæsito.

Pater autem ex prob. præced. Nam sinus torus, crus sinus anguli oppositi, & basis sunt quatuor proportionalia, quorum quodlibet 4. loco potest venire, sed de sinu toto numquam quæritur, tria ergo reliqua duo dantur, & tertium semper quæritur: Si ergo sinus totus veniat primo loco tunc aggregandi logarithmi sunt, vt fiat logarit. exoptatus, vt primo, & secundo exemplo: si verò secundo loco veniat; tunc logarithmus minor subducendus est à maiore, & residuum est logarithmus, qui desiderabatur, vt tertio exemplo. Quoniam tunc cùm alter mediorum proportionalium sit logarith. o nempe sinus totus, alter erit æqualis se solum extremorum logarithmo, quare si ab eo auferatur logarithmus primus relinquetur logarithmus quartus quæsiti proportionalis.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis crure quocumque, & angulo alteri eorum opposito duobus quibuscumque tertium reperire.

Detur crus BC pedum 25. Idest vnciarum 300. & crus aliud AC pedum 32. idest vnciarum 384. & quæratur angulus A oppositus primo cruri BC. Itaque sinui 3000000. quatuor zifris aucto, reperiatur sinus propinquissimus in tabulis 3001510 & assumatur eius logarithmus 1203.696. deinde sinus aucti quatuor zifris 3840000. sinus propinquissimus inuentus sit 3840267 cuius logarithmus 9570427. & quia in regula proportionum sinus totus caderet secundo loco, subducatur minor à maiore, & residuabitur logarithmus 2454269 tangentis. Quære ergo in tabulis hunc tangentis logorithmum, & inuenies 2468434. tangentia Gr 38. esse ei simillimum. Quare arcum Gr. 38. assumes pro mensura anguli quæsiti, vt prop. 12.

Alterum exemplum erit. Detur crus BC oppositum pedum 20. & angulus A ei oppositus A G. 32. & quæratur crus adiacens, cuius complementum est Gr. 58. Reijcies itaque 20. pedes in vncias 240. & additis quatuor zifris, vt fit 2400000. inuenies sinum ei simillimum 2402280. cuius logarithmus est 14261662. Deinde inuenies tangentis differentialem anguli 58. deffectiuam 4702126, eo quod sit complementi ex Cor. prop. 26. Tract. 21 quā subdùces à sinus illius logarithmo 14261662. & residuum erit logarithmus 9559536. qui logarithmus simillimus quæsitus in tabulis est 9556451. cuius sinus est 3845638 abiectis itaque quatuor figuris iuxta 4. zifras adiectas erit crus alterum vnciarum 384. nimirum pedum 32. vt supra propos. 12. Vbi debes notare, quod tangentis logorithmus licet iuxta regulam esset addendus iuxta tam Coroll. prop. 26. Tract. 21. subducendus est, eò quòd consideratus, vt complementi maioris, quam Gr. 45. sic defectiuus.

At si quæratur crus oppositum, & detur AC pedum 32. idest vnciarum 384. & B angulus Gr. 58. oppositus, cuius complementum est angulus 32. cuius sinus 2599192. differentialisque 4702126. at verò cruris AC vnciarum cum additis zifris 3840000. est simillimus sinus 3840267. cuius logarithmus 9570427. Addantur itaque simul hi logarithmus, & differentialis ex Coroll. prop. 26. tract. 21. de logarith. eritque summa 14272553. qui quæsitus in tabulis non inuenietur; sed ei omninò similis 14261662. qui dat sinum 2402280. cruris quæsiti, idest vncias 240 reiectis quatuor figuris ob quatuor zifras additas; quæ sunt pedes 20. vt propos. 12. h.

EXPENSIO III.

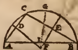
De triangulorum obliquangulorum resolutione.

Obliquangulorum resolutio, & mēsuratio paulo rum difficilior; Vocamus autem crura duo latera angulum maiorem stipantia, & illum angulum verticalem, sicut latus, quod ei opponitur à nobis dicitur basis.

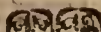
THEOR. I. PROPOS. XX.

In omni triangulo crura inter se eam rationem possident, quam sinus oppositorum angulorum.

Sit triangulum quodcumque, sed vt nobis videtur obliquangulum ACB, circùm quod ex doc. prop 5 lib. 4. Elem. circumscribatur circulus ACGB: Ducanturque rectæ à centro F ad medietates crurum E, B, D, & Dico, quod crura eam proportionem possident ad inuicem, quam sinus oppositorum angulorum.



Probatur. Nam latera, vt vides sunt Chordæ, quarum medietates sinus sunt; sed vt totum se habet ad totum ita medietas ad medietatem ex prop. 18. lib 5. Ergo si crus est, respectu alterius vt chorda AC ad chordam CB, erit etiam, vt sinus CD ad sinum CE.

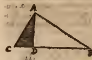


THEOR. II. PROPOS. XXI.

In omni triangulo ficut medietas fummæ finuum duorum laterum ad differentiæ eorum medietatem; fic & tangens medietatis fummæ angulorum oppofitorum ad medietatis eorum differentiæ tangentem.

SIt triangulum ACB, cuius duo anguli A, & B fcilicet arcus eos menfurantes fuper arcum PNM in altera figura menfurentur, ita quod arcus OP fit menfura anguli A, & arcus OM fit menfura anguli B, & arcus OR fit femidifferentia eorum, cuius tangens eft ON, ficut medietatis fummæ tangens eft QO.

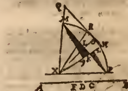
Rurfus latera AC, & AB in vnã fummã redigãtur menfurando ea fuper rectam AB, cuius medietas AO maiufque crus fit AC, & minus CB femidifferentiaq; inter ea fit DC cum tota fit FC. Dico



itaque, quòd ficut eft dimidia fumma AD crurum ad dimidiam differentiam eorum DC, vel AD; Sic eft tangens OQ dimidiatæ fummæ angulorum ad dimidiatæ eorum differentiæ tangentem ON.

Primò itaque fciendum ducta ad bafim in quocumque triangulo perpendiculari fegmenta effe tangentes ex prop 30. lib.3. Elem. vt patet in triangulo XQN, in quo centrum X diameter XO, cuius & O, & OM arcus & tangentes funt, vtpote ei orthogonales ON, & OQ.

Secundò ex antecęd. latera triangulorum effe, vt finus ad finum, & ideo AC crus in linea AB effe ad crus CB, vt finus MX anguli MXX, cui ex hypothefi opponitur crus AC ad finum PR anguli PXK, cui opponitur crus CB ducta itaque MP,



Probatur propof. Triangula nigra funt equiangula ex prop.17. lib.1. Coroll. cum anguli apud Y, & apud S. ex def. finus fint recti, & anguli apud K ad verticem æquales: Vnde MK eft ad KP bafea, vt crura YM ad SP, & ideo ex dictis, vt AC ad CB: Ergo *componendo* MK cum KP erit ad KP, vt AC cum CB ad CB, & ex prop.18. lib 5. Elem. medietas ML prioris erit ad KP, vt medietas AD pofterioris ad CB: Quare *diuidendo* ML erit ad refiduum LK ex KP, vt AD ad refiduum DF, vel DC ex CB. Quamobrem medietas AD erit ad femidifferentiam DC, feu DF, vt LM ad KL; fed ML ad XL eft vt OQ ad ON, ob parallelifmum linearum QN, & MX in triangulo QXN. Ergo, vt AD femiaggregatum crurum ad eorum femidifferentiam FD, Sic tangens OQ femiaggregati angulorum ad tangentem eius femidifferentiæ eorum.

COROLLARIVM.

HInc eft, quod etiam vt totum aggregatum ad totam differentiam crurum, fic ex prop. 18. tangens femiaggregati crurum ad tangentem femidifferentiæ eorum.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

In omnibus triangulis inæqualium laterum; fi facto centro in angulo verticali ducatur circulus ad interuallum minimi cruris. Segmentum cruris ad fegmentum bafis extra circulum remanentis eft, vt bafis ipfa ad aggregatum crurum.

SIt triangulum fcalenum ACB, cuius bafis AC anguliufque verticalis B, & in B fiat centrum, interualloque ac minimo crure circulus defcribatur FCH. Dico, quod AF fegmentum cruris erit ad AG fegmentum bafis, vt AC ad aggregatum AB, & BC, fcilicet AH.

Probatur. Nam prop 36. lib.3 Elem. rectangula, quę fiunt ex fegmentis extra circulum remanentibus, & totis fecantibus ab vno puncto dimiffis omnia funt æqualia, & ideo AC, & AG rectangulum æquabitur rectangulo AF, & AH. At ex propof. 10. lib.6, rectangula æqualia habent latera reciprocè proportionalia. Ergo ita erit latus AF rectanguli ex AF, & AH ad latus AG rectanguli ex AC, & AG, vt latus AC ipfius rectanguli ad latus AH rectãguli prioris, quod eft aggregatum cruris AB, & BC, cum BH, vtpote radius fit ei BC ęqualis.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Datis angulis, & crure inuenire aliud, aut bafim.

IStud prob. fundatur in 20. propof. Quoniam enim funt latera inuicem, vt finus oppofitorum angulorum, fi primo loco ponatur finus anguli oppofiti, fecundo crus cognitum, tertio finus anguli oppofiti lateri quęfito, inueniemus crus, vel bafim quęfitam.

Pro exemplo detur angulus A in fig.p.20. cognitus 25. G. cuius finus eft 4226183. & crus oppofitũ CB 35. pedũ, angulus quoq; alter acutus B cognitus fit 20. Gr. cuius finus eft 3420201. Dices itaq; fi finus CB anguli A 4226183. dat pedes 35. quid dabit 3420201. finus DC anguli B, & adhibita regula proportionum exhibebit 28. & $\frac{1}{4}$ ferè.

Quod fi velis reperire bafim, idem prorfus efficies, fed fi fit angulus obtufus, cùm fit maior quadrante habebit pro arcu arcum ipfum reliquorum angulorum fimul aggregatorum fc. arcuum ACB, & eorum finus AI, vel IB, pro finu cruris fumendus eft.

PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Duobus lateribus, & angulo datis uni eorum opposito invenire angulum cruri cognito oppositum, & etiam angulum reliquum.

HÆc propositio ab eadem propos. 20 nascitur, unde exemplo solo patebit. In fig. prop. 20. Sint data duo latera BC 40. pedum, & AC 25. & angulus huic oppositus A Gr. 38. Sicut itaque crus 25. pedum se habet ad sinum BC anguli A, par. 3090170. ita pedes 40. ad sinum CB anguli A & dabit 4944272. quem non reperies, sed propinquissimum 4944476. Gr 29. m. 22. quem vel pro vero recipies angulo A, vel rectificabis ex dictis prop. 24. huius.

PROB. III. PROPOS. XXV.

Duobus lateribus, & angulo verticali contento datis angulos alios reperire.

ISta propos. fundatur in prop. 21. Detur itaque angulus Gr. 27. crusque 40. AB, & aliud 34. pedum, quæ illum claudant; quorum summa est 74 medietas 37. differentia verò 6. Cumque habeamus angulum Gr. 27. & omnes cuiuscumque trianguli angulos duobus rectis sint æquales ex Coroll. prop. 17. lib. 1. nempe Gr. 180. hinc ablatis Gr 27. à 180 habebimus aggregatum cæterorum Gr. 53. quæritur itaque differentia.

Medietas summæ angulorum est Gr 75. m. 30. cuius tangens est par. 4165 2974. medietas laterum 37. medietas differentiæ eorum est 3. Dices itaque regula proportionali si 37. pedes medietas crurum exhibet semidifferentiam eorum 3. quid medietatis angulorum tangens 41652974? & offeret tangentem 3377268. reperiesque tangentem proximam 3378331. Gr. 18. m. 40. qui arcus deducendus est à semisumma angulorum Gr. 76. m. 30. & habebimus angulum minorem Gr. 57. m 50. Addendusque iterum, & obtinebimus angulum maiorem Gr 95 m. 10.

Poteris etiam accipere differentiam totam laterum, & totá summá ipsorú ex Cor. pr. 21. quia ita est totum ad totum, ut dimidium ad dimidium.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Triangulum scalenum ad duo triangula rectangula reducere datis cruribus, & basi.

SIt reducendum triangulum ACB ad duos rectos ADB, & DCB datis cruribus, hoc fit ope prop. 21. huius adhibita eius prop. fig.

Primo reperienda est portio CE per regulam auream, quæ divisa bifariam, utpote chorda dabit sinum CD, cui incidit perpendiculariter DS ex def. sin. & ex prop. 13. lib. 3. Elem. sic autem fit, detur basis AC 9. Aggregatur priùs BC 4. & AB 7. & erit 11. pedum linea AH. Auferatur, deinde 4. à 7. nempe BC, vel HB ab AB, & erit residuum AF pedum 3. Dices itaque si 9. dant 11. quid 3? & enascetur segmentum basis AG pedum $3\frac{6}{9}$, idest 3. & $\frac{2}{3}$. Quadere reliquū EF & AC $5\frac{3}{9}$, cuius medietas DG, vel DC erit $2\frac{6}{9}$, & addito DG ipsi AG prodibit crus AD $6\frac{3}{9}$, eruntque duo triangula rectangula in cruribus duobus nota ASD, & DSC.

PROBL. V. PROP. XXVII.

Trianguli scaleni datis cruribus angulos reperire.

QVoniam iam nouimus ex antec. in duo triangula rectangula scalenum commutare, de quibus cognoscimus crus AD, & $6\frac{3}{9}$, & DC pedum $2\frac{6}{9}$, sicut basim BA 7. pedum, & BC 4. & agentes de rectangulis diximus, ita esse basim ad crus, ut sinus totus ad sinum anguli oppositi.

Si fiat per auream regulam, ut 7. ad $6\frac{3}{9}$, vel ut 21 ad 19. ita radius 10000000. ad aliud? dabit 9047857. sinum, cui proximus est sinus 9042068. Gr. 64. & m. 43. proximè anguli ASD, quem subtrahes à 90. & habebis angulum DAS Gr. 25. m. 17. Ita ages in triangulo DSC; consequeris enim basim BC pedum 3. & DC pedum $2\frac{6}{9}$, idest obtines proportionem, quæ est 18. ad 16. Dices itaque si 18. dant 16. quid 10000000? & ab operatione resultabit 8888880. cui reperies proximū sinum 8888339. Gr. 62. m. 44. anguli DSC, quem subduces à 90 & residuus angulus erit DCB Gr. 64. m. 43. si verò unias angulos ad S repertos Gr. 64 m 42. & 62. m. 44. obtinebis angulum totum Gr. 127. m. 27.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Data basi, & crure in isoscelibus triangulis angulos reperire.

QVoniam ex propos. 19. lib. 1. Elem perpendicularis CF in triangulo isoscele DFE facit angulos ad C rectos, & æquales, & totum triangulum album toti nigro æquatur; si detur crus, & dimidiata basis, poterimus ex præcedenti quærere angulum oppositum nigrum F, & ideo lucrabimur



quoque angulum E nigrum, qui æquantur angulis albo F, & albo D. Quare, si coniungantur anguli albus, & niger ad F habebimus totum angulum seminigrum F. Unde omnes anguli trianguli æquicruris in palàm prodentur.

EXPENSIO IV.

De obliquangulorum dimensione per logarithmos.

NOn minus evadit facilis logarithmica operatio in obliquangulis triangulis, quàm in rectangulis, innititurque tota in præcedentibus tribus obliquangulorum Theorematibus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo aggregatum ex logarithmis anguli cuiusuis, & cruris eum ambientis æquatur aggregato crurum, & angulorum eis oppositorum.

QVoniam ex 20. propos. omnium crurum ad sinus oppositorum angulorum eadem est ratio, & hinc genitus ex crure opposito, & sino ambiente æquatur producto per multiplicationem alterius sinus oppositi, & cruris ambientis, & ideo productum diuisum per sinum alterum, vel per crus dat alterum crus, seu angulum ignotum; ita etiam ex pr.5. tract.21. aggregatum logarithmorū cruris, & sinus aggregato alterius sinus, & cruris logarithmico æquatur. Vnde subducto alterum ab altero, logarithmus eius, quod quæritur prodire necesse est; sic in triāgulo ACB 10 fig p.30 logarit AC cruris oppositi, & logarithmus CB sinus ambientis æquatur logarithmico aggregato sinus DC, & cruris CB. Vnde si ab aggregato logarithmico AC, & CB auferatur logarithmus, vel DC sinus prodibit crus CB logarithmicum, vel CB cruris logarithmus, & proferetur logarithmus sinus DC.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

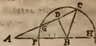
In obliquangulis logarithmus aggregati crurum subductus à summa logarithmi differentiæ crurum, & differentiali semiaggregati suorum oppositorum angulorum relinquit differentialem semidifferentiæ eorumdem angulorum.

HÆc propos. fundatur in propos.21. Coroll. Nam quia ita est summa crurum ad differentiam eorum, vt tangens semiaggregati angulorum ad tangentem semidifferentiæ eorum. Etiam logarithmus tangentis semiaggregati angulorum, & logarithmus differentiæ crurum, nempe mediorum terminorum æquabuntur logarithmo tangentis semidifferentiæ angulorum, & aggregato logarithmi crurum nempe terminorum extremorum iuxta propos.5. Tract.21.

THEOR. III. PROP. XXXI.

In obliquangulis summa logarithmorum aggregati crurum, & differentiæ eorum est æqualis summæ logarithmorum basium veræ, & alternæ.

HÆc propos. innititur propos.22. huius, appellamus autem basim alternam segmentum basis veræ, quod extra circulum remanet, vt AG: Quoniam verò est AF differentia crurum ad AC basim alternam, vt AC basis vera ad AH aggregatum crurum, ideo logarithmi quoque mediorum AG basis alternæ, & AC basis veræ æquabuntur logarithmo differentiæ AF, & aggregati AH ex 5. prop.



tract.21. Vnde si ab aggregato AF, & AH logarithmico auferatur logarithmus basis AC, exsurget logarithmus alternæ basis AG.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Ex duobus angulis, quibuscumque datæ speciei, & suis cruribus, si tria dantur quartum quodcumque reperiemus.

DEtur angulus A Gr. 35. & logarithmus eius 8612856. & crus oppositum CB 35 pedum, idest vnciarū 420. additis 4. zifris erunt 4200000. cuius proximus logarithmus est 866.192. Angulus autem alter B Gr. 20. cuius logarithmus 10728852. Qui iunctus logarithmo cruris CB dabit aggregatum 19398044. à quo deductus logarithmus alterius anguli A Gr. 35. remanebit logarithmus 10785188. cui in tabulis valdè similis est 10784974. cuius sinus est 3401060. nempe abiectis 4. figuris dextris vnciarum 340. vel pedum 28

Quod si datis duobus cruribus, & angulo velis alium angulum reperire eodem modo rem perficies.

Patet autem operatio ex prop.28.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis cruribus, & angulo comprehenso alios angulos patefacere.

DEtur angulus comprehensus Gr.27. crus AB pedum 40. idest vnciarum 480. & aliud pedum 34. idest vnciarum 408. Summa crurum erit 888. differentia 72 vnciæ, medietas verò summæ 153. reliquorum angulorum est 76. m.30.

Aggregati crurum 888. additis quatuor zifris, vt sit sinus 8880000. logarithmus proximus est 1188406. idest sinus proximi minoris 8879491. Differentiæ eorumdem 720000. quatuor item zifris auctæ, idest sinus similis 720777. logarithmus proximus est 26300094. At differentialis, seu logarithmus tangentis semiaggregati angulorum Gr.76.m.30. logarithmus est 14267876. Demo itaque hunc logarithmum à logarithmo differentiæ crurum; quia differentialis est defectiua, cùm eius arcus excedat Gr.45. vnde vice additionis subductione vtendum est ex propos.26. tract. 21. & remanebit 10843812. idest differentialis, & logarithmus tangentis Gr.18. m.40. quasi m.41. Itaque si addas Gr.18. m.40. semiaggregato crurum erit maior angulus 95. m.10. Si demas consequeris angulum minorem Gr. 57. m.50.

Patet propos. ex propos.29. ibi enim probatur aggregatum logarithmorum differentiæ crurum,

&

& tangentis semiaggregati angulorum æquari summæ logarithmi aggregati crurum, & logarithmi tangentis semidifferentiæ angulorum.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIV.

Obliquangulum datorum crurum ad duo rectangula reducere.

Sit basis 49. pedum, & latus 4. & aliud latus 7. Addatur logarithmus aggregati crurum pedum 11. vel unciarum 132. differentiæ eorumdem pedum 3. vel unciarum 36. additis quatuor zifris vt sit 1320000. atque huius num. in tabulis sinus proximus est 1319681. cuius logarithmus est 2023-0180. & ideo substituendus pro ipso summæ crurũ logarith: Itẽ differentiæ 360000. sinus proximus est in tabulis 360083. & ideo etiã logarith. eiusdem differentię 33225056. Coniunges igitur istos duos logarithmos simul, & erunt 53455176: Postea basis pedum 9. idest unciarum 108 quatuor zifris auctę, vt sit 1080000. reperies sinum simillimum in tabulis 1079994. cuius logarithmus est 2223-6290. Hunc itaque logarithmum à summa 5345-5176. subducito, & erit logarithmus 3118886. qui dabit sinum 442006. à quo abiectis quatuor zifris restabunt unciæ 44. Idest pedes 3, & $\frac{8}{12}$, pro segmento basis alternæ, Cętera autem exequeris, vt propos. 26.

Patet hæc praxis ex propos. 30. cùm ibi probatum sit aggregatis crurum logarithmum, & differentiæ eorumdem in vnam summam redactum æquari summæ logarithmorum basis veræ, & alternæ. Quare subducto logarithmo basis veræ remanebit logarithmus basis alternæ.

Habitis autem duobus rectangulis, anguli eorum reperiuntur per logarithmos, vt Expens. 2. docuimus.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRICI PARS II.

De Triangulis Sphæricis soluendis.



Triangulorum sphæricorum doctrina astronomiæ, & astrologiæ basis est, nullusq; sine ipsa in illis proficere, aut aliquid ritè cognoscere potest: sed sicut præcipuæ vtilitatis referta est, sic non minima difficultas in demonstrationibus penitùs percipiendis dignoscitur: vnde multi de hac cognitione haurienda diffisi solis praxibus potiùs incubuere. Nos, vt tam præcipua Mathematicæ pars etiam imaginationibus minùs viuacibus pateret clariùs, quàm fieri potuit, tum verbis, tùm figuris cum difficultate decertauimus.

EXPENSIO I.

De rectangulis sphæricis soluendis.

Soluere triangula sphærica est ex datis aliquibus partibus alias manifestare, in quo negotio ritè peragendo videnda sunt ea, quæ diximus prop. 14. & 18. & Coroll. tract. 13. part. 2. vbi euitare fallacias, & amphibologias docemus; ne pro latere, aut angulo quæsito, alium inueniamus, & loco quæsiti adhibeamus, & vt securiùs id fiat, satiùs erit vti semper triangulo, cuius duo anguli ad basim sint quadrante minores, & tales erunt ex cit. Coroll. si, & arcus, cruraque subtensa sint quadrante minora, non verò si vnus sit acutus, alter obtusus angulus, aut crus vnum quadrante minus, alterum verò maius. Quomodo verò possimus semper vti triangulo duos angulos acutos habente infrà docebimus, cum de substitutione.

Aduerte autem, basis in istis triangulis sibi nomen vsurpare crus angulo recto oppositum, crurum verò arcus, qui obliquis subtenduntur, angulus verò adiacens vocatur, qui adhæret cruri, quod efficitur à basi, & altero crure.

THEOR. I. PROP. I.

Triangula sphærica duobus circulis inclinatis effecta, & tertio quocumque altero ipsorum perpendiculari habent sinum cruris ad sinum basis in eadem proportione.

Sint duo circuli inuicem inclinati AAN, & CVN, & alij circuli perpẽdiculares, vt KCT, KBVY, & KGZT alteri ipsorum, vt circulo CVN descendant, & cõpleant triãgula sphærica rectãgula ACN. VBN, & ZGN. Dico, quod ita est ad sinum EN cruris GX sinus GO basis GN, vt ad sinum BR cruris BV sinus BP basis BN, & ad sinum RA radius AS.

Pro-

Probatur. Sinus totus SA, & EP, & GO sunt paralleli, ita sinus RA, EB, & FG sunt paralleli. Ergo triangula RAS, & EAP, & FBD sunt æquiangula, cum parallelis claudátur. Quare ex propos. 4. lib. 6. Elem. ita est AS ad AR, vt EP ad EB, & GO ad GF. Quod autē sinus ER, & FG, & RA sint paralleli patet (& deseruiat pro vniuersali ostensione in alijs) nā debēt esse ex def. sinus perpēdiculares radijs V. g. AR sinus radii CS, vel sinus EE ei, qui transiret ab V per E in S, & cæt. quibus omnibus, vtpote in eodem plano positis perpendicularis est SK sectio planorum circulorum perpendicularium communis ex propos 16. tract. 23. de Intersect. Cum ergo singuli sinus AR, & EB, & GF sint perpendiculares radijs: quibus, & perpendicularis est SK, & in eodem plano, vt SE singuli sint; Ergo ipsi SK sunt paralleli: quare ex prop 9. tract. 23. etiam inter se.

Idem ostendetur de sinubus basium AS, & EP, & GO cum ex def. sinus sint omnes perpendiculares simul toti NS, & in eodem plano sint circuli ABN, quare omnes erunt paralleli.

COROLLARIVM.

OBserua autem, quod AR mensurat angulum ANC. Quoniam KAT ductus est polo N; vnde circuli inclinati inuicem ABN, & CVN transeunt per polum N, quadere etiam circulus KAT per polos illorum transibit ex 15. tract. 21. part. 1. & hac ratione ex prop. 14. eiusdem tract. erit KAT vtrique perpendicularis, ideoque arcus AC ex def. 6. tract 21. part. 1. angulum ANC mensurabit, & AR erit sinus illius anguli sc. arcus AC. Quamobrem erit sinus totus AS ad sinum anguli AR, vt sinus basis EP ad sinum cruris EB illi oppositi.

THEOR. II. PROPOS. II.

Triangula sphærica duobus circulis inuicem inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipsorum perpendiculari habent sinum anguli recti, idest sinum totum ad sinum basis, vt sinus anguli obliqui ad sinum cruris.

QVoniam eadem figura vtendo AS sinus totus est ad AR sinum anguli, vt basis EP ad sinum EB cruris; erit etiam *permutando* sinus totus AS ad sinum basis EP, vt sinus anguli AR ad sinum cruris BE.

PROBL. I. PROPOS. III.

Dato radio, sinu anguli, & sinu basis latus oppositum angulo dato inuenire in rectangulis triangulis.

QVoniam ex anteced. 1. & 2. propos. AS est ad AR, vt PE ad BE, ideo si detur AS sinus totus AR sinus anguli PE sinus basis per regulam auream explicabitur sinus BE cruris EV, qui debebit esse specie cōformis dato angulo. Exēplū erit. Sit basis data Gr. 50 cuius sinus 7660445 angulus Gr. 30. m. 30. Sinus verò 9075384. & sinus totus. Dicaturque, si sinus totus dat sinum anguli Gr. 30. m. 30. par. 9075384. quid sinus basis 7660445. & prodibit sinus cruris angulo dato oppositi par. 9887969. Gr. 22. m. 52. & paulò magis. Debet autem hoc crus conformari specie angulo opposito dato ex prop. 28. tract. 23. Cor. 5.

COROLLARIVM.

HInc educes posse alias comparationes fieri, sed paulò in opere laboriosiores, quæ sunt.

Dato sinu basis EP, & sinu cruris EE, & sinu toto AS reperire sinum AR anguli oppositi N cruri dato EE.

Sic etiam dato CNA anguli sinu RA, & sinu toto AS, & sinu cruris EB reperire basim EP: sed hæ operationes ob diuisionem, quæ debēt fieri cum sinus totus 2. loco inueniatur, sunt paulò operosiores, & in his debet aliqua reliquarum partium cognosci quadrante minor. V. g. quod crus BV, minus quadrante, vel angulus VAN sit acutus.

THEOR. III. PROPOS. IV.

In omni triangulo sphærico rectangulo proportio sinus anguli recti ad sinum anguli non recti, est vt sinus complementi cruris reliquum angulum subtendentis ad sinum complementi ipsius anguli reliqui.

SIt triangulum GEA factum ex duobus circulis inclinatis HGAZ, & LBAK, claudatque alterum latus arcus descendens circuli VGEX perpendicularis super circulum LEAK.

Sitque GN sinus cruris GE, & GI sinus basis GA, sicut HO sinus arcus LH mensurantis angulum A. Numeratis autem à puncto G 90. Gr. & in Q facto polo ducatur arcus QPX perpendicularis circulo HAZ, & circulo VGX ex Coroll. 2. propos. 13. Tr. 19. cum polus sit in communi puncto. Quare OEX, & GSP erunt quadrantes ex prop. 13. eiusdem Coroll. 2. Illud autem, quod in primis est ostendendum SAD, & XPD esse quoque quadrantes.

Probatur autem. Nam VGX circulus secat XPQ circulum orthogonaliter, vt diximus, & bifariam cum sint maximi; Ergo ex prop. 13. tract 23. etiam per polos eius circulus QPX transibit. Pariter quoque LEAK circulus eundem VGX secat orthogonaliter ex dictis, & bifariam, cùm sint maximi. Ergo ex prop. 13. cit. per polos eius circulus SAD transibit. Quapropter in eodem polo circuli VGX duo circuli LAE, & XPQ conuenient in D. Sed poli

ex

ex Coroll.3. prop. est distant quadrante, à circulo, cuius sunt poli. Ergo BAD, & XPD quadrantes sunt cùm debeant distare ab X, & G punctis circuli VGX quadrante. Propterea AD erit complementum arcus B A, crusque PD erit complementum arcus crurisque BA, & PD erit complementum arcus XP, qui mensurat angulum G cum circulis XBG & GAP ex effectione sit perpendicularis. Quadere MD erit sinus arcus AD complementi cruris BA, & DT sinus arcus DP complementi anguli G.

Dico itaque sinum totum HS ad sinum HO anguli obliqui A dicere eam proportionem, quam sinus DM complementi cruris adiacentis A B dicit ad sinum TD complementi reliqui anguli G.



Probatur autem ex præhabitis. Nam propos.1. ostendimus, quod sit, vt SK ad KT, sic MD ad TD quod descendat super alterum inclinatorum HOAP perpendicularis circulus XPQ. Sed S K æquatur SH, cùm sit sinus totus, & KT æquatur sinui HO, cùm sint sinus angulorum æqualiũ ex prop.3. par. 2. tract.23. cum sint ad verticem A, & ideo arcus HL, & XR eos mensurantes erunt æquales; quare etiam sinus HO, & KT subtensi erunt æquales. Quadere ex 7. lib.5. erit SH ad HO sinus totus ad sinum anguli HAL non recti, vt MD sinus complementi AD cruris BA ad TD sinum complementi anguli reliqui G.

PROBL. II. PROPOS. V.

Dato radio sinu anguli, & sinu complementi cruris angulo dato adiacentis inuenire angulum reliquum.

QVoniam radius est ad sinum anguli OH, vt ad sinum TD complemẽti anguli reliqui G sinus MD complementi cruris, ideoque. Si statuatur 1. loco radius, 2. sinus anguli A, sc. HL arcus 3. sinus complementi cruris adiacentis B A inuenietur sinus DT complementi anguli reliqui, nempe arcus PD, qui ablatus à Gr.90. relinquet arcum exoptatum PX mensuram anguli G.

Exemplum. Sit arcus Gr.39. m.25. anguli A; cuius sinus 6349553. Crus AB Gr.47. m 30. cuius complementum sit arcus Gr.42. m.30. & eius sinus 6755902. qui multiplicabitur cum sinu anguli A, & proferet diuisus per sinum totum, Sinum 4289695. DT Gr 25. m.24. & paulò magis, qui arcus deductus à Gr.90. exibebit arcum XP Gr.64. m.36. Debent verò isti arcus dati anguli, & cruris esse quadrante minores ad hoc, vt cruris, accipiamus complementum ex prop.28. tract.22.

Quòd, & obseruandum est in reliquis praxibus, quando complementa interueniunt pro arcubus accipienda.

COROLLARIVM.

HInc quoque inuenies dato primò cruris BA complementi sinu MD, secundò anguli G complemento, cuius sinus DT, & radio, inuenies inquam sinum anguli A dato cruri adiacentis.

Sicut dato 1. sinu HO anguli adiacentis cruri BA, & 2. Radio, & 3. anguli reliqui G cruri dato oppositi complementi sinu DT, inuenies complementi AD cruris BA sinum MD; sed paulò maiori labore ob Radium, qui 2. loco incidit, & hic etiam aduertere oportet ad speciem, nam crus, quòd expromitur debet specie respondere angulo dato, vt sint ambo quadrante minores.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

In omni triangulo sphærico rectangulo sinus quadrantis ad sinum complementi cruris eam obtinet proportionem, quam sinus complementi reliqui cruris ad sinum complementi basis.

SIt sphæra, in qua sit triangulum ABC ex circulis inclinatis inuicem DAG, & EBG, claudatque alterum latus arcus perpendicularis VABC. Eritque FB sinus totus, & SAV quadrans, & VA arcus complens crus BA vsque ad quadrantem VS, & sinus eius AH parallelus sinui toti BF in superficie circuli VABC descriptus. Arcus verò EB complentis crus BG sinus BI in plano circuli EBG. Sicut etiam arcus DA basim AG complentis sinus AL in planitie circuli DAG descriptus.

Dico itaque, quòd sicut se habet sinus totus FB ad sinum BI complementi cruris, ita in proportione assimilatur sinus AH complementi reliqui cruris ad sinum AL complementi basis.



Probatur ex 1. propos. h. Nam VABC, VDBC sũt circuli inclinati inuicem, & arcus EB circuli EBC mensurat angulum inclinationis ad V cùm polus eius sit in V. Vnde EV, & VB sunt quadrantes. Alius autem circulus DAG perpendiculariter super alterum ipsorum, nempe super VBC descendit à puncto G, quòd eius polus in circuli VEC circumferentia existat. Quare ea prop.1. hic verificatur, eritque FB ad BI, vt AH ad LA, eo quod sint parallelæ lineæ AL, & BI, vtpote sinus perpendiculares semidiametris DF, & BF, & etiam BF, & AH eo quòd sint perpendiculares, vtpote sinus radio FV. Cum ergo lineæ sint parallelæ erunt triangula æquiangula ALH, & IBF, & ideo latera erunt proportionalia, & erit FB ad BI, vt AH ad AL.



PROBL. III. PROPOS. VII.

Dato radio, & sinu complementi cruris, & complementi cruris alterius basim inuenire.

QVoniam est radius BF ad BT sinum complementi cruris BG, vt AH sinus complementi alterius cruris BA ad sinũ AL complementi basis: adhibendo regulam proportionum ex radio, & ex ijs sinubus datis complementorum crurum prodibit sinus complementi basis.

Exemplum. Sit datum crus Gr. 42. cuius complementum G. 48. & sinus 7431448. complementi huius, & alterum crus Gr. 33. m. 15. cuius complementum Gr. 56. m. 45. & eius sinus 8457278. Multiplicentur simul, & productum per radium diuidatur, prodibitque sinus complementi basis 6284982. Gr. 38. m. 56. & paulò magis, erit autem minor quadrante basis, si crura specie concordauerint; si verò dissentiant specie, maior quadrante ex prop. 18. Tract. 23. Cor. 4.

COROLLARIVM.

HInc etiam eruitur; quòd dato sinu BT complementi cruris BG, & sinu toto, & sinu AL complementi basis, inuenietur sinus AH complementi cruris reliqui AB; Vel etiam dato AH sinu cõplementi cruris BA, & sinu complemẽti basis AL, & radio BF, inuenietur sinus BT complementi alterius cruris; Verùm cùm radius non veniat primo loco paulò operosior est calculus.

EXPENSIO II.

De tangentibus.

QVoniam per solos sinus trigonometria non est perfecta, cùm non omnes possint inquiri rectangulorum partes secundùm omnia data, per quæ inquisitio placeat ordiri, & etiam quędam per solos sinus laboriosiùs sequirantur, ideo, vt illorum defectibus succurrant, tangentes adinuentæ sunt, & secantes. Sed priùs de tangentibus in hac expensione tractabimus, cum ipsæ cum sinubus ad soluendos omnes casus trigonometriæ sufficere possint. Sed præterea, quæ diximus prop. 24. & 25. Tract. 20. hic etiam aliæ pręuię propositiones statuendæ sunt.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Si sint duo arcus, ita erit tangens primi ad tangentem complementi posterioris, vt tangens posterioris ad tangentem complementi prioris.

SInt duo arcus primus RV, & RY secundus. Dico quòd sicut tangens prioris QV est ad tangentem complementi posterioris VS, sic tangens postremi YM ad tangentem complementi prioris YP.

Probatur. Tangens QV est ad radium, vt radius ad tangentem VP complementi ex prop. 25. Tract. 20. Et tangens YM arcus posterioris refertur quoque ad radium, vt radius ad SV tangentem sui complementi: vnde etiam erit *inuertendo* Radius ad YM, vt SV ad radium: quamobrem dispositis ritè terminis est proportio perturbata.

Vt QV ad Rad. Et vt Rad. ad YM;
Ita SV ad Rad. Sic Rad. ad YP.

Quare ex *æquo* ex def. 18. Tr. 9. erit quoq; VQ ad YM tangentes arcuum, vt SV ad YP tangentes complementorum, sc. prioris, & posterioris, & *permutando* VQ ad SV, vt YM ad YP, nempe tangens primi QV ad tangentem complementi secundi SV, vt YM tangens huius ad YP tangentem complementi prioris.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Si sit arcus, cuius radius referatur ad sinum suum, sicut tangens alicuius secundi refertur ad tangentem alterius tertij. Sic quoque refertur tangens complementi huius tertij ad tangentem complementi illius secundi, vt radius primi ad suum sinum se habebat.

PRobatur ex propos. 16. lib. 5. Nam eidem proportioni tertiæ arcuum tangentis VQ ad YM sunt duæ proportiones eædem radij RN V. g. ad sinum OB arcus alicuius ex T basi. & ex præc. contextu VP ad VS, quare erit etiam eadem proportio RN ad RO, quam YP ad SV.

THEOR. III. PROPOS. X.

In triangulo sphærico rectangulo sinus cruris est ad tangentem alterius cruris reliqui, vt radius est ad tangentem anguli reliquo cruri oppositi.

SInt duo circuli inclinati APG, & EFH, & huic circulos normalis TDL descendat, claudatque triangulum IDF. Dico quòd DC sinus cruris DF est ad DO tangentem alterius cruris DI secundi, vt EN radius est ad EB sinum anguli IFD.

Probatur. Nam tangentes EB, & OD, vtpote perpẽdiculares ex 20. lib. 3. Elem. radijs DN, & EN, & ideo parallelæ radio NT erunt perpendiculares EFH plano, cui radius NT perpendicularis est, quare inuicem quoque erunt

par-

parallelę,& insuper DO erit perpendicularis, sinus DC parallelæ radio EN. Quapropter triangula ENB, & ONC erunt æquiangula, tanquam parallelis constantia ex 4. lib.6. Elem. & ideo DC erit ad DO, vt radius EN ad BB tangetem anguli IFD.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato radio, & sinu cruris adiacentis angulo, & tangente ipsius anguli & cruris oppositi tangentem reperire dato angulo specie conformem.

QVoniam diximus DC sinum cruris esse ad DO tangentem cruris alterius vt radius ad tangentē EB anguli F erit etiam *permutādo* DC sinus ad EN radium, vt DO tangens cruris ad BB tangentem anguli, & *inuertendo* radius EN erit ad DC sinum, vt tangens BB anguli F ad tangentem DO cruris oppositi DI. Quare dato radio primo loco; deinde sinu cruris, postea tangente anguli adiacentis, prodibit tangens cruris oppositi conformis spetie dato angulo ex Cor.5.prop.28.Trac.23.

Exemplum. Sit crus Gr.29. m.80. cuius sinus 4898897. Anguli adiacentis tangens Gr.21.m.45. quæ est 3989596. Multiplicentur simul, & numerus genitus diuisus per radium proferet tangentem 1954461; quæ est Gr.11. m.3. & paulò magis. anguli oppositi.

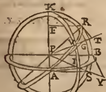
COROLLARIVM.

HInc etiam; Dato primò tangente EB anguli F, secundò radio EN; tertiò tangente cruris oppositi angulo dato poterit inueniri crus adiacēs, vt præced. patet. Sicut etiam dato sinu DC cruris, & data tangente alterius cruris DO, & radio angulus F oppositus alteri crurum extrahi poterit: sed paulò laboriosiùs, quæ tamen inuenta datis debent esse esse spetie conformis ex prop.28. Tr.23. Cor. 5.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

In triangulo sphærico rectangulo radius est in proportione ad sinum complementi anguli non recti, vt tangens basis ad tangentem cruris dicto angulo adhærentis.

SIt sinus RF complementi arcus BR anguli A; Tangens autem cruris AI sit AS, at basis AV tangens sit AO. Ex præced. radius PB ad sinum FR



adiacentis cruris angulo X dicit eam proportionem, quam tangens AY anguli X ad tangentem RY oppositi cruris. Verùm ex 8. huius, sicut est BY ad RY; ita est complementi posterioris arcus tangens AG ad tangentem SA complementi arcus prioris: Ergo etiam ex prop.16. lib.5. Elem Radius BP erit ad sinum RF complementi KR arcus RB anguli A, vt AG tangens basis VA ad SA tangentem cruris IA angulo A adhærentis triang. ALV.

PROBL. II. PROPOS. XIII.

Dato radio, & sinu complementi anguli, & tangente basis inuenire crus adiacens angulo dato.

FAciliter id fit ex præced. per regulam auream Nam cum sit radius ad sinum complementi anguli, vt tangens basis ad tangentem cruris. Sinus complementi āguli multiplicetur cum tangente basis, & diuidatur per radium, prodibit tangens cruris quæsiti adiacentis.

Exemplū. Sit arcus āguli G.33.m.20.cuius cōplementū G.56. m.40. & eius sinus 8354878. Sit verò basis Gr.42 cuius tangens 9004040. Multiplicentur simul, & genitus numerus per radium diuisus dabit tangentem 7522765. Gr.36. m 57. & paulò magis. Hoc autem crus debet esse spetie conforme angulo dato ad vitandas fallacias prop.28. Coroll.5. Tract. 23.p.2.

COROLLARIVM;

HInc etiam posset data tangente anguli AS, & radio, & tangente AG basis extrudi sinus RB complementi anguli A cruri dato adiacentis. Verùm operosiùs.

THEOR. V. PROP. XIV.

In rectangulo sphærico radius est ad tangentem anguli in eadem proportione, quam obtinet sinus complementi basis ad tangentem complementi alterius anguli.

SIt triangulum IAV, & basis VB complementum sit AB, mensura verò anguli V sit arcus FB ductus polo V, cuius complementum, vt ostendi prop.5. huius est arcus BH. Dico, quod radius PC est ad tangentem NM anguli A, quam sinus SB complementi basis possidet ad tangentem BE complementi BH anguli V.



Pr. Ex pr.10.h. Ita est PC radius ad CD tāgentē anguli HAB, vt sinus cruris adiacentis SB ad tangentē BE cruris oppositi BH; Sed hoc crus BH est cōplemētū anguli V, & CD æquatur tangenti MN, cū sint tangētes æqualiū angulorū ad verticē A ex 3. tr.23.p.2. Ergo radius erit ad tangentē NM anguli A trianguli

IVA, vt finus SX complementi basis ad tangentem, SS complementi alterius anguli V.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Dato radio, & tangente anguli, & sinu complementi basis, tangentem compl. alterius anguli reperire.

QVoniam ex præced. radius est ad tangentem anguli, vt sinus complementi basis ad complementi reliqui anguli tangẽtem, adhibita regulá proportionum postulatam exhibebit tangentem.

Exemplũ. Detur radius, & anguli G 45. m.19. tãgẽs 10111153. & basis G.62 m.55. cõpl. G.27. m 5 sinus sit 5113589. qui numeri inuicem multiplicati exhibebũt 5170428 pro tãgẽte quęsita cõpl. anguli alterius G.27.m.20. Vnde ãgulus erit G.62.m.40. qui debet esse minor quadrãte, quòd data ãgulus, & basis esse debeant quadrante minora, at si basis sit maior quadrante angulus esset obtusus ex cit. propos.28. Tr.23. Cor.2. p.2.

COROLLARIVM.

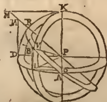
POssent etiam alio pacto ordinari termini statuto primo loco CD, vel MN tãgente anguli oppositi, 2. loco radio, 3. loco anguli alterius complemẽti tãgente, & prodiret sinus SS compl. basis.

Vel 1 sinus SSc cõplementi, 2. tangens complementi anguli, 3. radius, generaret anguli tang. CD, vel NM. Sed facilius hæc quæsita alio pacto venabimur. Debent autem datã esse quadrante minora ob vsum complementorum ex propos.4. Tract. 27. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Trianguli sphærici rectanguli radius ad tangentem cruris eadem proportione potitur, quã tangens complementi basis ad sinum complementi anguli adiacentis.

IN triangolo XRV, cuius angulus rectus R; basis verò VX, tangens verò IX eius complementi IV, & crus sit KR, cuius tangens KM, & tangens eius complementi DN. Arcus, qui angulum K mensurat sit DI, cuius complementum sit IA, & eius sinus TO. Dico, quod Radius XP est ad tangentem cruris XM in proportione illa, quam habet tangens complementi basis IB ad sinum IO complementi anguli K.



Probatur ex propos.10: Sinus IO, est ad tangentem IB, vt radius DP ad tãgentem DN anguli A. Quare inuertendo DN tangens erit ad radium, vt IB tangens ad IO sinum ex prop. autem 25. Tr.20. vt DN refertur ad DP, ita DP radius ad MK tangentem complementi eiusdem arcus. Quapropter vt DP ad MK, sit proportione correspondebit IV ad IO tangentem. Radius itaque est ad XM cruris RK in rectangulo RKV, vt tangens IB complementi IV basis VK, ad sinum IO arcus IA complentis arcum DI mensuram anguli K.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato Radio, & tangente cruris adiacentis, & tangente complementi basis sinum complementi anguli dato cruri adiacentis inuenire.

QVoniam tangenti MK radius eã proportione refertur, quã tangens complementi basis ad sinum complementi anguli IO adhibita regula proportionum ex tribus primis datis desideratum sinum IO exhibebit, vt exemplum docet.

Exemplum. Sit crus G.27.m 32. cuius tangens est 5213067. Basis verò compl. sit G.49.m.10. cuius tangens 11571494. Multiplicenturque simul, & productum per radium diuidatur, abiectis 7. zifris ad dextram, vt moris est, & prodibit sinus 6032297. qui est Gr 37. m.6. & paulò magis, qui subductus à Gr.90. efficietur angulus exoptatus Gr.42. m.54. Obseruaque quòd ea, quæ dantur sint specie cognita quadrante minora ob vsum complementorum; vnde, & angulus, qui eruitur debet esse acutus ex prop.28. tract.23. Cor.3.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Radius est ad tangentem complementi anguli, vt tangens cruris dicto angulo oppositi ad sinum cruris adiacentis.

SIt triangulum AVI in præced. fig. Deturque angulus A, cuius tangens est DN; complementi verò eius anguli tangens est XM; crus autem oppositum est IV, cuius tangens IB; sinus verò lateris adiacentis AI est IO. Dico itaque, quòd radius PX est ad MK, vt IB ad IO.

Probatur DN est ad DP, vt IB ad IO inuertendo propos.10. huius; sed vt tangens DN ad radium DP, ita ex propos.25. tract.20. est radius PX ad tangentem MK compl. Ergo vt radius PK ad tangentem MK complementi XR anguli A; sic tangens IB cruris oppositi ad sinum cruris adiacentis IO.

PROBL. V. PROP. XIX.

Dato radio, & tangente complementi anguli, & tangente complementi cruris, sinum cruris adiacentis angulo dato inuestigare.

QVoniam hęc quatuór sunt proportionalia radius ad tangentem complementi anguli. Sicut tangens cruris oppositi ad sinum cruris adiacentis; ideo regula proportionum institutum complebit.

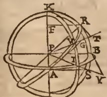
Exem-

Exemplum. Sit datus angulus Gr.62. m.28. cuius complementum est Gr.27. m.32. Tangensque eius 5213067. crus verò Gr.18. m.26. cuius tangens est 3333020. multiplicati itaque isti numeri simul, & diuisi per radium dabunt sinum 1737525. exoptatum; qui est Gr.10, & paulò amplius; Opus autem erit obseruare, vt specie sit crus, quòd eruitur, & conforme datis, ex prop 18. tract.23. p.2. coroll. 5. & 6. quæ sumenda erunt quadrante minora.

THEOR. VIII. PROP. XX.

Radius est ad sinum complementi anguli, vt tangens complementi cruris adiacentis ei ad tangentem complementi basis in sphærico rectangulo.

IN præced. fig. prop.12. huius detur triangulum sphæricum rectangulum AIV, & angulus RAS, cuius complementum RX, & sinus eius BS. Basis sit AV, cuius complementum VR, & eius tangens TR, crus sit AI, cuius complementũ IB, & tangens ipsius BY. Dico, *quod* PB *radius est ad* BS *sinum complementi anguli*, vt tangens BY complementi cruris est ad tangentem TR complementi basis.



Probatur; Nam, vt ostendi propos. 10. huius, vt BP ad BY, sic SR est ad TR; Ergo *permutando* radius BP erit ad PR sinum, vt BY tangens ad TR tangentem; sed PR est sinus complementi RX arcus PR anguli A, at BY complementi BI cruris IA tangens, & TR complementi RV basis AV tangens. Ergo patet propositum.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Dato Radio, & sinu complementi anguli, & tangente complementi cruris, & spetie cruris, aut anguli reliqui inuenire tangentem complementi basis, & inde basim.

IVxta præced. propos. cum hæc proposita sine proportionalia regula proportionum ex postulata largietur.

Exemplum. Sit datus angulus 23. Gr. cuius complementum est Gr.77. & eius sinus 9743700. Et crus 37. Gr. cuius complementum est Gr.53. eiusque tangens 13270448. qui numeri simul ducti, & per sinum totum diuisi dabunt tangentem 12930326. Gr.52. m.27. qui Gr. subducti à 90. exhibebunt arcum exoptatum basis Gr.37. m. 43. Si autem data cognita quantitate spetie consonent basis erit quadrante minor, si dissonent maior ex Cor.4. prop.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXII.

Radius est ad tangentem complementi anguli obliqui in rectangulo sphærico, vt tangens complementi reliqui obliqui ad sinum complementi basis.

TRiangulum datum sit AVI in fig. prop.14. h. tangens verò complementi anguli A, seu arcus eum mensurantis, sit KM: Complementi verò basis sit AE, & sinus SE, & alterius anguli V, quē arcus FE mensurat sit complementum EH, tangens BS. Dico igitur, quòd radius PK ex proportione refertur ad MK, quà BZ ad BS.



Probatur; Nam ex 10. h. ita est SE ad BE, vt PC ad CD: Ergo *inuertendo*, vt SE ad ZS sic dicens CD ad CP, sed ob radii nec non, & tangentis æqualitatem, vt CD ad CP radium, ita est NM ad NP: At vt NM ad NP, sic ex propos. 25. tract.30. est radius PK ad MK. Ergo vt est radius PK ad MK tangentem complementi anguli A, sic est SZ tangens complementi anguli reliqui ad ZS sinum complementi basis.

PROBL. VII. PROPOS. XXIII.

Dato sinu toto, & tangente complementi anguli, & tangente complementi alterius anguli inuenire tangentem complementi basis.

PAtet operatio ex præced. quia cum datæ, & quæsitę tangens basis sint proportionalia, inuenietur per regulam proportionum.

Exemplum. Sit datus angulus Gr.36. cuius complementum est Gr.44. & tangens 9656888. Alterius verò anguli Gr.48. sit complementum 32. & tangens sit 6248693. qui numeri multiplicati simul exhibebunt pro tangente complementi basis numerum, qui diuisus per sinum totum erit 6034292. Gr.31. m.6. ferè, qui subducti à 90. Gr. erunt Gr.58. m.54. basis. Debent autem sumi anguli quadrante minores ob vsum complementorum: vnde, & basis erit quadrante minor ex prop.28. par.2. tract.23. Cor.4.



THEOR.

THEOR. X. PROP. XXIV.

Radius est ad sinum cruris, ut tangens complementi alterius cruris ad tangentem complementi anguli oppositi.

DEtur triangulum ERV in fig. propos. 12. & duo eius crura AR, & RV, quæ ambiant angulum rectum R, sinus autem cruris AR sit FR; tangens verò RV cruris sit RT, & eius cõplemẽti AV sit AG, at arcus angulum E mensurantis tangens sit BY, & complementi sit AS: Dico igitur, quod sicuti PS radius est ad FR sinum cruris, ita AG tangens complementi cruris est ad AS tang. complementi anguli E oppositi.

Probatur. Nam ex prop. 10. huius, ita est sinus FR ad RT tangentem, vt PS radius ad tangentem BY; Ideoque *permutando* FR erit ad PS, vt RT ad BY, & *inuertendo* PB radius erit ad ER sinum, vt BY tangens ad RT tangentem: sed vt BY tangens ad RT tangentem sic ex propos. 8 huius tangens AG complementi arcus secũdi VR est ad SA tangentem complemẽti primi ER: Ergo sicut est radius PS ad sinum FR, ita tangens AG complementi cruris ad tangentem AS complementi anguli E.

PROBL. VIII. PROPOS. XXV.

Radio dato, & sinu cruris, & tangente complementi cruris alterius tangentem complementi anguli obliqui inuenire.

IAm ex præc. patet, quòd cum hæc sint quatuor proportionalia datis tribus vltimum regula aurea inuenire possimus, vnde.

Exemplum erit. Sit arcus Gr. 37 m. 15. cuius sinus sit 6052940. & arcus alter, qui crura rectanguli confiriant Gr. 23. m 47. cuius complementi Gr 66. m. 13. tangens est 22690909. Multiplicentur simul, & radio genitum diuidatur, & generabunt 13734671. qui numerus erit tangens Gr. 53. m. 56. ferè complementi anguli quæsiti. Vnde arcus Gr. 36. m 4 erit angulus quæsitus.

Porrò in omnibus istis obseruanda est regula generalis, vt si quando dantur crura quadrante maiora, vel basis, aut angulus assumatur vicarium eius triangulum residuum, vt infra docebimus. Et cum vtimur triangulo vicario: simul corollaria prop. 28. tract. 23 part. 2. vbi docemus quænam crura quosnam requirant angulos, vel quinam anguli crura sibi conuenientia reposcent, sunt obseruanda

EXPENSIO III.

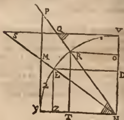
De secantibus.

QVamuis per solos sinus, & tangentes omnis trigonometria rectangulorum absoluta esset; quia tamen in tribus casibus, qui prop. 6. solui possunt. Sinus totus primo loco non venit, Ideo tum ad abundantiam doctrinæ, tum etiam, vt in eis facilior calculus eueniat, etiam secantium tabulæ conditæ fuerunt; sed antequam ad problemata, quę rectangulorũ docent solutionẽ, deueniamus; quædam secantium inter se, vel ad sinus exponendę sunt habitudines.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Duorum arcuum, sinus complementi primi ad secantem secundi est, vt sinus complementi posterioris ad secantem arcus prioris.

SInt duo arcus, primus VE, & EY secundus in fig. pr. 8. & eorum sinus complementorum RT, & EN, secantesque NQ, & NM, Dico, quòd ita est TR sinus complementi primi ad secantem secundi NM, veluti proportione respondet sinus complementi secundi ED ad secantem primi NQ.



Probatur. Ita est TR sinus, seu ON ad radium NR, vt radius NV, siue idem NR est secantem NQ, & vt est ZO, seu NZ sinus complementi ad radium EN, ita radius NY ad secantem NM ex pr. 26. tr. 20. & ideo NM erit *inuertendo* ad radium, vt rad. ad ZN. Quare est proportio perturbata, vt in dispositis terminis potes videre.

vt RT est ad R. At vt R. ad EN.
Ita NM est ad R. sic R. ad QN.

Vnde ex *æquo* arguere possumus ita esse RT ad ED, vt NM ad NQ. & ideo *permutando* ita erit RT sinus complementi prioris arcus ad NM secantem arcus posterioris, vt ED sinus complementi arcus posterioris ad NQ secantem arcus prioris.

COROLLARIVM I.

HInc deducitur esse quoque *inuertendo* secantem prioris arcus NQ ad complementi sinũ secundi ED, vt secans arcus posterioris MN ad sinum complementi arcus prioris RT.

Rursusque quòd vt sinus TR primi arcus YR ad secantẽ NM cõplementi secundi EV, sic sinus EN arcus EV huius ad secantẽ NQ complementi arcus prioris RY mutatis, tantùm arcuũ denominationibus, vt sinus dicatur arcus, qui erat complementi, & secans complementi, quæ arcus secans erat.

COROLLARIVM II.

IDeoque erit etiam *permutando* sinus primi ad sinum posterioris, vt secans complementi posterioris ad secantem prioris complementi, vel etiam sinus complementi prioris ad sinum complementi posterioris, vt secans posterioris arcus ad secantem prioris.

THEOR.

THEOR. II, PROPOS. XXVII.

Si sit arcus, cuius sinus ea ad radium proportione feratur, quà sinus complementi alius secundi ad sinum complementi alterius tertij; secans quoque tertij ad secatem secundi eam habebit proportionem, quam sinus primi arcus ad radium consequitur.

PRobatur. Quoniam ex prop.16. lib.5. Elem, quæ eidem rationi sunt eędem rationes, & inter se tales sunt. Ponitur verò id in ipsa propos. nam ex thesi sinus primi arcus ponitur ad radium & secans posterioris alius tertij ad secātem secundi, vt sinus complementi secundi ad sinum complementi tertij. Quapropter etiam inter se simili proportione gaudebunt secans tertij ad secantem secundi, quæ Sinus primi ad Radium.

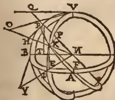
COROLLARIVM.

IDem quoque erit si sinus sint arcuum, & secantes complementorum, vt per se patet.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Vt Radius refertur ad sinum basis, sic se habet secans complementi cruris oppositi ad secantem anguli.

SIt triangulum sphæricum rectangulum AKD, cuius basis AK, & eius sinus VK, ad quem ex dictis de sinubus prop.1. h. eandem proportionem gerit sinus totus NR, quam sinus RT anguli A ad sinum cruris KK, secans verò complementi KV arcus, nempe cruris DK est NO. Secans verò complementi VR arcus RK mensuræ anguli A est NQ. Dico itaque, quòd sicut est sinus totus NR ad sinum basis VK, ita se habet secans NO ad NQ secantem complem. anguli.



Probatur. Nam sinus TR tamquam primi arcus est ad sinum cruris KK tamquam secundi arcus, vt radius NR est ad sinum basis VK: sed ex propos.26. huius, vt sinus primi arcus ad sinum secundi arcus, nempe RT ad KR, sic assimilatur in proportione secans NO cōplementi VK secundi arcus KD secanti NQ complementi primi arcus BR; Ergo ex 16. vt radius NR ad VK sinum basis, ita secans NO cruris complementi KV ad secantem NQ anguli A complementi RV.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Dato Radio, sinu basis, & secante complementi cruris inuenire secantem complementi anguli oppositi.

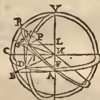
QVoniam data, & quæsitum sunt ex præced. quatuor proportionalis poterit ad quærendum quartum adhiberi regula proportionum, vnde stabit.

Exemplum. Sit datum triangulum rectangulum, cuius basis Gr.43. & sinus eius 6819984. crus verò sit Gr.37 & complementum Gr.53. cuius secans est 1661640t. Ducantur simul, & productus diuisus per sinum totum erit secans 1133358. Gr.58. m.4 paulo auctior complementi anguli, qui gr. subducti à 90. dant Gr.61. m.56. Debet verò angulus conformari speciæ dato cruri ex prop.28. tract.23. Coroll.5.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Radius est ad sinum complementi cruris, vt secans basis ad secantem reliqui cruris.

IN triangulo rectangulo AKD sit sinus LK complementi KV cruris DK, & PK sinus complementi KR basis AK, cuius secans est GN, & sinus ID complementi BC reliqui cruris DA, cuius secans est NK: Dico, quòd radius ND est ad sinum ID, vt secans NG basis ad secantem reliqui cruris NS.



Dictum est supra prop.5. huius, vt ND rad. ad DI, sic LK esse ad KP: Ergo *permutando* ND radius erit ad sinum LK complementi cruris, vt ID sinus arcus DC prioris ad PK arcus KR posterioris. Sed ex prop.26. huius, vt ID ad PK, ita est NG secans arcus AK complementis KR posterioris ad NK secantem arcus AD complementi arcus prioris DC: Ergo ex 16. lib.5. vt radius ND est ad sinum LK complementi cruris, sic secans NG basis, ad secantem NK reliqui cruris.

PROBL. II, PROPOS. XXXI.

Dato Radio, & sinus cruris, & secante basis inuenire secantem reliqui cruris.

PAtet prob. ex præc. qua ostendimus quatuor proposita esse proportionalia, vnde per regulam auream quęsiti cruris sinum cognoscemus.

Exemplum. Sit crus Gr.39. m.18. cuius complementum Gr.50. m.42. & sinus 7738401. Sit quoque

quoque basis Gr.44.m.36. cuius secans 14044431. quam cum numero sinus multiplicabis, & diuidea per radium, & exhibebit secantem 10868145 Gr. 23. m.4. sed paulò minus reliqui cruris; obserua verò Cor.2. & 3. prop.28. tract.23.

THEOR. V. PROPOS. XXXII.

Radius est ad secantem cruris, vt secans alterius ad secantem basis.

TRiangulum in præc. fig. sit AKD, secans basis NO, secans cruris NO, secans alterius cruris Na. Dico itaque, quòd ea proportio militat radij ND ad secantem ON, quæ secantis NB ad secantem GN.

Probatur LK sinus complementi cruris est ad radium ND, vt radius ND ad secantem NO ex prop. 26. Tract.20. qui sunt in eadem superficie circuli VKD: Sed vt est sinus LK ad radium ND, ita est sinus Pa arcus KR primi complementi ad ID sinum DC postremi complementi, & ideo ex præc. prop. 26.h. vt Na secans postremi arcus ad NG secantem primi arcus. Ergo, vt radius ND ad secantem NO, ita est secans NB ad secantem NG.

PROBL. III. PROPOS. XXXIII.

Dato radio, & secante cruris, & secante alterius cruris inuenire secantem basis.

HOc regula aurea operi committitur, vt ex præc. patet ob proportionem quatuor terminorum in thesi propositorum.

Exemplum. Sit crus Gr.28. m.7. cuius secans 11337999. eiusque aliud G.87. m.18. cuius secans sit 212294614. quę multiplicata per exhibitam secantem alterius cruris, & postea diuisa per radium expromet secantem 240699612. Gr.87. m.37. & paulò minùs, erit itaque basis minor quadrante; quia crura in hoc casu spetie concordant, at si spetie dissonent, basis erit maior quadrante ex Cor. 4. prop.28. tract.23.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIV.

Radius est ad sinum anguli obliqui, vt secans alterius ad secantem cruris oppositi.

SIt angulus A obliquus trianguli AKD, cuius sinus RT, sinus verò totus RN, secans NZ anguli K reliqui; secans verò cruris oppositi Na,



Dico, quòd radius RN, ita proportione correspondet ad sinum TR anguli A, vt secans NZ anguli K reliqui ad secantem Na cruris oppositi angulo K.

Probatur. Dictum est de sinubus propos.4.h. sinum FI complementi lateris AD, ita esse in proportione ad cõplementi sinũ IO, sicut radius NL, seu NB ad sinũ LM, seu æqualẽ RT anguli A: sed vt sinus complementorum sunt inuicem, sic secantes arcuum inuersè in eadem proportione sunt: quare secans NZ anguli A ita erit ad secantem Na cruris oppositi AD, vt sinus FI cõplementi cruris ad sinum IO complementi anguli ex 26. prop. h. 6. Cor. 2. & ideo erit ex 16. lib.5. vt radius NR ad sinum TR, sic secans NZ ad secantem NB.

PROBL. IV. PROPOS. XXXV.

Dato radio, & sinu anguli, & secante alterius anguli, secantem cruris inuenire huius alterius anguli oppositi.

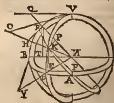
PAtet id regula aurea posse operi demandari, cum habeamus ea præced. quatuor proportionalia, quorum tria dantur, quartum inquiritur.

Detur angulus 37. Gr. & alter angulus Gr.58. sinus primi sit 6018150. secans secundi sit 18870800. qui numeri simul multiplicati, abiectisque ob diuisionem sinus totius 7. figuris dextris proferet secantem 11356730, quæ est G.28. m.17. proximè cruris oppositi, quod debet esse concors in spetie angulo opposito ex Coroll.2. propos.28. tract.23.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVI.

Radius est ad sinum anguli, vt secans complementi cruris ei oppositi ad secantem complementi basis.

TOtus sinus sit NR; sinus autem anguli A sit RT, & secans complementi aa basis aA sit NH, ac secans NO tandem complementi VK cruris DA. Dico, quòd ea proportione refertur sinus totus NR ad sinum RT anguli A, quà secans NO complementi cruris ad secantem NH complementi basis.



Probatur. Nam similem proportionem dicit sinus NR totus ad sinum RT anguli, quam sinus FK basis ad sinum Za cruris anguli A oppositi, ex pr.2. Cor. de sinubus; sed hanc quoque proportionem dicunt secantes complementorum, & vt est sinus primus basis KF ad sinum secundum cruris KB ita est secans NO complementi VK huius ad secantem NH complementi Ra primi arcus AK. Quapropter ex 16. lib.5. ita quoque radius NR erit ad ad sinum RT anguli A, vt secans complementi cruris NO ad secantem complementi basis NH; quòd tertiæ proportionl FK ad KB consentiant.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXVII.

Dato Radio, & sinu anguli, & secante complementi cruris ei oppositi, basis complementi secantem inuenire, si tamen reliquum crus, seu reliquus angulus spetie notus sit.

QVoniam ex anteced. exhibita sunt quatuor proportionalia, ideo regula aurea ad inquirendum quartum est adhibenda, & sic erit.

Exemplum. Sit angulus Gr. 50. cuius sinus 7660445. Arcus cruris 41. m.48. cuius complementum Gr.48. m.12. & secans 15003020. qui numeri multiplicati inuicem, & per radium diuisi dant 114980. Gr.29. m.35. proximè, qui subducti à Gr.90. dant Gr.60. & m.29. pro basi.

Aduerte autem, quod si anguli, vel crura vnum quidem notum quantitate alterum spetie concordauerint, basis erit quadrante minor, si non concordauerint maior ex Coroll.3. & 4. propos.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Radius est ad secantem cruris, vt secans complementi anguli adiacentis ad secantem anguli oppositi.

IN Schemate prop.34 sit triangulum KAD, & eius sinus totus NR, secans NQ complementi anguli A erit; at secans cruris angulo A adiacentis sit NB; secans verò anguli K sit NZ. Dico itaque, quòd NR radius est ad secantem NB, vt secans NQ est ad secantem NZ.



Probatur ex 4. huius, vt NL radius est ad sinum LH æqualem sinui RT anguli A; sic IF complementi cruris sinus est ad IO sinum complementi alterius anguli K: Ergo *permutando*, vt LN ad IF, sic LH ad IO; & *inuertendo*, vt IF ad LN, sic IO ad HL: sed vt IF sinus complementi ad LN radium, sic est radius ad illius arcus secantem; quæ est NB cruris ex Tract.20. propos.26. Ergo, vt est radius NL ad secantem NB cruris, sic est sinus IO complementi vnius anguli K ad sinú HL, vel RT alterius A: sed vt sinus IO ad HL, sic est secans NQ cóplementi huius HL, vel æqualem RT ad secantem complementi prioris NZ, qui est arcus anguli K ex Cor.2. prop.26. Ergo ex 16. lib.5. vt radius NR ad secantem NB cruris, sic secans NQ complementi A anguli ad secantem NZ anguli K.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIX.

Dato radio, & secante cruris, & secante complementi anguli adiacentis secantem anguli oppositi reperire.

QVoniam proposita sunt quatuor proportionalia ex prędict. propos. regula proportionum, quartum, quod exposcitur, inuenietur.

Exemplum detur crus Gr.25. cuius secans sit 11033783. & angulus Gr.32. m.55. cuius complementum est Gr.57. m.5. & secans 18402017. multiplicentur simul, prodibitque numerus, qui per radium diuisus restabit 20304386. quæ est proximè secans Gr.60. m.29. angulus ipse, qui desideratur, qui debet esse spetie conformis dato cruri ex propos.28. Cor.6. Tr.33.

THEOR. IX. PROP. XL.

Radius est ad sinum complementi cruris, vt secans anguli obliqui oppositi ad secantem complementi anguli obliqui alterius, qui cruri adiacet.

RAdius NL in pręc. fig. sinus cōplementi cruris AD triāguli KAD rectāguli est IF secans anguli K est NZ; & secans NQ cōplementi VR anguli obliqui alterius A. Dico itaque, quòd radius NL est ad IF sinum complementi cruris, vt secans NZ anguli oppositi ad secantem NQ anguli adiacentis.

Probatur. Nam iam dictum est prop.4. sinum NL esse ad LH, seu RT sinum anguli A, vt IF sinus complementi cruris AO ad sinum IO complementi guli K. Ideo *permutando* NL erit ad IF, vt LH ad IO: sed vt sinus LH anguli A ad IO sinum; sic secans huius complementi NZ, qui est arcus anguli K ad secantem prioris complementi NG, seu æqualem NQ. Ergo, vt est radius NL ad IF sinum complementi cruris; sic est NZ secans arcus anguli oppositi ad secantem NQ complementi alterius anguli adhęrentis cruri AD.

PROBL. VII. PROPOS. XLI.

Dato radio sinu complementi cruris, & secante anguli obliqui oppositi secantem complementi anguli cruri adiacentis reperire.

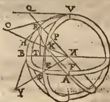
REgula proportionum habet in hac operatione locum, cum in antecedenti propos. ostensa sint tria data, & quartum quæsitum proportionalis.

Exemplum. Sit crus 19. Grad. cuius complementum Gr.71. & sinus eius 9455186. Anguli Gr.32. m.4. verò secans sit 11800371. qui numeri simul multiplicati, & per radium diuisi dabunt numerum 11157470. Gr.26. m.20. ferè, qui, vtpote complementum subductus à Gr.90. relinquit Gr. 63. m.40. anguli. Debet autem cognosci spetie crus alterum ex dictis prop.28. tract.23. Cor.4. vt angulus inuentus ei conformetur.

THEOR. X. PROPOS. XLII.

Radius est ad secantem complementi basis, vt secans complementi anguli oppositi ad secantem complementi cruris angulo oppositi.

RAdius est NR, basis AK in triangulo AKD, cuius cõplementi sinus XP, secans verò eius cõplementi NH; compl. anguli A est VR, cuius secans est NQ: crus verò DK, cuius compl. KV secans est NO. Dico itaq; quòd ita refertur radius ad NH secantẽ complementi basis, vt NQ secans complementi anguli A ad secantem NO complementi VK cruris DK.



Probatur. Quoniam ex dictis propos. 6. huius Ita est basis FK ad sinum EK, vt NR radius ad RT sinum A anguli, & ideo *permutando*: Ita erit FK ad radium NR, vt sinus EK ad sinum TR, sed vt FK sinus basis refertur ad radium, ita radius ipse refertur ad secantem NH complementi basis ex pr. 26. tract. 20. eum sint in eodem plano RKA: Similiter vt EK sinus cruris refertur ad TR sinum anguli; sic NQ secans complementi huius posterioris ad secantem NO complementi illius prioris ex Coroll. prop. 26. h. Ergo ex prop. 16. lib. 5. vt NR radius est ad secantem complementi basis NH, sic NQ secans complementi anguli ad NO secantem complementi cruris.

PROBL. VIII. PROPOS. XLIII.

Dato radio, & secante complementi basis, & secante complementi anguli reperire secantem complementi cruris oppositi.

ID operi demandatur regula aurea cum tria exhibeantur proportionalia, & quartus quæratur, debet autem angulus repertus conformari specie angulo opposito, vt ex prop. 18. tract. 23. Cor. 5. patet.

COROLLARIVM.

AB istis omnibus propositionibus eruitur modus, quò semper primo loco radium ponas, vt infra declarabimus.

EXPENSIO IV.

Regulæ facillimæ, & breuissimæ pro rectangulis adhibendæ præcipuè in logarithmis.

REgulæ quædam breues, & vniuersales remanent tradendæ; licet non adeo faciles in geometricis operationibus, eo quod sinus primo loco, non semper veniat; sed æquè faciles in logarithmicis, ideoque pro logarithmis à Nepero specialiter inuentæ, quarum fundamenta quatuor propos. exponemus quamuis ipse non explicet.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus totus ad sinum complementi oppositæ extremæ remotæ, sic sinus complementi alterius remotæ extremæ oppositæ ad sinum intermediæ.

NOn vsurpamus hic complementa in propria significatione, sed eo modo, quò declarabimus. Sciendum est itaque, quòd præciso angulo recto, & posthabito in triangulo sunt quinque partes, quæ ad modum pentagoni sunt disponendæ, nempe basis duo anguli, & duo crura angulos subtendentia, quas numeris prænotauimus 1. 2. 3. 4. 5. tamquam alicuius pentagoni latera, vt possimus intelligere quænam partes oppositæ extremæ, quænam adhęrentes, vel circumpositæ, quęque intermediæ partes appellentur. Pro angulis verò, & basi eorum complementa debent vsurpari.

In hac ergo figura tribus complementis duorum angulorum, & basis, & duobus cruribus constante. Partes adhærentes sunt, quæ datæ intermediæ immediatè succedunt V. g. in triangulo ABC. Posito basis AC complemento pro parte media adherentes sunt partes complementa angulorum A, & C, sic posito crure 4. partes adhęrentes sunt, posthabito angulo B recto, crus 3, & complementum anguli 5. At verò remotę complementi t basis essent crura 3. & 4. & lateris pro parte intermedia vsurpati partes remotæ essent AC basis complementa, & anguli A. Complementa verò horum complementorum sunt sinus ipsi arcuum. Ita, quod complementa de angulis, & basi dicta intelligantur pro arcubus angulorum, & basis: at quando dicitur sinus basis, vel angulorum intelligatur de cõplementis. Verũ de cruribus, sicut ipsa in propriis significatione sumuntur, sic, & complementa.

Dicit itaque propositio sinum totum ad sinum complementi alterius extremæ oppositæ, sic sinus complementi alterius extremę oppositæ ad sinum intermediæ. Hoc verò Theor. probatur inductione numerando omnes casus, qui possunt accidere, qui ex dictis de sinibus ostenduntur: Sunt autem expressi.

Rad.

Rad.	Extre-	-mæ datæ	Media quæsita	
o		4	1	Casus primus.
o	4	3	1	
o	5	4	2	Casus secundus.
o	4	5	2	
o	2	3	5	
o	3	2	5	
o	1	5	3	Casus tertius.
o	5	1	3	
o	1	2	4	
o	2	1	4	

Casus primus. Cum itaque duo latera dantur 3. & 4. & quæritur basis. Dico, quod sinus totus ad partes extremas, nempe ad complementa eorum V. g. ex 6. propos. huius tract. se habet, vt alterum eorum V. g. complementum 4. se habet ad sinum basis, nempe ad sinum eius complementi, quod pro basi vsurpatur, quia in ea fig. ita est BF ad AH, vt ST ad AL, nimirum o. ad 3. vt 4. ad 1. & *permutando* o. ad 4. vt 3. ad 1. Vnde duo primi casus sunt ostensi.

Casus secundus. Cum crus, & angulus datur, & quæritur angulus alter. Dico eodem modo sinum totum esse ad sinum complementi extremæ remotæ V. g 5. vt sinus complementi alterius extremæ remotæ V. g. 4. ad sinum intermediæ alterius anguli 2. nempe ad eius complementi sinum pro angulo vsurpati. Nam ex propos. 4. vt in illa figura, ita est sinus totus SH ad sinum anguli OH, nempe complementum complementi HV pro angulo ipso vsurpatum, vt sinus complementi lateris AS, quod est MN ad sinum DT, qui sinus est complementi pro angulo ipso vsurpati, nimirum o ad 5. vt 4. ad 2. & sic quatuor casus secundi generis remanent soluti, nam etiam *permutando* erit SH ad MD, nempe o. ad 4. vt HO ad DT, nimirum 5. ad 2. Et sic dicas de altero angulo dato 2. latere altero dato 3. & angulo quæsito 5. quòd ita sit o. ad 2. vt 3. ad 5. & *permutando*, quòd sit o. ad 3. vt 2. ad 5.

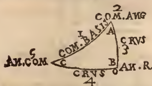
Casus tertius. Cum basis, & angulus datur, & crus quæritur. Dico rursus, quòd sit sinus totus o. ad sinum complementi extremæ, remotæ V. g. 1, vt sinus alterius extremæ remotæ 5. complementi ad sinum intermediæ 3.

Quod probatur ex 5. prop. Nam vt in illa figura sinus totus SA est ad sinum basis SP, nempe complementum sui complementi pro ipsa basi vsurpati, vt sinus AR anguli N, nimirum complementi arcus AK pro arcu ipsius anguli sumpti ad sinum ES ipsius lateris, nempe erit, vt o. ad 1. sic 5. ad 3. vel *permutando*, sic erit o. ad 5. vt 1. ad 3. Et pro alio angulo, si detur, idem argumentum valebit, & erit o. ad 1. vt 2. ad 4. & *permutando* o. ad 2. vt 1. ad 4. Propterea quatuor casus vltimi remanent ostensi. Vnde propositio tota remanet ostensa secundùm omnes casus.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus complementi cuiuslibet extremæ remotæ ad sinum intermediæ, sic radius est ad sinum complementi reliquæ extremæ remotæ.

HÆc propositio eodem modo intelligitur, & præcedens, & eodem modo ostenditur ex dictis singulis casibus enumeratis.



Data Extr. Media R. quæsita extrema.

3	1	o	4	Casus primus.
4	2	o	5	Casus secundus.
3	5	o	4	
5	3	o	1	Casus tertius.
2	4	o	1	

Prob. primus casus ex prop. 6. sinuum. Nam cum ea ea sit proportio, vt citauimus o. ad 3. vt 4 ad 1. Erit etiam, *permutando* o. ad 4. vt 3. ad 1. & etiam 3. ad 1. vt o. ad 4. debet autem intermedia occupare secundum locum iuxta tenorem propositionis; vnde non dabitur casus, quod sit 1 ad 3 vt o. ad 4.

Probatur quoque secundus casus ex propos. 4. supra citata; quia enim est o. ad 4. vt 5. ad 2. erit etiam *permutando* o. ad 5. vt 4. ad 2. Vnde etiam erit 4. ad 2. vt o. ad 5 Quod & intelligitur de alterâ simili partium combinatione 3. ad 5. vt o. ad 2. Porrò non poterit esse, vt in præcedenti casu dictum est 2. ad 4. neque 5. ad 3. quòd intermediæ 2. & 5. debeant esse secundo loco.

Probatur quoque tertius casus. Quia enim ex 1. prop. h. iuxta dicta in pr. præc. 3. casu o. ad 1. vt 5. ad 3. erit etiam 5. ad 3. vt o. ad 1. & similiter 2. ad 4. vt o. ad 1.

Intelliguntur autem sinus arcuum esse complementorum, vbi ipsa complementa in figura vsurpatur, & esse vera complementa, vbi arcus ipsi sumuntur: Sic erit sinus complementi anguli 5. ipse sinus anguli 5. quia complementum pro ipso anguli arcu in figura vsurpatur; at sinus cruris 3. erit sinus propriè dictus ipsius cruris; quia non complementum; sed ipsum crus in figura sumitur, & sic dicas de alijs.

THEOR. III. PROP. XLVI.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt radius ad tangentem extremæ proximæ; sic tangens reliquæ extremæ proximæ ad sinum intermediæ.

HÆc propositio probatur per enumerationem casuum, vt præcedens; sed ex principijs positis Expens.2. de taugentibus.

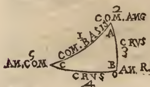
R. Extremæ datæ intermedia quæsita.

0	2	4	3	Casus primus.
0	4	2	3	
0	5	3	4	
0	3	5	4	
0	4	1	5	Casus secundus.
0	1	4	5	
0	3	1	2	
0	1	3	2	
0	5	2	1	Casus tertius.
0	2	5	1	

Probatur autē primus casus ex prop.10 tangentium, cùm angulus, & crus datur, & quæritur aliud crus. Nam vt illius propos. schemate apparet. Ita est radius EN ad tangentem IB, vt CD sinus ad OO tangentem: nimirum, vt O ad tang complementi anguli 2. sic tangens cruris 4. ad sinum cruris 3. Vnde etiam permutanda, ita erit Radius 0. ad 4. sic 2. ad 3. Et si detur alius angulus 5. & crus 3. eadem ratio erit, & respondebit proportione 0. ad 5. vt 3. ad 4. & *permutando* 0. ad 3. vt 5. ad 4.

Secundus casus cum datur basis, & crus, & quæritur angulus. Probatur quoque ex propos. 16. vt est radius PK ad tangentem KM cruris KM in triangulo RKV, Ita est tangens IA complementi arcus VI basis VK ad OI sinum complementi arcus ID anguli K. Itaque est vt PK ad KM, nempe 0. ad 4. ita est IB ad OI, nempe 1. ad 5. Quare *permutando* quoque erit 0. ab 1. vt 4. ad 5. & si detur latus 3. erit quoque 0. ad 3. vt 1. ad 2. & *permutando* 0. ad 1. vt 3. ad 2.

Tertius casus. Probatur quoque ex propos.22. cum dantur duo anguli, & quæritur basis. Nam radius est ad tangentem complementi anguli V.g. in eo schemate KP radius ad KM tangentem, vt BG tang. ad sinum BS, idest complementi anguli V tangens ad sinum complementi basis AV, ideo 0. erit ad 5. vt 1. ad 2. & *permutando* 0. erit ad 2. vt 5. ad 1.



THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt tangens extremæ proximæ ad sinum intermediæ, ita radius ad tangentem reliquæ extremæ proximæ.

PRobatur ex dictis priùs enumeratis casibus prop. præced.

Extremæ datæ. R. Intermedia quæsita.

1	5	0	4	Casus primus.
3	2	0	1	
1	2	0	3	Casus secundus.
4	5	0	1	
1	3	0	4	Casus tertius.
5	4	0	3	
3	4	0	1	Casus quartus.
3	4	0	5	
5	1	0	2	Casus quintus.
2	1	0	5	

Probantur autem singuli casus, & Primus cùm datur basis, & angulus, & quæritur latus. Quia ex secundo casu propos. antecad. est 0. ad 4. ita est 1. ad 5. Ergo erit, vt 1. ad 5. ita 0. ad 4. Et quia est 0. ad 3. vt 1. ad 2. erit etiam *permutando* 0. ad 1. vt 3. ad 2. ideoque etiam 3. ad 1. vt 0. ad 1.

Secundus verò casus est cum datur angulus, & latus, & quæritur basis. Quòd ex eodem secundo casu præced. propos. ostenditur. Siquidem ibi est 0. ad 3. vt 1. ad 2. Quare erit etiam 1. ad 2. vt 0. ad 3. Eademque ratione ostendetur; quia est 0. ad 4. vt 1. ad 5. quod *permutando* sit 0. ad 1. vt 4. ad 5. & ideo 4. ad 5. vt 0. ad 1.

Tertius casus est ex primo casu præced. propos. ostenditur. Nam ibi dictum est ita esse 0. ad 4. vt 2. ad 3. Quare etiam erit 2. ad 3. vt 0. ad 4. Et quia ibi est 0. ad 3. vt 5. ad 4 Ergo 5. ad 4 vt 0. ad 3. nempe crure, & angulo crus aliud habetur.

Quartus casus. Et quia ex eadem propos. præc. casu est 0. ad 1. vt 4. ad 3. Erit etiam 3. ad 4. vt 0. ad 1. Et eadem ratione 3. ad 4. vt 0. ad 5. quòd in præced. primo casu ostensum sit esse 0. ad 5. vt 3. ad 4. idest duobus cruribus obtinetur angulus.

Quintus probatur ex 3. casu præced propos. quia enim est 0. ad 5. vt 2. ad 1. Erit etiam 1. ad 2. vt 0. ad 5. Et quia est è contra 0. ad 1. vt 5. ad 2. erit etiam 5. ad 2. vt 0. ad 1. nempe dato angulo, & basi crus inuenietur. Vnde omnes casus remanent ostensi.

COROLLARIVM.

EX præcedentibus itaque propositionibus colliguntur istæ quatuor praxes, quibus omnes casus soluuntur, tum Geometricè, tum Logarithmicè.

1. Arithmeticè.

AD inueniendam partem intermediam datis partibus oppositis, & remotis. Multiplica

inuicem

inuicem complementorum finus remotarum extremarum partium, & diuide per finum totum, & prodibit finus intermediæ.

Sed aduertendum eſt, quod vbi ponitur *latus* ibi complementum intelligitur propriè ſumptum, vbi verò complementū ponitur in fig. impropriè ſumitur in prop. pro complemento ipſius cōplementi; nempe pro ſinu ipſo baſis, ſeu anguli.

Logarithmicè.

ADditi inuicem complementorum eodem ſenſu ſumptorum logarithmi faciunt logarithmum intermediæ ſubducto o. vel 1. pro diuerſitate tabularum.

2. Arithmeticè.

AD inueniendam extremam aliquam remotam data altera parte extrema remota, & intermedia. Multiplica ſinum intermedium cum ſinu toto, & diuide per extremum remotum ſinum complementi, & prodibit ſinus complementi reliquæ extremæ, quæ complementa debent intelligi, vt explicatum eſt.

Logarithmicè.

SVbducito logarithmum complementi extremę remotæ partis eodem ſenſu intellecti à logarithmo arcus intermediæ, & prodibit alterius extremæ remotæ logarithmus complementi, & hoc iuxta logarithmos Neperi: iuxta vero alios addendus eſt prius logarithmus ſinus totius logarithmo intermediæ, & deinde ſubductio inſtituenda, vt prius.

3. Arithmeticè.

AD inueniendam intermediam partem datis extremis partibus proximis Tangentes proximarum partium, ſi in ſchemate ſine notata *compl.* complementorum ipſorum, ſi ſint notata *latera*, ipſorum laterum inuicem multiplicentur, & diuidantur per ſinum totum, & prodibit ſinus intermediæ: nempe ſinus illius partis, prout in ſchemate notata eſt ſinus lateris, vel ſinus complementi anguli, vel baſis.

Logarithmicè.

LOgarithmi tangentium ſimul eddantur partium vicinarum, & ſubducatur o. ſecundùm tabulas Neperi; at 1. ſecundùm alias, & prodibit logarithmus intermediæ, & qui debet intelligi ſenſu ſupra explicato.

4. Arithmeticè.

AD inueniendam extremam partem vicinam data altera vicina, & intermedia. Multiplicetur ſimul ſinus intermediæ, vt ſupra intellectæ cum ſinum toto, & diuidatur per tangentem alterius extremæ vicinæ datæ, & prodibit tangene extremæ proximæ quæſitæ.

Logarithmicè.

ASinus logarithmo intermediæ datæ eodem modo intellecto addito priùs o, ſeu logarithmo ſinus totius ſecundùm diuerſitatem tabularum ſubducatur logarithmus tangentis vicinæ partis cognitæ, & prodibit logarithmus tangentis alterius partis vicinæ,

Aduerte, quod Caualleriue iſtas regulas affert propoſ. 33. ſed mutillatas, nec plenè explicatas.

EXPENSIO VI.

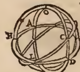
De ſubſtitutione figurarum, & laterum.

QVia Cum præcipit propoſ. vſum complementorum, ſi detur triangulum, cuius partes, pro quibus complementa ſumenda ſunt, ſint quadrante maiores ad calculum ineundum ſubſtituere aliquando triangulum alteri, laruſque alteri, prout res poſtulabit, oportet, & etiam commodiùs eſt, ſi calculus ſit obſcurus aliquando ob angulorum magnitudinem, vel parum ſecurus ob exilitatem; ideoque cognoſcere opus eſt tali caſu, & quomodo ſubſtitutio ineunda ſit.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Dato triangulo obtuſo pro illo acutum aſſumere.

VT ſecuriùs, & intelligibiliùs opus trigonometricum exequatur, operę pretium eſt dato triangulo omnibus angulis obtuſis, aut etiam duobus conſtante, illud in triangulum ſaltem duos acutos habens conuertere, quòd enim ſinus quadrantis ſint; hinc eſt quòd ſi latera ſint longiora quadrante, vt talia ſinus non habeant, nec tangentes, & per conſequens, nec ſecantes, nec complementa, & ideo rēddatur calculus obſcurus, dùm debent aſſumi ſinus alterius quadrantis pro dati trianguli, cuius latera omnia quadrantē



ſuperant, calculatione: Ideo ſatiùs erit datorum laterum complementa in obliquangulis, quæ claudunt angulum adiacentem, ſeu verticalem ſumere; illius enim trianguli lateribus inuentis, vel angulis ſtatim triāgulum datum ſecundùm omnes ſuas partes dignoſcitur.

Prob. Nam ſit triangulum ſcalenum, vel Iſoſcelles, AOCHL, angulis omnes obtuſis apud A apud L, & apud C. Si aſſumas complementa laterie ad ſemicirculū AOC V.g. & AHL, quæ ſunt LD, & DC habebis angulos ad L, & C acutos eadem baſi manente LC. Si ergo datis lateribus LHA, & AOC, & ideo complementis, & angulo eodem A æquali angulo ō verticali quęratur baſis LC: ſoluto triangulo LDC inuenta erit, cùm ſit eadem. Si quærātur anguli ad baſim inuenientur acuti LCO, & CLD, vnde ablati à duobus rectis reſtituent obtuſos.

Quod ſi angulus verticalis A notùs non ſit, ſed angulus CLH adiacens lateri AHL, & notum ſit latus oppoſitum COA auferatur arcus AHL adiacens à ſemicirculo, ſicut & OAC, & remanebit CD, & LD, cum quo, & anguli CLH reſiduo CL operſicies operationē, & reperies V.g. angulū DCL, cuius cōplementū ad ſemicirculū notum erit, OCL obtuſus trianguli dati. Poteris etiā reperire baſim, quæ erit crus adiacens angulo CLD in triangulo CLD, & adiacens quoque in triangulo CLA. Poteris quoque

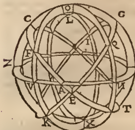
que ioueoire angulum n verticalem qui equabitur angulo A trianguli ACL, & eodem modo ages erure V. g. AHL, & duobus angulis HLC, & OCL datis.

Si dentur tria crura maioribus à semicirculo dedoctis AHL, & COA babebis DL, & DC complemeota cum basi LC iam nota. Quod si dentur tres anguli maioribus V. g. L, & C in triangulo ALC à duobus rectis detractis habebis DLC, & DCL cōplemēta ad duos rectos acura, eū opposito apud D in triāgulo CLD. Vnde opposita latera DL, & DC prædictis angulis DLC, & LCD perquires, & eruot complemeota laterum LHA, & COA ad semicirculū.

THEOR. I. PROPOS. XLIX.

Trianguli anguli in latera, & in angulos latera permutari possunt complemento, maioris anguli pro latere sumpto.

Sit triangulum COQ, & anguli O mensora sit areus BN descriptus polo O; mensura anguli C sit arcus CFAE; meosura verò anguli Q sit arcus IL. Dico, *quod isti arcus* AN, & SL *constituunt triangulū, quòd pro tertio latere obtinet* cōplementū arcus CE ad semicirculum mensuraotis aogulum maiorem C, quod complemeotum est TE. Hòc autem triaogulum est AFV; quod babet latus AV æquale arcui BN, VF æquale arcui LI, & AF æquale arcui ET complemento areus EC, quod sic probatur.



Prog. I. Ex prop. 14. Cor. ex 1 sphæric. interfectio circulorum, qui babent polos in aliquo alio maximo circulo, quadrante distat à circulo, quo polos habeor: igitur ANA, & TEA quadrans erit, quod poli borum circulorum siot in circulo TEGO io O, & G, & interfectio eorum io A existet; sic qoia suos polos habent in Q, & O circuli ILFV, & CFAT; eorum interfectio F à circulo prædicto OQ EK quadrante distabit: vnde ILF erit quadraos, & AF quadraos erit.

Pr 2. Item quia in circulo OQ polos habet CFET in Q, & ANAV in O eorum interfectio V distabit quadrante, & NAV quadraos erit, & LFV quadrans.

Pr. 3. Aufer itaq; NA cōmunis, à BNA, & NAV quadrantibus, & ideo æqualibus remaoebunt BN mensura āguli O, & AV æquales; sic aofer à qoadrātibus ILF, & LFV cōponeotes arcūm ILFV erit LF æqualis IL meosuræ anguli Q. Taodem quia arcus CFAE subteodit angulum maiorem O ostendam iuxta tenorem propositionis ET complemeoto esse æqualo AF tertium crus trianguli AFV: Siquidem TA quadraos, & AF ostēsus est quadrans pr. I. aufer itaq; EA communis, & remaoebit AF æqualis ipsi TE complemento, cui ET adde CT; & EA, & erunt trea arcus æquales toti CFAE mensure aoguli O.

Probatur secunda pars, quòd anguli in latera queant commutari.

Progreff. I. Circulus CAT in O ex prop. I polos habet, ergo circuli KOB, GEK in ipso CAT polos habebunt ex prop. 15. tract. 21. sphæric. I. p. vnde ex ipsius Cor. COG, & GQE quadrans erit: Sic quia ZAS in O polos babet, etiam ONX, & ZOB in ZAA circolo in communi puncto A circulorum ZOK, & CAT polos babebit. Vnde KCO, & OQN ex Cor. citat. quadrantes erunt, & CZ meosora anguli A. Quia ergo ZCO, & COG ostensi sunt quadraotes, ablato cōmuni arcu CO arcus ZC mensura anguli A æquabitur lateri OO.

Progreff. 2. Circolus quoque OFK polo Q, ductus est, ergo io ipso ONX circoli, & GEK polos habebunt. Quare interfectio Q à circulo OFK distabit quadraote, & XEQ, & XNQ, & LOQ quadrantes erunt, sed iam OQE ostensus est qosdrans, & nunc XEQ quadrans demostratur; ablato ergo communi arco EQ remanent arcus KE, & GQ æquales, & quia GEK ostensos est io circulo CET, & OFK polos obtinere, ideo bsbebit io communoi eorum puncto F, vnde, vtpote ductus polo F arcus KA mensurabit angulum F, qui æquatur lateri GQ ea s. p. par.

Progr. 3. Circulus quoque ONX io circulo OFK, & circulo ZVAB ostensus est babere polos, ergo obtioebit eos io communi eorum puncto V, ideoque aoguli V arcus LOQN mensura erit. Verùm OQN p. I. ostensus est quadrās, talis quoq; est arcus XNQ, vt progr. 2. ablato ergo commuoi arcu QN remanebunt æquales OQ, & NX, est autem NX vsque ad semicirculum LONX mensure anguli V areus LOQN complementum: quare arcus angulorum F, & A in latera OG, & GQ sunt murara, sicut aogulus FVA in latus æquale complemento NX.

PROBL. III. PROPOS. L.

Datis loteribus reperire angulos, & datis angulis latera inuenire.

Quoniam laboriosa est operatio illa, qua datis lateribus angoli reperiuntur, multisque prasibus impedita; ideo hæc fortè erit facilior; hoc autem fit aogulos in latera cōmutaodo. Nam ex I par. pr. antec. dato triangulo GQO, cuius latus QO, sit G. 80. QR G. 70. & QG G. 60. Igitur ex prec. trianguli AFV angulus E erit, culos mensora EK, erit 70. angulus A eoius meosura CZ erit 60. & mensura anguli V; nempe arcus NOL erit 100. ex ootis itaque aogulis trianguli AFV reperiemus latera, quæ erunt anguli prioris propositi trianguli OQO, oempe AV erit æquale O aoguli meosuræ NB, & VF aoguli Q mensuræ SL, & taodem complementum CFAE lateris FA, vel æqualis ET erit mensura anguli G.

Sic ex secuoda parte preced. propos. Si deotur anguli GQO, oempe arcus BN, at anguli OQG arcus IL, & complementum ad duos rectos anguli O constituetur triangulum AFV; cuius reperies angulos EK, & erit latus prioris GQ, & CZ, & erit latus GO, & complementum anguli V ad duos rectos, nempe NX, & erit QO.

PROBL.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Sinus loco primam sedem occupante substituere radium, qui secundo loco reperiatur in regula proportionum.

ADmodum facilis est diuisio, cum debemus diuidere numerum per radium; quia tot numeri ad dexteram abiicienti, quot cifræ in radio inueniuntur V. g. si diuidamus 646789 per 100. diuisus erit numerus, si excludantur duo numeri extremi dextri 89.& 6467. erit quotiens, fractioque erit $\frac{89}{100}$. Ideo prouidendum semper est, vt facilitatis gratia sinus totus; seu radius primum locum sibi assumat.

Loco igitur sinus pone radium primo loco, sed secundum occupet secans complementi arcus.

Probatur. Quia vt sinus alicuius arcus respicit proportione radium; sic radius respicit secantem complementi arcus, vt dictum est propos. 26. tract. 20.

Quod si sit sinus complementi arcus, seu anguli in primo loco, & radius in secundo Vice complementi radius in primo loco existat, sed loco secundo secans dicti arcus existat; Ratio est, quia ita est sinus complementi arcus ad sinum totum; vt sinus totus est ad secantem ipsius arcus ex propos. 26. tract. 20.

PROBL. V. PROP. LII.

Loco secantis alicuius arcus, seu complementi primum locum occupantis ponere radium.

LOco secantis primo loco radius collocetur secundo sinus complementi ipsius arcus, seu si secans sit complementi alienius arcus; primo loco ponatur radius, secundo sinus ipsius arcus, & cætera fiant, vt regula aurea præcipit. Ratio est fundata in citatis propos. 26. tract. 20.

PROB. VI. PROPOS. LIII.

Si tangens alicuius arcus, seu complementi primo loco reperiatur radium vice eius ponere.

POnatur radius primo loco, secundo tangens complementi ipsius arcus; Quod si sit tangens complementi primo loco, ponatur radius, secundo verò tangens ipsius arcus.

Probatur ex propos. 24. tract. 20. Nam vt est tangens ad radium, ita radius ad complementi illius arcus tangentem, & viceuersa, vt tangens complementi ad radium, ita radius ad tangentem alicuius arcus. Vnde cum sit eadem proportio, alterum loco alterius substitui potest.

COROLLARIVM.

NE dum ob facilitatem anguli acuti aliquando obtusis substituendi; sed etiam ob securitatem, & anguli semper illi spernendi, nec adhibendi, quantùm fieri potest, qui sinus extremorum arcuum V. g. 1. aut m. 30. & cæt. exhibent; nam ob angulorum, & laterum exilitatem, & breuitatem veram deinde quantitatem quæsiti lateris, & anguli non tribuunt, sic si adhibenda sint complementa nimis breuia V. g. complementi arcus 89. m. 30. aut simile, & possit alia regula vti non adhibito complemento m 30. illius arcus 89. m. 30. debet non vti, & cùm datur electio adhibéda sunt latera mediocra, quàm fieri possit, & anguli mediocres, & per illos exquirere, quod placet reliquorum.

EXPENSIO V.

De triangulis obliquangulis ad rectangula reducendis per tres operationes.

MOdus, quo triangula sphærica obliquangula soluuntur transfundendo illa in duo rectangula operosior, quidem; at captu facilior, nullaque præuia demostratione indiget: quare post rectangula soluta, cùm in illis propositionibus fundetur, subnectendus est.

PROBL. I. PROPOS. LIV.

Cognitis duobus trianguli obliquanguli cruribus, & angulo opposito, & altero specie noto; angulum reliquum reliquo cruri cognito oppositum reperire.

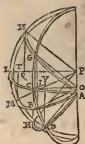
SIt triangulum obliquangulum GAB, in quo sit cognitū crus AB, & crus AG, & angulus cruri AB oppositus G: docet propositio angulum B reliquo cruri oppositum reperire.

Quia ab angulo A super latus GB potest cadere arcus perpendicularis AC, seu cadat intra, cum anguli specie conueniunt, vt in proposito triangulo BAG, seu extra, cum dissentiunt, vt triangulo DAB, hæc inueniatur: Datis itaque angulis specie concordibus sinum CO arcus normalis AC primò inuenies.

Datur enim basis AG, & angulus adiacens G: quare ex prop. 3. h. crus oppositum normale AC angulodato n inuenire poteris, quo obtento.

Dato crure AC, & basi AB deinde ex 18. huius poteris inuenire angulum oppositum dato cruri AC, & ideò arcui AG: qui est B quæsitus. Quod si anguli specie dissonent, & cognitus sit obtusus V. g. ABD, assumatur eius complementum ABC, & inueniatur AC, quo obtento.

Data basi AD, & arcu AC inuenies angulū oppositū apud D, & deinde reliqua si placuerit reperies V. g. ex 17. h. data AB basi, & CA reperies angulum BAC, scilicet sinum MT, & arcum ML, & dato AG, & AC reperies angulum CAG, scilicet sinum QH, & hinc arcum NL, quæ inuenta copulabis, si anguli cogniti fuere ambo acuti, vel obtusi, vt in triangulo DAB. Deduces minorem à maiori, si fuere specie diuersi, vt in triangulo DAB. Et idem ages si quæras basim; nam inuenies duos sinus GI in triangulo GAC, & BI in triangulo BAC, cuius duo anguli specie conformes, & arcus eorum vnies, & fiet basis BG. At in triangulo DAB, in quo anguli specie



ſpecie difformes inuertis ſinubus DY, & ſi arcus eorum BC minorem à DBC maiori ſubduces, & ceſtabit DA, & ita totum triangulum notum erit. Cur autem in concordibus angulis vniendi arcus in diſcordibus ſubducēdi ratio eſt, quia perpendicularis in concordibus intra cadit, in diſcordibus extra ex propoſ. 30. & 31. Tract. 23.

PROBL. II. PROPOS. LV.

Duobus angulis, & crure oppoſito datis inuenire crus oppoſitum alteri eorum.

SIt datū triangulū obliquangulū GAB in præc. fig. & anguli G, & B concordes ſpecie, & crus AG, & oporteat reperire crus AB oppoſitum angulo G.

Quoniam poſſumus deducere arcum perpendicularem intra triangulum cadentem, vt AC; is inueniatur.

Datur enim baſis AG, & angulus G, vnde ex cit. propoſ. 3. huius inuenies crus oppoſitum AC perquirendo ſinum eius CO. Deinde dato arcu, cruſeque oppoſito AC, & angulo B inuenies baſim AB ex propoſ. 31. huius; habita verò baſi AG, & crure AC inuenies reliqua, vt ſupra.

Detur deinde triangulum DAB, in quo anguli ſpetie diſſentiant, & ſit notū crus AB, & anguli, vt ADB, & ABD. Anguli complemento ABC, inueniatur arcus perpendicularis AC inueniendo ſinum OC, quo obtento crure AC perpendiculari, & angulo D inuenietur baſis AD ex cit. propoſ. 31.

PROBL. III. PROPOS. LVI.

Duobus cruribus, & angulo datis altero ſpetie noto, baſim inuenire.

DEtur triangulum AGB; in quo anguli ſpecie conſentiant G, & B: At G angulus ſit quoque notus quoad quantitatem ſicut, & crura AB, & GA deſidereturque baſis BG.

Quoniam datur AG baſis, & angulus G, inuenietur perpendicularis arcus AC demiſſus ſuper incognitam baſim ex 3. huius.

Deinde arcu perpendiculari AC, & baſi AG ex propoſ. 30. inuenies crus, & arcum GC.

Poſtea arcu eodem inuento normali AC, & arcu dato AB inuenies arcum BC ex prop. cit. 30. & ſimul arcus inuentos BC, & CG copulabis, & fiet tota baſis, arcuſque BG.

Si verò anguli ſpecie diſſonent, vt in triangulo ADB pro obtuſo angulo ABD angulum complemēti CBA accipies, & inuenies arcum normalem AC, quo & baſi BA reperies ex cit. propoſ. BC, & rurſus arcu AC, & baſi AD arcum DBC, à quo ſubduces baſim priùs inuentam BC, & habebis DB pro arcu reſiduo, & baſi quæſita.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Duobus angulis, & crure datis vni eorum oppoſito baſim interpoſitam angulis reperire.

DAto arcu GA, & angulis G, & BA noto ſpecie inueniatur, vt ſupra normalis arcus CA, vt propoſ. 3. h. & deinde ſi anguli ſpecie conſentiant, vt in triangulo GAB. Dato crure AC, & angulo oppoſito G, inueniatur crus alterum GC adiacens angulo dato G ex 29. huius.

Sic dato crure normali AC, & angulo B, ex eadē inuenietur arcus BC, & ſimul vniātur CB, & GA. At ſi ſpecie diſcordēt vtendum eſt angulo vicario, & complemento ex eadem propoſ. V. g. in triangulo ADB dato crure AC, & angulo ABC inueniendus arcus BC; ruſúſque eodem crure normali dato, & angulo D inueniendus eſt arcus DBC, alterque minor ab altero ſubducendus, vt remaneat arcus, & baſis DB quæſita.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

Duobus cruribus, & angulo oppoſito vni eorum datis, & altero ſpecie noto angulum verticalem inuenire.

DEtur triangulum obliquangulum GAB, & angulus G, duoque crura quantitate nota AB, AB, angulusq; notus ſpecie, nempe alteri cōſonus Angulo G, & Crure GA crus normale AC reperiemus, vt ſupra. Deinde angulū CAB apud A ex pr. 15. huius ſcilicet arcum NL. Deinde dato crure normali AC, & baſi BA inueniatur angulus BAC apud A ſcilicet arcus LM ex 17. huius, & anguli reperti BAC, & GAC, ideſt arcus NL, & LM ſimul voluantur, & fiet totus angulus BAG.

Quod, ſi anguli ſpecie diſſonent, vt in triangulo DAB; tunc reperiatur ex 15. huius angulus BAC ſcilicet arcus ML vtendo complemento ABC pro dato angulo obtuſo ABD, & rurſus crure AC, & baſi AD, quæratur angulus DAC, ſcilicet arcus XML ex 17. huius, ſubducaturque alter ab altero, & fiet angulus quæſitus DAB, videlicet arcus XM. Quod ſi notus quantitate ſit acutus angulus eodem modo efficies, ac ſupra, & angulo D, & crure AD reperies normale crus AC. Deinde crure AC, & angulo B angulum DAC, ideſt arcum HML ex 15. h. & hinc crure normali AC, & baſi AB angulū CAB, ideſt arcū ML extremes, atq; angulum BAC minorem ſubduces à maiori, prodibitque arcus XM exoptatus.

PROBL. VI. PROPOS. LIX.

Duobus angulis, & crure oppoſito datis angulum verticalem conquirere.

IN triangulo obliquangulo GAB, in quo anguli dati G, & B ſpecie conueniunt, & quantitate innoteſcunt, detur crus AG.

Itaque ex 3. huius dato crure AG, & angulo G inuenies crus normale oppoſitum AC. Poſtea ex propoſ. 15. inuenies angulum CAG, ideſt arcum NL apud

apud A data basi AG, & angulo G.

Deinde dato angulo B, & crure opposito AC inuenies angulum alterum ex propos.41. BAC hoc est arcum ML, quos simul copulabis, nempe angulum CAG, & CAB, & efficies totum angulum GAB hoc est arcum NLM.

Quod si anguli specie sint absoni, dati anguli B obtusi cōplemento vtere, & crure BA datu, anguloque complente ABC inuenies AC ex 15. huius.

Rursusque crure AC normali, & angulo D in triangulo DAC inuenies angulum DAC hoc est arcum NML maiorem, à quo subduces angulum BAC, idest arcum ML, & residuus erit optatus angulus DAB. Inuenies autem angulum CAB sc. arcum ML dato anguli ABD complemento ABC, & crure opposito AC ex prop.48. huius.

THEOR. VII. PROPOS. LX.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus comprehendentibus basim, & angulos inuenire altero angulo specie cognito.

COgnitus detur angulus B quantitate, & duo crura BA, & AD comprehendentia sint quoq; nota, & alter angulus G notus specie, nempe quòd sit quoque, vt B acutus.

Dato itaque angulo B, & basi AB inueniatur crus normale CA ex 3. prop.h. & ex 15.h. angulus BAC.

Deinde crure, & basi AB, & angulo eodem B inueniatur arcus BC ex propos.13. huius, quem subduces à noto crure BD, & habebis crus CG.

Hoc itaque crure CG, & AC normalibus inuenies basim AG ex prop.7.h. & angulū G, & CAG ex 15.h.

Quod si anguli specie differant; Ex dato angulo DBA, & crure AD, quòd datus angulus sit obtusus DBA, vtere complemento ABC, & basi AB, inuenies crus AC normale, quod extra cadit.

Deinde angulo B obtuso & crure, seu basi AB si detur obtusus angulus inueniatur crus BC ex pr. 13.h quod addes noto cruri BD, & efficies areū DBC.

Quo arcu DBC, & AC normalibus inuenies basim quæsitam AD ex 7.h. & angulum D.

Quod si angulus sit u acutus angulo D, & basi DA inuenietur arcus DBC, à quo subduces crus notum BD, & obtinebis crus AC.

Hoc itaque crure BC, & crure AC normalibus inuenies AB quæsitam basim ex 7.h. & angulū BAC, quem subduces ab angulo recto, & fiet ang. ABD.

PROBL. VIII. PROPOS. LXI.

Dato crure interiacente, seu basi, & duobus angulis ad basim angulum verticalem reperire.

IN triangulo obliquangulo ABG detur basis AG, & anguli noti sint G, & A. & perquiratur angulus B, cum anguli specie concordant. Itaque data basi AC, & angulo G perquiremus crus normale AC. Deinde ijsdem datis angulum GAC ex prop.15.h. quem subducemus à toto angulo dato GAB, & restabit angulus BAC.

Hoc itaque angulo CAB, & crure AC perquiremus reliquum angulum ABC ex propos.5. huius, qui erit angulus verticalis quæsitus B oppositus basi AG.

Quod si detur triangulum BAD, in quo anguli B, & A specie dissonant, & basis detur BA. Complemēto anguli CBA, & basi BA inueniatur crus normale AC ex 3.h. & ijsdē datis āgulū BAC ex 15.h. quē addes angulo acuto noto DAB, & efficies ang. DAC.

Hoc itaque angulo acuto DAC, & crure AC perquires alium angulum verticalem apud D ex prop. 5. huius.

PROBL. XI. PROP. LXII.

Dato crure interposito, & angulis adnexis reliqua crura perquirere.

EXponatur triangulum obliquangulum GAB, cuius nota basis AG, & anguli ad basim A, & G, & perquiratur aliquod crurum AB, vel BG.

Dato itaque angulo G, & basi AG ex 3. huius perquiretur crus normale AC.

Deinde basi AG, & angulo G crus normale GC adhærens angulo C ex prop 13. huius.

Postmodum angulum GAC ex propos.15. huius, quem subduces à toto noto GAB, & restabit angulus CAB, quo CAB, & crure inuento AC perquirex reliquum crus oppositum BC ex 3. h. & crus adiacens AB ex 13. huius. Iunges tandem duo crura GC, & BC, & obtinebis GB, Idem ages, si anguli dati sint specie dissoni, sed adhibita cautella subductionis vnius ab alio.

Itaq; omnes casus obliquangulorum soluuntur per reductionem ad duo rectangula exceptis solùm duobus, nempe cùm dantur tres anguli, vel tres arcus. Nam per doctrinam præcedentem isti duo casus solui nequeunt, cùm in rectangulo non detur, nisi vnica res, nempe vnicū crus, vel vnicus angulus, reliqua enim, quæ dantur non sunt rectanguli, sed obliquanguli cum in rectangulo reliqui anguli vnus sit rectus, alter sit semper aut maior, aut minor eo, qui datur in obliquangulo, & idem dices de cruribus V. g. in triangulo ABG crus BG, & AB est maius crure AC, vel crure GC, vel BC rectanguli. Sicut angulus CAB est maior angulo CAB, vel CAG, angulus verò B, vel G minor, quam rectus ad C. Vnde cum non nisi vnica pars rectanguli, tunc detur ex præcedentibus doctrinis, in quibus duæ semper partes rectangulorum ad ea soluenda requiruntur, mensuris subijci nullo modo queunt.

EXPENSIO VI.

De obliquangulorum sphæricorum solutione, deducendo perpendicularem, sed per duas operationes operi consignata.

MOdi quos hic tradimus ex parte quidem prædictis faciliores; Nam non nisi duas operationes adhibent; ex parte verò difficiliores, quòd in secunda operatione sinus totus non adhibeatur; quare ne dum multiplicatione, sed etiam diuisione opus sit; præcepta tamen omnes casus soluunt, & totam trigonometriam obliquangulorum sphæricorum amplectuntur.

THEOR. I. PROPOS. LXIII.

In omni triangulo sphærico rectangulo sinus angulorum eandem proportionem seruant ad sinus crurum oppositorum.

SIt triangulum rectangulum VDC, & rectus angulus V, in quo anguli, siue æquales, seu inæquales D, & C sinus toti LB, & ST, & BI, & BC, sinus cruris VD sit DA, sinus verò cruris VC sit AC, sinus cruris DC, sint CF, & DO. Sinus verò angulorum sint TH, & LN, quòd distent ab angulis C, & D quadrante ob sinus BT, & BL totos cum duo arcus EG, & HT ex defin. anguli præsupponantur quadrantes; sicut etiam CL, & CI; vt enim arcus LI, & GT sit angulorum mensura vterque arcui perpendicularis esse debet. Vnde, & eorum poli debent esse in D, & C ex prop. 15. tract. 31. Coroll.



Probatur propos. arcus DT, & CL sunt æquales, vtpote quadrantes, & DC arcus idē, vnde æquales erunt sinus toti BL, & ST; necnon, & DO, & CF, vt eiusdem arcus; Propterea que erit FC ad BT, & OD ad BL, vtpote æqualium eadem proportio: Verùm vt CF ad BT, ita est CA ad TH ex 1. huius Cor. & vt DO ad BL, sic est DA ad LN. Quare ex 16.l.5. vt est CA ad HT sic erit DA ad LN.

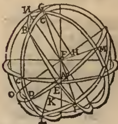
COROLLARIVM.

VNde colligitur quoque *permutando* ita esse sinus CA ad sinum AD crurum, vt angulorum sinus HT ad LN.

THEOR. II. PROPOS. LXIV.

In omni triangulo obliquangulo quoque sinus arcuum ad sinus angulorum sunt in eadem proportione.

SIt triangulum obliquangulum EBD, & ducatur perpendicularis arcus EC. Itaque sinus anguli B in rectangulo triangulo BCE erit IE, & cruris normalis sinus AC; sinus verò basis AB. Sic in triangulo rectangulo ECD sinus anguli erit GH sinus cruris oppositi normalis idem AC; sinus verò basis AD.



Igitur ex præced. vt est AB sinus basis ad FN sinum totum, sic AC sinus cruris ad IK sinum anguli B. Et pariter, vt DA sinus basis ad FO, seu FN sinum totum, sic AC cruris sinus ad GH sinum anguli D. Quare *inuertendo* FN erit ad DA, vt GH ad AC; Proportio itaque erit *perturbata*, vt vides.

Basis AB ad FN Rad. & FN ad AD,

vt

vt GH ad crus AC ad IK angulum.

Vnde ex *æquo* AB erit ad AD, vt GH ad IK; & *permutando* AB erit ad GH, vt AD ad IK. Et idem sequetur, etiam si perpendicularis extra cadat, vt potes considerare si cogites BD arcum esse ad eandem partem, quâ reperitur arcus EH.

PROBL. I. PROPOS. LXV.

Datis duobus cruribus, & angulo in obliquangulo sphærico angulum reliquum oppositum reperire.

CVm ex præced. hæc tria data, & quartum quæsitum sint proportionalia, datis tribus quartum regula trium reperire possumus, ponemusque primo loco sinum cruris dati AD, secundo anguli dati IK sinum, tertio cruris alius dati sinum AB, & prodibit sinus GH anguli quæsiti D oppositi.

PROBL. II. PROPOS. LXVI.

Datis duobus angulis, & vno crure reliquum crus oppositum reperire.

EX 64. propos. huius data, & quæsitum sunt quatuor proportionalia; Quamobrem Positis primo loco sinu anguli dati GH; secundo cruris dati sinu AB, tertio anguli dati sinu IK regula aurea exprimet quartum quæsitum sinum AO cruris oppositi BD.

THEOR. III. PROPOS. LXVII.

Si in triangulo obliquangulo sphærico perpendicularis intus cadit, sinus complementi anguli maioris apud basim ad sinum complementi alterius anguli minoris ad basim est, vt sinus anguli minoris ad sinum maioris, in quos verticalis angulus diuiditur ab arcu normali.

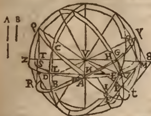
TRiangulo ACB obliquangulo super latus CB cadat perpendicularis arcus AD, & diuidat in duos arcus inæquales BD, & DC. Arcus verò BF. Sic complementum anguli C. At BN complementum anguli B; qui ponuntur ducti polo A, & C, vt ostendimus propos. 4. Tract. h.

Dico itaque, quod BN complementi sinus EM anguli B est ad sinum ST complementi FB anguli C, vt sinus RS anguli BAZ apud A ad sinum QT alterius anguli ZAQ apud A, quos perpendicularis

intus

latus cadens facit; dum angulum verticalem apud a in duo diuidit.

Probatur. Iam ex dictis propof. 1. h. BN finus complementi BA arcus normalis AD est ad radium MV, vt finus EH complementi anguli B est ad MO



finum anguli GAS, & ideo ZAR apud A, qui vtpote ad verticem æquantur, & ideo finui RS: Sic idem SH finus complementi arcus normalis ED, est ad finum totum VM, vt finus EI complementi anguli C ad finum MP anguli apud A æquali angulo ad verticem ZAQ, & ideo finui QT. Cum ergo fiut in eadem proportione, quæ est BN ad MV radium, tum EH ad RS tum EI ad TQ ex prop. 16. lib. 5. erit eadem proportio EH complementi anguli B ad RS finum anguli ZAR, vt EI minoris C complementi finus ad finum TQ anguli maioris ZAQ apud A. Quare *permutando* EH erit ad EI, vt RS ad TQ.

Idem quoque sequitur etiam si perpendicularis extra cadet, vt quilibet cogitare poterit si imaginetur QAT arcum ad alteram partē esse arcus REY.

THEOR. III. PROPOS. LXVIII.

Data summa duorum angulorum, & eorum proportione reperire casū arcus normalis.

HVius problem. fundamentum latiùs supra explicauimus pt. 81. h. in triangulis planis obliquangulis, vbi probauimus. Quod sic se habet summa duorum finuum ad eorum differentiā, sicut tangens medietatis arcuum ad tangentem semidifferentię eorū. Quare etiā si adsit quęlibet alia proportio V. g. lineę A ad lineam B; quæ sit, vt summa duorum laterum ad eorum differentiam ex 16 l. 5. erit etiam linea A ad lineam B, sicut tāgens medietatis arcuum ad tangentem semidifferentię eorum.

Detur itaque quælibet linea V. g. EI in præsenti fig. quę sit ad quamlibet aliam EH, vt QT ad RS finus. Erit itaque *diuidendo* EI ad differentiam quā differt ab EH, vt QT ad differentiam suam ab RS, & *inuertendo* quoque differentia EI ab EH ad EI, vt differentia QT ab RS ad ipsam QT.

Et quia ponitur EI ad EH: vt QT ad RS erit etiam *componendo* EI ad EI cum EH: vt QT ad QT cum RS. Quare ex *æquo* differentia, qua differt EI ab EH erit ad summam EI cum EH, vt differentia, qua differat QT ab RS ad summam QT, & RS.

Propterea que *inuertendo* summa EI cum EH erit ad differentiam earum; vt summa finuum arcus QT & RS ad differentiam ipsorum. Sed vt summa finuum QT, & RS ad ipsorum differentiam, ita est tangens medietatis arcuū QZ, & RZ, idest arcus RQ ad tangentē semidifferentiæ eorū QZ, & RZ arcuum. Ergo ex 16. lib. 5. vt summa finuum EI, & EH complementorū ad semidifferentiam eorum, ita est tangens dimidij arcus QZ, & RZ, scilicet dimidiati arcus RQ ad tangentem semidifferentiæ ipsorum.

Primo itaque subducendus est finus EI ab EH, vt habeatur differentia. Postea EI, & EH in vnam summam sunt redigendi, vt summam consequamur. Hinc arcus datus QR in duo partiendus, & medietatis tangens ex tabulis excerpenda.

Adhibies postea regula trium. Dices si summa linearum, seu finuum proportionalium datorum dat differentiā eorū: quid dabit tangens semisummæ angulorū, & prodibit tangens semidifferentiæ eorum. Hæc itaque tangens quæsita in tabulis exhibebit arcum, qui additus medietati arcus QR dabit angulum maiorem ZAQ, subductus relinquat minorem ZAR, & punctum Z erit illud, in quod arcus normalis AZ cadit.

THEOR. IV. PROPOS. LXIX.

Obliquanguli trianguli tribus angulis datis eius latera reperire.

PRimo secundùm præc. doct. angulorum C, & B datorum complementis EI, & EH, & semisumma arcus QR anguli QAR inuenies singulos CAD, & BAD angulos, nimirum arcus QZ, & RZ; siquidem ex propof. 67. ita est EH ad EI, vt SR ad TQ. Et si triangulum exhibitum habeat vnicum angulum obtusum, sumes pro angulis ad basim duos acutos, quod si obtineat duos obtusos, illos constitues pro angulis ad basim semper specie concordes. Vnde semper perpendicularis intra triangulum cadat. Quare in triangulo rectangulo CAD habentes duos angulos ad basim notos, nempe angulum C, & CAD ex propof. 83. huius inueniamus basim AC, & ex prop. 35. crus CD. Postea dato angulo B, & DAB ex propof. 83. basim AB inuenies, & ex prop. 35. crus DB, addesque cruri CD, quoniam anguli specie concordes assumpti fuere, & obtinebis tria latera nota AC, CB, & BA.

PROBL. V. PROPOS. LXX.

Dato crure opposito, & duobus angulis, & altero specie noto, angulum verticalem manifestare.

DEntur anguli B, & C, & crus oppositum CA ipsi BI. Priùs itaque reperias angulum apud A in triangulo ACD dato pro basi crure AC, & angulo acuto C ex prop. 15. h. scilicet QZ arcum.

Secundo, quia ex prop 67. ita est finus EI complementi anguli dati C ad finum PM, vel æqualem TQ, vt SH ad MO, vel æqualē SR ex dato EI complemento anguli C, & inuento finus TQ, & BH complemento anguli B reperiemus MO, idest SR, & si anguli specie consentiant, simul arcus addendi, quod si specie differant, tunc pro angulo obtuso eius complementum assumendum est, & inuenti anguli, seu arcus minor à maiori est subducendus.

THEOR. IV. PROPOS. LXXI.

Sinus secundi arcuum in obliquangulo triangulo, in quos à perpendiculari diuiditur basis, sunt inuicem, vt finus complementorum arcuum ipsis conterminalium.

SInt AG, & AS finus arcuū conterminaliū FB, & GS & GH, & FR eorum complementorum; arcus



verò, in quos diuiditur basis FD, & DG, & sinus complemẽtorum L H, & IP. Dico, *quod ita se habet* LO ad IP, vt OH ad FB:

Probatur ex prop. 6. h. Nam, vt est HG ad GL; sic est CD ad radium VD ex propos. 6. huius; Item, vt FB ad PI; sic CD ad radium DV. Quare ex propos. 16. lib. 5. GH erit ad OL, vt FB ad PI; cum eidem proportioni CD ad DV consonent. Idem autem ostendetur si perpendicularis extra cadat, vt ex te videre potes.

PROBL. VI. PROPOS. LXXII.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus illum claudentibus basim inuenire.

Offeratur angulus G, & crus FG, & GF, alterq; angulus F specie angulo G consentiat.

Primo dato angulo G, & basi GB reperies crus GD adiacens ex propos. 13. huius, quòd à dato crure GF subduces, & consequeris DF.

Itaque primo sinu LG complementi cruris reperti DG, secundo loco sinu FI complementi DF residui cruris dati, & tertio sinu secundo HE arcus conterminalis EG reperies sinum EF complementi basis BF quæsitæ angulo G verticali oppositæ. Hoc autem docuimus alio modo propos. 60. h. Quod si alter angulus specie diuersus sit, vteris complemento, si angulus verticalis sit obtusus, arcumque inuentum minorem à maiori dato subduces, vel si sit acutus ab arcu inuento maiori minorem datum pro inuento primo, quo, & cęt. vt prius.

PROBL. VII. PROPOS. LXXIII.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito, reperire basim altero angulo specie noto.

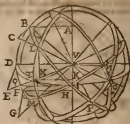
Docuimus propos. 56. h. id alio modo. Dentur itaque duo crura SG, & SF, & angulus G, sed F sit tantùm specie notus. Primo angulo G, & crure GS reperiemus crus GD ex 13. h.

Deinde fiat, vt HG complementi cruris GD sinus ad FS sinum cõplemẽti alius cruris SF; sic sinus LG complementi arcus inuenti GD ad IP ignoti arcus complementum, & duo inuenti arcus simul addantur GD, & DF, & fiet GF basis, si anguli specie concordent: quod si dissonent alter ab altero subducatur, & residuum erit arcus quęsitus.

THEOR. V. PROP. LXXIV.

Tangentes secundæ laterum conterminalium arcui normali sunt inuicem in proportione, vt angulorum sinus secundi, in quos triangulum à normali diuiditur.

Triangulo LMI latera arcui ITD conterminalia sunt IM, & IL; quorum complementorum tangentes sunt BC, & FG: Arcus verò angulorum sunt FD, & BD; quorum sinus secundi AB, & HB. Dico itaque, quod vt BC ad FG tangentes crurum secundæ; sic AB ad HF sinus secundi angulorum.



Probatur. Nam ex propos. 20. huius Radius, VD est ad sinum complementi anguli, nempe AB, vt tangens DB complementi cruris adiacentis IV ad tangentem BC complementi basis. Vnde, & conuertendo BC erit ad DB, vt AB sinus ad radiũ DV, sed ex eadem propos. 20. in altero triangulo, vt DB ad FG, sic VD radius ad sinum HF. Ergo ex *æquo* BC erit ad FG, vt AB ad HF.

PROBL. VIII. PROPOS. LXXV.

Datis duobus cruribus; & angulo verticali angulos reliquos obtinere; si alius angulus tertius specie sit cognitus.

Sint data crura MI, & LI, & angulus I verticalis. Quia est CB tangens secunda ad FG tangentem secundam, vt BA ad FH sinus complementorum angulorum datur itaque proportio BA complementi angulorum ad FH, in quos verticalis est diuisus in tangentibus CB, & FG; datur quoq; summa anguli FBD eorundem angulorum, ideoque ex 48. h. si fiat, vt CB, & FG summa tangentium I. crurum ad ipsarum differentiam, sic semisummæ arcuũ DB, & DF tangens ad ipsorũ semidifferentiæ tãgentẽ reperies semidifferentiã arcuum BS, & FD, quam subtrahes, & consequeris minorem arcum DF addes, & obtinebis maiorem BD arcus angulos BID, & DIF mẽsurantes. Vnde dato angulo BID, & latere LI consequeris angulum L, sic dato angulo DIF, & latere MI consequeris angulum M, ex 13. h. Quos vnies angulis specie consentientibus: subduces alterum ab alio, si specie dissonent.

PROBL. IX. PROPOS. LXXV.

Datis duobus angulis, & basi exquirere angulum verticalem.

Detur angulus L, & M, & basis LM, & in animo sit reperire angulum LIM. Ex complementorum angulorum tangentibus NO, & OP erit nota proportio MX ad XL sinus ex 77. h vnde reperietur MX, & XL ex prop. 68. h. deinde angulo M, & sinu MX exquiretur angulus TIM ex prop. 5. h. rursusque angulo L, & LX, angulus TIL, & sic totus angulus MIL notus erit, si simul vniantur, eo quod anguli ad basim specie consonent, vel subducatur alter ab alio, si dissonent.

PROBL.

PROBL. IX. PROPOS. LXXVI.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito angulum verticalem consequi alio tertio angulo specie noto:

DEtur crus LT, & MS, & angulus L oppositus cruri MI. Primo data basi IL, & angulo L ex propos. 13. huius inuenietur angulus DIB.

Deinde fiet ex pr. 74. vt tangentes SC ad PO complementorum crurum, sic as sinus complementi anguli reperti DIB ad aliud, & inuenietur PH sinus complementi anguli alterius DIP, quos iungesi concordent anguli, subduces minorem à maiori si anguli specie disconueniant. Hoc autem etiam docuimus alio modo propos. 58.

THEOR. VI. PROP. LXXVII.

In obliquangulo triangulo sinus segmentorum basis à perpendiculo factorum in ea sunt proportione; in qua tangentes complementorum angulorum segmentis adiacentium.

ANguli adiacentes segmentis TM, & LT à normali factis, sint L, & M, & tangentes complementorum ipsorum PO, & Nn. Dico, quòd, vt sinus LX ad sinum MX; ita sit PO ad ON in proportione in præced. schemate.

Probatur ex 24. huius. Quoniam radius LV est ad sinum LX cruris LT, vt tangens DE complementi alterius cruris IT ad tangentem OP complementi anguli ipsi cruri LT oppositi. Ergo inuertendo sinus LX erit ad radium, vt tangens PO ad tangentem DE. Et ex eadem propos. vt radius est ad MX, sic DE tangens ad ON tangentem: Ergo ex æquo vt sinus LX ad XM sinum, ita PO tangens ad NO tangentem complementorum, & ideo erit etiam PO ad LX permutando, vt NO ad MX.

PROBL. X. PROP. LXXVIII.

Dato crure, & angulis duobus basim interiacentem angulis expromere.

DEtur angulus L, & M, & crus IL, & in animo sit reperire crus, seu basim ML.

Dato angulo L, & crure IL inuenies in primis crus LT ex propos. 13. huius.

Secundò ex præced. facies, vt OP tangens complementi anguli ad sinum XL; sic tangens alterius anguli ON ad MX; habebisq; duos arcus LT, & MT; quos simul addes, si anguli dati sint speciei eiusdem; subduces si diuersi sint diuersæ speciei: Hoc autem docuimus supra propos. 61. Quòd autem sit PO ad LX, vt ON ad MX patet ex præced. Nam cum sit PO ad ON, vt LX ad XM erit etiam permutando OP ad LX, vt ON ad MX.

PROBL. XI. PROPOS. LXXIX.

Datis duobus angulis, & basi interiacente duo crura reperire.

QVoniam enim est ON ad OP, vt MX ad XL inuertendo: dentur verò basis LM, & anguli L, & M in triangulo obliquangulo LIM, & consequenter complementorum tangentes PO, & ON dabitur proportio, quam habet XL ad XM in duabus tangentibus PO, & ON, & dabitur summa arcus ML basis scilicet interiacentis.

Vnde ex dictis supra propos. 68. exquires sinus XL, & XM, & arcum TL, & TM; quo obtento.

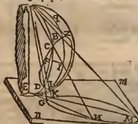
Secundo crure MT, & angulo M exquires basim IM, ex propos. 21. huius, & rursus dato crure LT, & L angulo ex eadem perquires crus, seu basim IL: quod & fecimus supra propos. 61.

Si verò anguli sint specie differentes pro angulo obtuso accipies eius complementum acutum ad ineundam operationem pro altero angulo, & eadem exequeris, vt priùs.

THEOR. VII. PROPOS. LXXX.

Dato in sphæra triangulo obliquangulo, si polo in angulo verticali maiori cruri opposito, interuallo minimi cruris circulus minor describatur, tangens dimidiæ basis est ad tangentem dimidij aggregati crurum, vt tangens dimidiæ differentiæ crurum refertur ad tangentem eius portionis basis, quæ extra circulum remanet.

SPhæra super aliquod planum locata sit, & punctum contactus sit vertex B trianguli obliquanguli secu sphæra descripti, & polo I. qui opponit maiori lateri EDC describatur circulus ZBCQ interuallo arcu CI minori. Itaque IC arcus erit æqualis arcui IB; Vnde totus arcus SILB erit aggregatum ex cruribus IC, & ILu. Quia verò planum m n tangit sphęrā, omnes lineæ, seu sectiones



in eo delineatæ erunt tangentes sphęræ. Ergo si planū AQTLB circuli productū intelligatur, & secet planū m n faciet sectionē MB, & ducta per B linea AM efficietur MU tangens arcus SILB summæ duorū crurum. Rursus, quia IC æquatur IL arcui LB erit crurum differentia, & ductâ lineâ AB per L linea BU differentiæ BL crurum erit tangens. Sic arcus CDB est basis, & pducto plano circuli, ACDBA cuius portio est secabit planum m n in BN, & per C ductâ rectâ AN efficietur NB eius tangens; Quod verò basis remanet extra circulum arcus DB vocetur

tur *baſis alterna*, & ducta AE per D linea GS erit eius tangens.

Sunt autem tangentes non angulorum; ſed ſemiangulorum, eo quod oporteret, vt eſſent tangentes angulorum integrorum, quod prouenirent à centro, at quia anguli MAS, & OAE fiunt, & anguli KAS, & GAS ſunt ad peripheriam hinc ex propoſ.23. el.3 ſunt tang. non angulorum; ſed ſemiangulorum.

Per ea autem, quæ diximus de proiectione circuli obliqui in ſphæra prop.9. tract 26. MNHC ſunt puncta in peripheria circuli proiecti exiſtentia, quòd ſit baſis radioſi coni ſcaleni, cuius baſis ſubcontraria eſt circulus ZBCDL. Et hinc eſt, quòd illud idem, quòd ſupra pr.32. de triangulis planis oſtenſum eſt, hic verificetur, & ita ſit tangens SN ſemibaſis veræ ad tangentem MS ſemiaggregati crurum, vt tangens ſemidifferentiæ crurum XS eſt ad tangentem OS ſemiportionis baſeos extra circulum remanentis: Omnia autem eliguntur dimidiata, quia ſecantes illæ, vt AG, AN, AM, & AK, quę terminant tangentes non proueniunt à centro ſphæræ, vt dixi, vnde arcus menſurantes angulos ducti radio AE apud A ſunt duplo minores, quàm ij qui in circumferentia ſphæræ ſunt, ſcilicet SPC, & ELB, & cæt.

PROBL. XII. PROPOS. LXXXI.

Datis tribus lateribus obliquanguli ſphærici, illud ad duo rectangula reducere.

DEntur trianguli ſphærici tria latera primùm 40. ſecundùm 35. tertiùm 60. Gr. Statuatur pro baſi crus maius, cuius medietas eſt 30. Gr. & tangens groſſioribus numeris tantum accepta eſt 577. reliqua verò duo latera in vnum aggregentur, & fient Gr.75. qui bifariam diuiſi erunt Gr. 37. m.30. quorum tangens eſt 767. Rurſus ſubducatur crus maius à minori, & Gr.5. pro differentia remanebunt, & pro ſemidifferentia Gr.2. m.30. cuius tangens par.43. Adhibeatur itaque regula proportionum, & ponatur primo loco tangens ſemibaſis SN par.577. ſecundo tangens ſemiaggregati crurum SM Par.767. tertio tangens differentiæ crurum EX par.43. & prodibit tangens 57. OS arcus DS Gr.3. m.16. ſemibaſis alternæ, qui duplicati, vt ſint Gr.6. m.32. & ablati à baſi Gr. 60. remanebunt Gr.53. m.28. pro baſi DC intra circulum remanente, cuius medietas DF erit Gr.26. m.44. in quam cadit arcus normalis SF, reliqua verò medietas addita baſi alternæ 6. m.32.

dat reliquum arcum FOS Gr. 33. min.16.

Ratio huius rei eſt ex præced. Quia ita eſt tangens SN ad tangentem EM, vt tangens SX ad tangentem GS; Vnde datis tribus primis regula proportionum quarta inuenietur.

PROBL. XIII. PROPOS. LXXXII.

Datis tribus lateribus angulos quoſlibet, reperire.

EX propoſ. anteced. id optimè fit. Nam cum iam conſequti fuerimus notitiã partiũ baſis, in quas arcus normalis cadit crure ILE dato pro baſi, & crure ADF, iam reperto inuenies per propoſ.18. huius angulum E adiacentem cruri dato ILE.

Secundo inuenies ex eadem propoſ. dato crure IC, & FC angulum C adherentem cruri FC.

Tertio eodem dato crure IC, & CF inuenies partem anguli verticalis CIF ex prop.3. huius, & ex eadem dato crure FDE, & crure ILE pro baſi inuenies partem alteram anguli apud I, quos angulos ſimul addes, & conſequeris totum angulum CIL. Semper autem perpendicularis intus cadet, quia enim dantur tria latera poſſumus elligere duo, aut ſimul maiora quadrante, aut minora, quæ crura efficiant, vt tertium diſſonum eius ſit illud, in quod perpendicularis cadit.

Habes itaque in hac Expenſ. omnem doctrinam obliquangulorum penitùs explicatam, & omninò abſolutam. Cætera verò, quæ ab alijs ad abundantiam doctrinę traduntur omnes caſus non plenè adęquant ſiue iſtis licet ingenioſiſſima ſint. Vnde huic libro, qui neceſſaria complecti intendit, & ſufficientia non omnia, propoſitiones prædictæ ſatis erunt.

TRACTATVS XXVIII.

De Progreſsionibus ſuperficierum.



TRanſactis tractatibus, quæ de lineis erant conſideratis, vt in corporibus, vel circa corpora deductis, nunc de corporum, ſuperficiebus agendū eſt. Et quia ſupra tractauimus de progreſsionibus in numeris, & in lineis, ratio poſtulat, vt eas propoſitiones, quæ veræ vniuerſales ſunt, oſtendamus ſimiliter de ſuperficiebus quoque verificari, & ſimul ſpecialia quædam de progreſs. Arithmetica ſuperficierum attingamus, quæ cubandis ſphæroidibus neceſſaria ſunt.

EXPENSIO I.

De ſerie proportionis Geometricæ ſuperficierū

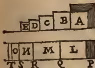
DVplex eſt ſeriea ſuperficierum, quæ continuata in infinitum geometricè extendi poteſt; Alia eſt, quæ vnicam ſuperficiem conſtituit; alia quę diuerſas ſuperficies inuicem ſimiles componit, de hac precipuè hic propoſitiones tãgemus: quas exhibuit nobis Ambroſius à S. Vincentio ab ipſo ſingulari ingenio excogitatas.

THEOR. I. PROPOS. I.

Omnes propoſitiones, quas ſupra de lineis demonſtrauimus de ſuperficiebus geometricè continua progreſſione procedentibus verificantur.

SInt quadrata ſimilia, ſeu quodcumque aliud genus figurarum A, B, C, D, & cæt. proportione geometricâ continuâ procedentis; Dico de illis omnia illa verificari, quæ ſupra tract.16. part.1. de lineis memorauimus.

Quod, vt oſtendatur fiant rectangula ęqualia illis figuris A, B, C, D, & cæt. ſed eiuſdem altitudinis ex pr.43. vel 44.l.1.elem. quę ſint L, M, N, O, quæ inuicē eam proportionem obtinebũt, quam baſes ex prop. 1. lib.6. Elem. eritque L ad M, vt PQ ad QR, & ſic de alijs vnde



Probatur. Ita eſt figura A ad figuram B, vt rectangulum ipſi A æquale ad M rectangulum æquale figuræ B; ſed ex lib.6.prop.1. vt rectangulum L ad M, ita eſt baſis PQ ad baſim QR: Ergo ex propoſ.16.lib.5. Elem. vt A ad B ita PQ ad QR, & ita dices de alijs C, D, quæ ſe referent, vt baſes RS, & ST minoribus in infinitum. Cum ergo ſpatia ſucceſſiuè minora in proportione Geometrica conſeruent ſemper eandem proportionem, ac lineæ, ſeu baſes ſucceſſiuè minores, omnia ea, quæ de lineis dicta ſunt, etiam de ſpatijs ſimilibus verificari poterunt.

COROLLARIVM I.

OMnia ea, quæ dicuntur de lineis ſupra tract. 16. verificari ne dum de ſpatijs ſimilibus; ſed etiam diſſimilibus continuè proportionalibus, vt ſunt rectangula L, M, N, O. Sicut etiam non tantùm de ijs, quæ diuerſas ſimiles figuras conſtituunt; ſed de ijs, qui vnicam, quorum tamen ſingulę partes aſſignatæ decreſcant continuâ proportione geometrica. Tale eſt totum ſpatium LO, cuius ſingulæ partes L. & M, & N, & cæt. ſe referunt, vt baſes PQ, & QR, & RS.

COROLLARIVM II.

ELicitur rurſus progreſſionem infinitam figurarum ſimilium A, B, C, D, & cæt. ſeu diſſimiliū L, M, N, O producere determinatam ſpatij quantitatem; ſi ſimul omnia ſpatia ſumantur; Nam etiam lineæ PQ, & QR, & RT determinatam longitudinem ſimul ſumptæ, licet in infinitum multiplicatæ, producunt ex prop.15. part.1. tract. 16.

COROLLARIVM III.

DEducitur quoque omnia ſpatia antecedentia A, B, C, D eſſe ad omnia cõſequentia B, C, D, E, & cæt. vt vnū antecedens A, ad ſuum conſequens B, & ſimiliter antecedentia L, M, N ad conſequentia M, N, O, eſſe, vt L ad M: Quia ex Cor. 2. pr. 16. Tract.16. ſic ſunt lineæ PQ, & QR, & RS, & cæt. ad lineas QR, & RS, & ST, vt PQ ad QR.

Vnde

Vnde, & *permutando* A, B, C, D V.g. antecedentis omnia erunt ad A, vt consequentis omnia B, C, D, E, erunt ad E.

COROLLARIVM IV.

GNomonem nigrum nempe differentiam primi A à secundo termino B, & ipsum primum terminum totum A, & totam seriem terminorum infinitam esse in continua analogiâ eâdem. Sic & rectangulum nigrum differentiam primi L à secundo M, & ipsum primum L, & totam collectionem rectangulorum esse in continua proportione; quòd ex 3. Coroll. prop. 15. Ita lineæ se habeant.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si dentur duæ progressiones in eadem analogya procedentes planorum, seu qualibet figura vnius sit similis alterius figuræ correspondenti, seu dissimilis; dummodò singulæ vnius seriei inuicem similes sint, sicut, & alterius: Ita se habebit tota planorum series ad totam seriem, vt primum vnius ad primum planum alterius.

SInt ABCD, & 1, 2, 3, 4 progressiones; quarum termini inuicem similes sint; licet diuersi ab alterius seriei terminis V.g. illi sint quadrata, hæc triangula, sintque in eadem proportione V.g. A ad B, vt 1 ad 2, & B ad C, vt 2 ad 3, & sic consequenter, & termini earū sint F, & 6. Dico, *quod tota ser. ei* ABC, & cæt. erit ad totam seriem 1 2 3, & cæt. vt primus terminus A, quadratum ad primum triangulum 1.

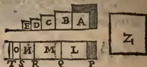


Probatur tota series antecedentium AF, & cæt. est vt consequentium seriem totā 1 6, sic A est ad 1; sed vt A ad B ita est ex Hypothesi triangulum 1 ad 2, & sic ex Coroll. 3. huius omnia antecedentia, & series tota 16. ad consequentia 26. Ideoque ex 16. lib. 5. antecedentia AF ad consequentia FB erunt, vt antecedentia 16. & 26. consequentis. Quare *conuertendo*, vt series tota FA ad A primum terminum, ita 1.6. series tota ad 1 primum terminum. Propterea que *permutando*, vt AF series ad 16. seriem, sic A primus terminus ad 1 primum alterius seriei terminum.

PROBL. I. PROPOS. III.

Planitiem æqualem toti seriei Geometricæ continuæ superficierum exhibere.

FIat, vt gnomon niger redactus in quadratum ex 45. lib. 1. quadrati A, quā differt à quadrato B, sic quadratum totum maius A ad Z. Dico Z planitiem toti seriei AF æqualem esse:



Patet ex propos. 15. part. 1. de progress. vbi id probauimus de lineis. Sed iam ostendimus eas propositiones esse vniuersales, & planitiebus conuenire. Ergo, si tertia proportionalis linea in ea proportione, quam habet differentia primæ lineæ à sequenti ad ipsam primam lineam, hæc inquam tertia proportionalis totam seriem æquat linearum sic etiā superficies tertia proportionalis gnomoni nigro, & quadrato toti A æquabit totam seriem superficierum.

Et eodem modo operaberis de rectangulo P nigro, nam si fiat, vt P ad totum L in quadratum trāsfusa, sic L in quadratū redactum ad aliud inuenies Z æqualem progressioni LO rectangulorum.

COROLLARIVM.

HInc est, quod si sint aliæ species figurarum, quòd possis reperiri similem figuram æqualem toti seriei, si differentiam in similem figuram redigas ex prop. 45. lib. 6. & ex tertiam proportionalem inuenias, vt tract. sequent.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Datis duobus planis similibus, cuius bases homologæ in continuum sint positæ reperire illorum planorum terminum.

IN prop. seq. fig. sint bases planorum homologæ similium AB, & BC indirectum positæ, & cupiat quia agnoscere vltimum terminum, ad quem progressio similium superficierum eis basibus insidentium data perueniat.

Inueniatur ex prop. 15. Tract. 16. par. 1. basium AB, & BC progressionis vltimus terminus, qui sit F. Dico F esse etiam vltimum terminum datorum planorū, ad quem producta in infinitum eorum progressio perueniat fit.

Probatur, quia cum bases sint tot, quot plana, & in eadem proportione duplicata. Siquidem ex prop. 17. lib. 6. plana similia duplicatam habent basium proportionem, vnde patet suis basibus ad cum terminum æquali multiplicatione peruentura.

PROBL. III. PROPOS. V.

Datis duabus primis basibus reperire planorum seriei infinitæ æqualem superficiem.

DEntur bases quadratorum AB, & BC, & ex propos. 14. lib. 6. reperiatur eis tertia proportionalis CD: duarum verò AB, & CD datarum reperiatur seriei infinitæ linea æqualis Q ex propos. 56. tract. 16. par. 1. Fiatque super Q rectangulum AO æquale altitudini BT, & illud erit, quod postulatur, æquale toti seriei quadratorum.

Proba-

Probatur. Nam linea Q ex prop.12. tract. 16. par.1. cùm sit æqualis toti seriei basium imparium ex effectione obtinet duplicatam rationem, ad primam basim AB eius, quam habet series basiũ AF ad primam basim eãdem AB. Propterea que ex 1.lib.6. etiam



rectangulum AO ex Q factum eiusdem altitudinis ad primum quadratum AT duplicatam habebit proportionẽ, quòd sit eadẽ, ac basis suæ Q ad basim AB quadrati AT a illius, quam habet series basium AF basim AB. Sed series quadratorum AF ad quadratum primum AT duplicatam obtinet proportionem seriei basium ad primam basim; siquidem singula ex prop.21 lib 6. duplicatam basium obtinẽt proportionẽ; quare ex 17 l 5.& omnia. Ergo eandem obtinent ad idem quadratum AT. quam rectangulum AO ex Q altitudinis AB ad idem quadratum AT. Quare quadratorum series infinita, & rectangulum prædictum AO ex Q erunt æqualia ex 9.lib. 5. cum eidem eadem dicant proportionem.

COROLLARIVM.

Si inter Q. & BF reperiatur media proportionalis quadratum ex ea erectum erit æquale rectangulo sub Q & BF comprehenso ex 19.l.6. Vnde erit quoq; æquale toti seriei infinitæ quadratorũ.

PROBL. IV. PROPOS. VI.

Dato quadrato, & eiusdem altitudinis rectangulo, seriem infinitam exhibere, quæ & à dato quadrato incipiat, & tota dato rectangulo sit æqualis.

Fiat ex prop.11.lib 6. vt AF ad CF latus rectanguli, sic CA ad CI aliam inueniendam, & ex I erigatur parallela ad FB, & fit rectangulum CO: huic autem rectangulo fiat quadratum æquale CL.

Dico *seriem quadratorum* AD, & CL, & c. *rectangulo* AB, *æquari*.



Probatur. Fecimus AF ad CF, vt CA ad CI. Ideoque cum sit CA sumptus, vt primus terminus ad CI. vt secundum velut AF totum cum primo ad CF residuum ex primo ex Coroll.1. prop.16. tract. 16. part.1. AF erit æqualis toti basium infinitæ seriei in ratione AC ad CI, procedentium.

Deinde quia quadratum CL æquatur rectangulo CO habebit eandem rationẽ ad illa quadratũ AD: Quare cum quadratum maximum AD sit ad quadratum CL, vt AC basis ad tertiam proportionalem BT, quia sunt in duplicata proportione basium; erit etiam talis proportio Quadrati eiusdem maximi AD ad rectangulum CO ob eandem altitudinem, vt basis AC ad CI basim; ergo bases CI, & BT sunt æquales, quod eisdem basis AC eandẽ dicant proportionem quadrati AD ad quadratum CL, vel rectangulum æquale CO. Quare cum sit, vt fecimus AC ad CI, vt AF ad CF & ideo (vt monuimus) AF æquetur seriei basium infinitæ in ratione AC ad CI, æquabitur etiam toti seriei infinitæ basium alternarum, & interruptarum in ratione AC ad BT quod CI, & BT sint æquales. Quare ex anteced. rectangulum ex FA. & CD, nempe rectangulum AB, seriei infinitæ quadratorum AD ad CL, & c. erit æquale, cum sit erectum super AF æqualis seriei basium alternarum AC, & BT, & altitudinis CO, vt docet prop.5. h. quod est promissum.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Planorum seriem exhibere, quæ à dato segmento simili toti alicui planitiei incipiat, & ipsa series sit toti planitiei datæ æqualis.

Sit datus V. g. circulus OMN à quo auferatur portio VZP similis toti, & debeat constitui series, quæ incipiat à circulo PVZ, & tota sit æqualis planitiei toti OMN.



Si esset iam constituta series ista, & esset AX, ita esset series XA ad seriem XC, vt circulus A ad C ex propos. 15. tract. 16. part 1. Coroll 1. Fiat itaque vt circulus OMN totus ad annulum residuum OMN, VPZ: ex prop.26. lib.6. vel etiã ex tr.29. sequenti, sic PVZ circulus ad aliũ IRTS annulũ nigrũ. Cõstituatur autẽ PVZ pro primo termino, & sit A, & fiat planũ C æquale annulo RTS nigro simile ex 23 l.6. circulo, & planitiei A, & ideo planitiei toti OMN, & producatur progressio vsque ad suum terminum X. Dico *seriem* AX *æqualem esse planitiei datæ* OMN.

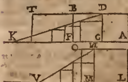
Probatur. Nam ita est ex constructione tota planities OMN ad annulum suum seminigrum NOXP, vt PVZ circulus ad RTXP annulum nigrum, & vt A ad C æquales ex effect. sed vt A ad C; ita est AX series ad CX seriem ex Cor.3.p 1.h. Ergo, vt OMN planities ad OMNZP residuũ annulũ: sic series AX ad seriem CX: quare *conuertendo* erit AX tota series ad residuum. compartemque seriei A primum terminum, vt OMN planities tota ad PVZ residuum ex annulo: Vnde *permutando* erit etiam AX series ad OMN planitiem totam, vt terminus A ad PVZ residuum; sed A, & PVZ ex effectione æquantur. Ergo etiam series AX & planities OMN tota æquabuntur ex prop. 1. lib.6. Elem.

Fiet autem circulus C æqualis annulo nigro ex lib.6. vt infra docebimus Tract.30.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Seriem à dato termino incipientem; sed alteri æqualem instituere.

Fiat rectangulum AB in altitudine CD æquale toti seriei AB ex propos.5. h. Sitque datum quadratum LN minus, quam rectangulum AB (alioquin propositio est impossibilis) cui addatur talis pars MO, vt totum LO sit æquale prædicto rectangulo AB. Et ex propos.6. huius, fiat rectangulo LO series æqualis LV, quæ à quadrato NL incipiat, & erit factum, quod exposcitur.



Patet, quia ex constructione series LV æquatur rectangulo LO, quod est æquale rectangulo AB, quod æquatur seriei AK; quapropter series LA æquabitur seriei AB.

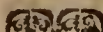
PROBL. VII. PROPOS. IX.

Seriem superficierum alteri datam proportionem obtinentem ordinare, quæ incipiat à dato quadrato.

Sit data proportio 7. ad 4. Fiat autem rectangulum AB adhibendo schema preced. æquale progressioni KA ex h. prop.5. Deinde fiat, vt 7. ad 4, ita rectangulum AT ad rectangulum eiusdem altitudinis AB.

Sit autem quadratum datum L minus, quàm rectangulum AT, & ei addatur tale parallelogrammum ex 35. lib.1. elem. MO, cum quo faciat planum æquale plano AT faciendo rectangulũ LO æqualis MN altitudinis æquale ipsi AT; deinde ipsi fiat ex prop.6. h. æqualis series quadratorum LV; & erit factum, quod exigitur.

Patet ex constructione. Nam series LV æquatur rectangulo LO, quòd æquale est rectangulo AT; rectangulum verò TA se habet ad rectangulum AB, & ideo ad seriem AB ei rectangulo æqualem, vt 7. ad 4. Ergo etiam series LV ad seriem AB se habebit, vt 7. ad 4.



EXPENSIO II.

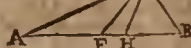
De planorum progressione Musica.

Visa progressione Geometrica restat, & Musicam planorum progressionem breuiter attingamus. Vnde sit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Triangulum, seu parallelogrammum datum ita secare, vt partes proportionem musicam seruent.

Sit triangulum ABC; quod oporteat ita secare, vt totum ABC planum sit ad planum FCA, vt differentia plana HBC ad planum differentiam HCF.



Diuidatur latus AB ex 19.pr. tr.15. vel 1. tr.16. in partes musicæ proportionales, ita vt sit AB ad FA vt BH ad HF Geometricâ proportione respondentes, ducanturque rectæ HC, & CF, eritque factum. Nam ABC totum triangulum erit ad AFC, vt differentia BCH ad differentiam HCF, vel si sit parallelogrammum ducantur normales ab F. & H ad basim AB, & partes erunt harmonicè proportionales.

Probatur, vt refertur AB ad AF bases, sic refertur BH ad HF basium differentiæ; sed triangula, vtpote eiusdem altitudinis ex 1. lib.6. eandem habet basium rationem. Ergo eiusdem rationis BH ad HF, quæ est eadem, quæ B A ad FA. Quare erit quoque triangulum BAC ad triangulum FCA in ea proportione, vt BHC ad HCF.

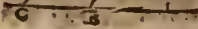
COROLLARIVM.

Hinc colliges de istis planis, omnes quoque propositiones, quas de lineis diximus verificari, cumque de istis nil amplius dicendum nobis sit ad ipsa spatia, quæ ab harmonicis lineis efficiuntur accedendum.

PROBL. II. PROPOS. XI.

Trapezia harmonicis lineis intercepta in harmonico triangulo habent eam proportionem, quã trianguli ad triangulum, nempe proportionem duplicatam basis ad basim.

Sint lineæ harmonicæ BH, HF, BC, & HO, & FG in triangulo harmonico ABC, quæ faciant spatia BO, & HG. Dico ea spatia BO ad HG habere inuicem eam proportionem, quã trianguli AC B ad triangulum AG F, nempe proportionem duplicatam BM ad HF.



Probatur Triangu-

angulum ACB ad triangulum simile AGP ob æquales angulos, à parallelis effectos est in duplicata ratione lateris AB ad latus AP; Trapezium quoque XO ad trapezium HG duplicatam habet lateris SH ad latus HP rationem ob similitudinem eorum cum angulis æqualibus cõstent ob parallelas; sed vt erat AB ad aream PA, ita est ob proportionem musicam ex propos.1. tract.16. part.2. latus SH ad latus HP; ergo etiam ACB triangulum ad AGP triangulum erit, vt trapezium XO ad trapezium HG.

COROLLARIVM.

Hinc educitur omnes illas propositiones, quas posuimus de lunis agentes in seriem harmonicam progredientes, etiam superficiebus applicari debere, & veritatem eandem obtinere; quia earum omnium fundamentum est proportio Musica, secundùm quam in seriem continuam Musicè procedunt, vt facilè ex ea ipso poterit considerare absque noua omnium earum propositionum repetitione.

EXPENSIO III.

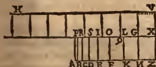
De progressione spatiorum Arithmetica.

Hæc Expensio quadrandis Ellipticis spatijs & spiralibus, & anbandis Conoidibus maximè deseruit; estque veluti fundamentum ad illas operationes præstandas.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Rectangula Arithmeticè decrescentia, & eiusdem altitudinis æquiualent medietati rectanguli, ex eorum integrorum summa constantis vno excluso; dummodo partes secundùm quas decrescunt, tot sint quot ipse.

Sint rectangula ZG, & cætera vsque ad A, V.g. 8. & octaua sui parte decrescant alterū respectu alterius. Dico, *quod omnia sic diminuta simul æquiualent medietati summæ, quæ ex eis integris constatur, nimirum rectanguli* HE *medietati excluso* OV *vnico rectangulo, vt sint 7.*



Probatur. Nam primum NL remansit tantùm, quantùm ablatum est ab vltimo AP, siquidem septem partes in NL remansera ablata vna septima, ibi in AP vna septima relicta est; cæterę septem ablatæ. Ergo æquatur, quod remanet ei, quod ablatum est. Sin dicas de residuo OX, quod æquatur defectui BR; siquidem hinc ablatæ sunt 6. partes, ibi sex remansere, & sic de alijs, ergo defectus bina, & residua inde æquabuntur; sed si sumantur simul augmenta, & defectos faciant totum rectangulum. Ergo cum sint septem rectangula deficientia erunt simul defectus, & residua æqualia septem rectangulis integris. Ablatis itaq; æqualibus defectibus, residua remanebunt dimidia septem rectangulorum nempe dimidio HC exaluso primo OV, sunt autem septem deficientia, quia à primo nihil aufertur.

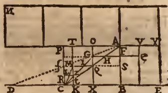
Id etiam diximus, cum ageremus de proportione Arith. summsoda la Cor.prop.9.Tr.14. Siquidem ostendimus numeros datos continua diminutione Arithmetica deficientes in vnam summam redactos efficere dimidium numeri ipsius maximi in se ducti consurgentis, ipso tamen maximo excluso, vt videre in istis numeris. Namque maximus terminus est 10. qui multiplicatus in se facit 100. summa verò omnium est 45. nempe dimidium numeri quadrati ipso maximo 10. excluso, vt fiant 90. cuius dimidium est 45.

10	0
9	1
8	2
7	3
6	4
5	5
4	6
3	7
2	8
1	9
45	45

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Rectangula prædicta iam arithmeticè deficientia; si adhuc secundùm aliud latus prædicto modo arithmeticè deficiant, sunt maiora suis residuis.

Sint rectangula Arithmeticè iam diminuta AX vsque ad KP; quæ adhuc eodem prædicto modo diminuantur, & primo auferatur rectangulum, cuius basis sit AF partis vnius, OQ duarum, ZP trium prout supra fecimus; Dico hæc residua rectangula, seu quadrata simul sumpta excedere partes omnes à se ablatas, nempe FO, & QT, & ZP, &c.



Præassumptum. Et in primis notandum, quod omnis vnitas est ad latus alicuius quadrati, vt latus ipsum ad quadratum suum; quòd ex def.15. tract.8. ratione multiplicationis sui, ita vnitas metitur radicem, seu latus; vt latus, ipsum quadratum; sic 1. metitur 4. vt 4. metitur 16. Quare si à radice auferatur vnitas, & à quadrato dematur ipsa radix; ita quoque erit 1. ad 3. vt 4. ad 12. Nam si est 1. ad 4. vt 4. ad 16. erit etiam *diuidendo* 1. ad 3. vt 4. ad 12.

Quo posito insuper considerandum est, quòd FC est radix, seu latus ex ex hypothesi minutum valde vnitate, & BD duplum AC est radix ipsa in se multiplicata ex præs. sed minuta ipsa radice BE. Nam diximus, quod omnia rectangula, idest AP arithmeticè decrescentia æquant dimidium rectangulorum AN integrorum sumptorum toties, quot

partes in ipsa latere BA sunt, iuxta quas arithmeticè decrescunt, si tamen dematur rectangulum ipsum maximum AB: sed rectangula inuicem sunt, cum sint eiusdem altitudinis, vt bases, quare bases quoque BC arithmeticè decrescentes æquabunt dimidium BD radicem BE in 4. part. diuisam, & per 4. scilicet in se, ductam; sed diminutâ ipsa radice BE.

Quare ex præced. præass. ita erit AF vnitas ad FG latus minutum vnitate, vt AB ad BD radicem in se ductam toties, quod in ipsa sunt partes sed ablata ipsa radice BE; Vnde FA erit ad FG, vt AB ad BD: Quare, & FA vnitas erit ad dimidium radicis FH, vt AB radix ad BC dimidium ipsius AB ex 18. lib. 5.

Cum ergo FH sit dimidium radicis vnitate diminutæ, & AFH triangulum æquale triangulo HQG, ex altera vnitate QG, & dimidio HC effecto, erit trapezium BAQE æquale quadrato primo DG.

Vnde si etiam cætera trapezia QXRE, & cæt. essent æqualia suis quadratis XM, & alijs correspondentibus, spatium occupatum à quadratis decrescentibus esset æquale triangulo BAC, ex BC latere omnium diminutorum rectangulorum, & BA radice. Vnde rectangula ablata eis essent æqualia. Verùm hoc non est. Siquidem vnitas FA est ad radicem dimidiatam, & diminutam FH, vt radix ipsa tota AB ad BC; erit etiã ex 18. l. 5. dualitas AS ad SQ radicem diminutam; vt radix tota SA ad BC. Si verò demeatur dualitas à maximâ radice fit radix sequentis minoris quadrati XQ. Quare AC diagonalis transibit per Q. Vnde trapezium à diagonali afformatum in sequenti quadrato minus erit, quam ipsum quadratum; siquidem XQ vnú latus quadrati est idẽ, ac trapezij QTEX alterũ verò latus minus ET non potest æquari, & sic dicas de reliquis, licet sufficiat probasse de vno. Quare verùm erit, quod rectangula, seu quadrata decrescentia, rursus Arithmeticâ diminutione, vt BG, & XM, & ER, maiora euadunt, quàm medietas BAC rectanguli BACP ex summâ omnium solâ primâ diminutione deficientium conflati.

COROLLARIVM.

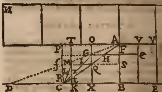
Hinc est, id quod ostendimus de triangulis FHA, & HGQ, quod sint æqualia, id etiam ostendi de alijs, si XG assumatur tanquam latus maximi quadrati, vt sumitur BA; quare ductâ diagonali co secabit QM, dimidiam in t, & triangulum QGI erit æquale triangulo IZM, & triangulum ZML triangulo RCL; & ita si sint alia, siue quadrata, siue rectangula.

THEOR. III. PROP. XIV.

Summa rectangulorum, seu quadratorum duplici Arithmetico decremento minutorum est minor summâ ipsorum integrorum excluso vno; seque habet ad eam minus in proportione, quam 1. ad 3.

Sint rectangula BG, & XM, & KR. deficientia Arithmeticè, ne dum quòad latus BX, & alia, sed etiam quoad latera BP eodem modo. Dico, *quòd eorum summa* BG, *&* XM, *&* KR, *dicit ad* AN *integra quadrata per* 3. *multiplicata numerum partium successiuè defectus minorem proportionem, quàm* 1. *ad* 3.

Probatur. Quoniam ex præced. Coroll. omnia triangula, in quibus trapezia, vt GXRZ, & cæt. excedunt quadrata sua, vt XM sunt æqualia triangulis, quibus excaduntur, nimirum QGI triangulum triangulo IMZ, & alia alijs. Posito itaque illo spatio triangulari vt IZM, & LRC, in quo quadrata excedũt triangula QGC, & ZMC pro illo QGI, & ZML, in quibus exceduntur cũ ZLI Q. & LZTC sit commu-



ne; spatium QCZT æquabitur spatio MIQ. & MCT spatio ZRCT: vnde omnia triangula QGC, MZC æqualia erũt excessibus quadratorũ extra diagonalẽ AC excadentium, & remanentium; nempe spatio QMT, & RCZT, quo superant BAC triangulum; sed hæc triangula QCG, & MZC sunt æqualia dimidio rectangulorũ fG, & LM, vtpote eiusdẽ altitudinis. Ergo etiã excessus quadratorũ QMT, & ZCX extra CAB, triangulis QGC, & MZC æqualia sunt dimidio eorũdem rectangulorum fG, & RM. Si autem etiam BG quadratum primũ inter decrescentia excluso maximo excessu eodem excederet rectangulum PF, iam excessus omnium quadratorum super medietatem BAC æquaretur dimidio rectangulorum PF, & fG, omnium inquam defectuum, & ideo si esset triangulum APC partium 3. duæ adderent PF, fS, & MR rectangulis, at vna excessui quadratorũ. Quare quadrata BG, XM, & XR posito toto rectangulo BACP partium 6. essent dimidium, & tertia pars alterius dimidij, nempe $\frac{4}{6}$, & rectangula residua PF, & fG, & RM $\frac{2}{6}$. Sed iam ostensum est quadratum GB primum deficientium nullo pacto excedere BAC. Vnde sũma quadratorũ BG, & XM, & KR deficit à $\frac{2}{6}$ dimidio rectangulo PF, siquidem si spatio æquali illi dimidio excederet BG quadratum diagonalem AC, iam æquaret $\frac{4}{6}$ totius BACP. Sed quantitas BACP est dimidium quadratorum AN ex h. propos. 12. Ergo quadratorum, (cùm BP ponatur 6) AN rectangulum erit 12. & ideo BG, & XM, & KR summa erit ad AN 4. quadrata integra minùs quam 4 ad 12. idest minus, quã 1. ad 3. cum sit ad PE, vt 4. ad 6.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Si quadratis decrescentibus, & quadratis quoq; non decrescentibus addamus maximum quadratum, erit maior proportio omnium decrescentium ad omnia non decrescentia addito vtrobique maximo; quam 1. ad 3.

Si series quadratorum, seu rectangulorum decrescens in præced. schemate addito maximo BA, & BG, & XM, & KR, iterumque quadrata integra tot numero YN addito alio quoque maximo. Dico, quòd quadratorum prædictorum decrescentium BA, & BG, & XM, & KL. Proportio ad YN quadrata

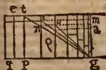
dreta æqualia erit maior, quàm 1. ad 3.

Probatur. Ita est vnitas ad radicem, vt radix ipsa ad suum quadratum. Ergo æquabitur rectangulum ex vnica parte V. g. AF, & ex ED partibus tot, quot sunt in quadrato BA partes, constante quadrato ipsi AB ex 17. Elem. lib. 6. Quare etiam dimidium EF rectanguli ex ED, & AF erit æquale dimidio BV rectanguli BA. Quod autem ED constet tot partibus, quot in BA sunt quadrata parua patet ex hypothesi; quia est radix ipsa BA toties accepta, quot in ipsa BA sunt partes: Vnde si in AA sunt 4. partes in ED erunt 16. quia in AB sunt 16. partes productæ ex multiplicatione lateris AB in se ipso posito. Iam BV rectanguli est ad AN, vt 3. ad 6. ex propos. 12. huius: addito autem quadrato, vt sit YN, & quadratis decrescentibus EV dimidium ipsius: erit adhuc VC ad YN, vt 3. ad 6. Ideoque cum quadrata decrescentia EG, & AM, & KL sint minus, quam 2. ad 6. ex præced. ad AB quadrata æqualia, si addamus eis duas tertias partes parallelogrammi BV erunt adhuc quadrata decrescentia OE, XM, & KR cum $\frac{1}{3}$ ipsius VN ad YN quadrata non decrescentia minus, quam 2. ad 6. & defectus erit ex præced. dimidium parallelogrammi FP: Si ergo addamus EV dimidium quadrati BA addimus plus, quam FP, vt in principio ostendimus nimirum PE. Ergo addito toto quadrato EA quadratis decrescentibus, cum addamus magis, quàm quod requirunt ad hoc, vt dicant proportionem 2. ad 6. vel 1. ad 3. habebunt ad quadrata non decrescentia VN maiorem proportionē, quàm 2. ad 6. vel 1. ad 3. & excedent ferè rectangulo dimidio EP, & triente EV.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Quadrata decrescentia, seu rectangula duplici decremento Arithmetico supra descripto, quò iuxta minutiores partes successiuum eorum decrementum constituitur, eò magis accedunt ad proportionem 1. ad 3. respectu quadratorum non decrescentium.

MVltiplicentur OS, XM, & KR rectangula præcedentis per diuisionem subduplam, vt in fig. Q. Proportio quadratorum, seu rectangulorum semper crescet ad quadrata non decrescentia, & semper fiet magis proxima ad eam proportionem, quam habet 2. ad 3.



Probatur. Nam rectangulum m t erit minus, quàm FP in præced. fig. & ferè duplò minus, quam IP, siquidem etiam, si secundùm longitudinem excrescat ei pars t t, ea certè non æquat longitudinem tm, vt ex dictis etiam colligi potest. Cum ergo hoc rectangulum sit minus, reliqua erunt maiora, vt patet. Nam loco sequentis GF præced. fig. succedent in hac duo rectangula nm, ua simul æqualis latitudinis, ac uQ, sed quæ magis distent ob diuisionem minutiorem, & subduplam à termino g erunt longiora, & sic de cæt. Proptereaque etiam triangula, vt u 1 g, dimidia rectangulorum erunt maiora triangulis QGC in præced. fig. si duo triangula illius vni huius ob basim n 1 subduplo minorem sumantur. Sed hæc sunt æqualia incremento rectangulorum 1 vsque ad g supra dimidium tgp. Ergo etiam rectangula, seu quadrata, velut 1 p crescent magis vltra dimidium, quàm quadrata AB, & cæt. præced. fig. & magis ad $\frac{2}{6}$ accedunt.

Nec tamen vnquã perueniunt ad $\frac{2}{6}$, quia semper ad $\frac{2}{6}$ deficiet dimidium rectanguli t m; quare ad quadrata, seu rectangula q t septem integra erunt proximè, vt 2. ad 6. ex propos. 13. huius, cùm ea integra sint duplo maiora, quam rectangulum g t. Quod si quadratis non decrescentibus septem, & istis decrescentibus addas q t; eodem pacto, & eadem ratione erunt magis, quam $\frac{2}{6}$; sed multo magis accedent ad $\frac{2}{6}$, quadratis præced. fig. EA, & GB, & cæt. Nam tertia pars rectanguli e p erit minor, quàm tertia pars residua BV, & dimidium e p huius, quod æquatur rectangulo e m erit minus, quàm dimidium BV illius, quo dimidio, & que tertie parte quadrata præcedentis decrescentia sunt magis, quàm $\frac{2}{6}$ respectu non decrescentium, vnde addito vtrinq; maximo q t rectãgula octo h. fig. minus discrepabunt à $\frac{2}{6}$, quam rectangula præced. fig. respectu octo rectangulorum integrorum quale vnum est r q.

THEOR. VI. PROPOS. XVII.

Series quadratorum, seu rectangulorum si infinita subdiuisione in Arithmeticam seriem, quoad ambo latera diminuatur, æquatur duobus sextis, quadratorum integrorum saltem quoad sensum.

PRob. Nam quò numerosior est subdiuisio eò fit propinquior accessus ad $\frac{4}{6}$ rectanguli g t excluso maximo rectãgulorum à minori proportione; Sic incluso maximo fit accessus ad $\frac{4}{6}$ rectãguli g t à maiori proportione: nec excluso maximo accedendo ad $\frac{4}{6}$ potest excedere $\frac{2}{6}$, nec incluso maximo ex præc. Ergo si diminutio fiat quoad vsque fieri potest æquabit tota simul $\frac{2}{6}$. Patet consequens. Nam non erit magis, quam $\frac{4}{6}$ alioquin posset adhuc fieri subdiuisio à maiori proportione, per quam acceditur ad $\frac{4}{6}$, sed nec erit minùs, quam $\frac{2}{6}$ integrorum rectangulorum eadem de causa; quia inquam posset fieri adhuc subdiuisio, per quam accedimus ad $\frac{2}{6}$ à minori proportione: Ergo æquabit $\frac{2}{6}$ rectanguli t g. Et ideo totius rectanguli, quod componitur ex rectangulis integris eodem numero constantibus, quod est ex 12. huius duplum rectanguli ex deficientibus vnico decremento rectangulis compacti erit vt 4. ad 12, idest, vt 1. ad 3.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Si rectangula Arithmetico decremento sine fine deficientia vsque ad vltimum sui non deficiant; tunc rectangula defficientia ad illa minora, quæ integra perseuerant proportionem æqualitatis; ad complementa verò proportionem subduplam, ad rectangula verò circa diametrum residuum subtriplam.

Sint rectangula Arithmeticè deficientia AB, & BC, & DE: Quorum defectus peruenit vsque ad MK. Dico rectangula deficiẽtia omnia esse primo rectangulis XH, BL, DV, & cæt. æqualia. Dimidium verò complementorum AH, & HA quoad totam seriem: Tertiam vero partem rectangulorum HN circa residuum HN diametri XN existentium non deficientium.

Probatur. Quia rectangula XH, BL, DV integra perseuerant. Ergo series talium æqualium seriei æquè multiplicatę erit æqualis. Complementa verò HX, & LD deficiunt pro medietate sui, sicut, & AH, & NL, & CV pro medietate sui deficiunt, ex 12. h. ergo simul AH, & HB, & cæt. dimidio quoque deficient. Rectangula verò circa diametrum, quod duplici Arithmetico decremento deficiant ex 17. h. extenuabuntur successiuè vsque ad $\frac{1}{3}$ omnium. Quare omnia simul ad integra MN rectangula ęquè multiplicata se habebunt vt 1. ad 3. Itaq; rectangula deficientia Arithmetico decremento secundum vtrumque latus; sed non vsque ad vltimum sui; se habebunt ad integra, ad rectangula quidem XH, BL, DV, circa diametrum, vt 1. ad 1. ad cõplemẽta verò AH, HA, vt 1. ad 2. ad reliqua verò rectangula circa diametrũ HN, vt 1. ad 3.

THEOR. VIII. PROP. XIX.

Rectangula duplici Arithmetico decremento se extenuantia, & non ad vltimum sui, sunt ad rectangula integra, vt rectangulum sub maximo, & minimo latere, & triente rectanguli differentiæ ad rectangulum primum.

In præced. fig. ijsdem positis. Dico rectangula Arithmetico decremento, & non vsque ad vltimum sui deficientia AB, & BC, & DE esse ad integra pari numero constantia, vt rectangulum BQ ex maximo latere XB, & minimo XQ constante, & triente rectanguli HN, quod oritur à differentijs laterum, quæ inter maximum, & minimum reperiuntur.

Probatur. Nam XH æquat ipsum rectangulum XH non deficiens, at HX est medietas complementorũ HB, AH, quod cõplemẽta sunt inuicem ęqualia ex 45. l. t. Quamobrem si, & assumas $\frac{1}{3}$ quadrati, vel rectanguli HN circa diametrum, erit tota series rectangulorum deficientium proportione Arithmetica ad seriem multiplicem rectangulorum non deficientium, vt rectangulum QB sub latere XB maximi, & minimi XQ vna cum tertia parte rectanguli HN ad integrum XN, quia series deficiens ad integra se habet quoque, vt 1. ad 1., & vt 1. ad 2. & tandem, vt 1. ad 3. ex 18. h.

COROLLARIVM.

Hinc etiam educes: Totam seriem rectangulorum arithmeticè deficientium esse ęquale rectangulo ex latere totã seriẽ integrã subtẽdente XZ, & latere XP minimi rectanguli, vnà cum tertia parte rectanguli differentiæ crurum PO. Nam tota series rectangulorum minorum non deficientium finiat in PM; vnde rectangulum PX erit ęquale toti seriei minori rectangulorum non deficientium. Differentia itaque est inter seriem maiorum, & minorum non decrescentem rectangulum PZ; quod est dimidium omnium complementorum; siquidem PZ æquat complementum PA, & ideo est dimidium omnium complementorũ hinc, & inde deficientium cum ipsa sint dimidium integrorum ex 18. h. Cum itaque XP æquet omnia rectangula minora At AP, vel PZ omnia cõplementa deficiẽtia dimidio sui, etiam rectanguli PO, æquabit omnia quadrata residua circa diametrum, vt HN non deficientia.

Si ergo accipiatur rectangulum XR habebimus totam seriem rectangulorum minorum in rectangulo XP, & in residuo P Z dimidium omnium complementorum; si ergo insuper assumamus tertiam partem PO rectanguli consequemur omnia rectangula deficientia HN, LC, & VE, & cæt. Itaque tota series rectangulorum deficientium sine meta, sed ad sui vltimam diminutionem non peruenientium erit æqualis in sua planitie rectangulo sub rectanguli primi latere ZR, vel XQ, & sub latere omniũ rectangulorũ non deficientiũ XZ, & tertia parte rectanguli differentiæ OR crurum ZR, & OZ, & differentiæ MZ laterum XM, & MZ. Si verò consideres ea, vt deficientia quidem; sed non quoad omnem possibilem extenuationem singulorum, tunc omnia rectãgula deficientia excluso maximo erunt ęqualia rectangulo XR, & minus, quam tertiæ parti rectanguli PO; si verò includas maximum, erunt æqualia rectangulo XR, & magis, quam tertiæ parti rectanguli PO: Ratio est, quia excluso AB rectangulũ PA ęquat omnia minima nõ deficientia: at PZ, omnia complementa pro medietate sui deficientia; cætera verò quadrata deficientia quoad vtrumque latus excluso HN sunt minus, quam tertia pars omnium quadratorum eiusdem numeri non deficientium, quam multitudinem æquat rectangulum PO, si verò addas maximum XN iam deficientia complementa in complemento AH sunt maiora rectangulo XR, & quadrato HN, quod additum rectangulis LC, VE, & cæt. faciet magis, quam $\frac{1}{3}$ rectanguli PO.

TRACTATVS XXIX.

De Geodæsia Rectilineorum Planorum.



Eodæsia est pars Geometriæ admodum insignis, & in vsibus humanis necessaria, quam apud Clauium lib. 6. Pediasimus definit esse Partitionem areæ inter diuersas personas; Verùm in suo Lexico Hyeronimus Vitali eruditissimus describit Geodęsiam esse corporum quoq; dimensionem per sensibiles mensuras. Sed quidquid sit de significatione nominis: nos eam vsurpamus pro ea parte Geometriæ, quæ superficies rectilineas considerat, siue eas transformando, siue partiendo, siue mensurando; siquidem, si altera harum considerationum alteri desit, mancha euadit, & imperfecta.

EXPENSIO I.

De figurarum planarum rectilinearum transformatione in æquales superficies.

SVperficies rectilineæ planæ facilem inuicem subeunt transformationem, & non multo labore, licet, vel angulis, vel lateribus, tum quantitate, tum numero discrepantes, seruata semper æquali capacitate in alias secedunt.

PROBL. I. PROPOS. I.

Aream cuiuslibet trianguli in parallelogrammi aream transformare.

HOc efficitur ducendo perpendicularem ad basim. Nam si ex dimidiata basi CB, quæ est AB, & tota perpendiculari AD fiat rectangulum, vt est AF, hoc erit triangulo CDF æquales.

Probatur ex 41 prop. Elem. Nam ibi hoc docetur. Vnde non debemus repetere.

Id etiam operi mandatur diuidendo perpendicularem bifariam, & constituendo rectangulum HF, ex dimidiata perpendiculari, & tota basi, hoc enim erit æquale triangulo CDB.

Probatur. Nam DOB triangulum ex 41 primi est æquale parallelogrammo IB super dimidiatam basim GD ad eandem altitudinem effecto: Sic est triangulum CGD æquale parallelogrammo GH; Ergo totum triangulum CDB toti parallelogrammo HB erit æquale.

COROLLARIVM.

HInc est aream similiter parallelogrammi posse in triangulum transfundi, si super duplam basim ad eandem altitudinem triangulum fiat.

PROBL. II. PROPOS. II.

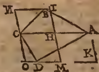
Aream cuiuslibet trianguli, vel parallelogrammi in aream alterius trianguli, seu parallelogrammi transformare, quæ habeant angulum datum, & latus datum.

VIde propos. 43. lib. 1. Element.

PROBL. III. PROPOS. III.

Dato quadrilatero æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

HÆc operatio facilior est, quam ex Eucl. prop.



45. l. 1. Detur ABCD quadrilaterum, & ducatur diagonalis AC; detruncetorque bifariam in H, & ducatur MI faciens cum ipsa diagonali apud H angulum æqualem angulo E. & per verticem C ducatur parallela ON ipsi IM, sicut, & diagonali à vertice D, & B parallelæ IN, & MO; eritque parallelogrammum IMNO æquale quadrilatero ABCD.

Probatur. Nam parallelogrammum HO est æquale triangulo AOD ex dictis in propos. 1. sic & parallelogrammum HN est æquale triangolo ABC ex eadem propos. quod sint inter easdem parallelas, & ideo ad eandem altitudinem, & super dimidiatam basim AC. Ergo & totum quadrilaterum ABCD toti parallelogrammo IMNO erit æquale.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Dato parallelogrammo supra datam rectam æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

Sit datum parallelogrammum rectãgulũ, quod cõtineatur rectis AB, & BC, dataque recta BD. Latera itaque parallelogrammi dati in vnam rectam redigantur, quæ sit AC, & à puncto B trahatur recta data DB, faciens cum AB, quemcumque angulum: Triumque punctorum ADC reperiatur centrum ex prop. 25. lib 3. Elem. & fiat circulus per ea transiens ADC; deinde producetur DB in F, nam dico DB, & BF æquale rectangulum constituere ipsi ex BA, & BC constituto.

Probator ex propos. 35. lib. 3. Eucl. Nam si in circulo duæ rectæ se mutuò secuerint, vt DF, & AC rectangulum comprehensum sub segmentis vnius AX, & BC æquale est rectangulo comprehenso sub segmentis alterius qualia sunt DB, & BF.

Si verò ex propos. 3. huic rectangulo constituamus æquale parallelogrammum in angulo dato habebimus id, quod propos. desiderat.

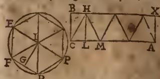
Idem quoque assequemur si tribus datis rectis ex 14. lib. 6. inueniatur quatta proportionalis, ita vt DB data sit prima. Nam ex prop. 18. erit rectangulum sub prima DA, & sub quarta inuenta æquale rectangulo sub duabus medijs comprehenso.

PROBL. V. PROPOS. V.

Aream cuiuslibet figuræ regularis in æquale parallelogrammum redigere, seu etiam triangulum.

Fiat parallelogrammum AB quod habeat AC æquale ambitui dimidio dati hexagoni V. g. cuius centrum I; aliud verò latus æquale perpendiculari IG in aliquod latus figuræ regularis cadente à centro I. Nam dico hoc parallelogrammum rectangolum æquale esse areæ hexagoni.

Probatur. Nam comprehendet tot triangula æqualia, quot habet figura regularis: Latus enim AC rectanguli, cum sit dimidium ambitus PDFE absternet bases tres, vt MC, vnde dimidia LC erit æqualis FG dimidię FD æqualis basibus tribus BD, & cæt. linea vero LH perpendicularis est æqualis perpendiculari IG; Quare ex 1. h. triangulum BHC est æquale triangulo IGF: Horum verò triangulorum duodecim habet parallelogrammum, sic duodecim hexagonũ. Vnde cũ constent æqualibus numero, areaq; triangulis erunt æqualia.



Si verò libeat habere triangulum æquale figurę datę dupletur basis AC, & fiat æqualis toti ambitui, & super eam fiat quodcumque triangulum contentum parallelis AC, & BX. Nam cùm hoc ex 1 propos. sit æquale rectangulo AB, erit etiam æquale hexagono I.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Datum triangulum, vel parallelogrammum in aliud æquale, sed vel maioris, vel minoris altitudinis transformare. Sicut & in aliud maioris, vel minoris basis.

Sit triangulum ABC, & illud oporteat reducere ad minorem altitudinem AD, ducatur DE parallela AX, & ducatur EX ad angulum B, cui parallela à vertice C agatur CF, & deinde ducatur EF: Dico triangolum AEF altitudinis datę esse equale triangulo ACB.

Prob. autem. Quia ECB triangulum ablatum est æquale triangulo FBE, quod additur ipsi AEB, vtpote super eandem basim BE, & inter easdem parallelas EB, & CF. Vnde remanet adhuc æquale cum æquale sit, quod additur ei, quod aufertur.

Eodem modo poterit augeri in altitudinem: Nam si ponamus esse nobis exhibitum triangulum ABF, quod oporteat in altitudinem AL sublevare producatur AB, & ducatur parallela basi LC, & à puncto C, vbi secat latus AC ducatur ad F recta CF, cui à vertice dati triangulis ducatur parallela EB, & vbi basim secat in B, ducatur BC. Nam dico hoc triangulum BCA in altitudinem AL subleuatum esse æquale triangulo exhibito AEF.

Probatur, vt antecedens praxis. Nec aliter maiori basi accommodabitur sit enim triangulum ACB, cui sit prolungãda basis vsq; ad F, cõiungatur FC, & à pũcto C ducatur lineæ CF, & ei parallela BE, à puncto B, deinde ducatur EF. Nam triangulum AEF super maiorem basim AF est æquale triangulo ACB, vt supra ostensum est. Et eadem operatio est de diminutione basis. Eadem quoq; operatio est de parallelogrammo, vt patet, cum sit duplum trianguli.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Dato rectilineo ad datum eius latus triangulum æquale constituere, seu parallelogrammum.

SIt datum rectilineum ABDEC, quod oportent in triangulum transformare insistens super assignatum latus AB, è contra assignati lateris DE. Latus prolongetur AD in H, & ducta BA, ab angulo C. ducatur ei parallela CH. Deinde ducatur AH. Quoniam enim triangulum ECA est super eandem basim AB, & inter easdem parallelas CH, & AB erit æquale triangulo AHB, & ideo quinquãgulum erit transformatum in quadrangulum HABD necessarium ad operationem faciendam.

In quadrangulo ergo HABD ducatur diagonalis HB, & prolungato latere AH, ab angulo D ducatur DM parallela diagonali prædictæ HB & tandem ducatur MB, & erit factum triangulum AMB æquale, quinquãgulo ABCD super latus AB, quod vergit contra latus DE.

* probatur. Quia æquat quadrangulum HABD siquidem spatium HAB est, tum triangolo, tum quadrilatero commune. Triangulum verò reliquum HMB trianguli AMB est æquale triangulo HBD reliquo quadranguli; cùm super eandem basim HB existant, & in eandem basi parallelam MD terminent.

Sed quadrilaterum HABD est æquale quinquãgulo BCABD, vt dictum est; Ergo etiam triangulum AMB erit eidem æquale, quod triangulum ea dicta poterit conuerti in parallelogrammum habens latus AB, vt patet.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Multilineum quodcumque in æquale triangulum, seu parallelogrammum super datum latus insistens transfundere.

*SIt multilaterum quodcumque AEIBCVY, datũq; latus BC, super quod prolũgatum triangulũ, & parallelogrãmũ dato rectilineo æquale cõstituere oporteat. E regione electo angulo A ducatur AB, & AC, & lateri AB ducatur parallela ID ab angulo I: Deinde coniungatur DA. Nam triangulum AOB super eandẽ basim AB, & in eandẽ parallelã ID terminatos erit æquale triangulo AIB. Transferatur triangulum IBA super rectam AD, & sit omninò ei æquale, & simile triangulum AOP. Deinde maioris basis DA fiat iuxta propos. 6. h. conseruando æqualitatem, & fit AQD. & à vertice Q ducta ad AD parallela QF, ducatur AF. Nam ob parallelismum, & eandem basim triangulum AFD erit triangulo AQD æquale, quod est triangulo FOA, & consequenter triangulo IBA, quare triangulo IBA erit æquale quoque AFO; quapropter portio multilateri AEIB est æqualis triangulo FAD, & DAB simul; idest toti FAB: Idem erit efficiendum de alia portione.

Nam ducta ad latus AC parallela VM ab angulo V, transformabitur triangulum AVC in triangulum ACM ducta AM. Deinde super AM transferetur triangulum ARV, & erit ANT, quod extendetur ad occupandam totam basim AM, & erit AXM. Deinde ab X angulo ducta XK parallela ad basim AM, vbi secat in B ducatur AK, eritque triangulum AME æquale triangulo AXM; quod æquatur triangulo ANT, & æquali, & simili triangulo ARV. Idem fiet de triangulo AYR. transferetur enim super basim AK, faciendo ab A triangulum ei simile, & æquale. Deinde extendetur ad occupandam totam basim AKI & tandem in triangulum AKZ transformabitur. Iamque habebimus triangulum FAZ æquale multilatero AEBCVY, quod omnia triangula, quibus componitur omnibus triangulis, in quibus multilaterum distributum est, sint æqualia. Vnde iuxta regulas traditas poterit conuerti in æquale parallelogrammum rectangulum.

PROBL. IX. PROPOS. IX.

Dato rectangulo æquale quadratum constituere.

HOc docuimus cum Euclid. propos. 14 lib. 2. cum rectilineum priùs in rectangulum. Deinde rectangulum in quadratum æquale transmutauimus.

Potest etiam fieri inueniẽdo inter duo latera rectanguli mediam proportionalem ex prop. 13. lib. 6. Nam quadratum huius mediæ est æquale rectangulo ab extremis contento ex propos. 17. lib. 6.

PROBL. X. PROPOS. X.

Duobus quadratis inuicem inæqualibus simul sumptis inuenire duo alia quadrata simul sumpta æqualia, quæ etiam inuicem æquentur.

COnstituatur rectangulum ex duobus lateribus quadratorum inuicem inæqualium, ita vt duo latera maioris alterum. alterum minoris angulum rectum claudant, vt AB, & AC. Deinde nectantur extrema puncta basis BC; super verò basim BC cõstituatur ãgulus rectus duobus cruribus æqualibus clausus, quod fiet diuidẽdo BC bi-

fariam

farlam, & facto ibi centro ducendo femicirculum BADC, & diuidendo bifariã in D, trahendoq; latera, & crura BD, & DC. Nam eum peripherias æquales BD, & DC fubtendant erunt æqualia: angulus verò, vtpote in femicirculo erit rectos ex 23 lib. 3.

Dico itaque quod quadrata laterom BD, & BC fnor æqualia duobus quadratis ex lateribus BA, & AC, nam funt æqualia quadrato bafis BC ex propof.2. lib. 11. ergo, & inter fe erunt æqualia.

Poffunt autem etiam inueniri inæqualia, vt per fe patet, quod, & de rectangulis fimilibus valet ex 32. lib. 6.

PROBL. XI. PROPOS. XI.

Rectangulo dato alia rectangula reperire ei æqualia fub diuerfa laterum quantitate.

SIt rectangulum comprehenfum doobus rectis AC, & BC, velitque aliquis aliud rectangulum paulò breuioria lateria efficere iuxta menfurã datã; hæc foper latus AC mẽfurretur, & fit CL, & diuifo bifariam fegmento AB in V centro V ducatur circolus. Deinde centro C interuallo CI ducatur

portio circoli LI, & vbi fecat in L ducatur IC. Nam OC erit aliud latus, quod claudet rectangulum LO rectangulo CB æquale Probatur ex Cor. 2. propof.36. lib.3 elem. hæc doo rectangula AH, ex AC, BC, & LO ex IC, CO effe æqualia, ficut, & tangena circulum erit quadratum prędicta rectangulia æqoale, fi ex puncto C illum contingat.

THEOR. I, PROPOS. XII.

TrapeZia inter eafdem parallelas conftituta inter fe funt æqualia, dummodo fit æqualis altera alteri correfpondenti eorum bafis.

SIt trapezium OACE, & trapezium OFCD quorum bafes AE, FD æquales fint, & O a eadem, vel æqualis. Dico hæc trapezia effe æqualia.

Probatur. Nam ex Cor.prop. 40.lib.1. triangola habentia eandem bafim, & inter eafdem parallelas inter fe funt æqualia: qoare triangola OFC, & OCA eruot ęqualia. Porrò triangula AEO, & FCD ob bafes æquales AE, & FD erunt æqualia. Ergo trapezia qooque æqualibus triangulis conftantia erunt æqualia.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

* *Triangula inter parallelas conftituta, & bafi eadem, fi fecentur parallelis lineis fegmenta funt æqualia.*

TRiangula DAF, & DOZ fint inter parallelas AO, & DZ conftituta fuper eandem bafim DZ, & fecentur parallela aliqua, vt HN. Dico *illa fegmenta effe æqualia*.

Probatur. Triangula DAF, & DFO funt æqualia ex propof 40. lib. 1. Element. Proptereaqoe ablata communi parte DIZ triangula DIA, & AIO remanebunt ęqualia. Quare erit OI ad ID, vt AI ad IF ex prop.11 lib.6. Ideoque erit quoque *componendo* IO ad OD, vt AI ad AF; fed vt AI ad AF; ita fe refert QI ad DF, & vt OI ad OD, fic IR ad DZ. Quare QI ad DZ, & IR ad DF eandem dicent proportionem OI ad OD, vel AI ad AF. Et ideo, cùm eidem DZ eandem dicant proportionem duæ QI, & IR erunt ex propof.9. l.5. æquales.

In triangulo autem AIO, vt LO ad OI, fic AK ad KI. Eft aotem LO ad OI, fic LN ad IR, & vt AK ad AI, fic HK ad QI. Quare erit eadem proportio LN ad IR, qoam HK ad QI: fed QI, & IR oftenfæ funt æqoales; Ergo etiam HK, & LN ex 22.l.5 Vnde patet, qood fint foper ęquales bafes triangula HAK, & LON, fcilicet HA, & LN: vnde erunt ęqualia fic triangula QAI, & ROI cũ fint foper æquales bafes IQ, IR & inter parallelas erunt ęqualia. Vnde etiam refidua trapezia IHKQ, & ILNQ erunt æqualia. Cùm ab æqualibus triangulis fiot æqualium triangulorum refidua.

COROLLARIVM.

HInc obiter patet triangula æqualia altitudinis, atque trapezia non dum confequi bafes æquales, fed & omnes bafibus ductas parallelas effe inuicem æquales: dummodo ad eandem altitudinem fint deductæ, quod etiam verificatur non dum in triangulis eandem bafem habentibus; fed, & ęqualem, vt per fe patet.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Trapezia inter lineas proportionales conftituta, & eiufdem altitudinis fe habent inuicem, vt bafes.

SInt in præced. fig. duo triangula æqualis altitudinis DAZ, & DOZ, hęc ex 1. lib 6. fe habebunt ad inuicem, vt bafes DF, ad DZ. Rurfus triangula QAS, & IOX fe habent ad inuicem, vt bafes QI ad IX: nimirum DZ ad DZ: Quaderè cum fit totum DAZ ad totum DOZ, vt ablatum QAI ab abla-

cum

tum IOX, etiam reliquum trapezium DQIV erit ad reliquum trapezium DIXZ, vt totum DAB ad totum DOZ, scilicet, vt basis DF ad basim DZ, vel vt QE ad IX.

EXPENSIO II.

De casu perpendicularis, & ipsius quantitate.

DOcuimus mediantibus tabulis quodlibet ex triangulis in duo triangula rectangula reducere in tr. 27. Trigonometrico, nunc sine tabulis idem docere oportet, & primo, in quod punctum subiectum baseos cadat perpendicularis, & deinde quantitatem ipsius perpendicularis, cùm id sit necessarium ad areas planas mensurandas per numeros, & maximè triangulorum.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Casum perpendicularis ex notis lateribus cùm cadit intra triangulum inuenire.

SIt triangulum ACU, in quo angulus G sit maior vtrolibet apud A aut apud B, habeamusque crura nota AB 7. planorum AG quinque & GB palmorum 6. Multiplicando singula latera in se fient eorum quadrata, vt docuimus def. 1. Tract. 7. lib. 8. Eucl. nimirum lateris AB 49. cruris AG 25. & cruris GB 36. Adde deinde duo quadrata simul V. g. 25. & 49. fiet 74 subdue quadratum residuum 36. erunt post subtractionem 38. partire bifariam, & erunt 19. quem numerum partiaris per numerum basis 7. & dabunt 2. & $\frac{5}{7}$ nimirum distantiam anguli A, & punctum D, in quod à vertice G cadit perpendicularis.

Probatur nam ex prop. 13. lib. 2. quadratum BG minus est quadratis rectarum AG, & AB rectangulo bis comprehenso sub BA, & AD, quod cum ita sit sunt vnita, simul quadrata cruris AG 25. & basis AB 49. partium, & summa fuit 74. & subductum est quadratum rectę GB 36. & residuum fuit 38. nimirum duo rectangula singula contenta sub AB, & AD, vt ergo remaneat vnũ tantum rectangulum residuum 38. diuisum est bifariam, & remansit 19. & tandem, vt habeatur crus AD diuisum est 19. per latus AB 7. partium, vnde reliquum latus remansit, & segmentum, in quod cadit perpendicularis partium 2 & $\frac{5}{7}$.



At si placeat reperire casum UD. Simul BA 49. & AU 36. quadrata vnito, vt fiat summa 85. subducto altero quadrato 25. residuum erit 60. pro duobus rectangulis sub AB, & UD contentis, diuisoque eo numero bifariam erit 30. vnum rectangulum, quod diuisum per crus AB 7. partium quotiens erit crus DU 4. partium, & $\frac{2}{7}$.

PROBL. II. PROP. XVI.

Casum perpendicularis ex notis cruribus cùm cadit extra triangulum reperire.

SI ergo sciamus perpendicularem extra triangulum cadere, eo quod in triangulo VSC angulus ad S sit obtusus, & V acutus, tunc vtemur propos. 12. lib. 2. Elem. in qua demonstratur cruris VC quadratum maius esse quadratis rectarum VS, & SC rectangulo bis comprehenso sub VS, & SC, ideo quadratum 25. cruris SC, & 16. quadratũ cruris VS in vnã summam redigantur, subducaturque à quadrato cruris VC 64. & erunt residuus numerus 23. duo rectangula contenta sub VS, & SD bisarientur, vt sint vnicum tantùm rectangulum erit 11 $\frac{1}{2}$, quod diuisum per latus VS 4. dabit 2. & $\frac{7}{8}$ pro latere SD.

At si nesciamus an cadat intra, vel extra, sed solùm nouerimus VC esse maximum, & latus SV, & SC; ideoque quia quadratum cruris SC, minus est quadratis rectarum VS, & VC rectangulo bis comprehenso sub VS, & segmentum ab V vsque ad illud punctum, in quod cadit perpendicularis ex 13 l. 2. Eucl. nondum notum, ideo quadratum SC 25. subduco à summa quadratorum reliquorum VS, & VC quadratorum 80. & residuum erit 55. duo nimirum rectangula: diuidatur, itaque numerus 55. per medium, vt vnicum rectangulum 27. $\frac{1}{2}$, quod diuidatur per latus VS 4. & prodibit alterum latus notum VD partium 6. $\frac{7}{8}$.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Ex notis cruribus duobus rectanguli alterum crus inuenire.

QVoniam per deductionem perpendicularis diuisimus triangulum quodlibet in duo rectangula, quorum habemus nota duo crura, vt in fig. anteced. VD, & VC, & possumus cognoscere tertium crus, nempe perpendicularem CD.

Quia quadratum basis subtensæ angulo recto ex 47. lib. 1. æquale est quadratis laterum: multiplicabimus palmos basis V. g. 10. palm. & fiunt 100. deinde lateris noti 8. palmorum. & fiet 64. quibus deductis à quadrato basis 100. erunt residua quadrata 36. à quibus extracta radix quadrata dabit 6. pro altero latere.



Sic si iam innotuerint ambo latera angulum rectum claudentia aliquo modo, & nesciamus basim; eadem ratione poterimus inuenire, nam quia quadratum basis angulo recto subtensæ æquale est quadratis duobus laterum, si 6. multiplicetur in se,

& fiat quadratũ 36. & 8. & fiat quadratum 64. iuncta simul, dabunt quadratum 100. palmorum à quo educta radix quadrata dabit 10 pro longitudine basis angulo recto subtensæ, vt vides.

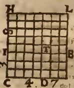
Si verò latera obtineant numeros fractos, vt in præc. latus VD est 6. $\frac{7}{8}$ omnes tũ huius, tum alterius lateris partes in easdẽ minutias proijci debẽt, & sic latus VC erit par. 64. & quadratũ 4096. (nam quilibet palmus diuisus supponitur in 8. partes cumque sint palmi 8, dant 64. partes;) & latus VD erit partium octauarum 48. & addita minutia $\frac{7}{8}$ erit 55. & quadratum 3025. quo à priori deducto prodibit quadratum perpendicularis CD partium 1071. à quo educta radix quadrata dabit partes 32. $\frac{5}{7}$, & paulò amplius pro perpendiculari DC. Perpendicularis verò DG alterius trianguli eodem computo facto erit par. 4. & $\frac{1}{7}$.

EXPENSIO III.

De areis triangulorum, omniumque aliarum figurarum rectilinearum mensurandis.

Linea recta mensuratur, cùm tot rectas lineas continet æquales. Et non alia ratione superficies mensuratur, cum continet tot minores superficies inuicem æquales; sed quia non omnes superficies spatium implent, & superficiem omninò occupant, vt circuli, ideo adhibenda fuit mensura, quę superficiem mensurandam multiplicata omninò posset occupare, & eam totam operire, ne quid extra mensuram remaneret. Hæc autem fuit rectangulum, quod multiplicatum potest omnes figuras rectangulas, rectilineas omninò tegere, & occupare; Quã de re alias figuras, vt mensurationi subijcerentur oportuit ad rectangulas reducere, quod hic agimus reducendo triangula ad rectangulas superficies, vt certę mensurationi numeris exprimibili subiaceant.

In confessis est autem rectanguli, cuius sint nota latera, etiam areã statim prodire, ex multiplicatione laterum inuicem; sic si sit notum latus HL esse 7. palmorum, & HC 8. palmorum ex multiplicatione mutua fit area 56. palmorum quadratorum, vt diximus l. 2. p. 3. Cor. & sic si area sit nota rectanguli 56. palmorum,

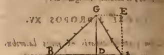


& latus alterum 7. statim innotescet per diuisionẽ alterum latus, & sic, si 56. diuidatur per 7. fiunt 8. palmi pro latere HC. In quadratis verò idem assequemur per extractionem radicis quadratę; sic, si à numero 25. educatur radix quadrata prodibit latus palmorum 5. quod & verificatur de partibus, vt si assumantur partes CI 3. & CD 4. laterum CH & HL, fiet area CT 12. palmorum quadratorum.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Aream cuiuslibet trianguli inuenire, cùm perpendicularis intra triangulum cadit.

Supponimus hic omnia latera trianguli nota, vel quód mẽsurári potuerint, vel quod ex doctrina sinuum, secantium, atque tangentium potuerint inueniri, ideoque ex Expens. præced. notam quoque perpendicularem, & punctum, in quod cadit, & consequenter redactum triangulum, vel ad vnum, vel ad duo triangula rectangula, & ideo quoq; notã esse altitudine, eorũ quam perpendicularia dimetitur, & quia ex propos. 40 l. b. 1. parallelogrammum eiusdem basis, & eiusdem altitudinis est duplum trianguli, ideo ex crure AD 6. & $\frac{1}{7}$,

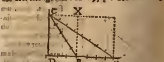


vel 19. partium, & perpendiculari DG 4. & $\frac{1}{7}$, vel 29. quæ crura angulum rectum ambiunt, fiat rectangulum AGDS 551. multiplicatione mutua quadratorum paruorum: nam medietas huius rectanguli 275 $\frac{1}{2}$ erit area AGD, idem fiat de alio rectangulo CDA; nam, multiplicato latere DA part. 30. cum latere DG, part. 29. prodibit rectangulum 870. cuius medietas erit 435. area trianguli DGA.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Aream triangulorum, cùm perpendicularis extra triangulum cadit inuenire.

Ex noto latere AD part. 6. & $\frac{7}{8}$, idest minutiarum 55. & perpendiculari CD 32 $\frac{5}{8}$ fiat rectangulum VC mutua numerorum multiplicatione quadratis paruis constans 1787 $\frac{1}{2}$, quorum medietas erit triangulum VCD 893 $\frac{1}{2}$. Rursus ex seg-



mento BD part. 23. & perpendiculari DC part. 32. $\frac{5}{8}$, fiat rectangulum DX part. 747. $\frac{3}{8}$, & medietas 373. $\frac{1}{2}$ erit triangulum BCD, quod auferendum est à triangulo VCD part. 893 $\frac{1}{2}$, & residuum erit area trianguli BVC part. 520.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Aream cuiuscumque figuræ regularis inuenire.

Sit octogonum CADB, cuius latus BF iam notum sit ex ijs, quæ de lineis circulo inscriptis dixi-

mus, vel ex tabulis sinuum 67½ radio 12.1000. partium præsupposito. Itaque potetis diuidere, & resolui tota figura in 8 triangula isoscela, & hæc in 16. triangula rectangula ducta perpendiculari a I ad mediũ F V lateris FI octogoni, cumque habeas notum casum perpendicularis, nempe ad medietatem lateris 18 part. 382 ½ & erit 18 1000. inuenies ex prop. 17. perpendicularem V I partium 924. hincque efficies rectangulum 353430. cuius medietas erit 176715. triangulum S V F, & quia 16. triangula totam figuram complent, ideo si multiplices prædictum numerum per 16. totam aream octogoni obtinebis part. 2827440. Idemque efficies in omnibus alijs figuris regularibus, omnes enim in triangula æquicrura, & deinde in rectangula distribui poterunt, ex quorum notis areis tota area figuræ in palàm erit.

PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Aream figuræ rectilineæ irregularis non triangularis inuenire.

Resolues totam figuram in tot triangula, eaque in rectangula transformabis, rectangulorumque singulorum æquales aream, quas deinde areas in vnam summam colliges, & illa erit area figuræ irregularis.

V. g. sit data figura rectilinea irregularis ABCF DEI. Ductis lineis BI, & IE, & ID; deinde AF erit redacta figura in tot triangula, de quorum lateribus præsuppono cognitionem te habere, vel mensura, vel ex tabulis. De singulis itaque triangulis ex prop. 15. vel 16. h. casum perpendicularis, vt HA & hinc ex prop. 18. vel 19. h. aream HBA, & sic ages de area IHB, & de alijs, quas omnes areas, vt inueneris, in vnam summam rediges, totamque aream totius figuræ irregularis propositæ cognosceris.

PROBL. V. PROP. XXII.

Aream figuræ tum regularis rectilineæ, tum irregularis geometricæ inuenire.

ID exequeris, si eam rediges in quadratum æquale, nam illius quadrati area erit, & figuræ propositæ, vt autem id fiat, ostendemus infra cum de figurarum transformatione agemus.

EXPENSIO IV.

De augmento, & partitione trianguli.

DVplici modo quælibet fig. diuidi potest, vel ex puncto in eius latere, vel in medio dato in triangula, vel per parallelas vni lateri dato, in trapezia, vel in quid simile, licet enim possit diuidi etiam ex puncto, extra dato, iste tamen modus diuidendi conuenit triangulo, conuenit etiam parallelogrammo, sed vniuersalis non est. Figuræ autem diuidendæ, vel augendæ, vel sunt multilateræ, vel sunt triangula, vel sunt parallelogramma, sed vt à facilioribus exordiamus, incipiemus à triangulis.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Triangulum datæ altitudinis ex multis triangulis diuersæ altitudinis coagmentatum construere.

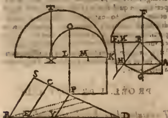
SIt triangulum BAC, DEF, & GHI, quæ in triangulum altitudinis BL redacenda sint. Ducta BL indefinita, & huic BL perpendiculari sit triangulum BAC redigatur ad triangulum BKD eiusdem altitudinis ex prædictis de transformi fig. prop. 6. h. apud quem super eandem lineã constituatur triangulum DEF, & redigatur in triangulum æquale eiusdem altitudinis DMO, & à puncto G erigatur tertium triangulum GHI, & redigatur in triangulũ eiusdem altitudinis BNO. Ductis deinde rectis BT, DT, TG, & TO erũnt tria triangula tribus ob basim eandẽ, & æqualẽ altitudinẽ, æqualia nempe BDT triangulo BKD, & ideo quoque triangulo æquali ex constructi. BAC; triangulũ DTG item est æquale triang. DMG, & ideo triangulo DEF; at triangulum GTO triangulo GNO, & consequenter triangulo GHI. Habemus itaque triangulum BTO coagmentatum ex tribus BAC, DEF, & GHI.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Triangulo datam partem addere, vel auferre eadem figura manente.

SIt primo data pars, nempe area æqualis rhombo ABGH à triangulo, quod debet illo maius, CDB auferenda. Triangulo CBD fiat æquale quadratum PK, priùs conuertendo in rectangulum, inde in quadratum ex propos. 14. lib. 2. Elem. idemque fiat de rhombo ABGH, & sit quadratũ ex BF. Deinde

de duobus lateribus quadratorum KL, & EF inueniat tertia proportionalis KN, quæ transferatur in latus BL, & fit LM, interq; residuũ KM, & totũ latus KL media proportionalis inueniatur LO. Inueniaturque deinde rectis BL, & LO, & DB lateri trianguli quarta proportionalis DV, ita quòd fit, vt KL ad LO, ita DB ad CV, & à puncto V ducatur parallela lateri CB. Dico *triangulo* CBD *ablatum esse trapezium* EP *Rhombo* ABGH *æquale*.



Probatur triangulum DBC ad triangulum DVP duplicatam habet laterum rationem ex 19. sexti, nempe lateris DB ad latus DV, quæ ex constructione eadẽ proportio est, quę reperitur inter OL, & KL: Ac OL, BL, & KM sunt cõtinuè proportionales ex effect. quare eadem quoq; proportione respiciet KL rectam KM, qua triangulum DCB alterum minus DPV. Et per *conuersionem rationis*, ita erit quoque triangulum DBC ad Trapezium EP, quo superat triangulum DPV, vt KL ad LM, quo superat lineam KM. Fecimus autem LM tertiam proportionalem inter duo latera LK, & EF quadratorum. Vnde ita erit quadratum PK ad quadratum EF, vt KL ad LM; & ideo erit triangulum CBD ad trapezium EP, vt sibi equale PK ad quadratum EF, idest Rhombum sibi æquale ABGH. Cum ergo triangulum BCD ad trapezium EP, & ad Rhombum ABGH, eandem habeant rationem ex 9. quinti, erunt inuicem æquales Rhombus, & Trapezium. Quare abstulimus à triangulo DCB partem EP, equalem Rhombo BAHG, quod promisimus.

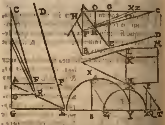
Si verò sit addendum hoc idem fiet: nisi quod LM ipsa media proportionalis inter latera quadratorum KL, & EF adiungatur ipsi lateri maioris quadrati, vt sit tota KB, & inter hæc, & latus KL reperietur media proportionalis AT; deinde fiet, vt XT ad BX, ita BD ad aliud, & prodibit DR, proportionalis: Ducta verò RS parallela ad CB erit additum triangulo, trapezium RC, quòd cum ipso integrat triangulum RSD eiusdem rationis.

Probatur autem eadem ratione. Nam triangulum RSD est ad triangulum CBD in duplicata ratione basis DR ad basim DB: hæc autem proportio basis ad basim, est eadem ex constr. *inuers.* quæ lineæ XK ad mediam AT, quæ est duplicata eius, quam habet eadem KX ad latus quadrati KL (siquidem media proportionalis mediat XT) & ideo BX ad BL latus habet eandem proportionem duplicatam, vt habet triangulum DRS ad DCB triangulum. Quare poterimus vti *diuisione rationis*, & dicere, quod triangulum CBD erit ad trapezium AB, quo triangulum maius superet minus, vt LE latus ad residuum LX, quo linea KX superat LK. Hæc verò linea LB, seu LM est AN tertia proportionalis laterũ BL, & EF, ita q; fit, vt KL, & EF, ita EF ad AN: Vnde & quadrata nicent eandem proportionem ex Cor. prop. 20. lib. 6. & ita erit quadratum EF ad quadratum EX BF, vt KL, & LX, & ideo, vt triangulum CBD æquale quadrato PK ad trapezium RC. Cum itaque ad trapezium RC, & ad quadratum et BF Rhombo equale eandem dicat proportionem triangulum CBD ex 9. lib. 5. erunt æquales inuicem trapezium RC, & ex quadratum, & ideo etiam Rhombus BHAG. Vnde Rhombo equalis pars, triangulo addita est, quod est promissum.

PROBL. III. PROPOS. XXIV.

Triangulo, cui deficiat vertex, vel trapezio destinatam partem addere, vel auferre trahendo parallelam vni ex lateribus.

Sit triangulum ABC, vel Trapezium ABCD, cui parallelã ad lateri BA sit auferenda pars equalis quadrato NM, quod sit minus toto triangulo ABC. Ducatur CF parallela lateri BD, quæ faciat triangulum AFC: Deinde cruri AK, & lateri AB inueniatur tertia proportionalis HA, vt vides factum in triangulo ABA: Duobus verò AB, HA, & lateri LN quadrati NM, inueniatur quarta proportionalis LB, ex quã fiat rectangulum KM. Quod dico esse ad quadratum MN, vt triangulum AFC ad triangulum BACD: si esset perfectum.



Probatur. Nam ita est BACD triangulum imperfectum ad AFC triangulum, vt KA ad HA ex Cor. p. 19. l. 6. cùm sit HA tertia proportionalis; vt autem BA ad AH, ita est NL ad LK ex effectione, & quia sunt eiusdem altitudinis, ex 1. lib. 6. Elem. ita est NM quadratum ad KM rectangulum, quod cum ita sit, si auferamus partem æqualem rectangulo BI à triangulo AFC, ex documentis anteced. propositionis, quæ sit OP ducta parallela KO lateri BA (inueniendo prius quadratum ex ZT æquale rectangulo KM, & quadratum ex TP æquale triangulo AFC, & illis duobus lateribus inueniendo tertiã proportionalem TQ, & residui eius QT lateris TP, & ipsius TP mediã proportionalẽ TX, & tandem tribus TP, TX, & cruri CA quartam proportionalẽ CR.) Cum itaq; repertum sit trapeziũ FO æquale rectangulo MK reperiatur illi trapezium simile, similiterque positum, ad quod illud se habeat, vt rectangulum MK ad quadratum MN; quod fiet ducta diagonali AR vsque ad E, & ductis EO ex E parallela AO, vel BA. Eritque AB trapezium pars ablata æqualis quadrato MN è triangulo imperfecto AECD.

Probatur. Nam, cùm sint inter parallelas consequenter erunt similia, similiterque posita, cùm & habeant latera proportionalia ex Coroll prop. 13. lib. 6.

23. lib.6. & fit AF ad FK, vt AV ad BE. Quare erit trapezium AB ad trapezium OF, vt AH ad AH, Sed ex effectione AB ad AH est, vt NL ad LE, & ideo ex 1. lib.6. elem. vt MN quadratum ad rectangulum KM. Sed Trapezium OF est æquale rectangulo MK ex effectione. Ergo & trapezium AB erit æquale quadrato MN ex 11. lib.5.

Idem prorsus agẽdum, si de additione sermo sit: nisi, quòd quadratum MN nõ interest an sit minus: sed potest esse maius. Nam primò inuenitur tertia proportionalis AH duabus AB, & FA. Deinde tribus AB, AH, & LN, quarta LE, super quam, & LM formatur rectangulum MK. Et deinde ex documentis propositionis antecedentis vbi agitur de additione, addatur trapezium AB habens RO parallelum latus lineæ AF (primò inueniendo quadratum TZ rectangulo MK æquale, & quadratum TP triangulo AFC. Deinde reperiendo lateribus eorum tertiam proportionalem QT; duabus verò QT, & PT simul, & ipsi PT mediam proportionalem XS. Postea tribus XS soli PT, & TQ tamquã vna, & CF, quartam proportionalem CR, à quo puncto ducta RO dabit trapezium OF quæsitum) ducta antè AR vsq; ad BE ab E puncto ducatur parallela EG cruri AF, & dabit trapezium AB æquale quadrato MN, vt AB ex effectione est æquale rectangulo MK.

PROBL. IV. PROPOS. XXV.

Triangulum iuxta proportionem datam diuidere per lineas ab vno puncto in eius latere dato descedentes.

Sit triangulum ABC, quod oporteat diuidere secundùm proportionem datam V.g. in tres partes à puncto in eius latere dato. Diuidatur basis BC in tres partes, & tertia pars sit CE, vel ergo punctum datum cadit in B, ex quo diuidendum est triangulum, & ducta AE erit triangulum CAE, vel BAE in dextro triangulo tertia pars, cum sit vt basis ad basim, ita triangulum ad triangulum ex 1. lib.6. Vel cadit in I, vel hinc, vel inde extra E punctum, & ducatur IA: cui parallela fiat FE; connectaturque IE. Dico trapezium CIAF in sinistro, vel triangulum EIB in dextro triangulo esse tertiam partem trianguli BAC dati.



Probatur. Quia spatium BFE est commune; Triangulum verò FAE est æquale triangulo FEI, cùm sit inter easdem parallelas, & super eandem basim FE: Ideo communi spatio BFE additum est addendo triangulum BFI quantum ablatum est, auferendo triangulum FAE. Propter hoc erit adhuc æquale BAE, & BFI: Sed BAE est tertia pars totius trianguli, cum se habeat ad totum triangulum, vt basis BE, quæ est tertia pars ad basim BC. Ergo, & triangulum BFI erit totius trianguli tertia pars.

Idem dicendũ est de sinistro triangulo, vbi triãgulum CEA est commune, & triangulum IAE est æquale triangulo AEF. Vnde trapezium AICF erit æquale triangulo CAE. Quod si alia tertia pars desideretur; ipsi AI ad V tertia parte ducatur parallela VS, & ab S ad I ducatur recta; eritque triangulum ISA æquale triangulo VAS, consequenter tertia pars totius trianguli CAB siquidem BSV est spatium commune, & SAV, & SVI æqualia sub eandem basim, & parallelas AV, AI.

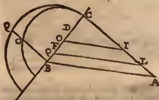
COROLLARIVM.

Qvare deducitur, quòd si punctum I coniungatur cum vertice A, & lineæ connectenti IA ducantur parallelæ FE, & VS à partibus basis CE, & EV, & VB, & vbi secant latera angulum oppositum comprehendentia, ad ea puncta à puncto dato rectę ducantur, vt IS, IF, illæ diuident triangulum in tot partes, in quot basis diuisa est.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Triangulum in partes assignatas secare lineis vni lateri parallelis.

Sit triangulum ABC diuidendum in tres partes per parallelas vni lateri V.g. lateri AB.



Diuidatur alterum latus CB in tres partes, & inter quaslibet, & totam V.g. inter CD, & CB inueniatur media proportionalis BO, & rursus inter CF, & CB media proportionalis BQ, transferanturque à puncto C in latus CB, & sint CO, & CQ; à punctisque O, & Q parallelæ ad basim AB ducantur. Nam illæ secabunt totum triangulum in tres partes ęquales.

Probatur. Nam ex Cor. prop.21. lib.6. elem. poligonum ad polygonum simile est in duplicata ratione laterum homulogorum, & ideo erit, vt CB ad CD; ita triangulum CAB ad triangulum ICO; siquidem, & CB ad CD habet duplicatam rationem eius, quàm BC, ad CO ex effect. sed CB habet proportionem ad CD, quam 3. ad 1. ex constructione. Quare CAB triangulum totum ad ICO triangulum se habebit, vt 3. ad 1. vnde triangulum ICO erit $\frac{1}{3}$ trianguli CAB.

Idem dicas de triangulo CLQ. Nam triangulum totum CAB ad CLQ duplicatam laterum CB ad CQ possidet rationem, quam quoque possidet CB ad CF; quare cum CB tota sit ad CF vt 3. ad 2. Triangulum quoque ACB totum erit ad triangulum LCQ, vt 3, ad 2. & ideo LCQ erit $\frac{2}{3}$ trianguli CAB. Ablato ergo ICO, de quo ostendimus esse tertiam partem totius, residuum LOQI trapezium, erit tertia pars totius CAB.

EXPEN.

EXPENSIO V.

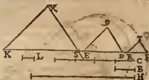
De quocumque rectilineo augendo, vel partiendo in plana rectilinea data similia.

TRiangula in diuersas partes diduximus modo vniuersaliùs est instituenda speculatio, & ad omnes figuras planas extendenda, ad quam additum aperuit ipsa triangulorum multiplicata partitio.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Dato rectilineo construere rectilineum simile, & similiter positum maius, aut minus secundùm proportionem datam.

SIt rectilineum datum OQE, quòd debeat fieri quadruplo maius: sed tali modo; vt simile sit id quod componitur rectilineo præcedenti dato, & similiter positum.



Sit linea C quadruplo maior, quam B: lateri verò DE rectilinei dati OQE inueniatur quarta proportionalis maior, vel minor, prout volumus augere, vel minuere, ita quod si augendum sit, vt B est ad C, ita fiat DE, ad H, si minuere, vt C ad B, ita fiat DE ad B: deinde inter istas reperiantur mediæ proportionales KS, vel ER. Nam Triangulum SXA ex 23 lib. 6. constitutum super SA simile similiterque positum, vt EQO erit triangulum quadruplo maius, & FTR constitutum super RF quadruplo minus.

Probatur. Quia ex Cor. pr. 21. l. 6. ita est triangulum super AS ad triangulum super DE, vt H ad DE; cum vtrobique sit duplicata proportio. Sed H est ad DE ex effectione, vt C ad B, nempe quadrupla. Ergo & H ad DE quadrupla erit. Vnde triangulum super SK ad triangulum super DE quadruplam quoque habebit proportionem.

Idem asserendum de triangulo super RF, vt per se patet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

Datis pluribus rectilineis, ea in vnicum rectilineum conglobare:

SI rectilinea sint dissimilia, diuersæque positionis, ea redigantur in similia, similiterque posita triangula, quadrata, seu parallelogramma, vel ad quácumq; aliam figuram eiusdem rationis, sed meliùs erit ad prædictas figuras facilitatis gratia.

Sint V. g. quinq; quadrata, quę super latera A, B, C, D, E sint cōstituta, vel quinq; parallelogrāma, vel triāgula quorū latera homologa sint, sintq. primi latera A, & B angulū rectū O claudētia, subtēdaturq; basis AB, iterumque super basim hanc BA erigatur ad rectos angulos C linea tertia è puncto B, & coniungatur basi secundâ AC angulo recto B subtensa. Sicque fiat rursus de linea D erigendo eam perpendiculariter super CA, & coniungendo basi tertia DA, & tandem idem fiat de linea E.

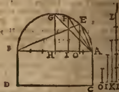
Dico quadratum, seu parallelogrammum ex EA simile, similiterque prædictis positum esse æquale omnibus alijs parallelogrammis similibus positis similiter, seu quadratis.

Probatur. Nam quoad quadrata ex 16. l. 1 elem. quoad parallelogrāma, seu alias figuras ex 32. lib. 6. rectilineum factum ex BA basi est æquale duobus similibus, & similiter positis ex BO, & OA factis: huic vero ex AB, & ex BC est æquale rectilineum CA similiter positum, & simile prædictis, huic autem CA, & alteri CD est æquale rectilineum ex AD, & tandem huic postremo, & rectilineo DE est æquale rectilineum EA simile, similiterque positum. vnde rectilineum ex EA est æquale omnibus similibus, & similiter positis, ex E, D, C, B, A, siquidē ęquat rectilineum ex DA, quæ omnia comprehendit excepto rectilinéo ex OE, & ipsum rectilineum ex DE.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

* *Vnicum rectilineum in plura rectilinea partiri, secundùm proportionem datam, manente eadem figura, & positione.*

SIt rectilineum ABCD, ex quo oportet fieri plura V. g. tria rectilinea similia, similiterque posita; sed iuxta proportionem, quam habent K, I, & O lineæ, ita quòd vnum sit $\frac{4}{7}$ aliud $\frac{2}{7}$ aliud $\frac{1}{7}$ totius rectanguli, & se excedant inuicem, vt lineę K, I, & O. Ex lineis K, & O componatur vnica linea L, diuidaturque ex 10. lib. 6. Elem. AB in easdem partes, ac L diuisa est, & sint HA similis lineę K linea AI similis lineę I, & AO similis lineę O. Quo facto à diuisionibus erigantur perpendiculares AD, & IF, & HG; & connectantur super AB facto semicirculo pūcta, quibus secatur recta AE, & AF, & AG. Dico rectilinea tria similia, similiterque posita super tres AE, AF, & AG æquare rectilineum ABCD;

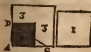


Probatur. Rectilineum ex AE ad illud ex EA habet

habet duplicatam suorum laterum proportionem nempe AE, & EA, sed hæc ob similitudinem triangulorum est eadem, quæ AO, ad BO. Vnde habebunt rectangula ex BA ad EB duplicatam proportionem AO ad OB. Sed hæc est duplicata proportionis AO ad OB, cum sint tres proportionales continuę AO, & OB, & OB ex propos. 16. lib. 6. Elem. Ergo AO ad OB erit eadem, ac rectilinei super AB ad rectilineum super BB. Ergo *componenda* ita erit AO ad AO, & OB, vt AB rectilineum ad duo rectilinea simul AB, & BB, quæ sunt æqualia ex 31. lib. 6. Elem rectilineo ABED, quamobrem, cum AO sit ad AB; vt O ad L; nempe $\frac{2}{7}$ tale etiam erit rectilineum AB ad AD. Eadem ratio erit de rectilineo super AF, & de rectilineo super AG; sed AO, & AI, & AH; simul æquant lineam AB. Ergo, & tria rectilinea simul ex AE, ex AF, & ex AO æquabunt totum rectilineum ACBD.

COROLLARIVM.

EX istis duabus propositionibus postremis eruitur, quomodo dato rectilineo addatur talis pars, quę libuerit, & tamen remaneat simile, similiterque positum, vt priùs, aut dematur ipsi. Et si loquamur de additione detur quadratum 1, & quadratum 2. nigrum oporteatque quadrato 2. addere tantum, quod æquiualeat quadrato 1. Accipe mensuram lateris quadrati 1, & productum vnum ex lateribus quadrati 2. nigri fit æquale ipsi lateri quadrati 1 ab A vsque ad C, coniungeque DC vltimum ex duobus lateribus quadrati 1, & quadrati 2. fiat angulus rectus ad A, ducaturque basis DC. Nam quadratum, cuius latus DC quale est 3.3.3. est ęquale, vt patet ex 47. lib. 1. quadrato nigro 2. & 1. quod idem erit de quocumque alio rectilineo ex prop. 31. l. 6. Si verò loquamur de ablatione, cum iam pr. 23. l. 6. notum sit quomodo fiat rectilineum simile, similiterque positum, quod æquale sit datæ parti alterius parallelogrammi, quale est parallelogrammum ex AE $\frac{5}{6}$ parallelogrammi ABCD clarum est, quod parallelogrammum ex EB simile, similiterque positum, quod cum ipso ex AE est æquale ipsi ABCD, deficiet ab eo $\frac{1}{6}$ nempe parallelogrammo ex AE vt fig. pręc. prop.



PROBL. V. PROPOS. XXX.

Dato parallelogrammo dissimili illud augere vel minuere addendo ei aliud parallelogrammum quodcumque:

SIt datum nigrum parallelogrammum CF, & aliud, cui addere oportet BB. Coniungantur eorum latera CA, & AB ad quemcumque angulum apud A, & producantur GF, & DE vsque dum conueniant in H, & per H, & A agatur HL, & terminet in CB lineam coniungentem latera CA, & AB, ipsi LH ducantur parallelę CP, & BQ, & coniungantur P, & Q, & parallelogrammum PQ erit ęquale duobus CF, & BB nigris.

Probatur 1. quod sit parallelogrammum: Nam HA, & CF inter parallelas CA, & OH parallelæ ex 33. lib. 1, erunt æquales, sic BQ, & AH parallelę inter parallelas AB, & DH æquales erunt. Ergo etiã inter se erunt æquales, & parallelæ ex 31. l. 1. quare ex 34. lib. 1. BP erit parallelogrammum. Quod verò sit æquale parallelogrammis nigris, patet:

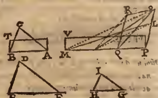


Nam ex 36. lib. 1. LP, & CH parallelogramma super eandem basim CP, interque parallelas CP, & LH sunt ęqualia, sic nigrum CF, & CPAH parallelogramma super basim CA, & inter parallelas OH, & CA æquantur, ergo nigrum parallelogrammum CF, & PL tertio CPAH æqualia inuicem æquabuntur. Sic parallelogrammũ LQ æquale est tertio AAHQ ob basim BQ eandem, & parallelas HL, & BQ, cui ęquatur ob basim AB eandem, & parallelas AB, & DH nigrum BB: quare nigrum BB æquabitur ipsi LQ, vnde LP, & LQ, idest BP parallelogrammum ęquabitur duobus nigris CF, & BB.

PROB. VI. PROPOS. XXXI.

Duobus datis rectilineis tertium proportionale inuenire simile, similiterque positum, sicut vnum ex datis.

SIt rectilineum OPQR, & rectilineum ACB, & illi OPQR inuenire oporteat planum tertium proportionale simile, similiterque positum, ac rectilineum ACB. Redigatur trapezium ORQP in ęquale rectilineum, sed simile, similiterque positum



rectilineo ACB, quod ex prop. 27. lib. 6. Elem. fiet redigendo priùs in æquale sibi triangulum, & postea hoc triangulum ad eandem altitudinem deprimendo ex prop. 6. huius. & tandem in parallelogrammum PV eiusdem altitudinis, ac AT. Nam media proportionalis inter latera MV, & MP inuenta ex 16. lib. 6. erit illa, super quam efficiendum est triangulum simile, similiterq; positum, ac ACB ex 27. lib. 6. æquale trapezio ROPQ, quod triangulum erit DEF. Inueniatur itaque lateribus AB, & FE tertia proportionalis GH, & super eam constituatur rectilineum simile, similiterque positum, ac ACB ex 23. lib. 6. & erit tertium proportionale duobus rectilineis trapezio, & triangulo simile, similiterque positum vel ex ipsis, nempe triangulo, & ita erit FED triangulum, vel PROQ ęquale trapezium

pezium ad ABC triangulum, vt idem ABC ad GHI simile ipsi ACB.

Probatur. Quia latera sunt proportionalia, & ita est FE ad AB, vt AB ad GH, ergo ex 26. lib.6.El. ipsa quoque rectilinea erunt proportionalia cum sint similia, similiterque posita; sed trapezium est æquale triangulo DFE. Ergo trapezium quoque est prædicta triangulis proportionale.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

Tribus datis rectilineis quartum proportionale inuenire, quod sit simile, similiterque positum, si placet, vni ex datis rectilineis.

Sint data tria rectilinea, ABC triangulum, EB parallelogrammum, & GH trapezium, & oporteat trapezio simile, similiterque positum quartum proportionale inuenire, ita quod sit vt triangulum ad parallelogrammum, ita trapezium ad aliud trapezium. Rectilineo ACB V.g. construatur æquale rectilineum, sed simile, similiterque positum, ac rectilineū EF ex 27.l.6., quod sit AL. Deinde tribus lateribus AB, EM, & GN inueniatur quarta proportionalis PQ. super quam construatur trapezium simile, similiterque positum, ac rectilineum GH ex propos.23. lib.6. Elem. Dico ita esse rectilineum AL, seu BCA ad rectilineum EF, vt GH ad PO.



Probatur ex eadem propos.26 lib.6. Elem. Nam ita sunt rectilinea similia, similiterque posita, vt sunt latera inuicem. Quare cum AB sit ad EM, vt GN ad PQ erit etiam AL rectilineum, vel æquale ACB ad EF, vt GH ad PO trapezia.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

Duobus datis rectilineis medium proportionale inuenire simile, similiterque positum, ac aliquod rectilineum ex datis.

Sit datum rectilineū HIG, & rectilineū QO super latus QP; oporteatque reperire medium proportionale inter hæc duo rectilinea; sed tale, vt sit simile, similiterque positum, ac rectilineum super HG, vt in schemate propos.31. h.

Redigatur QO in ADF similem figurā, & similiter positam, ac rectilinei dati super HG; Sitque eius latus homologum ad GH latus FE; inter FE, & GH inueniatur ex 16.l.6. media proportionalis BA, & super BA constituatur rectilineum simile, similiterque positum, ac illud positum super HG latus ex 23. lib. 6. Elem. & hoc erit medium proportionale inter HIG rectilineum, & rectilineum QO super QP.

Probatur ex interum proportione ex 26. lib.6. Elem. Nam cum sit rectilinea similia erunt ad inuicem, vt bases: sed basis BA ex effectione est ad BA proportionara vt BA ad HG; Vnde & rectilineum super FE, vel quod idem est, cum ei sit æquale, rectilineum QO ad rectilineum super BA erit in ex proportione, quâ ipsum met super BA ad rectilineum super HG constitutum.

COROLLARIVM.

Istæ propositiones antecedentes intelliguntur etiam de circulis minuendis, & augendis in data proportione. Nam vt est polygonum ad polygonum in circulo inscriptum, ita, & circuli, & vt diameter ad diametrum ita ex prop. 41. lib.6 Elem. sunt quoque inuicem circuli: quare si reperta proportionalis, vel tertia, vel media, vel quarta constituatur diameter circulorum, ipsi circuli iuxta datam proportionem augescent.

EXPENSIO VI.

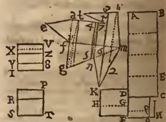
De rectilineo quocumque partiendo etiam in partes non similes per parallelas vni lateri.

Vidimus de augmento, & partitione fig. in plures similes figuras, modo de earum partitione; non quidem in plures figuras; sed quasi in eiusdē plures partes statuendo eas inuicē æquales, vel proportionales, sed nec similes, nec similiter positæ, duplex autem est ista designatio, vel per parallelas vni lateri, vel per discedentes lineas rectas ab vno puncto in dato latere.

PROBL. I. PROPOS. XXXIV.

Figuram rectilineam regularem in destinatas partes secare per parallelas dato lateri.

Sit figura irregularis rectilinea a c f g n l m h t, quæ debeat in quatuor partes V.g. partiri per parallelas lateri f g ex propos. 8. fiat rectangulum æquale, vel toti rectilineo, vel quod idem est singulis eius omnibus partibus, & triangulis, quod sit ABCD, quod diuidatur in quatuor partes, & sit quarta pars DE, quæ erit etiam quarta pars dati rectilinei; oportet itaque hanc quartam partem figurare in ipso rectilineo irregulari dato; sed per parallelam lateri f g.



Transmutetur hæc quarta pars in quadratum KF, & vt incipiamus à parte dextra videndū est; an triãgulum a f e adæquet quartam partem trasmutando

tando in rectangulum ex propos. e. vel 7. huius, cuius latus sit quadrati DP, quod erit PH: Quare non implet totum quadratum KP, & ideo nec triangulum f a e adæquat rectilinei irregularis quartam portionem.

Ex triangulo itaque m a g, cuius vertex non cognoscitur ex documentis 23. prop. h. auferenda est pars æqualis rectangulo residuo OH: Trahendo parallelam lateri t e, vt fiat triangulum m f g; rectangulo verò DH æquale inueniatur quadratum DO. Inuenta autem tertia proportionalis lineis a g, & g f sit N, & tribus g a, & N, & lateri SO quadrati OD quarta proportionalis sit QO, ex qua rectangulũ QS fiat ad altitudinem OS, & sequendo operationem ex 23. prop. h fiat trapezium æquale g u, & ducta g t, & ea puncto t parallela lateri f g. Dico trapezium g t cum triangulo e f a esse quartam partem totius rectilinei irregularis.

Probatur ex ipsa effectione supposita doctrina tradita in 23. propos. huius, nam t g ex effectione est trapezium æquale quadrato DO: quod æquat rectangulum DH, rectangulum verò PH est æquale ex effectione triangulo a f e; quæ duo rectangula integrant quadratum HP; quod est ex effect. æquale rectangulo DE, quod est quarta pars parallelogrammi magni AC æqualis rectilineo irregulari; vnde etiam PA rectangulum erit quarta pars figuræ irregularis, & consequenter t g, & f e a erit quoque quarta pars figuræ irregularis.

Sit secundo ad sinistram partem per lineam parallelam eidem lateri g f abscindenda quoque quarta pars. Quia adest angulus ad h, videatur an parallela ducta ab eo angulo abscindat quartam partem rectanguli AC, & consequenter totius rectilinei irregularis, & facta operatione iuxta præscripta propos. 20. vel 23. erit triangulum h m a æquale rectangulo PR, cuius latus est quadrati PS æquantis rectangulum ED quartam partem totius magni AC, ideoque m h a non æquat quartam partem: Ducemus itaque ab angulo a rectam a 3, & transmutato trapezio h a a 3 in rectangulũ aT iam æquat totum quadratum PS, & consequenter totum rectangulum ED, id est quartam partem rectanguli AC, & consequenter h 3 m K est quarta pars totius rectilinei irregularis.

Sed apud hanc partem alia quarta pars sit locanda. Quia adest triangulum 3 r t, quod eadem linea secari nequit V.g. 4 5. cùm discontinuum sit in eo situ, ideo placeat illud in hac etiam parte, quæ modo auferenda est, computare.

Redigetur itaque ad rectangulum VX in quadrato VI æquale quartæ parti ED rectanguli AC magni, & quia adest angulus n trahemus lineam n 7, vt videamus, an adæquet trapezium r 7 K n reliquum XZI in quadrato VI: quare triangulum K 6 n redigetur in parallelogrammum aZ, & deinde trapezium 7 6 in rectangulum eY, quod totum quadratum non æquat, ideo triangulo r 6 n 7, cuius vertex ignoratur, addendum est ad lineam 7 n trapezium 7 4 n 5 æquale rectangulo residuo ex prop. 23. huius; eritque figura 4 5 K 3 cum triangulo 3 r t quarta pars, & consequenter reliquum trapezium 5 t; erit quoque quarta pars. Vnde rectilineum totum irregulare in quatuor æquales partes diuisimus, vt petet.

CORОLLARIVM.

HInc potes quoque si placet diuidere per lineas, quæ nulli lateri parallelæ sint, sed cuidam extra rectilineum, nam illa linea, quæ prima fortuitò trahitur ab aliquo angulo, vel alicui extra figuram parallela, potest constitui tamquam si esset latus figuræ, & videre, quid ipsa ex tota figura auferat, & cætera circa ipsam præstare, vt si esset latus figuræ, vt quilibet ex se experimento comprehendet.

PROBL. II. PROPOS. XXXV.

Figuram irregularem rectilineam in proportionales partes secare per lineas parallelas lineæ extra figuram positæ.

POtest eodem modo in proportionales partes secari area quælibet, ac propos. anteced. V.g. si rectilinei AC vna quarta solum pars assumpta fuisset, & illa à rectilineo irregulari fuisset ablata, vt est n 3 a m, illa esset ad totum, vt 1. ad 4. Idem dicas de quibuslibet alijs secundùm diuisionem, in quam rectangulum BADC diuisum fuisset.

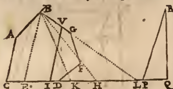
Pro quo ostendendo sit fig. a b l c q r t, quæ diuidenda sit parallelis ad m n in duas partes proportionales, ita vt vna nempe sinistra se habeat alteri, vt 2. ad 3. constituatur rectangulum ABCD æquale dato rectilineo irregulari, & diuidatur eius basis in 5. partes. Ex prima lib. 6. rectangulum AEFD erit $\frac{2}{5}$ respectu totius, & ad alteram EBCF partem se habebit, vt 2. ad 3 sicut basis CF ad basim FD se habet, vt 2. ad 3. Ad angulum itaque l ducatur linea parallela lineæ m n scilicet ad sinistram partem, videaturque quid ex ABCD rectangulo absumat trapezium b a e l, & triangulum l c g, faciendo rectangulũ ABCI super datum latus AC æquale trapezio a b l e; & GHIL æquale triangulo l c g; Cum ergo ista duo triangula sint minora, quam $\frac{2}{5}$ totius rectanguli AD, ex 23 propos. huius trianguli g e t q, cuius ignoratur vertex ad latus e g auferenda est pars e g h f æqualis rectangulo HLEF, quæ complebit $\frac{2}{5}$ totius, & ad aliam partẽ se habebit vt 2. ad 3. per parallelã f h datæ m n. Nam f g h e est ex constructione æquale trapezium rectangulo HALF; residua verò AHGL sunt æqualia ex constructione Trapezio b a e l, & triangulo l e g. Quare totum ABCD rectangulum est æquale toti a f e h rectilineo sient

totum rectangulum AD est æquale dato irregulari rectilineo abqr; Cum ergo sit ABCE $\frac{2}{5}$ totius AD erit ah totius abqr $\frac{2}{5}$, & *diuidendo*, vt est rectangulum ABCE ad rectangulum EFBD ita erit afch ad fhqr nempe, vt 2. ad 3.

PROBL. III. PROPOS. XXXVI.

A multilatero datam partem secare per parallelam dato lateri.

A Dato sexagono ABCDFG absumenda sit pars æqualis dato triangulo QPR, quod fit, aut fiat eiusdem altitudinis sexagoni ex propos. 6. huius. Agatur ex angulo B recta BE dato lateri CA parallela, & fiat triangulum BHE ex dictis prop. 8. h. æquale residuo rectilineo ADFGB continuenturque latera CH, & BG, & concurrant in L. Deinde mensuretur basis QP ab H, & fit HK; & ducta KB erunt æqualia ex 1. Cor. p. 39. l. 1. triangula KBH, & PRQ & inter LH, & LK repetiatur media proportionalis IL; & ducatur IV parallela ipsi CA. Dico IFGV multilaterum esse æquale triangulo QPR.



Prob. Nam triangulum IVL est æquale triangulo EBL. Etenim triangulũ EBL eandem eis dicit proportionem. Dicũt namque proportionem EBL, IVL duplicatam lateris LE ex 21. lib. 6. ad latus LI, sed ex effectione hæc est, quam EL habet ad LK; cùm sit LI media proportionalis inter LE, & LK: sed quam proportionem habet LE ad LK eam ex propos. 1. lib. 6. Elem. habet EBL ad KBL. Ergo idem triangulũ EBL eandem dicunt proportionem triangulis IVL, & KBL. Ergo ex 11. lib. 5. æqualia. Quamobrem æqualibus IVL, & KBL ablatis à triangulo EBL, remanebunt æqualia EKB triangulum, & EBVI trapezium. Si ergo rursus auferantur hæ portiones æquales triangulum EBK à triangulo EBH, & trapezium à rectilineo EBDC, quod triangulum EBH ex constructione æquat, remanebunt æqualia triangulum KBH, idest QRP, & pars assumpta VGFI.

EXPENSIO VII.

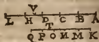
De figuris planis rectilineis in partes dissimiles secandis à dato puncto in ipsis.

NOn minus vtilis hęc alia sectio est arearum, quæ operi demandatur secando eas in destinatas partes à puncto aliquo, vel in ambitu, vel in meditullio dato, pro quo priùs hoc Lemma intelligendum est, vt fundamentum cęterarum propositionum: tale autem est.

LEMMA PROPOS. XXXVII.

Si magnitudo in quaslibet partes secetur, & alia in totidem aliis proportionales eadem serie, & accipiantur aliquæ partes prioris magnitudinis hæ simul comparatæ ad residuas simul habebunt eandem proportionem, quæ totidem posterioris simul ad reliquas habent simul sumptas, & eodem ordine.

SIt AL prima magnitudo in quinque partes diuisa, & alia, etiam si sit diuersi generis KQ, pariter in quinque partes diuisa prioris magnitudinis partibus eodem ordine proportionales, & accipiantur duæ ex prima AB, & BC, & duæ de secunda secundùm eundem ordinem KM, & MN, Dico, quod AC ad reliquas simul CL habebunt eandem rationem, quam KN ad reliquas NQ.



Progr. 1. Probatur. Nam ex hypothesi, quam proportionem dicit AB ad BC eam dicit KM ad MN: Igitur *componendo* ea est proportio AB cum BC ad BC, quæ KM cum MN ad MN: Ex hypothesi quoque vt est BC ad CD, ita est MN ad NO: quamobrem ex *æqualitate* erit AB cum BC ad CD, vt KM cum MN ad NO in alia quantitate.

Prog. 2. Deinde cum sit HL ad HD, vt QP ad PO; erit quoque *componendo* LH cum DH ad LH, vt QP cum PO ad QP: sed ex hypothesi *conuertendo*, vt HD ad DC, ita PO ad ON. Ergo ex *æqualitate*, vt DH cum HL respicit in proportione DC, ita QP cum PO respicit ON. & *componendo*, vt CL est ad CD ita QN ad NO: & *inuertendo* CD ad CL, vt NO ad NQ, sed respiciebat quoq; AC, CD, vt KN partem NO ex primo progr. Vnde erit AC ad CD, vt KN ad NO, & vt CD ad CL, ita NO ad NQ: vnde ex *æqualitate* ita erit AC duæ simul ad CL reliquas simul, vt KN duæ simul alterius quantitatis ad NQ reliquas eiusdem.

COROLLARIVM.

VNde si rursus aliqua pars, vt DH secetur in prima quantitate V. g. in V, & in T secunda pars correspondens OP in ordine, etiam proportionaliter secetur in similes portiones; vtęque quantitates erunt sectæ proportionaliter, & ita erit AV ad VL, vt KT ad TQ. Nam eadem probatio militat, cum ex hypothesi, vt primo facta sint partes proportionales eodem ordine correspondentes, quare, & correspondenter erit AV ad LV, vt KT ad QT, vel etiam AV ad AL, vt KT ad KQ *componendo*.

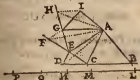


PROBL.

PROBL. I. PROPOS. XXXVIII.

Diuiso rectilineo quolibet in triangula, rectas lineas eodem ordine, & proportione, qua triangula existunt, prædictas inuenire.

Sit figura diuisa in triangula BAC, CAE, EAO, & AIO; oporteatque lineas inuenire, quæ inuicem habeant eam proportionem, quam triangula. Producatur BC in H, & ducatur ex parallela lateri AC: Deinde ducatur AD, eritque triangulum ACD æquale triangulo CAE: sed eiusdem altitudinis, ac BCA, cum desinat in idem punctum A: Quare ex 1. lib. 6. erit BC ad CD, vt triangulum BCA ad triangulum CAD, vel ad æquale CAE, quas lineas transferemus pro primis inuentis in lineã EP, quæ erant LM, & MN. Idem faciemus triangulis CAE, & collaterali EAI: nam ducta GF ab angulo G parallela lateri AE, & CE in F, ductaque AF erit triangulum AEF æquale triangulo AGE, & eiusdem altitudinis. Quare erit, vt triangulum ad triangulum, ita basis CE ad basim EF, quare lineis CE, EF, & MN inueniemus quartam proportionalem NO: quia ergo est CA ad EF, vt MN ad NO, erit etiam MN ad NO ex 16. lib. 5. vt CAE ad GAE.



Idem tandem faciemus de triangulis EAO, & AOI: eritque, vt triangulum AEO ad GAI, ita basis EO ad basim OH. Sic ergo etiam, vt basis EO ad basim GH, ita NO ad quartam OP; eritque tertia NO ad quartam OP, vt basis EO ad basim GH, & consequenter, vt triangulum EAO ad AGI.

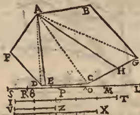
Verùm si aliqua figura adeo erit irregularis, vt nequeat in triangula diuidi ab vno puncto conuenientur singula triangula, in triangula æqualia, sed eiusdem altitudinis ex 8. prop. de conuer. figur. vel parallelogramma, & bases erunt inuicem, vt triangula æqualis altitudinis, & consequenter, vt triangula, in quæ figura irregularis diuisa est, vtcumque.

PROBL. II. PROPOS. XXXIX.

Datum rectilineum in datas partes secare per rectas ab vno puncto in latere, vel in angulo discedentes, dummodo in triangula ab vno puncto diuidi possit.

Sit figura ABGCDF; quæ in triangula à dato puncto A diuisa sit; hanc in quaslibet partes, vel proportiones, nempe quam habet V ad TI $\frac{2}{5}$ & X ad TI $\frac{4}{5}$, volumusque proportionem V ad TI esse ad partem ABG.

Reperiatur ex propos. præcedenti lineæ LS, quarum partes habeant eandem proportionem ad inuicem, vt triangula, & eodem ordine, ita quod LM sit ad MP, vt triangulum GBA ad triangulum GAC, & MP sit ad PR, vt triangulum GAC ad CAD, & PR sit ad RS, vt CAD ad DAF.



Tribus verò TI, & V datis, & LS repertę, inueniatur quarta proportionalis LO, ita quod vt TS ad V, ita sit LS ad LO, quæ inter P, & M cadit.

Diuidatur deinde; quia linea MP correspondet ex ordine basi CG ea basis GC secundùm proportionem MP ad MO, & fit quarta proportionalis GH. Dico trapezium ABGH esse ad totam figuram irregularem ABGCDF, vt V ad TI, idest $\frac{2}{5}$.

Probatur ex Coroll. propos. 37. Nam ita est quantitas LO ad OS, vt est quantitas BAGH ad quantitatem residuam AHCDF: sed illa LO ad OS, vt V ad FA ex effect & inuertendo, nempe vt 2. ad 3. Ergo etiam figura ABGH erit ad residuum, vt 2. ad 3. & consequenter ad totum erit vt 2. ad 5. & ABGH erit ad totum 2. ad 5. vt est V ad IT.

Placeat rursus diuidere ea proportione, quam X habet ad TI, ita quod antecedens proportionis X sit in figura irregulari versus B.

Tribus eodem modo inueniatur quarta proportionalis, vt TI ad X; ita LS ad LO; & quia hęc diuisio in cadit in tertiam PR, correspondentem tertiæ basi CD; Tribus rursus PR, & PO, & E inueniatur quarta proportionalis CE. Nam ducta AE erit ABGCE ad totam figuram, vt X ad TI eadem ratione.

PROBL. III. PROPOS. XL.

Figuram à dato in medio puncto in datas partes secare, dummodo ad angulos ab illo puncto rectæ duci possint.

Sit in figura ABCDEF datum punctum X in medio vbicumque malueris, & sit diuidenda figura in quatuor partes æquales (posset, & diuidi in proportionales, sed in præcedenti proportionalem diuisionem exemplo illustrauimus.)

Sit linea GO, cuius partes GH, & HI, & IK, & KL, & LN, & NO sint eodem ordine proportionales ex prop. 38. vt triangula AXB, BXC, CXD, DXE, EXF, FXA, quæ diuidatur in quatuor partes in P, Q, R. Quia ergo prima diuisio P cadit in secundam lineam erit latus BC secundi trianguli diuidendum, ita vt quemadmodum est HI ad HP, ita sit BC ad SC ducta XS erit XABS quarta para. Sic quia Q cadit in parte KL, quæ correspondet basi quarti trianguli fiet, vt KL ad KQ, ita basis DE ad DT. Et ducta

ducta XT erit SXT alia quarta pars, & sic de parte R, quæ poscit Ss basim correspondentem diuidendam esse, vt LM ad LR, in V, vt sit alia quarta pars TXV.

Quod Probatur. Nam ita est ex Coroll. prop. 37. GP ad totam GO, vt XABS ad totum rectilineum; sed GP est quarta pars totius GO. Ergo, & portio XABS erit quarta pars totius rectilinei.

Iterum, vt est GQ ad GO, ita est ABCTX ad totum rectilineum: sed GQ est $\frac{2}{4}$ totius GO. Ergo etiam ABCTX erit $\frac{2}{4}$ totius rectilinei. Ablato ergo AXS, nempe $\frac{1}{4}$, vt ostendi erit SXT $\frac{1}{4}$ totius, & sic dicas de alijs; vt per se patet.

EXPENSIO VII.

De figuris per lineas, vtcumque ductas partiendis.

POscit ordo, & ratio, vt quemadmodum superficies per parallelas lineas, & etiam per lineas ab vno centro progredientes diuisimus, sic, & eas per lineas incertas, & vtcumque ductas partiri doceamus.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Rectilineum quodcumque partiri per lineas non parallelas, nec in vnum punctum conspirantes.

SIt Rectilineum ABCDF, quod oporteat secare in tres partes lineis; quę nec sint parallelę, nec sint in vnum punctum coeuntes, vel quia id nequeat, aut quia non placeat.

Fiat rectangulum QO æquale areæ trianguli BAF, & OT æquale areæ trianguli BAC, & tandem PZ æquale areæ trianguli CFD. Diuidatur deinde QP latus in tres partes in R, & S. Et quia prima pars finit in basim IT parallelogrammi OT æqualia secundo triangulo BFC; ideo tribus IT, IR, & BC inueniatur quarta proportionalis BL, vt sit IT ad IR, vt BC ad BL. Ducaturque FL. Dico SABL esse tertiam partem totius rectilinei.

Probatur. Quoniam QO rectangulum est æquale triangulo BAF ex effectione; rectangulum verò OR, quod complet tertiam partem totius parallelogrammi æqualis toti rectilineo est æquale triangulo BFL. Ergo BAF, cùm BFL est tertia pars rectilinei; cum æqualium ad æqualia eadem sit proportio: Quod autem triangulum BFL sit æquale rectangulo OR; patet. Nam rectangulum OR est ad rectangulum OT, vt basis IR, ad basim IT, & ita triangulum BFL ad triangulum FBC est vt basis BL ad basim BC: sed hæc eadem ex effectione; quam basis IR ad IT. Ergo rectangulum OR ad rectangulum OT habet eandem proportionem, quam BFL ad BFC, sed BFC, & OT sunt æqualia: Ergo etiam rectāgulū OR ex 14. l. 5. & triangulum BFL erunt æqualia. Eadem est probatio in trahenda linea FV: Siquidem secunda pars RS ex tribus fiant in basem TP, in S parallelogrammi æqualis triangulo CFD: Vnde basis HO secanda est proportionaliter, vt TP secta est in S, & trahēda FV, & FBLCV ex dicta ratione erit FOVBLC remanentis rectilinei $\frac{1}{3}$.

EXPENSIO VIII.

De planis à puncto extrinseco partiendis.

SIcut plana ab vno puncto in eis electo in plures partes disceßimus, sic à puncto foris electo diuidemus, licet id sit minus necessariū, & magis laboriosū, & non semper in opus reducibile.

PROBL. I. PROPOS. XLII.

Datum Triangulum à dato extra ipsum puncto in datas partes secare.

SIt propositum triangulum ABC $\frac{1}{3}$ trianguli BAC, in quo ex O puncto extra ipsum dato sit auferenda data pars æqualis triangulo ACD.

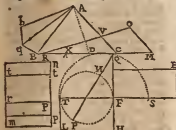
Ex lateribus trianguli AE, & CD fiat rectangulum EF; lineę verò parallelo OM ex 45. lib. 1. Elem. applicetur rectangulum æquale ipsi EF rectangulo, & fiat FL rectangulum, cuius alterum latus inuentum sit FT, mensuretur itaque à puncto C latus FT, & sit CX; rectangulo autem CX, & MC, idest TF, & PS fiat æquale quadratum QF, & huic quadrato ex 37. lib. 3. æquale rectangulum ex HQ, & FQ, quod fit constituendo latus quadrati pro tangente, quæ tangat circulum, cuius diameter MF, vel TF æquat CX; ita enim rectangulum HQ, & PQ ex cit. propos. 37. lib. 3. Elem. æquabit quadratum ex FQ, & ideo ipsi æquale rectangulum ex CX, & MC, vel TP, PS æqualibus; transferatur itaque NQ latus ab X in R, & ducatur à puncto dato O linea OR, & Dico CAD æquari triangulo VCR, & ideo per lineam OR auferri tertia pars trianguli BAC, vt fuit promissū.

Probatur autem. Rectangulum ex CR, & XR, idest HQ, & FQ æqualibus æquatur quadrato tangentis FQ, ideoque rectangulo ex MC, & CX, ideoque latera ex 10. lib. 6. Eu. erunt reciprocè proportionalia, eritque CR ad MC, vt CX ad XR. Ideoque componendo erit CR cum MC, idest tota MR ad CR, vt CX cum XR, idest CR ad CX.

Verùm ob parallelas MO, & CV erit ex 4. lib. 6. MO ad CV, vt MR ad CR, quæ sunt in proportione, vt CR ad CX. Ideoque MO ex 16. lib. 5. erit ad CV, vt CR ad CX. Vnde ex 18. lib. 6. si ex extremis MO,

& CX

& CX componatur rectangulum erit æquale rectangulo mediarum CV, & CR. At rectangulum ex MO, & CX ea effectione, idem, quod LF æquatur rectangulo BF, ex lateribus CA, & CD trianguli CAB. Quarè etiam eidem BF æquabitur rectangulum CV, & CR, & propter hoc latera erunt reciprocè proportionalia ex 10. lib. 6. El. & CR erit ad CA, vt CD ad CV, angulus verò C est idem. Vnde ex 11. lib. 6. triangula CAD, & CVR erunt æqualia.



Sit punctum datum O. Oporteatque rectangulum DAEC in tres partes secare, diuidatur in tres partes, & sit tertia pars LA parallelogrammum, & reliquum LC duæ tertiæ partes erunt; diuidatur rursus per rectam FH, eritque HC tertia pars; secetur itaque FH bifariam in E. & ducatur OI. Dico trapezium VLCI esse tertiam partem.

Prob. Quia triangula nigra sunt æqualia cum sint rectangula, & anguli ad vertices e sint æquales: quare tantùm additur in triangulo nigro apud V, quantum aufertur in triãgulo nigro apud H. Vnde figura IVHL erit æquale tertiæ parti CFHI.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

Datum quodcumque rectilineum in partes destinatas per lineam à puncto extra ipsum ductam secare.

SIt rectilineum abqa, quod diuidatur in triangula, & fiat parallelogrammum m n æquale toti, & in eo parallelogramma singulis triangulis æqualia, vt in fig. propos. anteced.

Nimirum mp triangulo bqA sicut pr ipsi Aqa, & r n vltimo BAC. Deinde diuide, quia punctum O est prope triangulum BAC rectang. r n in parte, quam voles, vel quæ tibi data fuerit n t, & quia non occupat totam partem r n ideo auferri poterit à triangulo BAC; quod si totam occupasset, vel maiorem; tunc triangula, in quæ diuisa est figura, essent alio pacto ordinanda, & ducenda essent à vertice C, vel partim à C partim ab A, & illa rectangula æqualia facienda in rectangulo m n, & videndum eodem modo, an pars data ab vno ex ipsis subduci posset. Nam eo pacto, & poterit à triangulo ipsi parallelogrammo æquali ea pars auferri per lineam à puncto dato protractam.

Quod cum obtinueris. Tunc illud rectangulum t n in triangulum æquale DAC parti in parallelogrammo ei correspondenti facta V. g. in parallelogrammo r n conuertendum est; Et deinde ea omnia præstanda, quæ dixi prop. penultima antecedenti, & erit diuisum rectilineum datum in partem datam.

COROLLARIVM.

POterit etiam, & aliquando diuidi in plures partes datas; sed non semper; quia non omnia triangula, quæ in figura fient, poterunt habere aliquod latus puncto dato obuersum, vt AC ad quod linea duci possit: talis, quæ non secet latus alterius trianguli. Sed ipsa experientia docebit possibilitatem rei, de qua quæritur.

EXPENSIO IX.

De planiciebus Musicis, & proiectis.

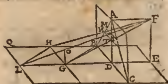
PLanitiea proiectæ sunt illæ, quæ nascuntur à lineis proiectorijs latera figurarum projciendarum lambentibus, vt descripsimus tract. 26. propos. 8. & quidem de illis, prout conus proiectorius directè in eas incidit, non agemus, vtpote quod de eis certum sit esse in duplicata ratione suorum laterum, cùm vt ibi ostendimus de circulo figuræ similes, sint itaque de eis agendũ cum radij proiectorij in planũ obliquè incidũt, & præcipuè hic de eorum proportionibus agere in animo est.

THEOR. I. PROP. XLV.

Spatiorum originalium altitudines ad proiectorum altitudines obtinent eam proportionem, quæ distantia remotior ad altitudinem centri, si primæ sint; quod si secundæ etiam eam, quam distantia propinquior ad interceptam distantiam.

SIt spatium originale GHBD, cuius altitudo BD, distantia DE à centri F perpendiculari altitudine EF; altitudo verò huius plani projiciatur, & sit DT. Dico BD *altitudinem esse ad altitudinem* DT, *vt* GE *maior distantia, quam* DE, *ad* EF *altitudinem centri.*

Patet ex 4. lib. 6. Nam ob parallelismum linearum, ita GD est ad DT, vt GE ad EF.



Deinde sit altera altitudo LG, quę non sit prima, & immediata, vt est GD. Dico quod proiecta in TI habet proportionem, ne dum, quę est LE ad AF; sed insuper, quæ GE distantia propinquior ad DE interceptam; nempe compositam ex LE ad AF, & hac ad DE, vt si DE esset 3. GE 4. at AF 2. & LE 5. haberet LG ad TI proportionem, quam 20. ad 6. quæ est

est composita ex 4. & 5. ad 2. & 3.

Probatur. Nam ducta GO parallela ipsi DA. Erit LG ad GO, vt LE remotior distantia ad FE altitudinem centri, sed GO est ad TI; vt GF ad TF, & GF est ad TF, vt OE propinquior distantia ad DE interceptam distantiam. Ergo LG erit ad TI, ne dum vt LE ad FE; sed etiam, vt GE ad DA. Vnde LG ad TI erit composita proportio ex LE ad EF, & GE ad DE, & sic dicas de alijs sequentibus.

THEOR. II. PROPOS. XLVI.

Omnes latitudines planorum originaliũ ad omnes planorum proiectorum eam habent rationem, quam distantia à centro ad interceptam distantiam.

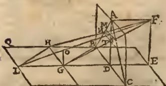
Latitudines originarias, vt CH eam dico obtinere proportionem ad proiectas latitudines, NT, quam distantia GE ad interceptam DE.

Probatur. Nam GH est ad NT, vt GF ad FT ex 4 lib. 6. elem. at vt GF ad FT; sic est GE ad DE. Ergo vt GH ad NT, sic GE ad DE, & idem afferas de latitudine LQ, quæ se habet ad MI, vt LE ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XLVII.

Superficies generans parallelis contenta, quæ sit diuisa diagonali in duo triangula, alterum quidem triangulum originarium ad proiectum eam habet proportionem duplicatam; quam distantia tota ad interceptam, & quam distantia remotior ad altitudinem centri radiosi; Alterum autem habet proportionem ex distantia minori ad interceptam, & distantia remotiori ad altitudinem centri radiosi.

Sit superficies QLHG diuisa diagonali LH, quæ proijciatur, & proiecta sit in NITM. Dico superficiem LHG esse ad NCT primo, vt GE ad DA, secundò rursus vt GE ad AD, & tertiò ex LE ad EF.



Probatur. Nam triangula quæcumque ex Cor. 2. prop. 22. lib. 6. ea habent proportionem, quæ componitur ex altitudinibus, & basibus; sed basis GH habet proportionem ad basim NT, quam GE ad DE: rursus altitudo LG habet proportionem ad TI altitudinẽ, vt LE ad EF, & GE ad DE. ex 45. h. Ergo proportio trianguli LHG ad triangulum NIT consequitur proportionẽ GE ad DE duplicatã, nempe distantię minoris ad interceptam distantiam, & insuper distantiæ maioris ad altitudinem centri.

Probatur quoque de reliquo triangulo LQH ad triangulum NMI. Nam LQ latitudo, & basis, collata ad MI basim est, vt maior distantia LE ad interceptam distantiam DE: altitudo verò LG est ad altitudinem TI, vt LE ad EF, & insuper, vt EE ad DE. Ergo triangulum NMI est in proportione composita altitudinum, & basium nempe LE ad ED, & GE ad DE, & LE ad EF.

Aduerte tamen, quòd si sit prima superficies BHGD, & immediata, tunc habet proportionem trianguli originarium, quidem HDG ad triangulum NBT proiectũ, vt GE ad EF. Quoniam altitudo quidem DT talis est proportionis; basis verò ED eadem. At triangulum HGB ad triangulum ANT proportortionem obtinet compositam ex proportione GE ad EF, & proportione GD ad DE. Ratio est quia altitudo quidem GD ad DT eam proportionem obtinet GE ad EF, at latitudo aliam proportionem GE ad DE.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Superficies musicas augere, vel minuere secundum datam rationem.

Sit data superficies BGCL augenda secundum datam rationem V ad S. Inueniatur itaque media proportionalis R, & trahatur diagonalis LC, producaturq; in E, nempe vsque ad parallelam FE basi BL, & iterum prolongetur in I. Rursusq; ducatur diagonalis DA, quæ se secent in O; fiat deinde vt V ad R, sic LO ad IO, ducaturque ab I parallela AI basi LB, & duæ AF, FI ab I, & A ducantur ad centrum F, quæ secabunt diagonales AD in D, & IE in H, perque punctum D ducatur ND parallela basi AI, & erit factum, quod imperatur. Nam BCLG planum est ad planum NDAI in proportione data V ad S.

Nam ostendetur primo ADHI esse superficiem musicam, vel proiectam, quia ex propposit. tract. 16. crura trianguli AFI, & BFL sunt secta proportionaliter parallelis AI, & ND musicè ob lineam EI in ea obliquè incidentem.



Deinde basis LB ad basim AI est, vt V ad R. Nam ducta per O recta XN perpẽdiculari ad AI, linea LO est ad OI, vt OG ad OH in triangulis æquiangulis AOI, & OHN ob angulos ad verticem HOD, & AOI æquales, & angulos incidentis lineæ IE in parallelas HD, & GC, & BL, & AI, sed LO ad IO est vt V ad R ex effectione: Ergò etiam OG ad OH: Cum

itaque LO fit ad OI, vt OG ad OH, & ideo *permutando* LO ad OG, vt OT ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, idest LU ad LO, vt OT cum OH idest IH ad OI; rursùsque *permutando* LO erit ad HI, vt LO ad IO, idest vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, fic eft bafis BL ad AI in triangulis ęquiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LO ad HI, vt bafis BL ad bafim AI, fcilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis OND, & OQC, Ita eft ob parallelifmum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & fic OT erit ad OX, quia eft in æquiangulis triangulis LOT, & IOX, fic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quadere erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, ideft QT ad OT, vt ON cũ OX, ideft NX ad OX fcilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compofitam ex proportione bafium, & altitudinum ex propof. 23. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL eft TQ, & trianguli ATD eft XN; bafes verò funt BL, & AT. Ergo habebit proportionem compofitam ex proportione eadem, quæ eft bafium, & altitudinum: quare ex p. t. tract. 9. expenf. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę bafis BL ad bafim AI, fcilicet V ad R; proportio vero V ad S data eft duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

Idem dicendum de triangulis BGC, & AHD; fiquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, bafis verò GC eft ad bafim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; fed iam oftenfum eft OG ad HO eam effe proportionem, quæ LO ad OI, ideft ex effectione, quam V ad R. Ergo & bafis GC erit bafim HD, vt V ad R. Cùm itaque bafes, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum fit compofita ex altitudinibus, & bafibus, quę eft eadem, erit duplicata eius, quæ eft V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AD, BI fiat vt S ad R, fic AO ad BO, quæ menfuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur vt priùs, & compleatur fpatium BGCL, eritque fpatium muficum AHDI ad fpatium muficum BGCL, vt S ad V eadem prorfùs ratione, quam fupra affignauimus.

PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè fe diminui incipientes conftituere.

SIt data proportio A ad B [illegible]; oporteatque conftituere fuperficias procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus fit [illegible], fecundus fit [illegible], & reliqua progreffio fequatur, vt exigit progreffus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & fit C; fiatque, vel exhibitum fit triangulum GFE, in quo harmonica proportio inftituenda eft, fiatque vt A ad C fic GE ad EB, & ducatur parallela HI. Deinde ducatur diagonalis EI, vfque dum occurrat ductæ à centro parallelæ EN bafi FG in N, & diuifa FG per medium in R, ducatur NR, & vbi fecat in O, ducatur parallela LO. Dico fpatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propof. 1. tract. 16. part. 2. HE eft diuifa harmonicè cum bafes FR, & RG fint æquales; Vnde erit vt FE ad HE termini, fic differentia FL ad LH; fed vt SE ad HE termini, fic eft A ad C, eft autem A ad C proportio duplicata eius, quæ eft A ad B. Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ eft SE ad HE terminos, & ideo, quę eft trianguli FEG ad triangulum fimile ex 16. l. 6. elem. HEI; fed ex Tract. 28. de propof. 11. vt eft triangulum FEG ad triangulum HEI, fic eft LG fuperficies fcalena ad HO fuperficiem. Ergo vt eft A ad B, fic eft LG ad HO, nempe, vt [illegible] ad [illegible], & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare fi fequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & TN à



partibus æqualibus QT, & TF partibus FR, & RG, fucceffiuè harmonicè à data proportione decrefcent termini, vt primus fit [illegible], tertius fit [illegible], quintus [illegible], feptimus [illegible], & fic fucceffiuè ex pr. 3. Tr. 16. p. 2. Siquidem ex tract. 28 de progr. prop. 11. etiam fpatia triangularia harmonicè proportionaliter decrefcunt, vt ipfæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam SE ad HE obtinent proportionem, quæ eft vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri [illegible] procederent: quare etiam triangulorum fuperficies, quæ duplicatam bafium habet proportionem, ita fucceffiuè propagabuntur. Differentiæ verò erunt, fucceffiuè, vt primus ad tertium ponitur, nempe vt [illegible] ad [illegible] ideft [illegible] ad [illegible] ex pr. 11. tract. 16. at termini fcilicet triangula fucceffiuè fe habebunt harmonicè vt [illegible], & cæt. Ideoq; OL erit ad LI, vt [illegible] ad [illegible] fc. vt GBF ad HIE, at HO ad HI, vt [illegible] ad [illegible], nimirum, vt triangulum LEO ad triãgulum HEI, & TM ad MY, vt [illegible] ad [illegible], fcilicet, vt triangulum HEI ad triangulum PEY, vnde differentiæ non fucceffiuè fe habebunt, nifi binæ, & binæ fumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Ifoperimetris conftituendis.

AD perfectam cognitionem mathematicam ifte tractatus neceffarius eft, cum aliquibus videri poffit æquales figurarum ambitus æqualia quoque fpatia continere, quòd verum non eft, vt videbimus: Quia verò aliquando opus poteft effe, quod aliquis requirat figuram eiufdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præftare.

DEFINITIO I.

ISoperimetræ figuræ funt, quæ æquales ambitus habeat.

DEFINITIO II.

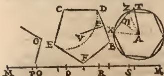
ARea cuiuslibet figuræ eft eius fecundùm planum capacitas.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Isoperimetram constituere dato alterius figuræ constituendæ angulo.

Sit sexagonum A, cui figuram Isoperimetram V. g. Pentagonum oporteat constituere.

Latera sex sexagoni super lineam MN extendantur; quale vnum ex ipsis est MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, seu quod idem est laterum fig. constituendæ, nempe



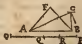
Pentagoni, vt est MO, & OQ, & QR, & RS, & SN: ex duabus verò MO, & OQ, fiat angulus C æqualis angulo pētagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus anoectendo V. g. RQ ad CE sub eodem angulo interno C, & fiet Pētagonum dato Isoperimetrum; vt patet ex ipsa constructione.

Eodemque modo quælibet alia figura regularis alteri Isoperimetra constituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo scaleno super eandem basim æquicrurum Isoperimetrum triangulum constituere.

Sit datum triangulum scalenum ABC, cui æquicrurum sit constituendum Isoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & sint OR, & RP, hæcque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP super basim AB constituatur triangulum AFB. Nam illud erit isoperimetrum alteri ACB.

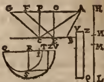


Probatur. Nam AC, & CB scaleni, sicut AF, & crura æquicruria sunt æqualia lineæ OP; quare etiam innicem basis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum constituere.

Sit datum triangulum BAC, cui æquale, simulque Isoperimetrum parallelogrammum sit constituendum: latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & sint HN, & NE, lineaque diuidatur bifariam in M sicut, & basis BE in E. Sumpto verò interuallo HM lineæ dimidio, centro B portio circuli ducatur, quæ secet parallelam AC in puncto F, ducaturque BF, & à C parallela BF lineæ, quæ sit CE. Dico parallelogrammum BFEC esse triangulo CBA Isoperimetrum, & æquale,



Probatur de æqualitate ex 33. lib. I. Quòd verò sit Isoperimetrum patet: Nam latera FC, & EC æqualia inuicem ob parallelismum sunt æqualia basi BC. Nam EC est medietas. Vnde basis æqualis ei erit etiam alteri medietati HS æqualis: Latera verò BF, CE sunt æqualia lateribus BA, & AC, quod sint simul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Isoperimetrum constituere.

Sit rectangulum OC in præc. fig. æquale parallelogrammo BCFG; sed non Isoperimetrum, oporteatque seruata æqualitate in Isoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus BO, & OP; media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. est rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quę sint QZ, & ZV, tota QV secetur ex Tr. 15. propos. 16. vt ex inter segmenta QZ, & ZV sit media proportionalis; rectangulóque QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam Isoperimetrum sit parallelogrammo BC eidem dato.

Probatur, Quia latera ZV, & ZQ sunt æqualia lineæ VQ, cui, & sunt æqualia ex effectione latera EC, & CG: quare etiam reliqua reliquis.

PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & isoperimetrum rectangulum constituere, cùm fieri potest.

Sit datum multilaterum A rectilineum, cui æquale sit rectangulum ST, & linea PQ æqualis dimidiato ambitui rectilinei A.

Inueniatur, vt in antecedenti figura, media proportionalis inter rectanguli PT latera TP, & PZ, & sit FG, quę si sit æqualis dimidio PV lineę PO est ipsa quadratũ ex P, quod quæritur, si maior; vt hic, iam non potest secari PO in duo segmenta, inter quæ FG sit media proportionalis: quia erecta normaliter

liter super PO deberet contineri intra semicirculum FLO, cui medietas VO est semidiameter. Vnde LV, vel equalis PG perpendicularis major semidiametro esse nequit, non capiet in semicirculo OLF, quamobrem non poterit Problema exequi.



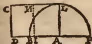
At si sit minor, vt si esset datum a fine trianguło nigro, cui equale esset QF rectangulum, inter cuius latera media proportionalis esset FH; tunc FH esset minor medietate VI lineæ totius OI, quæ æqualis est dimidiato ambitui rectilinei dati A exclusio nigro triãgulo. Quare ID posset ex 16. Tr. 15. ita secari in R, vt inter segmenta IR, & RO inuenta FH esset media proportionalis. Quamobrẽ rectangulũ sub segmentis RI, & RO clausum esset æquale quadrato ad FH, & consequenter rectilineo QF æquali ex 17. lib. 6. & tandem rectilineo A excluso triangulo nigro.

Est autem Isoperimetrum, quia RI, & RO medietas laterum sunt æqualia lineæ OI, quę est æqualis medietati laterum multilateri A excluso triangulo nigro.

PROBL. VI. PROPOS. LV.

Rectangulum constituere æquale, & Isoperimetrum semicirculo, vel eius partibus.

IAm docuimus ea quadratrice, vel per numeros lineam peripheriæ æqualem inuenire, vel quasi ęqualem, docebimus autem Tr. 30. rectangulũ ex semidiametro, & recta æquali semiperipheriæ esse æquale areę circuli. Vnde medietas CA erit æqualis medietati FLB quarta para quartæ parti, & sexta sextę areę circuli erit æqualis.



Hoc autem rectangulum AC æquale dimidiato circulo est Isoperimetrum ipsi; siquidem duo latera AL, & CD sunt æqualia diametro BF latera verò AN, & LC sunt æqualia dimidio circumferentiæ, cùm vnum ea ipsa sit medietas lineæ æqualis dimidię circumferentię SLF, & cõsequenter quartę parti AL ęqualis. Vnde & AD, CL erit ęqualis circumferẽtię BLF; Sic dicas de medietate AL, & cęt. vt ex te met potes considerare.



EXPENSIO XI.

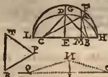
De proprietatibus figurarum Isoperimetrarum.

FIguræ Isoperimetræ id habent mirabile, quòd æquali ambitu cõclusę areas tamẽ inuicẽ continent inæquales, prout aut anguli, aut latera inæqualia sunt; ideoque ad arearum dignoscendas exactiùs proprietates, hęc cognitio haurienda est.

THEOR. I. PROPOS. LVI.

Triangula Isoperimetra, quò latera magis ab æqualitate recedunt ambientia angulum verticalem, eo sunt minora, & quò magis anguli ad basim inuicem differunt.

SInt duo triangula Isoperimetra BAC, & BDC habentia eandem basim BC. Dico primò, quòd BAC triangulũ erit minus triangulo BDC, quia latera sunt inæqualia magis in BAC, quam in BDC.



Probatur. Quia triangula sunt Isoperimetra eadem HL mensurabit latus BA, & AC, & latus BD, & DC, quaderè ex propos. tr. 24. pr. 25. de conicis, & B & C puncta foci erunt, & vertices H, A, D, L erunt in Ellipsi. Verùm in Ellipsi applicata MA, & ideo normalis est minor applicata, & normali DE; ergo altitudo MA erit minor in triangulo BAC eiusdem basis, ac trianguli BDC altitudo ED, quæ est maior; quare ex 1. lib. 6. Elem. Coroll. minus erit triangulum BAC, quam triangulum BDC. Quod verò altitudo MA sit minor, quàm ED, quæ sit maior.

Probatur. Quia ita est ex prop. 72. tract. 24. conic. in semicirculo HGL sinus FM ad applicatam AM, est vt sinus GE ad applicatam DE, ergo *permutando* FM ad EG erit, vt AM ad DE, quare ex 12 lib. 5. minor erit AM, quam DE; sicut minor est sinus MF, quam EG.

Probatur quoque secunda pars, quo latera opposita sunt magis inæqualia, eo anguli ad basim sunt magis inæquales, quia maiori angulo maius latus subtenditur ex 19 lib. 1. Elem. Sed iam ostensum est, quod quo latera magis inæqualia sunt, eò triãgula Isoperimetra esse minoris capacitatis. Ergo etiam quo magis anguli ad basim sunt inæquales; ideoque triangulum BAC erit minus triangulo BDC: quia anguli ABC, & ACB sunt magis inæquales, quam anguli DBC, & DCB, quorum latera subtensa minus inuicem inæquantur, quàm latera trianguli BAC. Quod, & confirmatur sequenti propos.

COROLLARIVM.

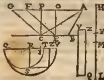
*H Inc est triãgulum Isoscellũ isoperimetrum: illud esse minus, quod angulos ad basim habet magis inæquales alicui tertio; Nam accõmodetur ac in Ellipsi, & sit CA, & ducatur BA; Triãgulum itaque BAC erit minoris capacitatis; quàm triangulum isoscelles, & illi isoperimetrum BDC: sed B, & A sunt æquales anguli inuicem ob æqualia crura CA, & CB, licet tertio minori C trianguli BAC maiorem proportionem dicant, & ideo magis ipsi inęquales, quam duo B, & C angulo D trianguli BDC. Ergo quò magis duo anguli trianguli isoperimetri sunt inæquales tertio, eò triangulum est minoris capacitatis.

Prob. etiam de angulis, si sint acuti in isoscello triangulo, qui sc. dicunt minorem proportionem ad angulum verticalem suum, quam anguli alterius, quòd ideo minorem aream comprehendant. Nam BAC isoscelles diuidatur in duo à vertice C linea normali, & partes componantur secundùm latus breuius, vt fecimus in triangulo ONQ, cuius partes ONI, & NQI sunt trianguli BAC: Istud triangulum habebit angulos O, & Q ad basim dicentes minorem proportionem ad angulum verticalem N quàm duo B, & C ad angulum D trianguli BDC: Et iam ostensũ est minus quo ad aream ipso triangulo BDC. Vnde colliges etiam 1º, æquiãgulum isoperimetrum triangulo BDC, eo esse maius, & omnibus triangulis sibi isoperimetris non habentibus angulos æquales, aut latera æqualia.

THEOR. II. PROPOS. LV.

Eadem proportione figuris in Isoperimetris diminuuntur latera, qua & anguli.

P Atet. Nã eadem pars est totius ambitus sui latus pentaguni, quæ angulus pentaguni quatuor rectorum; sicut enim OM est 5. pars ambitus pentagoni MNEK 30. h. sic angulus petagoni XAZ est quinta pars quatuor rectorum; Et sicut angulus exagoni est sexta pars quatuor rectorum angulorum; sic & latus figuræ præcedenti isoperimetræ PM est sexta pars einsdem ambitus MN.



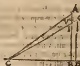
COROLLARIVM.

H Inc verò deduces, & partem, quã latus maius superat minus, vt est OP, qua latus OM pentagoni superat latus PM exagoni, habere eandem proportionem ad latus minus PM, quam angulus pentagoni superat exagoni angulum ad ipsum angulum exagoni XAZ, namque vt patt. 3. Tract. 14. prop. 5. eadem pars quinta est residuum OP lateris PM; quæ est OM totius ambitus MN. Siquidem si auferas quinque sextas partes à quinque quintis residua erunt quinque, quæ complebunt partem sextam: ideoque sicut OM est quinta pars totius MN: sic vnum residuum OP ex quinque remanentibus erit quinta pars vnius partis sextæ, & idem valet de angulis ob eandem proportionem ostensam in præced. vnde ZAT erit quinta pars anguli XAZ, & idem dicas, si medietatem tum residui ZAT, tum anguli XAZ assumas, vel si medietatem OP residui accipies, & medietatem lateris AP; eandem enim est proportio totius ad totum, quæ medietatis ad medietatem ex prop. 18. lib. 5.

THEOR. III. PROPOS. LVI.

In figuris Isoperimetris perpendicularis super vnum ex lateribus cadens, quò figura plures continet angulos, eò est maior.

*S It latus hexagoni OD, & latus pentagoni AB isoperimetri. Dico, quod perpẽdicularis CD est maior in exagono, quam CA in penguno. Nã si esset eiusdẽ lõgitudinis caderet in pũctũ B, & terminaret in punctum I latus exagoni isoperimetri pentagono ad hoc, vt idem angulus ACO remaneret, quo differt angulus pentagoni ab exagoni angulo: sed id esse non potest. Nam prop 3 Tract. 19. segmentum AI habet maiorem proportionem



ad IB; quàm angulus ACO ad angulũ OCD, ideſt est maior AI, quam quod possit esse quinta pars lateris IB, sicut ACO est quinta pars anguli OCD: Latus verò OD isoperimetri superatur à BA ex Cor. pręc. vt angulus superat angulum: Nempe 5. parte ipsius DO, quæ est AV, ideoque maius erit latus AV exagoni, quàm AI. Quare, cùm non capiat à B puncto vsque ad I, debebit capere inter puncta magis remota à centro, quam B, & I V. g. inter D, & O, vbi latera anguli OCD magis dilatata sunt, & lineam longiorem OD, quam IB capere possunt. Vnde CD perpendicularis longior erit, quàm CB.

THEOR. IV. PROPOS. XVII.

Figurarum Isoperimetrarum ea capacior est, quæ plures angulos, & plura latera habet.

PRobatur vtendo sehem. propos. 50. Ex dictis pr. 5.b. parallelogrammum factum ex dimidiato ambitu, & perpendiculari à centro super vnum latus cadente est æquale areæ ipsius figuræ regularis; Quare dato eodem ambitu, & perpendiculari eadem, idem erit parallelogrammum; at si ambitus sit idem, at perpendicularis maior, erit quoque maius rectangulum, vtpote, quòd habeat latus maius:sed rectangulum factum ex dimidiato ambitu figurarum isoperimetrarum V, & A habet idem latus æquale dimidiato ambitui eiusdem longitudinis pentagoni V,& pẽtagoni A; At aliud æquale perpendiculari ve exagoni maius, ergo ea sexagoni ex præced. & ideo maius rectangulum sexagono æquale, quàm illud,quod est æquale pentagono, & consequenter maior area sexagoni A quàm pentagoni V.

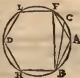
THEOR. V. PROPOS. LVIII.

Isoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima est æquilatera, & æquiangula.

DEtur figura ABHDLF maxima inter sibi isoperimetras. Dico eam esse æquilateram, & æquiangulam.

Prob. primò,quòd sit æquilatera. Nam si fieri potest, non sit æquilatera; sed latus BC sit maius, quàm CF,ducatur BF,& ex pr.1.h. fiat super BF triangulũ BAF æquicrurũ,& isoperimetrũ; illud erit maius ex prop. 1. h. Exp. triangulo BCF; addito igitur cõmuni polygono BHDLF erit figura BASD maior,quã CFDS cõtrà suppositũ, quod repugnat; Ergo figura maxima inter isoperimetras sibi, & numero eodem laterũ existens erit etiam æquilatera.

Sic ostendes si exhibeantur alia latera,& dicantur non æqualis inuicem,vt BH,& HD, nam æqualia laterum semper spatia erũt maiora capacitate, quibus si addas spatium reliquum, seu latera sit numero dispari, seu paria semper conficietur spatium maius cum triangulis æquicruribus maioribus, quàm cum ijs, quæ æqualia crura non possident.



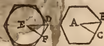
Prob.2.pars. Nam sit aliqua figura BHLFA, in qua omnes anguli sint æquales isoperimetra alteri alicui CBHDLF,in qua sit tantũ angulus C inæqualis angulo A ducta BF; quia angulus BCF est minor angulo BAF triangulũ verò BAF est isoperimetrum triangulo ACF;cum in cæteris conueniat,& figura figuræ eadẽ sit;anguli ad basim erũt minores ex 17. l.1. in triangulo ACF: quàm in triangulo BAF: quare ex Cor. prop.54. erit triangulum BAF maioris areæ, quàm triangulum BCF. Vnde addita communi area BHDLF, erit maior figura æquiangula ABHDLF, quàm non æquiangula CBHDLF.

THEOR. VI. PROPOS. LIX.

Circulus omnibus figuris sibi Isoperimetris rectilineis maior est, sicut & quæcumque Ellipsi sibi isoperimetra.

DAto circulo E, & data figura rectilinea isoperimetra A. Dico, quòd maior est circulus, quam figura data. Circumscribatur circulo figura similis totidem laterum, & ad aliquod latus ducta perpendiculari EF, & ad angulum ED constituatur rectangulũ triangulũ FDE, & idem fiat in figura A; sitque rectangulum triangulum, & illi simile ABC, vt patet, cùm figuræ sint similes, & ideo triangula æquiangula.

Probatur nunc propositio, nam figura circumscripta maior est circulo in ambitu suo, vt per se patet, ergo maior etiam est rectilineo isoperimetro A; quare recta BA erit minor,quàm DE: Sed ob similitudinem triangulorum ita est BA ad DE, vt CA ad FE, ergo minor erit CA, quàm FE. Ideoque rectangulum sub semicircumferentia circuli, & sub radio comprehensum æquale ex dicendis prop. 3. tract. 50.areæ circuli maius erit,quàm quod sub semiambitu rectilinei A, & minori linea CA, quam EF, quod ex dictis propos.4. huius est æquale areæ rectilinei, ergo maior erit circulus E rectilineo A.



Probatur quoque de Ellipsi, nam Ellipsis non potest continere figuram æquiangolam,quæ sit ei, quę in circulo inscribitur isoperimetra, & æqualium numero laterum.

Quapropter omnis figura circulo inscriptibilis erit maior,quam omnis figura ellipsi isoperimetrę inscriptibilis, cum sit illa æquiangula, hęc vero minimè, quapropter etiam circulus Ellipsi Isoperimetra maior erit.

COROLLARIUM I.

HInc est circulum omnibus figuris sibi isoperimetris maiorem esse, nam maior est omnibus, quę sint ęquiangulę, & ęquilaterę rectilineę, quę, & omnibus alijs Isoperimetris non ęquiangulis, vel non laterum æqualium maiores sunt. Sic,etiam maior est circulus omni ellipsi sibi isoperimetra, ergo omnibus figuris sibi isoperimetris absolutè maior est.

CO-

COROLLARIVM II.

SEcundò colligitur sphęram quoque capaciorem esse omnibus corporibus ęqualis superficiei tàm sphęricis, quàm planis superficiebus constantibus, Quandoquidem sphęra componitur ex indefinitis circulis, aut saltem ex omni parte circuli trahi possunt. Cum ergo circuli omni figura plana isoperimetra sint capaciores, sequitur quoque, quod solidum circulis intextum, vt sphęra est, omni figura solida capacior sit, Hęc autem confirmatio satis est in re per se admodum clara, licet sciam Theonem, & antiquos exactiùs, & magis mathematicè probare, sed eorum ostensio dependet à mensura corporum solidorum, quam nondum hausimus.

TRAC.



TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

EA omnia, quæ de Geodæsia plana considerauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior sit contemplatio, & acrioris ingenij acumen exposcat; neque omninò sit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vsque adhuc recusauerint, imò nec quidem in curuilineas diuersi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

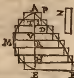
MVlti ne dum apud veterés; sed recentiores etiam, vt testatur Hyeronimus Vitalis ex nostris in suo Lexico mathematico in circuli Tetragonismum sc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryso, Hyppocrates Chius, Inter Neotericos autē Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cusanus, desudarūt. Sed ceteris sublimius Ambrosius à S. Vincentio in insigni opere, quod de Quadratura circuli inscripsit totam penè ætatem consumpsit. Sed licet multa consequutus fuerit omnino admiratione digna; tamen scopum assequutus nō est. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inscripto) impugnat Vincentius Leutaudus præter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciscus Xauerius Ayscon authorem propugnet. Id tamē libro Lugduni impresso anno 1663. nouæ impugnationi eidem Leutando locum dedit. Vnde satiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragonismum, & laboriosissimum, & adhuc sub lite versantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, seu mixtilineæ possunt tot rectangula inscribi, aut circumscribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

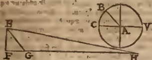
SIt data figura plana ABH, quæ sit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula posse, vel inscribi, vel circumscribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula superficiei remanet, & intercipitur, sit qualibet quantitate plana V. g. assignata Z minus.

Ducta AB hæc diuidatur taliter, vt maximum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter insistente, vt PE, vel RM sit minus quantitate Z data, & cetera omnia rectangula simul sumpta relinquēt inter se, & figuram cui inscribuntur, vel circumscribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur, Relinquunt inscripta paulò magis, quàm medietatē rectangulorum AT, & ID, & cęt. circūscripta verò AI, & TD paulo minus ob lineam curuā, & globosam (è contra de concaua esse asserendum) sed omnia rectangula TA, ID, & ceteris curuam intercipientis ęquant SH vt patet, ergo spatia, quę remanent, vt AIT, vel TAP, & ceteris omnis triangula mixtilinea conclusa inter curuam, & rectangula inscripta, quod sint minus quasi sub duplo, quam rectangula AT, & TD curuam stipantia ęqualia rectangulo SH ęquanti planitiem Z sunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AT, & TD stipantia curuam AIS æquent rectangulum SH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TT, & cæteræ sint partes ipsius SB, & TA, & ID, & cæteræ sint omnes æquales ex hypothe ipsi SH.

THEOR.



gulum eiusdem altitudinis FEG ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib 5. ita erit sectoris planities ACB ad planũ circuli CBV, vt trianguli FEG ad planitiẽ trianguli FEH, & permutando. Ita erit ACB sector ad EBG triangulum, vt circulus CBV ad triangulũ EFH: sed circulus, & triangulum in preced. ostensa sunt æqualia: ergo etiam sector ACB, & triangulum FEG æquabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea æquali dimidio arcui erit ex 39. ęquale sectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

CVm ea osteosis propos. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum se habere vt 22. ad 7. quæ tamen verâ paulò maior est. Hoc si accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, seu planum 154. cuius medietas 77. ex propos. 40. lib. 1. Elem. erit ęqualis triangulo rectangulo XVL; de quo iam ostendimus prop. 1. areę circuli æquale esse.

Si verò placeat aream rectanguli verâ circuli planitie minorem insensibiliter. Accipies diametro verę circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua posito diametro partium 71. circumferentia erit 223. nimirum in proportione tripla super decupartiente septuagesimas primas, idest comprehendet diametrum ter, & ferè septimam ipsius partem deficiente tantùm $\frac{1}{3}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus diameter 71. per circumferentiam 223. efficiet aream 15833. quę bifariam diuisa erit 7916. $\frac{1}{2}$ circuli planities.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Area circuli proportionem eam consequitur ad quadratum diametri, quam 11. ad 14. proximè.

SIt circulus, cuius diameter AB, eiusque quadratum CD. Dico aream circuli veluti 11. ad 14. ad quadratum diametri respondere.



* Dimidium quadrati CD erit AD, & quarta pars eius erit triangulum FAO. Prolongetur diameter FO in E, atque FE æqualis circumferentiæ præsupponatur, & ducatur AE. Itaque triangulum FAE erit eiusdem altitudinis, ac triangulum FAD, quod est quarta pars quadrati ex diametro. Quamobrem Ita erit triangulum FAE ad triangulum FAO, nempe ad quartam partem quadrati CD, vt basis FE ad basim FO ex 1. lib 6. Elem. quæ est proximè, vt 22. ad 7. Quare erit triangulum FAE, ęquale areæ circuli ex 3. h. ad FAD æquale quartæ parti quadrati CD proximè, vt 22 ad 7. quare FAE triangulum ad quadratum totum quater maius CD erit vt 22. ad numerum quater maiorem 28. quę est eadem proportio, quæ 11. ad 14.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire.

SIt notus diameter Partium 84. quadretur hic numerus, & fit 7056. Vtendò itaque regula aurea fiat, vt 14. ad 11. sic 7056. ad aliud, & ea erit area circuli 5544.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Quadratum circumferentiæ se habet ad aream circuli, vt 88. ad 7.

*PRobatur. Nam posito FE part. 22 in figura prop. 6. antec. nempe æquali proximè circumferentiæ, & posito diametro partium 7. si fiat quadratum ex FE circumferentia continebit sex rectangula dupla AFE ex 3. lib 2. Elem. & insuper rectangulum nigrum ex septima parte confectum: Nam FE. continet ter diametrum partium 7. & ideo sexies semidiametrum partium 3 $\frac{1}{2}$, & addit insuper septimam partem diametri, nempe $\frac{2}{7}$ semidiametri: Quare rectangulum FI ex circumferentia FE, & semidiametro FA erectum, erit duplò maius, quàm triangulum FAE proximè æquale areæ circuli. Proptereaque quadratum FG ex circumferentia continebit duodecies aream circuli, & insuper parallelogrammum nigrum, quod est septima pars rectanguli FL sub toto diametro EL, & tota circumferentia FE comprehensi, at $\frac{2}{7}$ dimidij rectanguli FI, & ideo $\frac{4}{7}$ trianguli FAE. Si itaque ad vitandas fractiones efficiamus aream circuli, vel triangulum ei proximè æquale FAE esse partium 7. totum quadratum FG duodecies maius erit, cum quatuor septimis partibus, nempe cum rectangulo nigro part 88. Nam 7. duodecies acceptus facit 84. & $\frac{4}{7}$ additi efficiunt 88. & ideo quadratum FG erit partium 88. posita area diametri partium 7.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Aream circuli proximè inuenire.

FIat, vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ 264 ad aliud, & adhibita regula proportionum elicietur numerus 5544. pro area circuli quæsiti.

PROBL. IV. PROPOS. X.

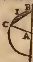
Data sectoris peripheria, & cruribus, eius aream admensurare.

Sit, vt in pr. 4. sector ABC, cuius AC crus notũ sit partium 25. pedum, & arcus BC 10. pedum, ideoque ex prop. 4. huius triangulum rectangulum BFC, cuius crus FA sit 25. pedum, & basis BG 10. pedum erit ei æquale. Quaderè si mutua multiplicatione fiat rectangulum partium 250. & medietas sumatur partium 125. hęc erit sectoris arealis quæsita quantitas.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Cognito sectore, & chorda cognoscere aream segmenti circuli.

Sit segmentum circuli nigrum BIC, deturque chorda BC, & cognitus quoque sector BACI;



Debet priùs per ea, quæ prop. 16. Tract. 29. triangulum BAC cognosci. A sectore itaque subductum triangulum CBA relinquet segmentum nigrum ICB.

PROBL. VII. PROPOS. XII.

Annulum planum in quadratum redigere, & mensurare.

Detur annulus DEHAPB planus, cuius notus sit circulus medius ITI, vt faciliter ex nota diametro inueniri potest; multiplicetur hic circulus per residuum semidiametri AD subducto diametro minori LA, & productum erit area prædicti annuli DEHAPB.



* Prob. Nam fiant parallelogrãma LM, LN, & LO æqualia singulis circulis DEH, ITI, & BAP; quæ ob latera æqualia semicircumferentijs erunt similia, cùm sit ita radius vnius circuli ad radium alterius vt peripheria ad peripheriã ex pr. 39 l. 6. El. & ex 25 l. 6. ideo triangula circa diametrum cõsistentia ex prop. 35. lib. 1. Elem. MOK, & MOQ, necnon, & complementa OD, & OV erunt æqualia; si autem spatio MXOQ auferatur triangulum NXO, & addatur æquale triangulum MPN, spatium nigrum parallelogrãmo sibo XB remanebit æquale. Sed rectangulum istud est factum ex dimidia circumferẽtia circuli medij ITI, & residuo AD semidiametri LD. Quare ex integra circumferentia, cùm fiat duplo maius æquabitur toti gnomoni AMS: sed gnomon AMA æquatur annulo DEH, APB. Ergo etiam duplum rectangulum AD, quod fit ex peripheria ITI, & segmento AD æquabit annulum DEHABP.

Quod autem gnomon AMA æquet annulum patet. Nam rectangulum OAS ęquat circulum BAP. Totum autem rectangulum LM æquat totum circulum DEH. Ergo subductus ab æqualibus rectangulum LO ab LM, & minimus circulus à toto circulo restabũt annulus DEHPBA, & gnomon AMS residua æqualia.

COROLLARIVM.

Hinc quoque agnosces partem annuli dimetiri. Nam sicut tota annuli media peripheria ITI cum residuo diametri AD multiplicata dat totum annulum; sic pars IT peripheriæ eiusdem medię cum eodem diametri residuo AD multiplicata partem annuli ADT, quem metitur, producet.

EXPENSIO II.

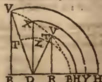
De Quadratione Circuli Geometrica.

Faciliori modo quadrationem circuli operi demandabimus mediante quadratrice, quam descripsimus tract. 18. de flexis ex prop. 14. vnde fit;

THEOR I. PROPOS. XIII.

Circuli areæ æquale triangulum parallelogrammumque, & quadratum constituere.

Corollario 1. propos. 19. tract. 18. cit. probauimus DB sagittam ad DX radium esse, vt radius ad quadrantem XY, si in quadrante XY circuli propositi quadrandi describamus quadratricem; obtinebimus quoque sagittam DB illius. Quamobrem, si sagittę inuentę DB, & radio XD tertiam proportionem inueniamus, hęc erit ęqualis quadranti XY, quam quadruplicabimus, & totum ambitum circuli, cuius radius XD æquabit.



Quoniam autem vt ostendimus prop. 2. h. area circuli est æqualis triangulo rectangulo ex linea æquali peripherię, & radio tamquam ex duobus lateribus erecto: si faciamus ex radio DX, & tertia proportionali inuenta, quę ęquat peripheriam circuli XY totius; patet triangulum hoc esse ęquale

areę

areę circuli, cuius quadrans DXV. Quod si ex dimidio prædictę lineę inuentę, quę æquat peripheriam constituatur rectangulum parallelogrammum, cùm hoc sit æquale triangulo prædicto, erit quoque æquale areę ipsius circuli, cum vt prędiximus prop. 23 tract. pręced. hoc modo triangulum in rectangulum ęquale conuertatur.

Tandem parallelogrammum commutetur in æquale quadratum, vel ex prop. 14. l. 2. vel reperiendo inter eius latera mediam proportionalem. Nam quadratum ex hac media erectum cum sit æquale parallelogrammo consequenter etiam circulo æquabitur.

Vnus autem circulus in quadratum redactus multos alios similiter quadrabit. Quandoquidem si offeratur alius circulus similiter redigendus ad quadratum. Inueniatur quarta linea proportionalis istis tribus, nempe diametro circuli, & rectę ęquali eius circumferentię ex linea quadratrice iam notæ, & diametro circuli propositi ex propos. 12. lib. 6. & inuenietur linea ęqualis peripherię circuli oblati; siquidem ex prop. 33. lib. 6. ita diameter est ad diametrum, vt peripheria cuiuscumq; circuli ad alius peripheriam. Si itaque hac quaesita proportionali inuenta, & semidiametro circuli alterius propositi constituamus triangulum, hoc erit ęquale alterius circuli propositi areę, quod, & redigemus in rectangulum, & in quadratum ęquale, quę consequenter ipsa quoque aream circuli exęquabunt.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Quadratum in circulum æqualem transfundere.

Oportet priùs inuenisse aliquod quadratum ęquale alicui circulo ex prop. pręced. cuius circuli radius notus sit. Deinde Inueniatur tribus quadrati lateri, & circuli ei ęqualis iam noti radio, & tandem lateri quadrati in circulum transfundendi quarta proportionalis ex prop 12. lib. 6. & hęc erit diameter circuli ęqualis quadrati.

Detur itaque Ex. g. latus quadrati AF, & diameter notus circuli ei ęqualis BC, & latus quadrati transmutandi BO. Ducta parallela DL. Linea O L erit diameter circuli trasmutandi, qui cõsequetur aream ęqualem quadrato ex BD.

Probatur. Nam sit nota BF semicircumferentię prębabiti noti circuli ęqualis, nempe tertia proportionatis duabus BC, & BA, talis enim prop. 13. huius ostensa est, cum in fine illius fuit dictum, quòd latus quadrati circulo ęqualis sit medium proportionale inter lineam ęqualẽ semicircumferentię eius, & radium, cum sit æquale rectangulo ab illis extremis comprehenso, & ideo FB tertia proportionalis. Iungatur deinde FA, quę claudet cum AC, vt patet ex Coroll. prop. 13. l. 6. angulum rectum, cùm sit BC radius ad BA latus quadrati, vt BA ad BF semiperipheriã, deinde à puncto D ducatur DE parallela ipsi AF quibus positis.

Probatur prop. Nam quia est ob similitudinem triangulorum FB ad BA, vt EB ad BO, & vt BA ad BC ita OB ad BL; erit ex *æquo* eadem proportio FB ad BC, vt EB ad BL; quadere ex 43. l. 6. EB erit ęqualis circuli semicircũferentię, cuius semidiameter sit BL. Sicut FB est ęqualis circuli semiperipherię, cuius radius BC Et quia quadratum OB est ęquale rectangulo ex linea EB ęquali peripherię, & BL radio; Etiam BD quadratum erit ęquale circulo, cui radius BL, illi rectangulo ex BE, & BL ęquali.

PRORL. II. PROPOS. XV.

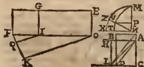
Dato sectori inuenire rectangulum æquale cognita proportione arcus subtensi ad circulum.

Quoniam ex propos 4. huius. Rectangulum sub linea dimidio arcui æquali, & sub radio comprehensum est æquale sectori, si detur eius proportio ad circulum V. g. quòd octaua pars, accipietur octaua pars lineę rectę ęqualis peripheriæ inuentæ, & ex huius dimidio, & ex radio rectangulum constituetur. Nam dimidium octauæ partis lineæ æqualis peripherię erit æquale dimidio octauæ partis peripheriæ. Vnde rectangulum quoque erit ęquale sectori.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Dato rectangulo circulo æquale constituere eius sectorem æqualem dato rectangulo minori.

*Detur rectangulũ EF, æquale areę, circuli sub FO semiperipheria, & sub radio OF cõprehensum, & rectangulum AC BO, eo minus, cui quęritur sector ęqualis. Si non est eiusdem altitudinis, AC BF, redigatur ad eandem altitudinem, ex prop. 6. part. 1. huius, & sit CH. Mensuretur deinde eius latus CL in latere FI. & ducta OI, erit parallelogrammũ OF ęquale ipsi CH, & cõsequenter CB parallelogrammo. Deinde ex pr. 10. l. 6. Elem. secetur OB, vel FB diameter iuxta proportionem, quam habet FI ad OF, & sit eadem proportio BQ ad QB; Radio itaque FK seorsim fiat quadrans MNB in quo inscribatur quadratrix MVT, qui quadrans erit quarta pars parallelogrammi EF, cum sit quarta pars circuli æqualis.



Translata itaque FQ in BN ducatur ad quadratricem MVT parallela PV basi NT, & & per V à centro N ducatur radius NZ. Dico quadruplum sectoris NBB esse ęquale parallelogrammo ABCO.

Prob. Nam vt sector NZX, est ad quadrantẽ MNX ita est arcus XZ ad quadrãtis ambitũ XZM ex 39. l. 6 vt autẽ arcus BB ad AZM quadrantem, sic portio NP ad radiũ NM ex 18. Tr. 18. & BQ ad QB. & FI ad FO, ex effect. & rectangulũ cũ sit eiusdẽ altitudinis ex 1

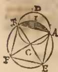
lib.6. FO ad FS: Igitur ex 16. lib.5. Elem. vt est sector HZN ad quadrantem XNM, ita est rectangulum FO ad rectangulum FE; sed quadruplum quadrantis XZM, & rectangulum FE sunt æqualia. Ergo etiam ex prop.18. l.5. Elem. sectoria NZX quadruplum, & rectangulum FO erunt æqualia.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Triangulum Lunulæ exhibere æquale.

FVit hic nixus, quò Hyppocrates Chyus ad quadrationem circuli peruenire putauit; fiat itaque circulus ACBD, & ducto diametro AB, & quadrati lateribus AC, & CB, alius circulus fiat radio CB, & relinquet in antecedenti circulo ACBD lunulam AIDB, quam dico esse æqualem triangulo ACB.

Probatur. Quoniam quadratum ex BB est duplum quadrati ex AS circulus quoque BAE erit duplus circuli ACBD ex prop.41 lib.6. & ex prop.39. semicirculus semicirculo, & quadrans quadrante du plus erit; Si ergo quadrans circuli minoris dupletur, & fiat semicirculus ADB, is erit æqualis quadranti ACB: Dempto igitur communi spatio nigro AIB



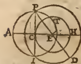
inter vtrosq; intercepto, erit Lunula AIDB triangulo ACB æqualis.

PROBL. V. PROPOS. XVIII.

Dato circulo annulum planum æqualem exhibere, cuius magnitudinis placeat: Et data annuli latitudine, & diametro circulum annulo æqualem facere.

SIt datus circulus APTI cuius centrum C, & data semidiametro annuli describendi EP, qui vt patet debet esse maior semidiametro PC dati circoli, à quo erigatur perpendicularis à centro C, quæ fit radius CA, & centro P ad internallum dati diametri EP describatur arcus, qui secet AE in E; ibiq; facto centro describatur EP radio circulus, & eodem centro E interuallo EC alius circulus describatur, *quem aio includere annulum* CHDTP *æqualem circulo* APTI.

Probatur. Nam vt sunt quadrata ex diametris, ita circuli ex prop. 40. lib.6. Cum ergo ex 11. lib. 2. quadratum PE sit æquale duobus quadratis ex CP, & CE etiam erit æqualis circulus ex EP duobus circulis ex CP & CE. Ergo etiam circulus PD erit æqualis duobus circulis ex PC



diametro, & CH diametro, cùm fiat dupla circulorũ super semidiametros CE, & CP, & circulus quoque PD duplus circuli ex PE semidiametro. Quare cum circulus ex PD, vt diametro æquet circulos ex TP, & CH diametris, ablato CH communi obtinebimus annulum CPHDT æqualem circulo APTI.

Quod si detur annulus CPTHD, & desideres huic annulo adinuenire circulum æqualem primò ex propos.19.l.3. duces tangentem PCI interiori circulo CTH vsque dum secet extrinsecum PDI, quam bifariam diuides, & produces AE, factoque centro in puncto contactus C interuallo CP describes circulum; eritque circulus æqualis annulo dato CP HD, vt patet ex præc. ostensione.

COROLLARIVM.

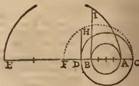
HInc disces plurimos circulos in vnum aggregare; Siquidem ex preced. circulus PO æquatur circulis APT, & CTH. Vnde sic eidem PO alium poteris aggregare; successiuéque alios vsque dum placeat.

PROBL. XI. PROP. XIX.

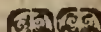
Circulos proportionaliter augere, vel minuere.

Efficies quadratum ex prop.18. Tract.19. V.g. duplum, vel triplum alterius, describesque circulos super eorum latera, tamquam diametris, obtinebisque circulos in data proportione tripla V.g. maiores. Sit circulus AB augendus, ita vt ad circulum maiorem se habeat vt 1. ad 3. Sit rectangulum ex AB, & BE triplo maius, quàm quadratum AB, quod fit assumendo latus BE triplò maius. Nam eum sint eiusdem altitudinis se referent, vt bases AB. & BE ex 1. lib.6. Deinde inter AE, & BE reperiatur media proportionalis BI, & quadratum ex BI æquabitur rectangulo AE. & sic triplo maiori, quam quadratum ex AB constituitur, ergo circulus ex IB, vel æquali CD, & erit intentum.

Si verò oporteat diminuere sit circulus CD minuendus, diuidaturq; latus CD in tres partes, & sit FD æqualis tertiæ parti, ita vt se habeat rectangulum ex CD, & FD tertia parte ad quadratum FD, vt 3. ad 1. interque totam diametrũ CD, & tertiam partem DF sit media proportionalis DH, & circulus ex DH, tamquam diametro factus erit $\frac{1}{3}$ circuli ex CD



Patet, quia circuli ita se habent in proportione, vt ex diametris quadrata ex 39. lib.6. Ideoque se habebunt ad inuicem, vt quadratum ex CD ad quadratum ex AB; sed quadratum ex CD ad quadratum ex AB se habet, vt rectangulum AB, & BE ad quadratum AB ex constructione, nimirum, vt 3. ad 1. ergo etiam circuli ex 16. lib.6. se habebunt, vt 3. ad 1.



EXPEN-

EXPENSIO III.

De Ellipsium tum inuicem, tum in alias figuras transmutatione.

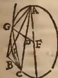
Transformatio Ellipsium non minus vtilis: quam necessaria est, cum enim ipsius vsus sit apud homines communissimus ipsius quoque mensuratio multoties, ne dum opportuna erit, sed & pernecessaria: iureque succedit circulo cùm sit quoad figuram valdè ei proxima, & ferè in omnibus proprietatibus suis illum imitetur.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Triangulum maximum Ellipsi inscribere.

Sit Ellipsis ACB, & eius segmentum CGA, sitque inscribendum maximum triangulum, quod in eo inscribi queat. Ex centro F per medium D lineę CA ducatur diameter GF, & compleatur triangulum CAG, quod erit maximum.

Probatur GD, & CA cum ex effectione sint ęquales sunt applicatę, & GF diameter def.11. Tract.24. quare docta per G coutingente in G, hæc erit parallela lineæ CA ex prop. 38. Tr.24 Si ergo CGA triangulum maximum non est, assignetur aliquod maius & sit CIA; producatur que IA in B ad contingentem BG, & ducatur CB. Erit igitur triangulum CBA æquale triangulo CAO ex propos.39.lib.1.Coroll. Ergo CIA erit minus, quàm CAG, quod ponebatur æquale. Ergo non dabitur triangulum maius, quàm CGA.



THEOR. I. PROPOS. XXI.

Omnia triangula, quæ super bases nectentes diametrum aliquem cum applicatis, vel applicatas ad idem punctum, nec non, & vertices in applicatis similiter obtineant, inter se sunt æqualia.

Sint RK, & KM nectentes verticem diametri K, vel applicatarum KK cùm applicatis OM, & OH ad idem punctum O, verticesque earum sint in applicatis PI, & PL ad idem punctum P. Dico hæc triangula HIK, & KLM esse æqualia.



Probatur. Nam PL, & PI applicatę sunt equales; Quare subductis æqualibus QP, & PR, remanebunt bases æquales IQ, & RL: Quare triangula in eodem verticem K, vel in parallelam KK desinentia IQK, & AKL erunt ęqualia: Sic, & triangula IQH, & RML, vtpote inter parallelas HM, & IL. Vnde tota triãgula HIK, & KLM erunt æqualia.

Quod autem QP, & PR sint æquales, patet. Quia KK, & HM sunt parallelę; & ideo cum HO, & OM sint ęquales, & XK, & KK ex prop 13. Cor. tract. 29. eruot etiam RP, & PQ ęquales, vel si in eundem verticem terminent ex prop. 4. Cor. 2. lib. 6.

COROLLARIVM.

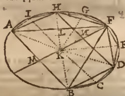
Hinc euenit, quòd si triangulum, & taliter assignatis sit maximum, vt KLM, quòd etiam aliud HIK erit maximum. Nam si non est, sit punctatum triangulum maximum HSK, & ducatur ST parallela HM, & constituatur triangulum punctatum MKT, quod erit minus triangulo MLK: quod ponitur maximum: sed hoc est æquale triangulo HIK ex præced. Ergo triangulum HIK maius erit punctato KMT: quare contra hypothesim, & maius punctato HSK ipsi æquali ex pręced. quod est absurdum cum SHK ab aduersarijs statuatur maximum, quod in segmento HIK capere possit.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Segmenta Ellipsium, in quibus capiunt maxima triangula æqualia, inter se sunt æqualia.

Sint duo segmenta FHA, & FDB Ellipsis AFSB in quibus capiant triangula maxima ęqualia FDB, & FHA. Dico ea esse æqualia.

Probatur. Nam KH erit diameter, & LA, & LF applicatę, & basea FH, & HA nectentes diametrum HK; quæ bifariam diametris, KI, & KO diuisæ constituent triãgula maxima: ideoq; ex præc. FGH, & HIA erunt ęqualia.



Sic si connectatur D, & H recta DH nectens erit parallela lineæ BA ex præced. quare HN, & NO erunt applicatæ. Vnde bases DP, & FH nectentes diametrum KF, & applicatas DN, & NH diuisæ bifariam diametris KO, & KA subtendent triangula maxima, & ex præc. æqualia HUA, & FSD. Sicque erũt quoque æqualia triãgula BCD, & DEF; & sic probabis si alia triãgula in residuis rursus inscribas in infinitum.

Si ergo inscribantur omnia triangula maxima in segmentis BDF, & FHA, quæ inscriptibilia sunt omne spatium occubabunt segmentorum ellipticorum FHA, & BDF; alioquin, si aliquid remaneret, non omnia triangulorum inscriptibilis multitudo inscripta fuisset: sed omnia triangula inscriptibilia remanent semper ęqualia; Ergo & spatium

Ratio est deducta à propos. 72: Tract. 24. Conic. Cum enim sit CP ad BP, vel KR ad MR erit etiam eiusdem altitudinis spatium CKPR ad spatium BPMR, vt bases, quæ sunt eiusdem proportionis, vt propos 13. tract. præced. nimirum vel CP, ad BP, vel KR ad MR, & ita dicas de omnibus alijs spatijs. Quare figura inscripta in circulo ex prop. 17. lib. 5. Elem. ad figuram inscriptam in Ellipsi eam obtinebit proportionem, quam diameter Ellipsis maior CD habet ad minorem BP. Siquidem cùm singula spatia circularia singulis ellipticis sint in eadem proportione, quam CP ad CB, quę est eadem, quę KR ad MR, & sic de alijs lineis, quę omnes in eadem proportione sunt, etiam omnia spatia simul composita circularis ad omnia spatia simul composita Elliptica in eadem proportione erunt, vt CP ad CB, vel etiam CD ad BP.

Deinde aduertendum est quoque, quia fecimus circulum ACBD, se habentē ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum BP; quod etiam circulo maiori ACBD inscripta figura se habebit ad inscriptā circulo minori HI, vt CD ad BP ex pr. 26. 39. lib. 6. Quare figura inscripta Ellipsi, & figura inscripta circulo HI erunt ęquales ex prop. 7. l. 5. vtpote, quod illis dicat eandem proportionem CD ad BP figura circulo maiori ACDB inscripta.

Quo posito ostenditur propos. Spatium Ellipticum est ęquale areæ circuli HI, sed circulus CADB, ita est ex effectione ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum Ellipsis BP. Ergo etiam spatium circuli maiori diametro descripti ACBD respiciet spatium Ellipticum, vt CD diameter, vel BA respicit minorem diametrum PB.

Probatur quòd spatium Ellipticum sit æquale circulo HI. Nam si non est æquale erit, aut maius, aut minus; sed neutrum dici potest. Ergo erit æquale. Nam si non est Ellipsis æqualis circulo HI: Sit circulus HI maior. Describatur in circulo HI figura adeo multiplicatis lateribus, vt sit maior ipsa Ellipsi: siquidem in circuli maiori, quàm Ellipsis, maior figura ipsâ Ellipsi capere poterit. Similis autem figura circulo ADCB, & Ellipsi, vt docuimus, inscribatur, & erit figura multilatera circuli maioris ACBD ad multilaterā Ellipsis in eadem proportione, vt ad multilateram circuli HI, & ideo æquales erūt circulo HI, ac Ellipsi figurę inscriptę. Sed est maior figura circulo inscripta ex aduersarijs, ergo esset maior, simulque æqualis, quòd esse nequit.

Quod si asseratur circulus HI minor; quàm Ellipsis. Tunc in Ellipsi talis figura inscribatur adeo multiplicatis lateribus, vt docuimus, vt sit maior ipso circulo HI; Nam cum sit maior Ellipsis circulo HI adeo inscriptæ fig. latera multiplicari poterunt, vt euadat circulo HI in aliquo maior, sitq; alia tot numero laterū in circulo HI inscripta. Sed, vt ostendi, figura circulo HI inscripta est æqualis ipsi figuræ Ellipticæ, ergo figura in HI esset ęqualis, & vt volunt aduersarij minor, quam figura Elliptica: quod esse nequit.

COROLLARIVM.

Hinc educitur Ellipsim ABEP ad circulum CDAB consequi eam proportionem, quam rectangulum ex CD, & BP lateribus ad quadratum CD. Ratio est, quod cum quadratum, & rectangulum sint eiusdem altitudinis CD se habebunt inuicem, vt bases BP ad CD, quàm, & adipiscitur Ellipsis ABPB, collata ad circulum ACBD.

THEOR. V. PROP. XXV.

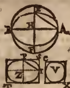
Si circulus fiat ex diametro, qui sit media proportionalis inter diametrum maiorem, & minorem Ellipticum, æqualis Ellipsi est.

Probatur ex præced. Siquidem ostendimus talem circulum, nec posse esse Ellipsi minorem, nec maiorem. Quare æqualem esse conclusimus. Et hinc iam habes modum, quo circulum æqualem Ellipsi efficias; si inter CD, & BP mediam proportionalem inuenias HI, & ex eo circulum HI delinees.

THEOR. VI. PROPOS. XXVI.

Ellipsis quælibet ad circulum quemcumq; in proportione ea est, qua rectangulum ex diametris ad quadratum circuli dati.

Sit circulus V Ellipsis BAPE. Dictum est in Cor. Ellipsim BAPE ea proportione referri ad circulum maiori eius diametro descriptum AB; qua rectangulum ex eius diametris AB, & EP ad quadratum AB; Sed circulus ex AB ad circulum V ea refertur proportione, qua quadratum AB ad quadratum XC ex propos. 40. lib. 6. Elem. Ergo ex *æquo* Ellipsis BAPD eam retinet proportionem ad circulum V, quam rectangulum ex AB, & EP diametris ad quadratum CX.



THEOR. VII. PROPOS. XXVII.

Ellipsis quæcumque ad quamcumque Ellipsim eam consequitur proportionem, quam rectangulum ex diametris primæ ad rectangulum ex diametris secundæ.

Ellipsis ABEP in fig. prop. anteced. eam adipiscitur proportionem ad circulum V; quam rectangulum ex diametris AB, & EP ad quadratum XC ex pr. antec. Sic circulus V ad Ellipsi alteram Z eam dicit proportionem ob eandem propos. quam quadratum CX ad rectangulum ST. Ergo ex *æquo* Ellipsis ABEP ad Ellipsim Z eam dicit proportionem, quam rectangulum ex AB, & EP ad rectangulum ST.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc deduces quomodo Ellipses æquales describantur, aut iuxta datam proportionem. Nam sufficit efficere rectangula, quæ inuicem datam proportionem consequantur ex prop. 27. Tr. 39. præced. & ex illorum lateribus constituere duas Ellipses, ex prop. 55. Tr. 24. quæ inuicem datam proportionem rectangulorum obseruabunt.

COROLLARIVM II.

Hoc quoque est, quod Ellipsis sit ad Ellipsim, & ad circulum, vt triangulum ex diametris, vel semidiametris ABE Ellipsis AEBF prec. prop. 26. ad triangulum ex iisdem IPZ in altera Ellipsi Z, vel ex radijs in circulo: Patet quoniam triangula dimidia sunt rectangulorum ex iisdem lateribus constantium: quare cum sit totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Etiam triangulum erit in eadem proportione ad triangulum, vt rectangulum ad rectangulum, vel ad quadratum, & ideo, vt Ellipsis ad Ellipsim, vel ad circulum.

THEOR. VIII. PROP. XXVIII.

Segmentum circuli se habet ad totum circulum, vt segmentum Ellipsis ad totam Ellipsim, quæ sint inter easdem parallelas conclusa.

Segmentum aliquod Ellipticum exhibeatur CBIH, & aliud circulare ACGH inter parallelas AC, & OH. Dico, quod spatium ACGH est ad circulum LAK, vt spatium Ellipticum CBIH est ad totam Ellipsim LBK.

Probatur, vt est AC ad BC, ita est spatium ACGH Trapezij circulo inscripti ad BCIH trapezium Ellipticum; & ita est spatium totum figuræ inscriptæ circulo LMACK ad figuram Ellipsi inscriptam LNBIK, vt demonstrauimus prop. huius 24. initio. Diuidatur itaque trapezium circuli CACH bifariam per eandem parallelam DF; diuidetur quoque trapezium BCIH, ducanturq; IE, & EB, necnon, & AD, & DG; eritque trapezium GHDF ad trapezium EFIH, vt DF ad EF, & vt AC ad CB, & sic trapezium DACF erit ad trapezium BCEF veluti AC respicit BC, & ideo, vt figura LMACK ad figuram Ellipticam. Quare etiam simul duo trapezia circularia ACDF, & DFGH erunt ad duo Elliptica BECF, & FEIH ex propos. 17. lib. 5. vt figura circulo inscripta ad figuram Ellipsi inscriptam; Et sic semper sequetur, si diuides in infinitum; Sit igitur facta in trapezio dato circuli ACGH omnis possibilis subdiuisio, sicut etiam in trapezio Elliptico; ambo ita diuisa omne spatium, quod inter GA rectam, & curuam ADG, sicut inter rectam BI, & ambitum BEI absumerent, alioquin, si aliquid remaneret, omnis possibilis subdiuisio facta nõ esset; cùm minor figura rectilinea capere posset in circulo, & Ellipsi ea cuius latere dictæ lineæ trapezium minus constituerent. Cùm ergo facta omni possibili trapeziorum subdiuisione semper sit omnis congeries trapeziorum in ACGH factorum ad omnem multitudinem trapeziorum in BCIH factorum, vt figura LMGK ad figuram LNIK, & figura LMGK ad figuram LNIK sit vt circulus ad Ellipsim. Etiam trapezium circulo inscriptum omni possibili subdiuisione multiplicatum erit ad trapezium CBIH, & ideo segmentum circulare CAGH ad segmentum Ellipticum CBIH, cui ita subdiuisa æquantur, erit, vt circulus ad Ellipsim. Quare *permutando* segmentum circulare CAGH erit ad totum circulum, vt segmentum Ellipticum CBIH ad totum Ellipsim.

COROLLARIVM.

Hinc, si habes circulum in quotcumque partes æquales parallelis sectum, obtinebis quoque ellipsim ex eius diametro, vt axi maiori factam in partes æquales similiter sectam ab iisdem parallelis, verùm in circulo vsque adhuc inuenta via non est tales partes efficiendi.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

Datam Ellipsim in quascumque partes æquales, in quas circulus diuidi possit, per sectores partiri.

Supra docuimus subduplam diuisionem, hic adrem omnem eam, quæ circulo describi possit. Sit itaque data semiellipsis ACDB, & oporteat eam in tres æquales sectores partiri, vt semicirculus diuisus est AQMB. Demittatur perpendicularis QO à circuli sexta parte AQ, & ducatur CP. Dico ACP sectorem esse sextam partem Ellipsis, vnde si ducta TV tangente, & parallela AD facias alium sectorem æqualem erit CPD altera pars, & sic de reliquis faciendo alios sectores æquales ex prop. 21. huius.

Prob. ex 24. h. vt QO ad CO lineas, sic QAO segmentum circuli ad ACO segmentum Ellipsis, & ita erit QOP in circulo triangulum ad triangulum COP in Ellipsi ob eandem altitudinem cum terminent in idem punctum P. Quare, si componantur, ita erit triangulum QOP cùm AQO segmento, idest sector AQP in circulo ad triangulum COP cũ segmento ACO, idest sectorem ACP in semiellipsi, vt QO ad CO. Sed vt QO ad CO, ita est semicirculus AQMB ad semiellipsim ACDB ex prop. 24. huius contextu. Erit itaque AQP sector circuli ad ACP sectorem Ellipticum, vt totus circulus ad Ellipsim: Quapropter *permutando* erit QAP sector circuli ad circulum, vt ACP sector Ellipticus ad Ellipsim: sed ille sector circuli est sexta pars ipsius, & tertia eius dimidij: Ergo etiam sector Ellipticus sexta pars erit totius, & tertia eius dimidij. Quare si ducta tangente TV ducas ei parallelam AD, & facias segmentum AC æquale segmento CD ex huius 23. erunt etiã ACP sector, & CPD insistentes æqualibus segmentis æquales ex huius prop. 22. Propterea que CPD erit altera totius sexta pars, & sic de reliquis.

COROLLARIVM.

Hinc nosces describere figuras in Ellipsibus similes illis; quæ sunt in circulo, si fiant tales, quarum singula triangula se habeant in circulo ad totum circulum, vt singula triangula ellipticę figuræ ad totam ellipsim, etiam si sint triangula quæcumque, & irrationalia. Quia, & tota figura circuli inscripta erit ad totum circulum, vt figura Ellipsi inscripta ad totam ellipsim. Nam si V.g. BMQO figurę circuli triangula BMP, & MQP, & QOP, erunt ad figuræ ellipticæ BDCO triangula BDP, & CPD, & PCO, vt OQ ad OC, vel æquales MN ad MD, idest, vt circulus ad Ellipsim; etiam tota figura circulo inscripta se habebit ad figuram ellipticam, vt circulus ad Ellipsim: Proptereaque conuertendo ita erit figura in circulo ad totum circulum, vt figura ellipsis ad totam ellipsim.

PROBL. IV. PROPOS. XXX.

Super datam circuli diametrum describere Ellipsim circulo æqualem, cuius data sit semidiameter, & applicata æqualis radio.

Sit BAC circulus, cuius centrum E, & data semidiameter ellipsis maior semidiametro circuli ED: ducta tangente AD inter parallelas AD, & BC accommodetur ab a puncto data ED, & ductis parallelis, vt FG singuli sinus, vt GK trasferantur à semidiametro ellipsis ED super eandem lineam, vt sunt HF, singulaque puncta flexa molli ductu vniantur, & semiellipsis BFDGC erit constituta; quam iuxta easdem mensuras perficies. Dico itaque hanc semiellipsim semicirculo esse æqualem.

Nam, quod sit ellipsis patet ex ijs, quę diximus propos. 52. Cor. Tract. 24. Quod verò sit ęqualis semicirculo.

Probatur. Nam ducta PN vsquequo intersecet circulum, & ellipsim in M, & N parallela ad diametrum ellipsis productum, erunt eius partes MP & NO diametro ED, & EA applicatę in P, & O, & ideo æquales eum omnes alias applicatas tales effecerimus ex constructione. Ducantur deinde subtensę BM, & BN ab intersectionibus N, & M, & erit segmentū circuli MEB ellipsis NFB. In segmentis ergo circuli BEM maximū triang. inscribatur BKM, & ab B vertice ducatur parallela FG, si nō sit ducta, & in L erit vertex maximi trianguli ellipsis segmento BFN inscripti, vt infra ostendendum. Erunt itaque eùm sint triangula maxima plusquam dimidia suorum segmentorum. Sunt autem etiam æqualia, & triangulum BFN æquatur triangulo BKM, sicut & trapezium BNOE trapezio MPBE, & semitriangulum maximum NDO semitriangulo maximo MAP, cum sit dimidium maximorum: Et si in segmentis remanentibus rursùs alia triangula inscribantur, & multiplicentur vsque dum multiplicari possunt, semper idem succedet, & semper multiplicata maxima triangula in circulo æquabuntur ellipticis æquè in successiuè remanenti quolibet segmento multiplicatis: sed maxima triangula in circulo multiplicata, vsquedum multiplicari queunt, æquant circulum; alioquin si remaneret aliquod segmentum, non essent multiplicata omni multiplicatione possibili, & sic dicas de ellipsi. Ergo cum omnia triangula circuli ęqualia circulo æquentur omnibus triangulis ellipticis æqualibus ellipsi; Ellipsis, & circulus erunt æquales.

Itaque ostendendum remanet primo triangulum BFN, & omne similiter inscriptum esse maximum. Hoc autem ostenditur. Nam ducta per F linea XF parallela ipsi BN tangens erit, & ideo ex dictis 1. propos. huius BFN erit maximum triangulum. Quod autem XF sit tangens ducta XK parallela ipsi MA, tangente circuli K sic ostenditur. Quoniam omne punctum, quod in ipsa assignetur extra ellipsim est, ergo non secabit eam; sed continget in F, ergo tangens erit, quod si ita non est. Assignetur punctum Z V g quod dicatur esse intra ellipsim, & ostēdetur de illo extra ellipsim reperiri. Ducta ZQ Trapezia NOSE, & SEMP sunt ęqualia ob ęquales bases ex constr. NO, & MP, & eandem altitudinem ex propos 72 Tract 24. Vnde, & ex prop. 73. tract. 59 prec. SN, & HO æquabūtur sicut, & in ZQ partes 4 Y, & 3 Q. Sunt verò æquales ex constructione HF, & EG. Vnde, & residua FS, & HE erunt equalia. Quamobrem cum sint inter parallelas, & parallelæ Z 4, & I 3. erunt æquales ex prop. 33. lib. 1. Elem. quæ additæ æqualibus, vt ostendi 4 Y, & 3 4 remanebunt æquales ZY, & I Q. Sunt autem VQ, & TY ex constructione æquales, & QV est minor, quam IQ. Ergo etiam TV, quæ finit in ambitu elliptico in T est minor, quam YZ: Vnde punctum Z remanebit extra ellipsim: quod cum possit demonstrari de omni alio puncto excepto F in quo tangit, remanebit tota XZ extra ellipsis ambitum. Quamobrem ZX erit tangens, & ideo NFB maximum triangulum, quod in segmento NFB inscribi possit ex prop. 1. h.

Deinde ostendendum est triangula, seu trapezia Elliptica ęquari circularibus. Nam primo trapezium ENOE æquatur trapezio EMPE ex prop. 83. tract. præc. quòd sint inter parallelas, & æqualium basium. Triangulum quoque BFN in ellipsi ęquatur triangulo BKM in circulo; quod pars FSB sit æqualis parti EBK, vtpote inter parallelas existenti, & super bases æquales FS, & HK, vt supra ostensum est, & idem dicendum de triangulis HMA, & FSN; necnon, & de triangulis MAP, & NDO, & sic de alijs, si inscribantur. Verificatur itaque, quod omnia triangula in ellipsi sint maxima, & sint æqualia maximis, & inscriptis in circulo, & ideo quòd in perpetua minorum descriptione, tùm circuli, tùm ellipsis, cum triangula sint semper æqualia, circulus ellipsi æqualis erit.

COROLLARIVM.

Hinc poteris non dum totam ellipsim alteri exhibere æqualem, seu circulo, seu ellipsi, sed etiam singula eius segmenta, ita quod triangulum BFN sit æquale triangulo BKM, cum in ipsis triangula, & in segmentis successiuè remanentibus

ſemper æquális inſcribi poſſint, vt ex demonſtratione patet: quin imò ſector quoq; BKS æquabitur ſectori AFR cum triangula AFR, & AKR ob æqualem baſim, & altitudinem ſint æqualia.

EXPENSIO VI.

De areis parabolarum quadrandis.

QVoniam aliquando ſuperficies ſpatije parabolicis, vel ferè talibus continentur, vt exactus Geodeta poſſit talia ſpatie exactiſſimè menſurare, etiam quadrationem parabolæ noſcere debet, & eam in libitas partes diuidere.

PROBL. I. PROPOS. XXXI.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inſcribere triangulum.

SIt parabola, ſeu ſegmentum eius LMO, cui oporteat inſcribere triangulum maximum. Subtendat itaque illum quælibet recta LO, quæ diuidatur bifariàm, & erigatur diameter QM, & coniungantur rectæ LM, & MO. Dicoque LNO eſſe maximum triangulum ſegmento parabolę O N M L inſcriptum.

Probatur. Nam ſi triangulum LMO non eſt maximum, erit aliquod aliud V. g. LNO, de quo probo non eſſe maximam contra hypotheſim, ſiquidem ita ex Coroll. propoſ. 50. tract.24. eſt LQO rectangulum ad LPO rectangulum, vt QM ad PN: ſed eſt maius rectangulum, LQO, quam LPO ex



propoſ. 29 lib.6. Quare etiam erit maior QM, quam PN. Vnde triangulum LMO erit maius triangulo LNO, ſiquidem ductis perpendicularibus MV, & NX, & ideo parallelis, cùm QM, & PN diametri ſint in parabola parallelæ quoque ex propoſ. 27. tract.24. triangula QMV, & PNX erunt æquiangula, vnde erit QM ad PN, vt normalis VM ad normalem XN; ſed maior oſtenſa eſt diameter QM, quàm NP. Ergo etiam maior VM; quam XN. Vnde cum triangulum LNO obtineat altitudinem minorem ex 1. lib.6. Cor. erit minus.

THEOR. I. PROPOS. XXXII.

Omnia triangula, quæ in applicatis obtinent vertices ſuos in parabola, inter ſe ſunt æqualia.

SIt triangulum LOR, & MNS, quæ in applicatis LM, ON, & RS vertices M, N, S, & R, O, L habebãt. Dico ea eſſe in parabola SMLR æqualia.

Probatur. Ducto diametro XY, erunt XN, & OX æquales, & TX, & XY quoque ex prop.13. Tract. 39. quia SM, & LR coniungunt æquales applicatas PM, & PL in æqualibus trapezijs RALP, & APMS; ſicut etiam RA, & SA. Ablatis itaque æqualibus TX, & TV ab æqualibus OX, & XN, reliquæ erunt æquales OT, & VN: Quapropter triangula OTL, & VMN ex pr.39. lib.1. Cor. inter parallelas LM, & NO, & ſuper æquales baſes OT, & VN exiſtentia erunt



æqualia; necnon ob eandem rationem triangula OTR, & VNS; quare tota triangula ROL, & MNS erunt æqualia.

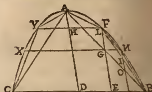
COROLLARIVM.

HInc educes, quòd ſi triangulum ORL ſit maximum, etiam aliud NMS futurum eſſe maximum. Quoniam, ſi aliud maximum poſſet conſtitui in ſegmento MNS, cuius vertex I; Tunc ducta ab I parallela I K, ſi conſtitueretur triangulum RKL eſſet æquale triangulo maximo MIS, & ideo maius triangulo SNM non maximo ex aduerſarijs: ſed MNS æquatur triangulo ROL. Ergo etiam triangulum, quod conſtitueretur RKL eſſet maius triangulo ROL. Ergo triangulum ROL contra Theſim maximum non eſſet, quod inſcriptum fuiſſet in ſegmento parabolico ROL.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Parabola eſt ſeſquitertia trianguli maximi in illa inſcripti.

SIt parabola BFAYC, & triangulum maximum in ipſa BAC. Dico parabolam ei eſſe ſeſquitertiam; nempe triangulum continere, & inſuper eius tertiam partem, vel eſſe ad illud, vt 4. ad 3. Ducatur itaque diameter AD; diuiſaque bifariam ſemibaſi BD in E ducatur AO diametro parallela EF vſque ad parabolam in F, & ducatur baſi parallele FH.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. de conicis Tr.24. Quadratum BD eſt ad quadratum FH, vel AD, vt AD ad AH, ſed quadratum BD ex propoſ. 6. lib.2. Cor. eſt quadruplum quadrati ED. Ergo etiam diameter AD quadruplus eſt portionis HA, & per *diuiſionem rationis* HD ipſius AH, vel AF æqualis ſeſquitertia. Linea verò EG ſubdupla eſt ipſius AD propter triangulorum ſimilitudinem, cùm GE ſit ad DA, vt EB ad BD, & ita quoque EG ad BA. Itaq; GA erit duplo maior ipſius GF æqualis ipſi AH: Siquidem AF eſt $\frac{1}{4}$ ipſius AD, & SG $\frac{2}{4}$.

Quamobrem triangulum quoque GFB erit duplum

plum trianguli BFG ex 1. lib. 6. eundem verticem habentis in B; & ideo eandem altitudinem, & quia BA est dupla ipsius BG, vt dixi; ideo triangulum BFA erit trianguli BFG duplum, & ideo æquale triangulo BOB, sed huic BGA est quadruplum triangulum BDA ex 1 lib. 6. siquidem duplicatam habet basim, & est similiter positum, & simile: vnde illi habebit proportionem, quam 4. ad 1. nempe duplicatam, quam 2. ad 1. idest basis DB ad basim BB.

Deinde sit parabolæ segmentum BFA, in eo ea parallela DA, ex BG æquali applicatæ AG puncto medio erecta, quæ erit diameter, & maximum triangulum ID eo inscriptum BFA, ex propos. 1. h.

Diuidatur bifariam semibasis UO in O, & ducatur parallela ON ipsi FG, & NL basi BA. Et eodem prorsus argumēto ostendes ON esse sesquitertiā FG, eo quod ex 5. Tr. 24 quadratū BG quadruplō quadrati BO, sit ad NL quadratū, vt UA ad GL, idest 4. ad 1. & hinc residuum GL ad LA, vt 3. ad 1. & ideo NO æqualem ipsi OL esse $\frac{1}{4}$ ipsius GF, & OI ipsius GL dimidiam, quod ei eandem dicat proportionem; quam BO ad BG; ideoque OI ipsius GA $\frac{1}{8}$, idest duplam residuæ IO $\frac{1}{4}$, quę sublatis $\frac{1}{8}$ erit $\frac{1}{8}$, ideoque triangulum TOB duplo maius, quam BIN erit, quę ob eandem altitudinem B sunt inuicem, vt bases OI ad IN: ideoque addito æquali INA triangulum BIO æquabitur triangulo toti NBF; & ideo erit subquadruplus trianguli AFO, cum sit ille BFG supra duplo maiorē basim BF, & ideo, at similis, similiterq; positus ex 21. lib. 6. habeat proportionem duplicatam nempe U I O, vel æqualis BNA subquadruplus erit trianguli BAG, & sic semper erit etiam, si diuidas in infinitum.

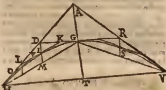
Si ergo inscripta sint in parabola BAC omnia triangula, quæ inscribi possunt, illa multitudo æquabit totam parabolam alioquin si aliquid parabolę restaret, non esset inscripta omnis inscriptibilis multitudo, cùm adhuc inscribendi spatium suppeteret, cùm itaque omnia triangula inscriptibilia se habeant successiuè, vt 1. ad 4. & sit illimitata progressio hæc successiua; ideo ex Cor. 3. pr. 26. Tract. 16. part. 1. differentia secundi termini BFA à primo UAD erit ad BAD, vt BAD ad totam collectionem terminorum, scilicet triangulorum in seriem continuam proportionalium æquantium ipsam parabolam; sed ostēsum est BBA esse ad BAN, vt 1. ad 4. & ideo differentia erit 3. Quapropter, vt 3. ad 4. ita erit triangulum UAD primus terminus ad totam collectionem triangulorum inscriptorum in seriem continuam proportionalium, idest ad parabolā BFDA; & ideo duplū Trianguli BAC ad duplam parabolam UBAFC. Vel conuertendo parabola BFAFC erit ad triangulum BAC, vt 4. ad 3.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Si parabola contingentibus stringantur, & applicata terminetur, figura concaua, quæ restat, est ad triangulum exterius contingentium, vt 4. ad 3.

Sit Parabola VGH, & contingentibus VA, & AH, & ED stringatur, & applicata VH terminetur. Dico concauam figuram V A H G esse ad triangulum contingentium exterius RAD, vt 4. ad 3.

Probatur. Quia VA, & AH sunt contingentes ex propos. 22. Tract. 24. et æquabitur GA, & quia GD ponitur contingens erit parallela VM applicatæ ex 27. tr. 24. & ideo triang. RAD erit super basim OA subduplā basi TA, vel AD ipsi AH, cumq; triangula TAH, & GAD sint similia, similiterq; posita ex prop. 22. lib. 6. Elem. erunt inuicem in duplicata ratione laterum, & quia AD se habet ad AH, vt 1. ad 2. triangulum AGD erit ad triangulum ATH, vt 1. ad 4. nempe in proportione subquadrupla. Idem dicas de triangulo KDL, quia enim GD, & DH sunt tangentes, & GH applicata, ab eius puncto medio M educta parallela MD ipsi TU in contactū tangentiū conueniet in D, vt diameter ex 11. tr. 24 & MD erit dupla IM, & KL, vtpote tangens erit parallela GH applicatę, & ideo erit KD dupla GD: quare KDL triangulum simile, similiterque positum super basim KD subduplam basi GD erit subquadruplum trianguli GDH, sed triangulum GDH est æquale triangulo GDA ob æquales bases AD, & DH, & verticem eundem G, ergo KLD triangulum est ad triangulum GAD, vt 1. ad 4. scilicet in propositione subquadrupla, & sic in infinitum poteris sequi circumscribendo, qui semper erunt ad antecedentem vt 1. ad 4. Nam BDL triangulum est ad triangulum ADG dimidium trianguli circumscripti RAD, vt 1. ad 4. ita triangulum VLO est ad dimidium IDL trianguli circumscripti KDL, vt 1. ad 4. & sic procedendo.



Ponatur itaque parabolę VGH conclusę tangentibus AH, & VH esse circumscripta omnia triāgula, quæ circumscribi possunt, omnia spatium AHIG tandem absorbebunt; alioquin, si remaneret spatium aliquod omnia triangula circumscriptibilia, non essent circumscripta contra Thesim, cùm adhuc aliquod spatium inscriptibile remaneret.

Verùm omnia illa in infinitum procedentia semper seruant eandem proportionem 1. ad 4. quā secundus respicit antecedentem, vel 4. ad 1 quā respicit primus terminus GAD secundum KDL: quare differentia minoris trianguli BNL, terminiq; secundi à primo GAD erit ad primum NAN, vt 3. ad 4. sed vt differentia secundi termini à primo ad ipsum primum, sic primus terminus GAD ad totam collectionem terminorum in infinitum procedentium in serie continua eiusdem proportionis ex Coroll. 3. prop. 26. Tract. 16. de progr. Geom. Ergo GAD triangulum ad totam collectionem triangulorum circumscriptibilium figuræ concauæ GAHIO, & ideo ad ipsam figuram concauā sibi collectioni æqualem se habebit, vt 3. ad 4. & ideo duplum trianguli RAD se habebit ad duplum collectionis seriei triangulorum in infinitum procedentia, & ideo figurę cōcauæ VAHGV, vt 3. ad 4. vel è contra figura VAHG ad triangulum RAD, vt 4. ad 3

COROLLARIVM.

HInc patet figuram concauam VAHO esse ad figuram conuexam VBGIH subduplam; Nam

figura concaua est ad triangulum RAD, vt 4. ad 3. sic figura conuexa est ad inscriptũ VNH triangulũ, vt 4. ad 3. ex 44. h. ideoque figura concaua VAMG sic se habebit ad triangulũ RAD, vt conuexa VGIH ad triangulum VNH; ideoque *permutando* figura concaua ad conuexam se habebit, vt triangulum RAD ad triangulum VGH; sed triangulum RAD est subduplum trianguli VGH ob subduplas altitudines GO, & GB. respectu altitudinum TH, & TV ex Coroll prop 16. & æqualem basim GA, & GT. Quare etiam figura concaua erit ad conuexam in ratione subdopla sc. vt 1. ad 2.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV.

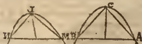
Parabolica segmenta, in quibus capiunt triangula maxima æqualia inuicem erunt æqualia.

Sit fig. propos. 35 h. præced. in qua parabola AFAYC, & fint duo segmenta BYA, & AYC, in quibus capiat ex prop. 2. h. exp. triangula maxima, & æqualia. Dico ipsa segmenta esse æqualia. Prob BFA triangulum est æquale triangulo AYC, cùm sint inter parallelas eorum vertices, ita triangula FNa, & YXC ob eandem rationem, & sic continuè in infinitum, quare eum continua progressio infinita triangulorum absorbeat omne spatium segmentorum parabolicorum AFA, & AYC iuxta ostensa propos. 15. Tract. 16. part. 1. quod ostensum sit prop. 23. huius semper iuxta eandem proportionẽ procedere, quæ est 1. ad 4. etiam segmenta parabolica AFA, & AYC erunt æqualia, quod in eis omnia inscriptibilia triangola sint æqualia.

PROBL. V. PROPOS. XXXVI.

Parabola ad parabolam, seu segmentum eius ad aliud segmentum obtinet eandem proportionem, quam triangulum maximum ad triangulum maximum, quæ in illis inscripta sunt.

Sit parabola ACB, vel segmentum, quam dico habere ad aliam parabolam, vel segmentum MLN eandem proportionem, quam triangulum ACB ad triangulum MLN, quæ maxima sint.



Probatur. Nam Parabola ACB est ad triangulum ACB, vt 4. ad 3. Sic etiam parabola MLN ad triangulum MLN, vt 4. ad 3. Quare parabolæ ad sua triangula sunt in eadem proportione, ideoq; *permutando* ACB parabola erit ad parabolam MLN, vt triangulum ACB ad triangulum MLN.

COROLLARIVM.

Hinc, si duæ parabolæ habeant æquales bases erunt inuicem, vt altitudines, & si obtineãt altitudines æquales erunt ad inuicem, vt bases.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque colligitur; quomodò describantur parabolæ æquales, vel iuxta datam proportionem, Nam factis triangulis ACB, & LMN, quæ datam proportionem consequantur circa illa describetur parabola iuxta dicta propos. 59. tract. 34 & quia ita est triangulum ad triangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum inter easdem bases, & parallelas; hinc est; quòd factis duobus parallelogrammis iuxta datam proportionem, si ope illorum duæ parabolæ describantur ex propos. 69. tract. 34. illæ erunt quoque in data proportione.

PROBL. II. PROPOS. XXXVII.

Datæ parabolæ æquale triangulum exhibere.

Modus exhibendi triangulum Parabolę æquale hic est, Inscribatur parabolæ AC triangulum maximũ AIC, & deinde in tres partes secetur basis AC; nam si basi AC addatur tertia pars CD, & fiat AD, & ducatur ID hoc triangulum AID erit æquale parabolæ AIC,

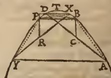


Prob. Parabola AIC est ad triangulum AIC, vt 4. ad 3. sed triangulum AID est ad idem triangulum AIC, vt basis AD ad AC basim ex 1. l. 6. quę ex effectione est vt 4. ad 3. Ergo est in eadem proportione ad triangulũ AIC, ac parabola AIC ad idem triangulum AIC; quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æqualia triangulum AID, & parabola AIC, cùm eidem triangulo AIC eandem proportionem dicant.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

E parabolæ dato puncto auferre segmentum alteri æquale dato diametro eiusdem,

Data sit parabola ATY, & segmentum in ea ABTD; diameterque BC, & oporteat aliud segmentum dato æquale resecare, quod incipiat à puncto X. Iungatur punctũ X puncto D, & lineæ XD ducatur parallela AY, ducaturq; XY; nam segmẽtũ XPY erit, quod exoptatur æquale segmẽto ABD.



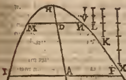
Probatur. Nam ductæ BP erunt æqualia triangula ex prop. 32. huius ABD, & XPY cum habeant vertices in parallela XD, & BP, & AY, triangulum verò

verò ABD est maximum ex propos. 12. huius. Ergo etiam triangulum XPY ex Cor. p. 23. h. Quadere, cùm maxima sint triangula ABD, & XPY, & æqualia; erunt quoque segmenta XPY, & ABD parabolæ æqualia ex prop. 35. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIX.

A parabola eadem auferre segmentum dato proportionale.

SIt parabola, seu segmentum FHI, & oporteat ab ea resecare aliud segmentum, quod se habeat, vt X ad V; Inter X, & V inueniantur duæ mediæ proportionales LK ex propos. 3. Tract. 15. fiatque vt X ad L, sic AH diameter ad HD, & ducatur parallela NM. Dico segmentum FHI esse ad segmentum NHM, vt X ad V.



Progr. 1. Probatur segmentum AHI ad segmentum parabolicum NHM est in ratione triplicata AI ad NM, & proportionis AI ad NM duplicata, vt dicā est proportio AH ad HD; & AH ad HD, sic facta est, vt X ad L, & X ad L ex effect. est duplicata proportio X ad K. Ergo FI ad NM est, vt X ad K. Verùm segmentorum parabolicorum, vt dial FHI ad MHN triplicata est proportio AI ad NM; quæ est, vt X ad K; & X ad V triplicatam possidet proportionem illius, quæ est X ad K. Ergo segmentum parabolicum FHI ad NHM segmentum est vt X ad V.

Remanet ostendendum proportionem parabolici segmenti FHI esse ad NHM in triplicata ratione FI ad NM.

Progr. 2. Ex 36. h. parabola FHI se habet ad parabolam NHM, vt triāgulum in maiori FHI inscriptum ad triangulum in minori designatum NHM; sed triangulorum proportio componitur ex proportione AI ad NM, & AH ad HD; sed proportionis FI ad NM est duplicata ratio AH ad HD, quod sic, vt quadratum FA ad ND, vel ex 6. lib. 2. quadruplum quadratum ex FI ad illud ex NM, sic AH ad HD ex 5. Tr. 24. ergo ex dupla proportione componitur AH ad HD, & ex simplici proportione quoq; FI ad NM. Ergo proportio segmenti parabolici FHI ad NHM est triplicata illius, quæ est FI ad NM.

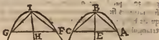
COROLLARIVM.

HInc est, quòd si illud item segmentum NHM alibi in eadem parabola efficere desideres, poteris id facere ex propos. 37. huius detruncando alibi in eadem parabola segmentum æquale segmento NHM. Nam erit illi segmentum FHI, vt X ad V, cùm ad æquales eadem sit proportio.

PROBL. III. PROPOS. XL.

A Parabola data segmentum rescindere, quod sit æquale alterius parabolæ datæ segmento.

DEtur parabola ABC, & oporteat resecare à parabola FIG segmentū æquale; Accómodetur in parabola FIG linea GF æqualis lineæ AC, & ducatur diameter HI ex 36. tr. 24. Dico FIG esse æquale segmento ABC.

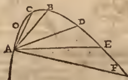


Probatur cùm FH sit dimidia AC æquabitur ipsi AE. Sed vt AE ad EB, sic ob similitudinem omnium parabolarum ex prop. 51. tract. 24. est ex defin. similitudinis sectionum est FH ad HI, & permutando AE ad FH, vt EB ad HI. Sed FH, & AE sunt æquales; Ergo etiam tales erunt EB, & HI. Quare triangula ABC, & FIG erunt æqualia, vtpote æqualium altitudinum, & basium; sed etiam sunt triangula maxima, quia sunt ad diametros ex 31. h. ideoque vt triangulum ABC ad triangulum FIG sibi æquale sic erit segmentum parabolicum ABC ad parabolicum segmentum FIG, ergo 12. lib. 5. erunt æqualia parabolica segmenta CBA, & FIG.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Segmenta à parabola datâ detruncare, quæ sint in continua proportione.

SIt data proportio segmenti AOC ad segmentum ACB, & fiat ex propos. 14. lib. 6. vt subtensa AC ad AB subtensam, sic AB ad aliud AD, & sic successiuè vt AB ad AD, ita AD ad AE, & cæt. Deinde lineæ inuentæ à puncto A accommodentur in parabola, & ducantur AD, AE, AF, & cæt. Nam dico segmenta ACB, & ABD, & ADE, & AEF, esse in continua proportione.



Probatur ex ostensione pr. 39. progr. 2. vbi ostēdimus segmenta ACB, & ACBD, & ABDE, & cæt. esse in triplicata proportione subtensarum AB, & AD, & AE, & cæt. sed illæ factæ sunt continuæ proportionales. Ergo ex propos. 1. tract. 28. etiam segmenta parabolica erunt continuæ proportionalia.

PROBL. V. PROP. XLII.

Parabolæ aream ad quamcumque figuram reducere.

QVoniam vt prop. 36. huius ostendimus, quod parabola in triangulum æquale commutari potest: hinc enascitur, quòd si triangulum illud æquale parabolæ conuertatur ex pr. 3. tr. 29. in rectangulum, & hoc in quadratum, & deinde in circulum ex pr. 14. tr. 30. & tandem in Ellipsim ex prop. 30. h. quòd etiam parabola omnes istas transformationes sit subitura, cum sit consequenter æqualis Ellipsi, circulo, quadrato, & rectangulo, quę triangulo, in quod primo conuersa est æquantur.

EXPENSIO VI.

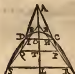
De partitione Hyperbolæ.

HYperbola vsque adhuc quadrationi subigi non potuit, & licet Ambrosius à S. Vincentio in id conetur, illius tamen quadratio adeo inuoluta est, vt omninò incomperta remaneat: Vnde ne inutiliter librum oneremus satiùs erit certam tantùm eius Geodęsiam proponere.

THEOR. II. PROPOS. XLIII.

In Hyperbola triangula segmentorum, quorum vertices in parallelis sunt, & applicatis, æqualia inuicem sunt.

SInt triangula RCS, & RDS, que sint in segmentis hyperbolicis, & vertices eorum nectant parallelæ CD, RS, & vertices B, vel sint in eodem puncto, vel aliqua V. g. ER prędictis RS, & CD parallela nectantur. Dico illa esse æqualia.



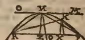


Prob. Cum RBL, & LBS sint triangula ad eandem altitudinem super bases ęquales, idest applicatas RL & LS ex pr. 13. tr. 29. æquales erunt NO, & OI, sed CO, & OD sunt quoque applicatæ: Ergo erunt æquales; Ablatis itaque æqualibus NO, & OI reliquæ erunt æquales CN, & ID; Quamobrem triangula CBN, & IBD erunt æqualia, vtpotè super basis æquales, & inter parallelas; sic triangula CNB, & IDS ob eandem rationem erunt ęqualia. Vnde etiam triangula SDB, & RCB ex illis partialibus constituta erunt æqualia.

PROBL. I. PROPOS. XLIV.

Datæ Hyperbolæ terminatæ maximum triangulum inscribere.

IN Hyperbolæ PNR ducta quacumque PR, & diuisa bifariam in Q erigatur diameter QN ex propos. 30. Tract. 24. & ducatur contingens MO, quæ erit ex propos. 28. Tract. 24. de conicis parallela lineæ PR. Ducantur itaque à contactu N rectæ PN, & NR, & triangulum quod constituitur, PNR maximum erit.



Probatur facile. Quia, si aliquod triangulum aliud adsit in segmento Hyperbolico PNR, quod obtineat verticem alibi V. g. in K punctum K non erit in parallela MO, cum MO tangat tantum in N; ergo inferius erit, & minor erit altitudo KX, quam ZN, vt patet. Vnde cum minorem altitudinem triangulum PKR consequeretur, esset minus, quam PNR. Quare PNR erit maximum cum maius, vel æquale nequeat assignari.

THEOR. II. PROP. XLV.

Triangula maxima inter parallelas existentia in Hyperbola sunt inuicem æqualia.

SInt triangula maxima RCS in pr. 43. h. & RDS. Dico illa esse æqualia. Nam ductis diametris PA, & QA, & linea DC per eorum vertices C, & D ea erit parallela applicatę RS, & ideo etiam vertices triãgulorum maximorũ RCS, RDS erũt in parallelis applicatisque; quare ex 43. h. erunt æqualia.

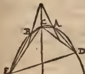
Prob. Nam ducatur PQ, & applicata CO, & diuisa bifariam RS ducatur quoque diameter LA. Isti itaque tres diametri ex prop. 29. Tract. 24. Coroll. conuenient in idem punctum A, & quia in triangulo RBL est vt RL ad TP, sic LB ad TB, & sic in alio LS ad TQ, ideo erit RL ad PT, vt LS ad TQ. ideoq; *permutando* RL erit ad LS, vt PT ad TQ; sed RL, & LS sunt æquales, ergo etiam PT, & PQ. Ab O itaq; ducatur OD in verticem trianguli RDS, & hæc erit applicata quoque. Nam æquabitur ipsi OC. Probatur autem hoc. Nam TQ est ad OD, vt TA ad OA, & TA ad OA, vt PT ad CO. Ergo ex 11. lib. 5. TQ erit ad DO, vt PT ad CO; ideoq; *permutando* TQ erit ad TP, vt OD ad CO; sed PT, & TQ ostẽsæ sunt ęquales, ergo etiam CO, & DO ex 14. l. 5. Ergo DO erit applicata, & ideo parallela ipsi RS. Quamobrem cum triangula RCS, & RDS maxima obtineant vertices in parallelis, & applicatis erunt æqualia.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Cuiuscumque Hyperbolæ segmenta; in quibus capiant triangula æqualia maxima inuicem æqualia sunt.

*SInt segmenta Hyperbolica, in quibus triangula maxima DAC, & eas capiant. Dico etiam ipsa segmenta esse æqualia.



Probatur. Nam reliqua quoque segmenta capient triangula maxima, cum sint inter parallelas DE, & AB ex thesi, & idem dicas de residuis, & sic absque fine inscribantur itaque semper per æqualem numerum procedendo in vtroque segmento omnia triangula maxima, quæ inscribi possunt; hæc infinita series æquabit ipsa segmenta. Nam si non æquaret adhuc restaret aliquod spatium, in quo triangulum maximum posset inscribi: sed hæc triangula, vt vt multiplicentur semper æqualia perseuerant, ergo etiam omni possibili multiplicatione præstita æqualia erunt: Quadere ipsa quoque hyperbolica segmenta, quæ æquant series possibili omni multiplicatione numerosas erunt æqualia.

Quod verò semper multiplicentur æquali numero patet: nam relinquit quodlibet triangulum dua spatia, quæ duobus triangulis possunt inscribi, & hæc singula duo quoque, & ideo quatuor, & hæc octo, & sic continuè duplicando.

PROB. IV. PROPOS. XLVII.

Si detur Hyperbola Asymptotis inclusa, & applicatæ extremo ducantur Asymptotis parallelæ, illa includent spatia æqualia.

EXponatur Hyperbola BC, & ab ea sint duæ parallelæ ductæ BL, & CM à terminis applicatæ BC, necnon AB, & CD Asymptotis PD, & ON. Dico etiam BADL, & MDCP esse æqualia quadrangula.



Prob. Producta BC ad asymptotos in N, & P erût NB, & CP æquales ex prop. 46. vel 66. Tract. 14. de conicis, & ob parallelismum linearum BA, & MC, ita erit, NB ad NC, idest æquales CP, ad PB, vt BA ad CM. Verùm ob eandem rationem, vt CP ad PB, sic CP ad BL. Ergo ob similitudinem rationum vni tertiæ ex prop. 16. lib. 5. erit BA ad MC, vt CP ad BL reciprocè, quare rectangula BL, & FM æqualia ex prop. 10 lib. 6. Elem.

THEOR. IV. PROPOS. XLVIII.

Si detur Hyperbola asymptotis stipata, & in ea duo segmenta conuexa perhibeantur æqualia, erunt etiam segmenta concaua æqualia.

SIt Hyperbola BGAHC Asymptotis stipata PD, & ND, & dentur segmenta æqualia conuexa BOG, & HIC in ipsa BGAHC: Dico, quòd etiam segmenta concaua BODG, & HICO erunt æqualia.

* Probatur. Nam primo triangula GDQ, & HDQ ob eandem altitudinem, & æquales bases GQ, & QH erunt æqualia: Trapezia quoque QGTB, & CHTQ erunt æqualia ex propos. 12. tract. 19. ob eandem altitudinem cum sint inter parallelas, & æquales bases, quæ applicatæ GQ, & QH, & CT, & TB sunt. Tandemq; idem asseras de triangulis BDT, & DTC ob eandem altitudinem DT, & æquales bases CT, & TB. Ablatis itaq; triangulo DQG, & trapezio TQGB ab æquali toto BDT alteri TDC toti, cui similiter auferantur partialia prædicta æqualia triangulum HDQ, & trapezium HQCT reliqua remanebunt æqualia BGD, & HDC. A quibus si vtrinque auferantur segmenta conuexa ex 46. h. æqualia BOG, & HIC remanebunt quoque concaua BOGD, & HDIC æqualia.

THEOR. V. PROPOS. XLIX.

Si sint segmenta in Hyperbola concaua, quæ æqualium parallelogrammorum lateribus contineantur, illa inter se erunt æqualia.

*SIt Hyperbola contenta asymptotis suis, sintque iuxta propos. 47. huius expens. æqualia parallelogramma TA, & QA, necnon, & SA, & XA, relinquent mixtilinea nigra super SQ. & XT.



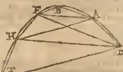
Ducta parallela BV erunt rursùs parallelogramma VA, & RA æqualia; necnon, & parallelogramma TA, & QA ex eadem prop. & relinquent mixtilinea minora nigra, & si sic semper subdiuidantur, semper ipsa parallelogramma remanebunt æqualia: sed semper minus, & minus mixtilineum relinquent. Multiplicentur itaque vsquedum multiplicari queunt subdiuidendo, relinquent minus spatium mixtilineum omni possibili simili spatio; si enim adhuc superesset aliquod mixtilineum, tantò magis adesset spatium pro parallelogrammo mi-

minori constituendo. Quoniam parallelogrammũ quodlibet à mixtilineo deficit segmento concauo nigro. Cum itaque omnis possibilibilis multiplicatio parallelogrammorum omne spatium mixtilineum absumat, erunt illa parallelogramma ęqualia toti segmento concauo OAFTX, sic etiã ex alia parte concauo segmento SNBAQ. Cum itaque series parallelogrammorũ SQAD sit secundum omnes suos terminos æqualis seriei parallelogrammorũ ATXO, & singulæ series æquent segmentum concauum suum, etiam ipsa segmenta concaua SRQDAB, & TVXQAF erunt ęqualia.

PROBL. III. PROPOS. L.

Dato Hyperbolæ segmento conuexo à dato puncto in ambitu illius ducere rectam, quæ æquale segmentum auferat.

DAtum sit segmentum Hyperbolæ linea AD abscisum, & punctum a in ambitu Hyperbolæ DAT. Ducatur ab A ad a punctum datum linea AB, & huic fiat parallela DF, & ducatur BF. Dico factum esse, quod petebatur, & segmenta lineis DA, & BF abscisa esse inter se æqualia.



Probatur. Quoniam cum sint inter parallelas DF, & AB in ipsis triangula maxima inscribi poterunt æqualia ex propos. 44. huius. Vnde ex prop. 46. huius ipsa segmenta conuexa erunt æqualia: Rursus si F punctum coniungatur puncto A, & ducatur ipsi AF parallela DH, & FH; segmentum FH erit æquale opposito DA, & ideo segmento BF, & sic in infinitum.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Concauum segmentum alteri æquale exhibere in eadem Hyperbola suis Asymptotis stipata ab assignato puncto.

SIt in Hyperbola pr. 48. h. in asymptotis NO, & NP segmentum concauum BOG, & velit aliquis à puncto H abscindere segmentum, quod sit ęquale dato BOG. Ducatur GH ad datum pũctum H, & postea illi parallela BC, & coniungantur extrema H, & C vertici D, & erit factum, quòd postulatur.

Patet enim ex pr. 48. h. BDOG triangulũ concauũ ęquari triang. cõcauo HICD, vel segmentumq; segmento.



Quod si cupias segmentum non contineri lineis in verticem D conuenientibus; sed parallelis alteri asymptotorum sit datum segmentum concauum CBPO clausum lineis CO, & BP, & ad destinatum punctum N æquale oporteat ponere aliud segmentum. Ducatur parallela ad datum punctum N recta BN, & ei parallela CX; deinde ducantur rectæ à punctis N, & X parallelæ asymptoto OA, & dico *segmentum* NMXR *æquare segmento* CPBO.

Probatur. Nam segmentum concauum BCDA æquatur segmento concauo NXRA ex propos. 49. h. Parallelogrammum quoque a AP parallelogrammo NMA, quibus ablatis BAP, & NMA relinquentur BPCO, & XRNM ęqualia.

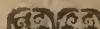
EXPENSIO VII.

De Spatijs Spiralibus.

SPatia spiralia sunt illa; quę diametro spiram generante, vt QA, & spira ipsa continentur, vt est spatium ACBHQA; Horum autem spatiorum proportiones ad spatium circuli inuestigandæ sunt vt ex illis innotescat eorum quadratio.

Præassumptum. Reminiscendum itaque sectores habere eam proportionem, quam rectãgula ex semiarcu subtenso, & radio, si sint diuersorum circulorum; dummodo arcus sint similes, quia ea sunt æqualia, vt diximus propos. 4. h. agentes de circulo. Quadere sectores diuersorum circulorum decrescentium, vel crescentium augmento arithmetico, vel decremento, quorum arcus sint similes; ipsi quoque decrescent, vel se augebunt eadem ratione, qua rectangula diametrorum, & arcuum.

V. g. sector BAQ erit in fig. prop. 53. maior sectore CPQ eodem incremento, quo augetur rectangulum ex dimidio arcu BA, & radio QA. Super rectangulũ ex dimidio arcu CP, & radio CQ. Siquidẽ arcus similes sunt inuicem, vt diametri ex 44. l. 6. Quare ita augebuntur arcus inuicem, & diametri, & ita semidiametri, & semiarcus, scilicet si QA sit 8. partium, & arcus BA octaua pars sui circuli ponatur 8. partium, diameter QL erit 7. partium, & Pe arcus eius, octaua pars sui circuli, erit quoque 7. partium, & si MQ sit 6. erit arcus AM octaua pars sui circuli conflatus ex 6. partibus. Quare etiam rectangula ex semidiametro, & semiarcu æqualia sectoribus: se respicient, vt ea rectangula quorum latera arithmetico decremento continuo decrescunt, de quibus supra Tract. 28. Exp. 3. Siquidem deficiunt, horum quoque rectangulorum latera duplici decremento arithmetico. Quare se habebunt ad inuicẽ, vt rectangula AE, & XG, & cęt. vsq; ad LK, vt fig. pr. 13. tr. 28. videre potes. Quę sunt facta ex lateribus arithmetico decremento deficientibus BA, & XG vsque ad CL. Ostensum autem ibi est prop. 16. Quòd hæc rectangula in seriem infinitam multiplicata, si simul ponantur ad rectangula integra, & maximo æqualia inuicem, & multitudine predictis erunt, vt 2. ad 6. Rectangula igitur quoque sectoribus ęqualia, quę deficiunt duplici decremento Arithmetico propter radium, & propter arcum deficientes erunt ad integra, vt 2. ad 6. si multiplicentur omni multiplicatione possibili, siquidem quoad vtrumque latus alterum æquale radio alterum æquale semiarcui deficiunt.



THEOR.

PROBL. I. PROPOS. LII.

Spiræ inscribere, vel circumscribere sectores tot, vt sint simul posita omnia spatia inter spiram, sectoremque conclusa minora qualibet data quantitate.

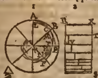
SIt data spira in fig. prop. sequent. ACEHQ. & debeât circumscribi tot sectores, vt spatium quod relinquunt, vt CAL, sit minus quantitate Z. Redigatur quantitas Z in rectangulum ex tract. 19. prop. 3 & hoc fiat sector QBA primus minor, quod facile fiet efficiendo triangulum circumscriptum ABQ illi rectangulo ex Z effecto æquale, & sector ipse BAQ minor triangulo erit minor quoque, quàm Z. Dico, quod si reliqui sectores æqualis anguli apud Q circumscribantur æquali deficientes diminutione AL, & CM, vt diximus tract. 18. prop. 9. posse fieri, relinquent ij sectores, vt BAQ & cæt. quantitatem minorem, quam Z.

Probatur. Quia differentiæ BACL, & CPAM, & BHNH, & aliæ omnes æquant, vt patet BAQ sectorem minorem, quam Z. Ergo omnes simul differentiæ erunt minores, quam quantitas Z, & tantò minores, si sumamus differentias non quibus inuicem differunt, sed quibus differunt à spira, vt BAC, CPE, EPH exteriores, vel interiores ACL, CEM, ENH.

THEOR. I. PROPOS. LIII.

Spiræ primæ circumscripti sectores habent proportionem ad sectores circuli spiram comprehendentis maiorem; quàm 2. ad 6. & sectores spiræ inscripti habent minorem proportionem ad illos, quam 2. ad 6.

* SIt spira ACEH vsque ad Q, quæ est prima, & circulus illam complectens, cuius radius AQ. Sectores circuli sint octo; quorum vnus est BAQ; Sectores circumscripti sint BAQ, & CPQ, & EFQ, & cæt. Inscripti LCQ, & MQE, & NHQ, & cæt. Circumscriptique erunt 8. cum maximo, at inscripti, quia excludunt maximum, erunt septem. Itaque vt in præf. Arithmeticè decrescentes sectores sunt ad sectores non decrescêtes æquales numero,



vt rectangula similiter decrescentia TX, TV ad numero æqualia sed non decrescentia rectangula, sed hæc decrescentia sunt magis, quam 1 ad 3. incluso maximo, & minus eo excluso maximo ad tot rectangula non decrescentia æqualia. Ergo tales quoque erunt sectores, & omnes octo sectores decrescentes arithmeticè incluso maximo, vt BQA & CQP, & AQF, & cæt. erunt ad octo maximos, vt QBA æquales inuicem magis, quam 1. ad 3. at septem sectores CQL, MQE, & NHQ minùs, quam 1. ad 3. ad octo maximos, & sic semper erit quocumque numero maiori sectorum electo, & sine vlla meta multiplicato.

THEOR. II. PROP. LIV.

Spatium à spira prima, & radio ad eius initium ducto conclusum est ad circulum suum, vt 1. ad 3.

SIt spatium ACEHQA spira ACEHQ, & radio QA clausum. Dico, quòd hoc spatium ad totam planitiem circuli est, vt 1. ad 3. vel quod idẽ 2. ad 6.

* Probatur. Nam spatium ACEHQA prædictum non est maius, aut minus, quam ⅓ tertia circuli. Ergo æquale erit. Primò enim si illud spatium est maius, sit minus quãtitate aliqua Z, & tot spiræ sectores inscribantur ex 1. h. donec spatiũ inter spirã arcũsq; inscripti sectoris clausũ sit minus quãtitate proposita Z, qua spatium à spira, radioque conclusum ACL, & cætera omnia superant tertiã partẽ circuli. Cum itaque spatium radio, spiraque clausum sit maius tertia parte circuli consequenter spatium sectoribus contentum CLQ, & MEQ, & cæt. erit maius tertia parte circuli, cùm spatium inter spiram, sectoremque arcus interceptum quale vnum ex ipsis CAL sit minus eo spatio, quo spatium spiræ, radioque clausum tertiam partem circuli superat. Quòd autem spatium sectorum inscriptorum, qui primo, & maximo excluso BAQ incipiunt à sectore CLQ habeat maiorem proportionem, quam 1. ad 3. ad circulum, idest tertia parte circuli sit maius, hoc est contra præcedentem demonstrationem, ideoque absurdè esset minus, & maius sectorum spatium tertia parte circuli. Si verò asseratur spira, radioque spatium conclusum esse minus, quam tertia pars circuli: Sit minus quantitate Z. & deinde tot sectores circumscribantur, & sit adeò numerosa multitudo sectorum, vt spatium arcubus sectorum, spiraque interceptum CBA, & PCE, & cæt. sit minus quantitate Z. Spatium itaque sectoribus clausum minus erit tertia parte circuli, cum illud spatium interceptum inter spiram, & sectorum arcus sit minus spatio Z, quo spirale spatium minus est tertia parte circuli: Sed supra ostensum est sectores circumscriptos cum includant maximum conficere spatium maius, quàm tertia pars circuli. Ergo esset maius, & minus, quod esse nequit.

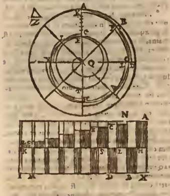
THEOR. III. PROPOS. LV.

Sectores inscripti spiræ secundæ habent proportionem ad primum circulum minùs quàm 7. ad 3. & circumscripti ad eundem circulum maiorem proportionem obtinent, quàm 7. ad 3.

SIt spira in secunda sua reuolutione AYCVHXLS; & inscripti sectores PEQ, & ECQ, & cæt. Dico hos sectores habere proportionem ad sectores tot numero, vt ZQL; seu ad circulum primæ reuolu-

 tionis

tionis EY, cuius radius BQ, vt 7. ad 3. Sectores verò circumscriptos, vt BAQ, & IDQ habere maiorem proportionem ad eundem circulum EY, quam 7. ad 3. Quod vt ostendatur fiant rectangula illis inscriptis æqualia BC, & DE, vsq; ad a necnon etiam circumscripti æqualia rectangula BA, & BC, & DE, quę deficient, vt sectores arithmetico decremento, & primum AB æquabitur primo sectori BAQ. Cum itaque hæc rectangula decrescentia se habeant ad rectangula AH, & cęt. primi circuli sectoribus æqualia magis, quàm, vt 7. ad 3. vt ostendetur incluso maximo, & minus, quàm 7. ad 3 eo excluso, sequitur, quòd etiam sectores illis æquales incluso maximo se habeant ad sectores primi circuli magis, quam 7. ad 3. & minus excluso maximo, quàm 7. ad 3.



Ostendendum itaque est rectangula AB, & BC, & cęt. decrescentia se habere ad rectangula primi circuli sectoribus æqualia magis, quam 7. ad 3. & rectangula BC, & DE, & cęt. excluso maximo minus, quã 7. ad 3. Siquidem sector BAQ maximus est ad sectorẽ AQL circuli primi, vt circulus maior ad circulum minorem; sed circulus ad circulũ est quadruplus cum sit super duplò maiorem diametrum; & ideo duplicatam diametrorum habent rationem ex prop. 2. lib. 6. duplicata verò proportio 2. ad 1. est 4. ad 1. sed etiam rectangulum AB ad HX se habet, vt 4. ad 1. Ergo cùm rectangulum AB æquetur sectori BAQ ex constructione etiam rectangulum HX, seu HH æquabitur sectori AQL circuli primi. Considerandum autem est, quòd in tota progressione decrescente HX, BL, & DS, & cæt. vsque ad 1 perseuerant integra. Deinde rectangula nigra AH, & LN, & BS, vel HA, LD, & cęt. perseuerantia einsdem altitudinis ex pr. 12. Tr. 28. de progr. planitierum erunt dimidium rectangulorũ omnium æqualium BL, & DS, & aliorum vsque ad 1. Sic eorum complementa nigra HA, & NL, & CS, & aliorum vsque ad X ipsis æqualia ex prop. 35. lib. 1. quapropter erunt cum alijs rectangulis nigris, complementisque suis æqualia rectangulis albis BL, & DS, & cęt. quæ æqualia perseuerant; siquidem duo dimidia integrum æquant. Vnde si summamus omnia simul rectangula integra XH, & BL, & cęt. vsque ad 1, & complementa vtraque nigra decrescentia HA, & LD, sic AH, NL, & CS vsq; ad X erunt totę planitięs duplæ planitierũ XH, BL vsq; ad 1, quæ integræ perseuerarant, scilicet, vt 2 ad 1. vel vt 6. ad 3.

Quia verò HN, & LC, & SE, & cęt. vsque ad E dupliei decremento arithmetico hinc, & inde quo ad vtrumq; latus deficiunt, & primum, maximumque HN demonstratum est æquale maximo sectori BLQ. & ideo maximo rectangulo sibi æquali præc. propos. decrementa omnia ex Thesi sunt ęqualia decrementis rectangulorum pręc. propos. rectangula LC vsque ad AQ erunt singula singulis prædictis æqualia; ideoque ad tot numero rectangula integra HN ex prop. 13. Tract. 28. se habebunt magis, quam 1. ad 3. incluso maximo HN vtrinq; Propterea que cum rectangula, quę integra perseuerant, & deficientis complementa se habeant ad integra tantum, vt 6. ad 3 si istis addes rectangula HN cum deficientibus LC vsque ad KQ erunt ad rectãgula integra tot numero HN, vel HX, BL, DS vsq; ad 1 magis, quam 7. ad 3 ex prop. 32. Tract. 28. de propor. rationũ. Verùm si demas ab vnaquaque serie maximum scilicet XH, & HA, & HN, & HN, series LC vsque ad AQ deficiens ad seriem non deficientem BL, & DS conflata ex pari multitudine terminorum erit minus, quàm 1. ad 3. & ideo cum serie rectangulorum prædictorum ęqualium BL, & complementorum nigrorum, scilicet tota rectangula BC, & DE, & cęt. se habebit ad seriem rectangulorum non deficientium XH, & aliorum minus, quam 7. ad 3. quòd remanserat ostendendum.

COROLLARIVM.

Hinc est, quod cum ex 2. lib. 12. circuli inter se sint, vt ex diametris quadrata, quod si ponamus primum circulum 3. cuius radius AQ secundus erit 12. nempe vt quadratum AQ ad quadratum QA. Vnde rectangula circumscripta spirę secundę se habebunt ad circulum eundem QA magis, quam 7. ad 12. & inscripta minus, quam 7. ad 12.

THEOR. IV. PROPOS. LVI.

Circulus secundæ spiræ est ad spatium ab ipsa spira, semiradioque clausum, vt 12. ad 7.

Sit spatium ZA recta, & spira secunda ACEXB conclusum. Dico, *quòd circulus, cuius radius AQ ad hoc spatium se habet, vt 12. ad 7.*

Probatur. Nam sectores circumscripti, & decrescentes BAQ, & FCQ & cęt. vsque ad LBQ ostensi sunt ex Coroll. pręced. propos. in maiori proportione maximum BAQ includendo, quàm 7. ad 12. & inscripti deficientes KQF excludendo maximum in minori proportione, quam 7. ad 12. demonstrati sunt ad sectores maximos numero æquali multiplicatos. Si ergo spatium spirale non sit ad circulum, vt 7. ad 12. erit ad quid minus, aut maius. Maius itaque sit primo, quam 7. partes, in quas circulus diuisus est spatio Z. Et tot inscribantur sectores donec omne spatium, vt KFA, & FCE, & cęt. quòd inter arcus sectorum, & spiram intercluditur sit minus, quàm spatium Z. Ergo erunt omnes isti sectores maiores, quam 7. partes ex 12. in quas circulus diuisus est: quia à spatio spirali maiori, quam partes 7. illarum, in quas circulus diuisus est in spatio Z minus differunt, quam 7. quod est absurdum; cum ostensum sit sectores inscriptos

ſcriptos ad totum circulum ſe habere minori in proportione, quam 7. ad 12.

Si verò aliquis dicat eſſe minus ſpatium ſpirale, quam partes 7. & ijs, in quas 12. circulus ſunt diuiſus eſt. Circumſcribantur tot ſectores donec omne ſpatium, quod area ſectorum, & ſpira clauditur ſit minus, quàm ſpatium Z: tunc ſectores circumſcripti erunt minores. quàm 7. partes ex ijs 12. in quas circulus partitus eſt, cum minus differant à ſpatio ſpirali minori, quam partes 7. minori differentia, quam Z ſpatium, in quo ſpirale ſpatium partibus 7. minus euadit: Hoc autem eſſe nequit cum ſectores circumſcripti oſtenſi ſint obtinere proportionem maiorem ad 12. quàm 7. ad 12. Ergo cum non poſſit eſſe, aut maius, aut minus ſpatium ſpirale AICVEXBA, quam 7. partes ex partibus 12. circuli, erit ad circulum, vt 7. ad 12, & conuertendo circulus ad ſpirale ſpatium, vt 12. ad 7.

THEOR. V. PROPOS. LVII.

Sectores inſcripti tertiæ ſpiræ habent minorem proportionem ad primum circulum, quam 19. ad 3. & circumſcripti maiorem proportionem, quàm 19. ad 3.

SIt ſpira in tertia circumuolutione AIOH, vſque ad H, & diameter circuli ſpiram comprehendentis QA triplus diametri primæ ſpiræ TY; erunt circuli in ratione duplicata ſuorum diametrorum; Ideoque circulus tertiæ ſpiræ QAX erit ad circulum primæ ſpiræ TY, vt 9. ad 1. ex 41. lib. 6. Quare ſinguli ſectores ſimiles eius ad ſectores circuli TY primæ ſpiræ ſe habebunt, vt 9. ad 1. Fiant itaque rectangula AB, BC, & BE, & cęt. æqualia ſectori PAQ tertiæ ſpiræ, & ſectoribus alijs deficientibus, & rectangulum primũ AB ſe habeat ad rectangulũ HN, vt 9. ad 1. vtique rectangulum HN æquale ſectori maximo ſimili circuli YQS primæ ſpiræ cumque cęteri LC, & VE, & cęt. deficiant æqualibus decrementis arithmeticis ſecundum vtrumque latus, ac rectangula primæ ſpiræ, vt in fig. 2. pr. 53. hinc ſingula ſingulis erunt æqualia; Quamobrem ad rectangula æqualia, & non deficientia incluſo maximo vtrinque HN magis erunt, quam 2. ad 3. at excluſo maximo, minus quàm 1. ad 3.

Iſtis itaque rectangulis decreſcentibus adde pari numero rectangula, quę eadem perſeuerant XN, & NL vſque ad ZM, & cęt. quæ ſe habent, ad HN, vt 4. ad 1. & inſuper rectangula NM, & LO, & alia, quæ decreſcunt ſecundum vnicum latus decremento arithmetico, quę etiam dupla ſunt rectanguli HN; & erunt ad integra HN, vt 2. ad 1.; ſiquidem ob decrementum arithmeticum pro dimidio deficiunt ex prop. 12. Tract 27. & ideo efficiuntur ei æqualia, quibus adde æqualia complementa, ſimiliterque deficientia MA, & cęt. vſque ad KQ, & cum prędictis erunt dupla ipſorum, ſcilicet, vt 2. ad 1., & cum rectangulis quadruplicibus XH vſq; ad MK erunt, vt 6. ad 1. ſeu, vt 18. ad 3. Adde itaque inſuper rectangula duplici arithmetico decremento deficientia HN, & LC, & cęt. vſque ad KO, quæ addito HN ſe habent magis, quam 2. ad 3.

Ideoque tota ſeries rectangulorum XN, & BC, & DE deficientia incluſo maximo XN, cuius ſinguli termini prędictis rectangulis partialibus conſtant, erit ad rectangula HN æquali numero ſumpta non deficientia magis, quàm 19. ad 3. At ſi à ſingulis ſeriebus excludas maximum, & ideo rectangulum XN, erit tota ſeries rectangulorum BC, & DE vſque ad MO ad totam ſeriem rectangulorum æqualium inuicem, & multitudine prędictis HN minùs, quàm 19. ad 3. Cum itaque ſectores circumſcripti ſinguli ſint æquales ſingulis rectangulis; ſiquidem ita deficit rectangulum, vt ſector quilibet circumſcriptus ex hypotheſi, & æqualibus decrementis, & ſectores circumſcripti includant maximum PAQ, ſectoreſque circuli primæ ſpiræ SYQ, omnes ſint æquales oſtenſi rectangulis HN ęqualibus inuicem; Sequitur, quod ſectores PAQ, & cæteri circũſcripti deficientes ſe habeant ad ſectores circuli YSQ primę ſpirę magis, quã 19. ad 3. Sectores verò inſcripti OIQ. & cæt. ęquales rectangulis BC, & DE & cęt. maximũ excludentes minus, quam 19. ad 3. ad ſectores circuli primę ſpirę SYQ, & cęteris ęqualibus, & qui numero ſectoribus deficientibus reſpõdeãt.

COROLLARIVM.

CIrculus tertiam ſpiram comprehendens iuxtà Coroll. prop. 41. lib 6. eſt ad circulum primæ ſpiræ, vt 27. ad 3. cum ad illum obtineat diametri proportionẽ duplicatã 9. ad 3. Quamobrem cum rectangula ęqualia ſectoribus circumſcriptis tertiæ ſpiræ ſint ad rectangula omnia æqualia ſectoribus primi circuli, vt 19. ad 3. erunt ad ſectores æquales tertij circuli, & ideo ad ipſum circu-

lum, vt 19. ad 27. & paulò amplius, quia includunt maximum. At inscriptis sectoribus æqualia rectangula ad rectangula æqualia sectoribus primi circuli, quia sunt minùs, quàm 19. ad 3. & ideo quoque sectores inscripti sectoribus circuli primi æqualibus sint minùs, quam 19. ad 3. erunt ad sectores omnes tertij circuli, & ideo ad ipsum tertium circulum minùs, quam 19. ad 27.

THEOR. VI. PROPOS. LVIII.

Spiræ tertiæ spatium comprehensum est ad circulum eam claudentem, vt 19. ad 27.

*PRobatur eodem modo ex propos. 54. h. Nam spatium spira conclusum AHHLEA non est maius, aut minus, quàm 19. partes, quarum circulus eam comprehendens continet 27. Ergo erit ad circulum vt 19. ad 27. Nam si potest esse maius sit maius quantitate Z, & sectores inscripti adeò multiplicentur, vt propos. 5a. Tract. h. vt spatium AIO, & alia omnia inter spiram, arcumque sectoris internum conclusa simul sumpta sint minora,



quantitate Z. Quia itaq; ex aduersarijs spatiũ ipsũ spirale est maius partibus 19. erit etiam multitudo sectorũ maior, quã partes 19. ex 27. circuli partibus, cum sectores differant minùs à spatio spirali, quã quod ipsum spatium spirale differt à partibus circuli 19. Hoc autem esse nequit; cum inscripti sectores sint minùs, quàm 19. partes circuli maximi partibus 27. constantis, vt propos. præced.

Si verò affirmetur, quòd spatium spirale sit minùs, quàm partes 19. quarum circulus includens est 27. Sit defectus spatiũ Z, & tot circũscribãtur sectores, vt spatia omnia, vt IPA inter spiram, arcusq; sectorum ambiẽtiũ intercepta simul sumpta sint minus, quam spatium Z, tunc sectores, qui minus differunt à spirali spatio minori partibus 19. quàm partes 19. differant ab ipso spatio spirali erunt minora, quàm partes 19. vnde se habebunt ad circulum claudentem minus, quàm 19. ad 27. contra ostensa propos. 57. h. Cum itaque spirale spatium, nec maius esse possit, nec minus, quam 19. ad 27. eam proportionem consequetur quam 19. ad 27. quod demonstrandum erat.

THEOR. VII. PROPOS. LIX.

Spira prima ad secundam est, vt 1. ad 6. & secũda verò ad tertiam se habet, vt 1. ad 2. & sic tertia ad quartam, & cæt.

PRobatur. Nam repetita figura propos. 55. h. sit spatium primum spirale QA, & secundum ACHXEA. Dico itaque, quod primum spatium spirale ad secundum se habet, vt 1. ad 6.

* Probatur. Nam prima spira est ad suum circulum, vt 1. ad 3. hic verò ad circulum secundum, vt 3. ad 12. Quare prima spira se habebit ad circulum secundum, vt 1. ad 12. secunda spira est ad circulum suum, vt 7. ad 12. Propterea que cum istæ proportiones habeant eosdem terminos ex prop. 7. de propor. Tract. 17. se habebunt ad inuicem, vt fundamenta 1. ad 7. Sed spatium spirale 7. comprehẽdit ipsam spiram minorem cum suo circulo: clauditur enim spira ACHZE, & portione radij EA, ideoq; subducta spira prima EQ remanebit secũda 6. Vnde prima spira se habebit ad secũdã, vt 1. ad 6.

Probatur etiam secunda pars. Nam tertia spira habet proportionem ad suum circulum, quam 19. ad 27. & circulus iste ad primum est, vt 27. ad 3. & circulus primus ad spiram, quam claudit est, vt 3. ad 1. ideo ex *æquo* spira tertia ad primam erit vt 19. ad 1. Cum ergo tertia spira cum secunda, & prima sit 19. ablata prima erit 18. & secunda, quæ est 7. remanebit 12. Quare habebit secunda spira ad tertiam proportionem, quam 6. ad 12. nempe subduplam.

Quòd verò reliquæ spiræ minores ad immediatè maiores subduplam proportionem seruent, patet. Nam iuxta modũ probandi adhibitũ antecedentibus propositionibus quarta spira se habebit ad suum circulum, vt 43. ad 48. ablata verò prima secunda, & tertia spira, quod spatium est 19. partium remanebit spira quarta 24. ad tertiam spiram quæ est 12. nempe 2. ad 1. vel conuertendo tertia ad quartam, vt 1. ad 2. & sic de reliquis.

COROLLARIVM I.

*VNde cum noueris circulum, in quo prima spira describitur, facilè inuenies areæ cuiuslibet spiralis quantitatem. Nam V. g. sit quinta spira, & circulus primæ reuolutionis sit 35. partium. Inuenietur primo proportio reuolutionis quintæ ad primum circulum, qui ponatur 3. Itaq; iuxta tradita, quia ita est sector ad sectorem, vt circulus ad circulum, & rectangula sectoribus æqualia, & pariter progressiones eorum; Ideo rectangulum æquale sectori spiræ quintæ ad rectangulũ æquale sectori spiræ primæ se habebit, vt 25. ad 1. vel vt 75. ad 3. cum latera se habeant, vt 5. ad 1. Ideoq; si in fig 1. pr. 57. ponas latus XA esse 5. partiũ rectãgulũ AB æquale sectori quinti circuli erit partiũ 25. ad 1. vel 75. ad 3. rectãgulum verò XH, cuius latus erit, minus vnica parte erit, vt 16 ad 1. ideoque triplatum erit vt 48. ad 3 rectangula verò HB, & HA deficientia pro suo dimidio se habebunt, vt bases, nempe quodlibet, vt 4. ad 1. & simul, vt 8. ad 1. & quia deficiunt pro dimidio rursus, vt 4 ad 1. & ideo, vt 12. ad 3. & cũ non deficientibus AB, vt 60. ad 3. si verò addas rectãgula HN, quę deficiunt circuli sui $\frac{1}{3}$: ideo omnia simul se habebunt ad circulum primæ spiræ, qui ponitur 3. vt 61. ad 3. Et erit inuenta

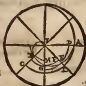
uenta proportio primi circuli ad quintam spiram. Quâ obtentâ dices adhibendo regulam proportionum, si 3. dant 61. quid 35. ideoque calculus prodet 711 $\frac{2}{3}$ pro quintæ reuolutionis spatio posito primo circulo partium 35.

THEOR. VIII. PROPOS. LX.

Spiralis spatij sectio est ad suum sectorem maximum circuli maximi comprehendentem eam sectionem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus simul, & triens quadrati ex earundem differentia ad quadratum diametri circuli prædicti maximi comprehendentis.

Sit datum segmentum spirale AGB, quod concludat spatium BAB. Dico, quod hoc spatium ad sectorem comprehendentem ALC habet eam proportionem, quam rectangulum ex IB, & AI, vel IC æquali vnà cum quadrato ex differentia BC ad quadratum ex diametro IA, vel IC.

Probatur. Nam si fiant rectangula deficientis æqualia sectoribus singulis inscriptis, & deficientibus omni possibili multiplicatione multiplicatis AIL, DBI, EGI, & HIB, & cæt. hæc rectangula erunt ad rectangula æqualis quantitate sectoribus non deficientibus, & inuicem, at numero prædictis deficientibus ex prop. 19. tract. 28. Cor. vt rectangulum ex maximo, à quo incipit, & minimo latere, ad quem peruenit progressio cum triente quadrati ex differentia eorundem laterum ad rectangulum totum maximum. Ergo etiam sectores ipsi similiter multiplicati, & iisdem rectangulis singuli singulis æquales arithmetico decremento deficientes, sed non vsque ad vltimum sui ab A vsque ad a, & ob omnem eorum multiplicationem omnimodam possibilem, spiram æquantes, habebunt ad sectores integros æquales numero prædicto, & quantitate inuicem eandem proportionem, eruntque, vt rectangulum ex AI, & IB maximo, ad quem terminat cum triente quadrati ex BC differentiæ ad rectangulum ex AI, & IC hoc est quadratum AI.





TRACTATVS XXXI.

De Tranformatione ſuperficierum corpora circumueſtientium.



Vperficies, quæ corpora circundant aliæ ſunt curuæ, aliæ planæ, de planis ſupra ſatis eſt actum. Vnde breuiter ab hoc nos expediemus negotio. Curuarum ingenioſior difficiliorque ſpeculatio. Quapropter in ea magis immorabimur datorum corporum regularium, rotundorum, vel ſemirotundorum ſuperficiebus planas æquiualentes, ſeu proportionales indigitando, & quibus modis poſsint, & partiri, & augeri, & minui proportionaliter; & in alias operationes mathematicas cogi.

EXPENSIO I.

De transformatione ſuperficierum corporum planis contentorum.

TRansfurmatio ſupeſficierum planarum, quæ corpora ambiunt, non differt à transfurmatione ſuperficierum planarum de quibus egimus expenſ. 1. tract. 19 propterea que ſufficiet eas indigitaſſe: ſed vt ea, quæ dicentur expeditiùs capiantur accipe corporum regularium planis contentorum ex 11. lib. Euclid. definitiones, quæ nondum hauſtæ ſunt.

DEFINITIO I.

PYramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur ab vno puncto ad idem planum terminantia.

Videlicet ſi tres ſuperficies, vt in fig. prop. 2. BAC, ACH, & BAH conueniant à plano BCH, quod eſt baſis in punctum A hoc corpus pyramis dicetur, quæ poteſt obtinere, non dum tres ſuperficies, quæ in vnũ punctum A conſpirent: ſed etiam quatuor, & quinque, prout baſis eius latera multiplicat.



DEFINITIO II.

PRiſma eſt figura ſolida planis ſuperficiebus parallelis contenta, quarum duæ, quæ baſes vocantur, ſunt æquales, & ſimiles.

Itaque Priſma eſt velut figura ſequentis prop. BD, cuius baſes AD, & BH ſunt æquales, & ſimiles; poteſt verò Priſma obtinere præter baſes tres, aut quatuor, aut quinque ſuperficies, prout alterã baſium multiplicat latera, ex quibus ſuperficies laterales conſurgunt. Quia verò latera baſium correſpondentia ſunt æqualia, & parallela, patet, ſuperficies laterales parallelogrammas eſſe.

PROBL. I. PROPOS. I.

Omnes Priſmatis ſuperficies menſurare, & in vnicam planam ſuperficiem redigere.

HOc faciliùs efficitur. Nam quoad menſurationem, cùm omne priſma ſuperficiebus parallelogrammis conſtet, ſingulæ iuxta dicta tract. 29. ex prop. 3. per mutuum laterum eas ambientium ductum inuenientur; Propter quod cognitis tribus lateribus cuiuſcumque ſuperficiei priſmatis, nempe altitudinem AB 10. palmorum, & latitudinẽ AE 3. palmorum, Area AC multiplicatis inuicem lateribus 3. per 10. innoteſcet, quæ erit 30. palmorum quadratorum; Sic cognito latere DI 4. palmorum cum iam habeamus notum latus AB, ſeu CI, obtinebimus quoque aream DC 40. palmorum ex mutua eorum multiplicatione: Area verò DA ex notis lateribus DI, & AI 12. palmorum prodibit: Itaque tres ſuperficies ſimul ceunt 82. palmorum quadratorum, & quia aliæ tres reſtant iſtis ſingulæ æquales, duplicato numero 82. erunt omnes 164. palmorum quadratorum.

Quoad verò transformationem facilè fiet ex Expenſ. quarta de augendis, & minuendis fig. tract. 29. Si vni ex ipſis ſuperficiebus cæteræ omnes addantur.



PROBL.

PROBL. II. PROPOS. II.

Pyramidis areas inuenire ex notis lateribus, & in vnicam planam superficiem componere.

FAcilis quoque euadit mensuratio arearum alicuius pyramidis, ex notis lateribus. Nam cum singulæ laterales superficies V. g. BAC sint triangula; bases verò sint superficies planæ vt BCH vel triangularem, vel pluribus lateribus constantes ex dict. prop. 17. & 19. Tr. 29. Planimetrici, earum mensuratio dignoscitur, si singula triangula, seu scalena, seu Isoscelia ad mensuram redigantur, vt ibi docemus, & si basis sit polygona inuenietur eius area iuxta dicta propos. 29. Tract. 20. eiusdem. Quaderè collectis tandem in vnam summam omnibus areis, tum triangulorum lateralium, tum basis subtensæ, conficient mensuram areæ totam Pyramidem ambientis.

Ad secundam propos. partem operi consignandam videatur expens. 4. Tract. 29. de augment. & diminutione fig. Ibi enim docemus modum reuocandi plurima triangula diuersę altitudinis in vnicum triangulum. Quapropter si omnia triangula Pyramidis datæ in vnicum transferantur, & basis quoq; multilatera in triangulum iuxta dicta pr. 20. tract. 29. de transformatione fig. transfundatur, & hoc triangulum quoque cum alijs in vnam superficiem restituatur, hęc superficies, seu triangularis ea sit, seu quadrata erit æqualis superficiei pyramidem circumuestientis.

PROBL. III. PROPOS. III.

Omnium corporum regularium dato vno latere areas inuenire.

QVoniam quodcumque corpus regulare constat superficiebus vnius tantum generis V. g. triangulis quatuor, vt pyramis, aut octo, vt octaedrum, aut viginti, vt Icosaedrum, vel sex quadratis, vt cubus, vel duodecim pentagonis, vt duodecaedrum; Ideo cognito vnico latere, per ea, quæ dicta sunt prop. 19. Tract. 29. tota superficies vnius trianguli, vel quadrati, vel pentagoni agnoscitur, & cum omnes vnius cuiuscumque generis sint inuicem æquales, ideo cognita vna, omnes alię patebunt. Quare per numerum superficierum V. g. si sit pyramis per quatuor, si cubus per sex, & cęt. totam summam superficierum corpus regulare circundantium component. Vt verò latera harum figurarum inueniantur, si fortè aliunde non pateant, docebimus, cùm de solidis agemus.

COROLLARIVM.

IDem tandem prestandum in omni corpore, cuiuscumque generis, & Irregulari, dummodo singulorum planorum, quibus constat, latera noueris; eadem enim est ratio de omnibus.

COROLLARIVM II.

SI verò cupias superficies illas iuxta datam proportionem augere, vel minuere, idem agendum in singulis, quod, & de superficiebus planis prop. 23. tract. 19. Et deinde omnibus simul conglobatis, & in corporis ambitum redactis, seu factis superficiebus alicuius corporis illis adauctis æqualibus obtinebimus corpus; quod superficies consequetur iuxta datam proportionem maiores, vt autem constituatur corpus regulare, id suo loco reseruamus, cum de corporibus.

EXPENSIO II.

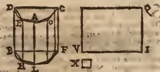
De superficie Cylindrica.

CYlindri superficies est radix, primaque origo, ob quam cęterę superficies rotundæ tetragonismo subijciantur, & ad aliquam figuram planam reuocentur, ideo hic in primis de ea agendum, vt est superficies cylindri circularis.

THEOR. I. PROPOS. IV.

Superficies Cylindri recti est æqualis ex axe, & peripheriæ linea æquali constituto rectangulo.

SIt Cylindrus CDFA: Dico, quod, si fiat rectangulum, cuius altitudo IQ, æquet altitudinem AB, & latus IV peripheriam CADB hoc inquam rectangulum superficiei Cylindricę æquabitur. Quod si ab aliquo negetur, & superficies FLACAD



Cylindrica non æquat rectangulum QV; erit, aut maior, aut minor ipso rectangulo QV. Sit ergo primo maior, differentiaq; sit quantitas X, quam si non haberet esset rectangulo QV æqualis, ideo diceret rectangulo FD eandem proportionem, quam eidem dicit rectangulum QV ex prop. 7. lib. 5. Inscribātur itaque tot rectangula EA, & HA, & cęt. donec sit minor differentia inter ipsa, & superficiem cylindricam, quam quantitas X, dicent itaq; ad quadratum ABCD maiorem proportionem, quam rectangulum QV, quia minus differunt, à superficie maiori cylindrica.

Verùm etiam dicerent minorem proportionem omnia rectangula inscripta DH, & EL, & cęt. ad rectangulum CE, quam QV, ergo dicerent maiorem, & minorem proportionem ad FD rectangula inscripta, quam QV, vnde ex prop. 8. lib 5. essent maiora, & minora ipso rectangulo QV, quod est absurdum.

Id autem ostenditur, nam rectangula inscripta DH,

& EL

& BL, & cęt. cum sint eiusdem altitudinis, ac rectang QV se habebunt ad inuicem, vt bases ex 16. sed bases, vtpote inscriptę sunt minores peripheria, & ideo æquali peripheriæ latere IV. Ergo etiam rectangula inscripta HS, & BL, & cęt. erunt minora, quàm QV. Vnde ad ea rectangulum minorem proportionem diceretur. Itaque diceret proportionē ad rectangulū ea simul, & maiorē, & minorē, quod est impossibile. Quod si dicatur Cylindrica superficies minor rectangulo QV sit differentia quantitas X. Circumscribantur que rectangula FO adeo multiplicata, vt differat eorū superficies à superficie Cylindrica minùs, quàm quantitas X; ideo quia est minor Cylindrica superficies rectangulo QV ex aduersarijs, minor quoque differentia ab ipsa, dicent minorem proportionem ad rectangulum ABCD, quàm rectangulum QV; quia minùs differunt à minori superficie cylindrica, sed hæ rectangularum circumscriptorū bases, vt OC, vtpote circumscriptę simul sūt maiores peripheria Cylindrica, & ideo latere IV, quare cum rectangula OF obtineant eandem altitudinem erūt simul maiora rectangulo QV, cū se referant vt bases; quare ad rectangulū ABCD dicent maiorē proportionem. Idest maiorem simul, & minorē, quod impossibile est. Cum ergo superficies Cylindrica non possit esse, aut maior, aut minor rectangulo QV; erit æqualis, quod vult propos.

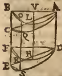
THEOR. II. PROP. V.

Cylindri etiam obliqui superficies dummodò bases parallelas habeat, est æqualis parallelogrammo eiusdem altitudinis, ac eius axis; & cuius alterum latus sit æquale circumferentiæ alicuius plani secantis, ad axem recti.

Sit Cylindrus AEOS obliquus quoad bases ABC, & DES; Sitque circulus DRF rectus axi LH. Dico eius superficiem esse æqualem rectangulo altitudinis HL, & cuius alterum latus æquet peripheriam DRF plani ad axem recti secantis cylindrum.

Prolongetur cylindrus in S, fitque linea CS æqualis lineæ SS, quā planum obliquum maximè à recto elongatur. Nam dico in primis superficiem DRFESD esse æqualem superficiei AOECQA.

Ad quod ostendendum, inscribantur rectangula in æqualibus arcubus RF, & OR, & cæt. vt sunt OBQC, & cæt. ista erunt æqualia, & si inscribantur donec inscribi possunt successiuè, quę inscripta sunt in AOECQ semper erūt æqualia ijs, quæ in DRFES inscribuntur.



Sed omnia rectangula, quæ inscribi possunt æquant totam superficiem, & si adhuc daretur locus non omnis possibilis multitudo esset inscripta. Ergo superficies AOECQ æquatur superficiei DSRFA.

Quod verò rectangula inscripta semper perseuerent æqualia, dummodò æqualibus arcubus planorum, rectorum, secantium inscripta.

Probatur linea OR ob parallelismum ex Theorem planorum æquatur lineæ AD, & pariter linea QS ob idem parallelismum æquatur lineæ AD, cùm ergo vni tertiæ AD lineæ OR, & QS æquentur; inter se quoque erunt æquales, & sic dicas de lineis SF, & CE; Quare quadrangula QCSS, & OBFE inter easdem parallelas, & super æquales bases erunt æqualia; Ablato itaque communi QCRF restabunt æqualia trapezia inscripta OBQCS & AFSS, & idem dicas de alijs quibuscumque inscriptis: Vnde patet etiam superficies cylindricas omnem multitudinem inscriptorum rectangulorum æquantes, esse inuicem æquales.

Quapropter si cylindrus obliquus DEAC differt à recto DFAS æquali superficie, ita quòd quantùm addit superficies DES tantùm deficiat alteri parti ACS, erit itaque superficies cylindri recti ABDF æqualis obliqui superficiei ACDE. Sed illa ostensa est æqualis rectangulo ex altitudine AD, & peripheria SOE. Ergo, & cylindrus obliquus talis rationis erit. Linea autem AD æquatur axi HL.

THEOR. III. PROPOS. VI.

Frusti Cylindri acuta superficies est æqualis superficiei dimidiæ recti Cylindri.

Sit acuta superficies, & Cylindri segmentum à basi obliqua ad axem, & altera recta, vt est ALC factum, & perficiatur cylindrus rectus AHB, LMC. Dico superficiem acutam ALC esse dimidium superficiei AHB, LMC.

Inscribatur rectangulum SYLR, & sint super æquales arcus HS, & LR basis ad axem rectæ. Assero in primis hæc rectangula, & quæcumque alia similiter inscripta esse inuicem æqualia. Agatur planum HS per latera RP, & TH, secabitque planum APTC, & sectio erit linea TP, quæ diuisa per medium in V ducatur OI per V parallela basibus.



Erunt itaque triangula PVO, & VIT æquiangula in plano suo siquidem anguli apud I, & O recti sunt, & apud V sunt anguli ad verticem: quare cum sint æquiangula ex 17. lib. 1. Elem. & basis VP basi VT sit æqualis reliqua latera ex 4. lib. 6. erunt in eadem proportione, ac quantitate: Quare TI æquabitur OP. Et quia OR æquatur lineæ III, quod punctum V medium sit inter H, & R; additis æqualibus TI, & OP remanebunt æquales RP, & TH; Quare etiam rectangulis trapezis æqualibus lateribus, & eiusdem altitudinis contenta erunt æqualia, Siquidem HS, & LR æquales, lineis NR, & LA sunt rectangulæ. Cum ergo omnia trapezia, quæ successiuè inscribi possunt in superficiebus acutis cylindri ALCA sint æqualia, & illa omnia possibili multiplicatione multiplicata æquent superficiem cylindricam; etiam cylindricę superficies acutę inuicę erunt æquales. Vnde totius LACS superficies cylindrica LAC dimidiū erit.

COROLLARIVM.

Elicitur frusti Cylindrici acutam superficiem esse æqualem rectangulo sub dimidio eius æqualis axi, & circumferentia AHB, vel dimidio circumferentiæ AHB, & tota perpendiculari ac cylindri recti, in quo est. Ratio est, quia hæc sunt æqualis dimidio rectanguli ex altitudine, & peripheriis

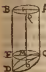
pheriæ lineæ æquali comprehensi toti superficiei cylindri recti æqualis.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Cylindri superficies sine basibus, cuius bases non sint parallelæ, sed altera sit circulus, est æqualis parallelogrammo, cuius vnum latus sit æquale circulari ambitui; alterum verò ipsius axi.

Sit Cylindrus ABCD, cuius bases nequaquam sint parallelæ. Dico eius superficiem esse æqualem rectangulo sub axe OQ, comprehenso, latere alio ex linea æquali circumferentiæ facto.

Probatur. Nam ducta CE parallela basi AB erit superficies cylindri CABE sine basibus æqualis rectangulo comprehenso sub axe MT, & circumferentiæ AQBA, ex propos. 1. h. Item ex Coroll. præced. CED portio erit æqualis rectangulo eiusdem longitudinis, quæ est ambitus. Sed sub dimidia ED, sc. sub axe MO comprehenso. Ergo tota superficies exclusis basibus cylindri AXCD, erit æqualis rectangulo longitudine æquali peripheriæ basis AQXA, & axi ID contento.



COROLLARIVM I.

Hinc ergo obtines modum mensurandi omnes cylindros; quorum bases sint circuli, siue illæ sint basibus parallelis, siue non. Nam multiplicata peripheria cum axe dabit rectangulum superficiei cylindricæ exclusis basibus æquale. Quadratio verò basium est eadem, ac circulorum, quam docuimus supra prop. 2. tract. 30.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam euenit omnem superficiem cylindricam esse æqualem quadrato, quod fit à media proportionali inter lineam æqualem peripheriæ, & axem ipsius. Nam ex propos. 17. lib. 6. quadratum tale est æquale rectangulo QTV fig. propos. 4. cuius latus VT æquat peripheriam, & IQ axem.

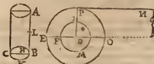
COROLLARIVM III.

Hinc etiam est: Quòd si cylindrus secetur per axem, rectangulum à diametro, & axe comprehensum, vt FSCO in fig. prop 4. h. in quocumque cylindro, etiam basium non æquidistantium dicat eam proportionem ad superficiem cylindricam sine basibus; quam diameter ad circumferentiam, quia rectangulum QTV æquale cylindricæ superficiei habet æqualem basim QT, cum sit eadem, ac axis, aut CF latus. Vnde se habebunt inuicem, vt altitudines ex propos. 1. lib. 6. Cor. sed altitudo rectanguli QV, nempe TV est æqualis peripheriæ, & rectanguli FO diametro. Ergo erit FD rectangulum ad QV rectangulum æquale superficiei cylindricæ, vt diameter CD ad circumferentiam, seu ei æqualem lineam IV.

THEOR. V. PROP. VIII.

Superficies Cylindri recti sine basibus æqualis est circulo, cuius semidiameter sit media proportionalis inter axem, & diametrum basis.

Sit Cylindrus, cuius latus axi æquale AB, & diameter basis BC, inueniaturque media proportionalis OX inter AB, & BC: superque eam, vt semidiametro fiat circulus. Dico hunc circulum esse æqualem superficiei cylindricæ sine basibus.



Probatur. Nam, cùm sit AB latus ad DE semidiametrum circuli confecti, vt ipse semidiameter DA ad diametrum basis BC ex effectione. Erit quoque medietas LA lateris ad medietatem FE radij DE, vt ipsa medietas FX ad radiũ basis medietatem BH. Et vt medietas DF ad BH, ita gyrus FIM ad gyrũ basis XXCB ex prop. 43. lib. 6. Et ideo ex 16. lib. 5. El. latus integrum BA erit ad semidiametrum BD, vt circumferentia FTM ad circumferentiam BKCB. Si ergo ex circumferentia FIM, & diametro DE, fiat rectangulum ON, & circumferentia AXCB, & latere AB fiat item rectangulum hæc rectangula erunt æqualia ex prop. 43. lib. 6. Eucl. Nam cum sint quatuor proportionales rectangulum comprehensum sub medijs OB, & FTM æquale erit ei, quod comprehenditur sub extremis AB latere, & XXCB circumferentia cylindrica.

Rectangulum verò ON ex circumferentia FTM, & DE factum est æquale circulo, cuius diameter BO: Quia huic circulo est æquale rectangulum factum ex semidiametro OB, & eius circumferentia: Tota verò circumferentia MFT est æqualis dimidiæ circumferentiæ BPO; quod sit facta super semidiametrum OB tamquam ex diametro. Vnde quia ita est circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex prop. 43. lib. 6. quia OA est dimidius diameter circumferentia etiam FMI erit dimidia circumferentia totius EPOA. Cum ergo circulus EPO æquetur rectangulo DN, & huic æquetur rectangulum sub AB latere, seu axi, & BKCB circumferentia, quod ostensum est æquale supra prop. 4. h. superficiei Cylindricæ, etiam circulus EPO factus ex radio OB media proportionali inter BA, & BC æquabitur superficiei cylindricæ.

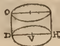
COROLLARIVM.

Hinc verò emanat, quòd si ex diametro, & axe fiat rectangulum, & ex eo extrahatur radix quadrata, quòd hæc erit diameter prædicti circuli, cuius area iuxta dicta de planorum curuilineorum mensura conquisita offeret circulum æqualem cylindricæ superficiei.

THEOR. VI. PROPOS. VIIII.

Superficies Cylindrica est dupla suæ basis, si habeat Cylindrus eandem altitudinem, ac semidiameter.

SIt Cylindrus HO, cuius latus DO sit æquale radio DV. Dico eius superficiem esse duplam basis.



Probatur. Rectangulum sub dimidia peripheria, & semidiametro comprehensum est æquale ipsi circulo ex prop. 3. Tract. 30. Ergo rectangulum sub tota circumferentia, & semidiametro comprehensum est duplum sui circuli: Sed talis est superficies cylindri HO, quæ est eiusdem altitudinis DO, ac semidiametri, vt patet ex prop. 4. h. ergo erit dupla suæ basis.

COROLLARIVM.

HInc est, quod ita sit superficies cylindrica, quæ sit eiusdem altitudinis, ac radius ad suam basim, vt diameter ad radium. quia sicut superficies cylindrica est dupla suæ basis, sic diameter est duplus radij. Vnde etiam si sit cylindrus eius altitudinis, ac diameter, superficies eius eandem rationem ad duplum suę basis, quam altitudo ad radium ex prop. 18. lib. 5. consequetur.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Superficies Cylindricæ, sine basibus eiusdem altitudinis sunt inuicem, vt peripheriæ, vel diametri basium, vel si bases sint eædem, erunt, vt altitudines.

PRobatur. Nam superficies cylindri AC est ad superficiem cylindri LH, vt rectangulum æquale cylindricæ superficiei AC ad rectangulum æquale cylindricę superficiei LH: sed illa rectangula habent eandem altitudinem, ac cylindri AC, & LH eiusdem altitudinis: ergo etiam inuicem eiusdem altitudinis sunt: quare erunt inuicem ex 1. lib. 6. vt bases; bases autem rectangulorum illorū sunt æquales peripherijs, ergo dicent inuicem eandem rationem: quam peripherię cylindricę, & peripherię eam, quam diametri. Vnde, & superficies cylindri AC erit ad superficiem cylindri LH, vt diameter CB ad diametrum IH.

Pr. 2. pars eadem ratione, quod æqualis superficiei cylindricę rectangula ęquentur inuicem basi, quia æquantur peripherijs cylindrorum, & ideo se referant inuicem, vt altitudines, ex 1. lib. 6.

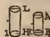


THEOR. VII. PROPOS. XI.

Superficies Cylindricæ sine basibus similium Cylindrorum ad inuicem dicunt proportionem duplicatam peripheriarum, seu altitudinum.

CYlindri similes sunt illi, quorum rectangula per axem AC, & LH sunt æquiangula, & habent circa æquales angulos latera proportionalia V. g. AB ad BC, vt LH ad HI: quæ est eadem ac proportio axis coni ad diametrum, aut radium, vel ad circumferentiam.

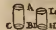
* Prob. vt rectangulum per axem AC ad superficiem cylindri AC, sic BC diameter ad peripheriam ex BC ex prop. 7. Coroll. 3. h. Vt autem diameter BC ad peripheriam ex BC, sic diameter HI ad peripheriam ex HI ex 43. lib. 6. vt autem HI diameter ad peripheriam ex HI sic ex propos. 7. h. Coroll. 3. rectangulum per axem LI ad superficiem cylindri LI, ergo ex 16. lib. 5. vt rectangulum per axem AC, ad superficiem cylindri AC, sic rectangulum LI ad superficiem cylindri LI. Ideo permutando rectangulum AC ad rectangulum LI erit, vt superficies cylindri AC ad superficiem cylindri LI. sed rectangulum AC ad rectangulū LI duplicatam habet proportionem laterum AB, ad LH vel BC ad HI ex 21. l. 6. ergo, & cylindri AC superficies ad superficiem cylindri LI habebit duplicatam proportionem lateris AB ad latus LH ideoq; altitudinis ad altitudinem, vel diametri BC ad diametrum HI, & ideo ex 43. lib. 6. peripheriæ ex BC ad peripheriam ex HI.



THEOR. VIII. PROPOS. XII.

Superficies Cylindricæ sine basibus, & diuersæ altitudinis, quorum bases parallelæ, & rectangula per axem ducta æquiangula habent proportionem compositam, ex altitudine, & peripheria.

SInt Cylindri CA, & IL, quorum rectangula per axem CA, & IL sint æquiangula. Dico eorum superficies habere rationem compositam ex altitudine HL ad BA altitudinem, & peripheria IH ad peripheriam CB. Probatur, Quia talis sunt rectangula illis æqualia, quorum laterum alterum altitudinem exæquet alterum peripheriam. Ideoque sicut illa rectangula ex prop. 23. lib. 6. Eiusdem proportionem inuicem compositam dicunt, laterum nempe ex altitudinibus, & basibus, quæ peripherias æquant: Sic cylindricæ superficies sine basibus compositam consequuntur proportionem ex altitudine, & peripheria.



COROLLARIVM.

HInc educes, quod licet cylindri sint obliqui, & basibus non parallelis, adhuc tamen prop. verificatur

verificatur, nam ostensum est prop. 7. h. superficiem horum cylindrorum esse æqualem rectangulum, cuius vnum latus sit æquale peripheriæ circuli ad axem recti, & alterum ipsi axi, quare si axi in istis cylindris altitudinem mensuremus, & peripheriam circuli ad axem recti pro basi sumamus vera dabitur ipsis euadet proportio.

EXPENSIO II.

De quadratione superficiei vngulæ cylindricæ.

Qvadrationem vngulæ cylindricæ adinuenit inter insignia eius opera Ambrosius à Sancto Vincentio, quæ licet non admodum veniat in vsum; quia tamen singulari ingenio excogitata est, hic eam tradere visum est.

DEFINITIO.

Vngula cylindrica est portio cylindri recta à plano aliquo abscisa semicirculo, semiellipsi, & parte superficiei cylindricæ contenta.

Sic in fig. pr. 15. ABM dicitur vngula cylindrica, quia continetur semicirculo ACB semiellipsi ADM, & parte superficiei cylindricæ ACBMA.

THEOR. I. PROP. XIII.

Rectangulum ex contingente, & chorda à puncto contactus perpendiculariter in diametrum cadente, æquatur rectangulo ex diametro, & eius portione intercepta à perpendicularibus extremo tangentis deductis.

Sit AB tangens, & duę perpendiculares AC, BD intercipiant portionem diametri CD, quæ ab extremis tangentis A, & B, descendunt, sitque chorda HM à puncto contactus perpendiculariter in diametrum EF cadens. *Dico rectangulum ex AB, & HM æquale esse rectangulo ex diametro EF, & portione CD est Pappi in collect. Math. lib. 5.*



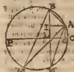
Quod vt ostendatur, ducatur diameter HN, & coniungatur MN. Erit triangulum HMN rectangulum, quòd sit in semicirculo ex propos. 28. lib. 3. Ducanturque ad angulos rectos chordæ MH, ab H recta HI, & AL; angulus itaque IHN, vtpote diametri, & tangentis ex propos. 21. lib. 3. est rectus; Rectus quoque ex effectione angulus IHM. Ergo ablata communi portione IHN ab æqualibus rectis remanebunt triangula HBI, & HMN æquiangula, ideoque erit HB ad HN, vt HI ad HM ex 4. l. 6. Quare rectangulum compositum ex extremis HB, & HM æquabitur rectangulo confecto ex medijs HN, & HI. Et idem dicas de triangulo AHL æquiangulo triangulo HNM eidem. Ideoque ob proportionalia latera rectangulum ex AH, & HM æquabitur rectangulo ex AL, & HN. Propterea que duo rectangula ex AL, & HN, & aliud ex HN, & HI simul, idest rectangulum ex FE, & DC æquabuntur duobus ex AH, & HM, & ex HB, & HM; idest rectangulo ex chorda HM, & contingente BA.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

Rectangulum ex duobus sinubus, vt vno crure, & chorda interposita, æquatur rectangulo ex chorda semicirculum complente, & portione diametri sinubus intercepta.

Sint duo sinus AO, & BL, inter quos sit chorda AB, sitque portio GL diametri à sinubus AG, & BL intercepta. Dico, quod si sinus in vnum latus componantur, & adhibeatur chorda pro alio latere rectangulum constitutum æquabitur rectangulo ex chorda AM complente semicirculum BAM, & diametri intercepta portione GL.

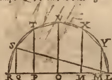
Quod vt ostendatur normalis AI, ducatur, & diameter BM, & coniungantur puncta AN, & AM; eritque ABM rectangulum triangulum, & æquiangulum rectangulo AIN; quia anguli M, & N super eundem arcum AB insistentes sunt æquales.



Quamobrem ex lib. 6. Elem. prop. 4. AM erit ad IN, vt AB ad AI. Sed IN æquatur sinui BL, & AG, siquidem NL, & LB sicut IL, & AG æquantur, & AI ipsi GL. Ergo, vt AM ad BL, & AO, vt vna linea, sic AB ad GL. Vnde rectangulum ex AM, & GL æquabitur rectangulo ex BL, & AG simul, & ex AB.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur rectangulum ex RL, & LS subtendente arcum residuum LYS, qui cum arcu SR efficit semicirculum, hoc inquam rectangulum ex LR, & LS æquari rectangulis omnibus simul nempe QR, & SR, & rectangulo ex RS, &



sinubus SQ, TP, vt vno latere, & etiam OV, & PT, vt vno, & SR pro alio, & NX, & QV pro vno latere SR alio existente, & MY, & NX pariter, vt vno latere, & alio eodem SR, dummodo omnes chordæ TS, & VT, & cæt. æquentur chordæ SR. Nam primo triangula LSQ, & QRS sunt proportionalia, estque LS ad SR, vt SQ ad QR, & ideo rectangulum ex extremis LS, & QR æquatur rectangulo ex QS, & SR medijs. Idem est de rectang. YM & YL æquante rect. SL, ML. Sic in præced. rectangulum ex LS, & PQ

æquatur

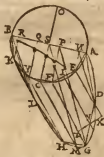
æquatur rectangulo ex PT, & QA, vt vno, & TA, idest SR æquali pro alio, & rectangulum ex LS, & OP rectangulo pariter ex OY, & TP pro vno, VT pro alio deseruiente, idest RS; quòd LS chordæ VT sit complementum vsque ad semicirculum sicut est complementum chordæ SR, & sic de alijs vsque ad E cum omnes YS, VT, AV, & cæt. sint æquales ipsi SX. Quare singula rectangula ex sinubus, & chorda SR æquabuntur singulis ex chorda LS, & interceptis diametri portionibus QR, PQ, & cæt. sed hæc rectangula cum habeant idem latus LS ex 4 lib. 2. Elem æquant rectangulum ex LS, & LR. Ergo omnia rectangula ex sinubus duobus pro vno latere, & chorda pro alio æquabuntur cùm duobus ex SQ, SR, & MV, SR rectágulo ex LS, & LR.

THEOR. III. PROP. XV.

Vngulæ supra definitæ eiusdem altitudinis, ac diametri plana inscripta simul sumpta erunt æqualia rectangulo à tota diametro, & chorda omnes arcus inscriptos subtendente dempto vltimo.

Sit circulus AOBC basis cylindri, & vngulæ superficies AMB, inscribanturque plana ABO, & DEFG, & HFYH, & cæt. Dico hæc omnia plana æquari rectangulo, quod fit ex diametro, & ea, quæ subtendit omnes arcus simul, qui planorum inscriptorum lateribus, vt AE, & cætera subtenduntur vsque ad BA excindendo EA vltimum arcum.

Progress. 1. Itaque ostendendum est primò omnia latera ED, & FG esse dupla sinuum: quibus perpendiculariter insistunt prout, & ipsa superficies vngulæ, ex def. insistit normaliter basi AOBC. Nam cum omnia plana triangulorum SCM, & NEB, & cæt. sint recta sectioni AB Ellipsis, & circuli



vngulam claudentia, erunt omnes anguli æquales, vtpote inclinationis planorum, & ex propos. 6. tract. 22. quia coniungunt perpendiculares CM, & KN, CA verò, & AN sunt normales, etiam ND, & MS erunt normales diametro AB, ideoque parallelæ cum ergo triangula SCM, & NEB parallelis constent erunt æquiangula, ideoque ex lib. 6. prop. 4. constabunt cruribus proportionalibus, ideoq; MC erit ad CS vt OB ad BN; sed MC ex Thesi est dupla sinus, CS vt æqualis diametro. Ergo etiam DX est dupla sinus BN, & sic dicas de alijs GF respectu FP, & cæt.

licet triangula HFQ, & cæt. non sint delineata ad vitandam confusionem.

Progress. 2. Hinc verò ostendetur triangulum ABD esse æquale rectangulo sub AX chorda, & AN sinu: nam cum DE sit basis normalis ipsi AE altitudo trianguli erit AE, & cum sit dupla lateris, & sinus NE rectangulumque habeat pro alio latere altitudinem AE; triangulum, vtpote duplæ basis, & eiusdem altitudinis ex prop. 41. lib. 1. Elem. æquabitur rectangulo ex AE, & NE, & idem dicas de alio triangulo E E, quod æquet rectangulum ex KE, & EX.

Progress. 3. Ostendendum est, deinde trapezia DEFG æqualia esse rectangulis ex sinubus NE, & PF, vt vno latere, & chorda EF constitutis.

Itaque OEFG trapezium est rectangulum ob angulos apud E, & F rectos ex Thesi, vnde diuisa chorda EF in I bifariam, & ducta IV, necnon, & per V chordæ AV parallela XZ erit ADV triangulum rectangulum æquale ob angulos ad V verticem æquales triangulo VZG. Vnde suplente VZO defectum trianguli XNV trapezium OEFG æquabitur rectangulo XZFA, ideoque subduplum erit rectanguli ex DE, & FG tanquam vno latere, & FF pro alio constituti; siquidem latus excedens GF suplet deficiens latus DE æquali linea GZ ipsi AD. Sed etiam rectangulum ex sinubus ex NE, & PF, vt vno latere, & EF eodem pro alio, est subduplum rectanguli ex DE, & FG pro vno, & EF pro alio, quod DE, & FG ostensæ sint in 1. progr. duplæ sinuum EN, & FP. Ergo trapezium rectangulum OEFG est æquale rectangulo ex sinubus EN, & FP simul, & AF, & sic discurras de alijs trapezijs respectu aliorum rectangulorum ex sinubus, & chordis.

Progr. 4. Modo ostendetur principaliter prop.

Cum enim ex Coroll. præc. omnia rectangula ex sinubus, & chordis sint æqualia rectangulo ex diametro AX, & chorda FE ex prop. 14. h. Cor, Consequenter omnia trapezia prædictis rectangulis ex sinubus, & chordis æqualia erunt quoque rectangulo constituto ex diametro AB, & chorda BE, quæ omnes arcus subtendat excepto arcu AB.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

Quadratum ex diametro non potest esse maius Vngulæ superficie, cuius altitudo æquet diametrum circuli baseos, cui recta est.

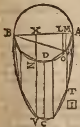
Sit Cylindricæ vngulæ superficies ACB, quæ insistat perpendiculariter circulo AOB, & cuius altitudo DC æquet diametrum AB. Dico *hanc superficiem quadrato diametri non posse esse minorem.*

Nam si est vngula AAC minor, quam quadratum ex BA, assignetur aliqua quantitas I, in qua quadratum ex diametro vngulam excedat. Fiatque ex 2. Elem. prop. 16. rectangulum ex diametro, & linea AL V.g. quod sit æquale quadrato I; & consequenter rectangulum ex AB, & AL erit excessus, quò quadratum diametri superficiem vngulæ superat, ex L itaque puncto excitetur normalis LO, & deinde inscribatur aliquod polygonum regulare circulo, cuius vnum latus AN sit minus, quam chorda subtendens arcum AO, & deinde vngulæ trapezia, vt in præced. propos. inscribantur, vt ABT, & cæt.

Cum ergo rectangulum ex AL, & AB, & ex LD, &

AB

AA integrent quadratum ex AB ex 4. propos. lib. 2. Elem. Et rectangulum ex AL, AB sit æquale ex effectione superficiei, quâ ponitur quadratum ex AB diametri superare vngulæ superficiem; erit itaque residuum rectangulum ex AA, & AL æquale superficiei vngulæ; Ideoque rectangulum AA, & BM maius erit vngulæ superficie, & tantò magis rectangulum ex AA, & EN; sed rectangulum ex AB, & AN æquat omnia trapezia inscripta ex præced. Ergo omnia trapezia inscripta essent maiora superficie vngulæ, quæ ea ambit, quod est absurdum. Non ergo quadratum ex AB diametro superat vngulæ superficiem.



COROLLARIVM.

IDem dicendum de parte rectangulorum inscriptorum, idest rectangulis ATCVZ, & rectangulo AE, & AX. Nam rectangulum sub EN, & AX est æquale omnibus planis vngulæ inscriptis AXV, cùm singula inscripta in vngulari superficie AZV ostensa sint æqualia singulis rectangulis ex sinubus, & chordis intermedijs ex Cor. prop. 14. h. quæ ex 4. lib 2. æquantur rectangulo ex BN, & AX cum sint eiusdem altitudinis NB ex partibus alterius lateris AX; Vnde singula plana inscripta AZV æquabunt rectangulum ex AX, & Ne facta. Ergo præced. constructione, idem valebit argumentum, & ostendetur Rectangulum ex AB, & AX non esse maius superficie vngulari AZV.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Omnia plana Vngulam vt supra, circumuestientia sunt æqualia quadrato ex diametro exceptis vltimis duobus triangulis.

SIt Vngula ABB, circumuestiantque eam plana AIO, & IOLP, & LMPQ, & cæt. rectangula ipsi basi circulari vngulæ, quę sit eiusdem altitudinis TA, ac diameter AB. Dico hęc omnia rectangularia trapezia æquari quadrato diametri AE excludendo extrema duo triangula apud A, & B, vt vnum ex ipsis est AIO.

Probatur, & Progr. 1. Ostendendo planum OILP rectangulo ILXZ æquari; siquidem cum plana circumscripta sint rectangula trapezium apud I, & L rectos angulos consequetur, vnde à puncto V medio ducta parallela XZ lateri IL figura ILZX erit rectangulum, & in triangulis ZOV, & VXP erunt anguli X, Z recti, & ad verticem V æquales; Vnde, & triangula ex 17. lib. 1. Elem. Coroll. æquiangula erunt, & ęqualia latera ZO,



& XP. Quare triangulo VXP, quo trapezium ILOP abundat pro triangulo VZO, quo deficit à rectangulo XZLI reposito æquabuntur inuicem LIPO, & LIXZ, & idem dicas de alijs trapezijs.

Progr. 2. Deinde ostendendum est rectangulum ZILX æquari rectangulo ex CS, & IL. Nam in pr. 15 demonstratum est VC, vel XL esse duplam XC, & ideo æqualia erit duplæ CS; ergo rectangulum ex IL, & XL æquabitur rectangulo ex CS, & IL.

Progr. 3. Rectangulum verò hoc ex IL, & CS ostensum est prop. 13. h. æquari rectangulo ex AB, & AD. Ergo etiam trapezium IOPL æquabitur rectangulo BA, & AD; Et sic dicas de rectangulo LMPQ, quod æquetur rectangulo ex LM, & TH; & ideo rectangulo ex AB, & DN; & sic de alijs.

Progr. 4. Hæc autem omnia rectangula ex 4. lib 2. ex AE, & DN, sicut, & ex AB, & AD æquantur quadrato ex AB, siquidem habent idem latus AB, & alterum sunt segmenta ejusdem. Ergo etiam plana circumscripta vngulæ æquantur quadrato AB, & remanent duo triangula, vt AIO, & aliud apud B, quæ cum nulla rectangula habeant correspondentia, quibus æquentur, abundant super quadratum AB.

THEOR. VI. PROPOS. XVIII.

Quadratum ex diametro non potest esse minus superficie vngulæ cylindricæ prædictæ.

PRobatur. Nam, si potest esse minus sit minus in præced. fig. quantitate R, torque plana vngulæ circumscribantur, donec triangula lateralia sint minora quantitate R: siquidem id tandem continget, cum multiplicatis planis circumscriptis in infinitum semper minora efficiantur. Igitur quadratum AE vna cum duobus triangulis erit minus superficie vngulari, sed AB quadratum æquatur omnibus planis circumscriptis ex præced demptis triangulis; Ergo etiam illa vnà cum triangulis erunt minora superficie vngulari, quam cingunt, quod est absurdum. Igitur superficies vngularis non erit minor quadrato AA.

COROLLARIVM.

HInc deduces idem intelligendum de parte superficiei vngularis nVAm: Nam omnia plana circumscripta vngulæ sunt æqualia ostensa singula singulis rectangulis ex chorda V. g. CS, & latere polygoni circumscripti IL; hac autem æquant singula rectangula sub AB, & segmentis diametri, quæ æquant ex 4. lib. 2. Elem. rectangulum ex AN, idest ex omnibus segmentis AD, & DN simul pro vno latere, & AB pro alio. Vnde plana vngulæ parti A m n circumscripta simul æquabunt rectangulum ex AB, & AN dempto triangulo AIO. Fiat ergo, vt præc. propos. docuimus, & ostendetur rectangulum ex diametro, & segmento AN non posse esse minus superficie vngulæ A m n eodem argumento, quò vsi sumus anteced. propos.



THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XIX.

Superficies vngularis prædicta æquat quadratum diametri, & eius assignatæ portiones æquant rectangulum sub diametro, & segmento diametri, quod sinu portionem diuidente intercipitur.

PRobatur prima pars. Nam in prop.16. ostensum est non posse esse maius, & prop.18. huius non posse esse minus quadratum diametri ipsa vngulari superficie. Ergo illam æquabit.

Pro ostendenda secunda parte sit assignata portio vngulæ A m n, quæ determinetur in præced. fig. à sinu N m. Dico vngulæ portionis A m n superficiem esse æqualem rectangulo AB, & AN.

Probatur. Nam ex Coroll. prop.16. non potest esse minus prædicta vngulæ superficie A m n, & ex pr. 18. Cor. non potest esse maius: Ergo ei erit æquale rectangulum ex AB, AN.

COROLLARIVM I.

HInc verò elicitur primo rectangulo ex AB, & DN æquale esse superficiem vngularem m t n x; Eo quia superficies A n m sit æqualis rectangulo AB, AN, & ideo etiam superficies A t x sit equalis rectangulo sub AB, & AD: Ablatis ergo æqualibus superficie vngulari A t x à superficie vngulari A m n. & rectangulum sub AB. & AD à rectangulo sub AB, & AN contento residuum t m n x vngulare restabit æquale residuo rectangulo sub AB, & DN contento.

COROLLARIVM II.

OMnia plana vngulam ambientia t O P L, & cęt. triangulis lateralibus demptis in fig. pr.17. æquari superficiei vngulari. Nam illa prop.18. huius ostensa sunt æqualia quadrato AB sine triangulis accepta: sed etiam vngularis superficies ostensa est æqualis quadrato AB; Ergo erunt superficies vngularis, & plana ambientia demptis triangulis æqualia.

COROLLARIVM III.

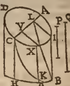
ET idem dicendum esse etiam de partibus, tum superficiei Cylindricæ, tum planorum contingentium V. g. planum contingens I L O P esse æquale superficiei vngulari, quam tangit I I E X, & pariter L M P Q æquari superficiei, quam contingit t m X n: eo quia superficies vngularis V. g. t m x n ostensa sit æqualis rectangulo sub AB, & DN contento, & eidem rectangulo ostensum sit æquale planum contingens eam L M P Q, quare æquabuntur inuicem superficies t m X n contacta, & planum contingens L M P Q.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Vngularem superficiem prædictam secundùm datam rationem partiri.

SIt data vngularis superficies ABC diuidenda secundùm datam rationem P ad Q; fiat, vt Q ad P, ita AC ad aliud CY ex prop.12. lib 6. Elem. ducaturque sinus YX, & perpendicularis basi XK: & dico superficiem vngulę CXK esse ad superficiem vngularem totam ABC, vt P ad Q.

Probatur. Factum est Q ad P, vt AC ad YC, ideo *inuertendo* erit P ad Q, vt CY, ad AC: sed vt CY ad AC, ita est rectangulum sub AC, YC ad quadratum AC ex 1. lib.6. & ideo æqualis superficies vngularis CXK rectangulo ex AC, & CY erit ad superficiem totam æqualem ex 19.h. quadrato AC, vt P ad Q ex prop. 16. lib.5. Elem.



COROLLARIVM.

VNde patet superficierum vngularium segmenta esse ad inuicem in ea proportione, quà diametri baseos segmenta, cum ostensum sit YC esse ad CA, vt superficies vngularis portio XCK ad totam superficiem; & CL ad CA, vt portio ICKB superficiei vngularis ad totam, & ideo AC diameter erit ad CL segmentum *inuertendo*, vt tota superficies ABC ad portionem superficiei ICB: quare ex æquo YC erit ad CL, vt superficiei portio CKX ad portionem IBC.

COROLLARIVM II.

HInc etiam patet: Vngularem superficiem, cuius altitudo sit diameter, eam obtinere rationem ad superficiem cylindri eiusdem altitudinis, quam diameter circuli ad perimetrum.

Nam superficies cylindrica est æqualis rectangulo ex diametro CA, & peripheria ICIAD, at superficies vngularis est æqualis quadrato diametri CA, sed hęc duo rectangula cum sint eiusdem altitudinis diametri habent eandem proportionem, quam bases: Ergo habent eandem proportionem, quam diameter basis quadrati æquantis vngulæ superficiem ad peripheriam basim rectanguli cylindricam superficiem æquantis.

Insuper, & partes vngularis superficiei cylindricæ eodem arcu contentæ V. g. CXK ad CXOH habent eandem proportionem; quam portio diametri CY ad portionem peripheriæ CX. Nam ita est superficies CXK vngularis ad totam vngularem superficiem, vt rectangulum ex YC, & CA, cui pars æquatur ex dictis prop.19.h. & Coroll. ad quadratum AC, cui tota æquatur.

Tota verò vngularis superficies est ad cylindricam superficiem, vt quadratum AC ad peripheriæ DAIC, diametrique AC rectangulum: Cylindrica verò superficies est ad portionem Cylindricam CXOH, vt peripheriæ, diametrique rectangulum est ad rectangulum ex arcu XC, & diametro CH, vel CA; Quare ex *æquo* ita erit superficies XKC

ad

ad portionem cylindricam CXOH, vt rectangulum ex AC, & CT ad rectangulum ex arcu CX, & diametro CA, quæ est eadem ob eandem rectangulorum altitudinem, quam AC segmenti diametralis ad arcum CX, qui superficiem cylindricam, & vngularem subtendit.

THEOR. VIII. PROPOS. XXI.

Superficies vngularis, cuius altitudo diameter ad superficiem vngularem quamcumque (dummodò rectangula basi circulari) est vt altitudo ad altitudinem.

DEtur vngula ABC, cuius altitudo eadem, ac diametri CA rectangula basi & alia, quæcumque BDC similiter rectangula, dico ABC superficiem esse ad superficiẽ ADC, vt altitudo BB ad altitudinẽ BD: Quod vt ostendatur, ducantur ad diametrum normales LE, & MT, & QN, & cæt quibus aliæ normales per superficies vngulares ducantur BB, & TB, & QB, & aliæ si placet. Iunganturque puncta LB, & MB, & NB, Sicut etiam puncta LD, & MV, & XC. Erunt itaque omnia triangula LBE, & MVB, & MQS æquiangula inter se ex 27. lib I. cum anguli apud B, T, Q recti sint, & anguli L, & M, & N sint inclinationis planorum ABC, ABC æquales ex prop. 18. tract. 88. Idem dicas de triangulis LED, & MTV, & NQX ob eandem rationem. Quadere, vt BB ad TB, sic EL ad MT, vt autem EL ad MT; ita est ED ad TV. Ergo ob prop. 16. lib. 5. ob eandem proportionem, quam dicunt eidem tertiæ BB erit ad TR, vt ED ad TV. Ideoq; etiam planum subtendens BETR erit ad planum superficiẽ TVED subtendens, vt BB ad DE ex propos. 14. tract. 29. cum sit trapezium eiusdem altitudinis, & sic dicas de omnibus aliis. Quapropter cum singula plana maiora inscripta ad singula minora sint vt basis maior ad minorem V. g. vt SQ ad XQ, quæ est eadem, ac BB ad OB; etiam omnia maiora ad omnia minora simul ex prop. 12. lib 5. eandem obtinebunt proportionem, licet multiplicentur secundùm quamcumque multiplicationem possibilem, idest proportione basis BB, ad DB basim se respicient. At illa plana multiplicata, vt vt possunt, superficies vngulares implent, & æquant, ergo etiam superficies vngularis BAE erit ad vngularem superficiem AED, vt altitudo BB ad DB.

COROLLARIVM.

HOc autem, quod dicitur de totis eodem argumento concludit de partibus: cum ATR parti vngulę plana omnia inscriptibilia ad parti ATV inscriptibilia plana eandem obtineant proportionem, vt RT ad TV ob rationem prædictam, idest, vt BB ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Qualiscumque superficies vngularis æqualis est rectangulo sub diametro basis circularis, & eius superficies altitudine contento.

SIt superficies vngularis ACPB habens basim circulum BCAK. Dico eam esse æqualem rectangulo ex diametro BA, & altitudine CV.

Fiat enim superficies vngularis CAHB, cuius altitudo sit eadem ac diametri; Iam ostensum est in præced. superficiem vngularem CBHA esse ad superficiem vngularẽ CPBA, vt altitudo HC, idest diameter BA ad altitudinem VC: Quare etiam quadratum diametri BA, seu altitudinis HC æquale superficiei ACBH erit ad superficiem vngularem BPCA, vt HC altitudo ad PC altitudinem; sed vt HC ad PC, ita est quadratum HC ad rectangulum ex HC, & PC ob eandem altitudinem ex I lib. 6. Ergo quadratum HC ad superficiem vngularem BVCA, & ad rectangulum sub CP, & BA eandem habet rationem altitudinis HC ad altitudinem PC: Ergo ex prop. 9. lib. 5. æquantur inuicem superficies BPCA, & rectangulum sub CP, & BA contentum.

COROLLARIVM.

HInc etiam est, quòd si detur portio vngularis superficiei FOB, hæc sit æqualis rectangulo quod sub BE segmento diametri, & PC altitudine cõtinetur; sicut superficies APC æquatur rectangulo sub CP altitudine, & toto basis diametro AB. Nam posita superficie vngulæ æqualis altitudinis, ac diametri, erit superficies FBG æqualis rectangulo sub AB, & BE ex propos. 19. huius Cor. I. hoc itaq; rectangulum AB, & BE erit ad superficiem FOB, vt superficies GFB æqualis illi rect. ad superficiem eandem FOB; idest ex præced. huius Coroll vt HC ad CV, vel æqualis AB ad CP; nimirum, vt rectangulum BE, AB ad rectangulum eiusdem altitudinis PC, BE; quæ est eadem, ac basium AB vel HC ad PC, quę est eadem ac superficierum GFB ad OVB: Rectãgulum itaque idem BE, & AB ad rectangulum PC, & BE, & ad superficiem FOB eadem ratione referetur, vt HC ad PC. Quare ex II. lib. 5. Elem. quòd idem ad vtrumq; eandem rationem dicit, quam HC ad PC superficies vngularis FOB, & rectangulum sub BE, & PC erunt æqualis.

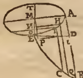
PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Data superficie vngulari, cuius cylindri basis, sit circulus, & altitudo aequalis diametro, & data in ea aliqua portiones illi portioni aequalem in alia aliqua superficie vngulari inuenire.

Sit data vngula, vt vult propositio ABB, & in ea segmentum BIC, & oporteat super arcum AH portionem efficere alicuius superficiei vngularis, quæ datæ portioni BIC æquetur.

Ex arcu dato AH, & arcu portionis datæ BI duæ normales HN, IO ad diametrum TE agantur. Fiat deinde rectangulum ex MN æquale rectangulo ex BO, TB ex prop.45.lib.1. Elem. & alterum latus eius eueniat M^P. Ducaturque parallela ipsi MA, perque punctum D, & diametrum TE agatur planum exhibens ellipsim DE. Ex H itaque deducatur ML parallela ipsi AD, & superficies ADHL æquabitur superficiei BIC.



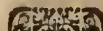
Probatur. Et primo, quod rectangulum ex MN, & AD æquale sit superficiei ADHL. Superficies BQA^H est ad superficiem AHDL ex prop.81.h. Cor. vt AB ad AD, hoc est ob eandem altitudinem, vt rectangulum BA, & MN ad rectangulum ex MN, & PM, sed superficies BQHA est æqualis rectangulo ex BA, & MN ex 18. huius Coroll. Ergo etiam superficies ex prop.11. lib.5. Elem. DAHL æquatur rectangulo ex MN, & PM.

Progr. 2. Cùm verò rectangulum MN, & PM ex constructione æquetur rectangulo TB, & OE, & hoc ex prop.18 huius Coroll superficiei datæ CIB; sequitur, quòd superficies AHDL æquetur superficiei IBC.

EXPENSIO III.

De superficiebus conuexis, quæ conum ambiunt.

Coni superficies deseruit ad Inueniendas quoque alias superficies, vt sphæræ, & sphæroidis Elliptici, & cętera. Vnde operę pretium erit eas diligentiùs inuestigare.

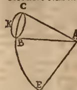


THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Superficies conica recti coni circularis, (quod semper intelligitur) sine basibus, est æqualis sectori circuli, cuius radius sit coni latus, & arcus, sit æqualis circumferentiæ basis.

Sit conus ABC, cuius basis CKB. Dico *huius superficiem esse æqualem sectori circuli* ACE, cuius radius sit AC latus coni, & circumferentia CBE sit æqualis circumferentiæ basis conicę CKBC.

Probatur. Nam circumferentia CBE est æqualis ex hypothesi circumferentiæ CKBC, sunt autem tum vnius, tum alterius perpetuò facta qualibet diuisione ęqualia latera AC, & AB, cùm ergo latera tum coni superficiem diuidentia omni diuisione possibili, tum sectoris, & ipsæ subtensæ æquali numero diuisionum affectæ semper sint æquales, etiam omnia plana inscriptibilia, vel circumscriptibilia æqualia erunt. Sed hęc adeo multiplicata non excedunt, aut minus sunt superficie conuexa coni, vel superficie plana sectoris ABC, alioquin adhuc multiplicari possent; Ergo ipsæ superficies æquabuntur inuicem.



COROLLARIVM.

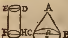
Hinc educitur, quod si fiat triangulum rectilineum sectori CAB æquale ex prop. 4. tract. 3. nempe quod basim consequatur dimidio circumferentiæ CBX æqualem, & latera lateri AC, hoc erit æquale etiam superficiei conicæ: Item si fiat rectangulum dimidio peripheriæ CE sectoris CAB, & altitudinis AC hoc item erit æquale superficiei conicę. Cum æquale sectori ACB existat ex prop. 4. tract.30.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Superficies conica recti coni est æqualis superficiei recti Cylindri, qui habeat eandem altitudinem, ac latus coni, & semidiametrum basis conicæ pro diametro suæ basis.

Sit conus ABC rectus, & detur Cylindrus DEFH rectus, qui habeat pro diametro DE semidiametrum OC, & altitudinem EF æqualem lateri CA. Dico superficiem coni BAC esse ęqualem superficiei cylindri HFDE.

Probatur. Nam ex Coroll. 1. Conus rectus in sua superficie est æqualis rectangulo facto ex latere æquali dimidiatæ circumferentiæ, & altitudine æquali lateri CA. Dimidiata verò peripheria circuli BLCB est peripheria facta super diametrum DE, & altitudo æqualis lateri CA est EF ex con-



s constructione. Ergo superficies conica BCA erit æqualis rectangulo facto ex latere æquali peripheriæ OB, & altitudine EF; sed huic ex prop. 4. huius superficies cylindrica HFDE æquatur, ergo superficies cylindrica cylindri DFEH est æqualis conicæ ABC.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Superficies coni recti sine basi est æqualis circulo, cuius semidiameter sit media proportionalis inter semidiametrum basis, & eius latus.

PRobatur. Cylindri superficies HFDE in præc. fig. est æqualis circulo, cuius diameter sit media proportionalis inter diametrum DE, & altitudinem EF ex prop. 8. huius: Sed altitudo EF est æqualis lateri CA, & diameter DE ex effectione est æqualis semidiametro OC, superficies verò cylindri recti DEHF est æqualis superficiei coni recti BAC. Ergo circulus cuius diameter sit media proportionalis inter EF, vel OC semidiametrum, & inter altitudinem EF, vel latus CA æqualis superficiei cylindri erit etiam æqualis superficiei coni A.

COROLLARIVM.

HInc patet quomodo superficies coni recti in circulum, & superficiem cylindricam transformetur, vel quomodo circulus, vel cylindrica superficies in superficiem conicam trasfundi possit.

Nam si superficies coni recti sit in circulum transferenda media proportionalis inuenta ex propos. 16. lib. 6. inter radium, & latus coni; circuli quæsiti diametrum dabit.

Si verò in cylindri superficiem sit mutanda superficies coni semidiametro OC tamquam diametro fiat circulus, & cylindrus eiusdem altitudinis, ac latus coni in eo circulo pro basi situs habebit superficiem æqualem superficiei conicæ.

Atè contrà fiet, si cylindri superficies in coni superficiem sit mutanda assumendo semidiametrū pro diametro, & axem pro latere, quòd, & intelligitur de obliquis cum obtusum sit æquari cylindris rectis eiusdem circoli, & altitudinis.

Quod si circulus in conicam, vel cylindricam superficiem sit trasferendus, tunc semidiametro eius duæ extremę proportionales inuenientur ex prop. 16. Tract. 16. & ex ijs fiat altitudo, & diameter cylindri, vel altitudo, & radius coni, & huius cylindrij siue coni superficies erunt circulo ęquales.

THEOR. IV. PROPOS. XXVII.

Coni recti circularis superficies ad superficiem cylindricam rectam, cuius basis diameter æquetur radio baseos coni, eam consequitur proportionem, quam latus coni ad eius axem, seu altitudinem.

SIt conus ABC, & cylindrus FG, cuius basis FL, in quà diameter FL sit dimidiū BO diametri: CB

Dico ita esse superficiem coni ABC ad superficiem circumpositam e ylindro FG, vt latus CA ad altitudinem LG.

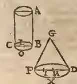
Fiat enim ęqualis altitudo cylindri lateri CA, & sit EL. Superficies cylindri FG ad superficiem cylindri LE est, vt altitudo EG ad altitudinē EL, vt colligitur ex 10. h. sed superficies cylindri FE est ęqualis superficiei conicę BAHC ex dictis prop. 25 h. & altitudo EL ex effectione ęquatur lateri coni CA. Ergo, vt est altitudo LG cylindri ad latus coni CA. Sic superficies cylindrica FG ad conicam BAHC.

THEOR. V. PROP. XXVIII.

Superficies coni recti habentis latus æquale diametro, est duplo suæ basis æquale.

SIt conus rectus FGDX habens latus FG ęquale diametro FD. Dico *eius superficiem esse duplam suæ basis*.

Probatur superficies coni FGDX est ęqualis ex prop. 25. huius superficiei cylindricę CA ęqualis altitudinis AB, ac latus BC, & super basim radium NF basis conicę pro diametro CB habentem: sed hęc est octupla suę basis COB; quia cum eadem altitudo, ac semidiametri BC faciet duplam ex dictis propos. 9. h. altitudo, totius diametri faciet quadruplam. Vnde XA diametro coni ęqualia, & dupla BC faciet octuplam: basis verò coni FXO est quadrupla basis BC; cum sit in duplicata proportione diametrorum FD ad BC: Ergo erit subdupla superficiei cylindricę CA: Sed hęc superficies ex propos. 25. h. ęquatur superficiei conicę cum sit super dimidium diametri, & eandem altitudinem, ac lateris coni consequatur. Ergo etiā basis conica FXD erit subdupla superficiei conicę FGDX, & sic superficies conica erit ipsius dupla.



THEOR. VI. PROPOS. XXIX.

Superficies prædicti Coni se habet ad suam basim, vt latus ad radium basis.

SIt in fig. prec. conus DGF, cuius latus GF trianguli per axem sit ęquale diametro DF cylindrusq; AC, qui habeat lateri GF altitudinem ęqualem, & ideo diametro DF, & radiū NF basis conicæ pro diametro basis suę BC, eritque superficies cylindrica COBA ęqualis superficiei coni DGF connexę ex prop. 27 h. illaque conica superficies DGF habebit proportionem ad duplum basis cylindri COB, quam altitudo BA cylindri ad radium cylindri BL. Siquidem supra ostensum est in Coroll. propos. 9. h. Cylindri superficiem, quæ sit eiusdem altitudinis, ac diameter dicere eam proportionem

ad duplum suæ basis, quam altitudo, seu axis ad radium. & ideo superficies coni æqualis cylindri superficiei eam proportionem dicet ad duplum basis cylindri, quā altitudo cylindri, seu latus coni ad radiū, sed radius huius LA est NI semiradius basis coni ex dictis, & basis ipsa cylindri est subquadrupla basis coni ex prop. 33. lib. 6. Elem. Ideoque duplum illius basis COB est æqualis dimidiæ basis coni DXF. Quare ita erit latus coni FG diametro DF æquale ad radium BL cylindri, vel semiradium basis coni IF; vt superficies coni DGF ad dimidiam basim DXF ipsius coni: Et ideo erit latus GF coni ad radium NF, vt superficies coni eiusdem ad totam basim suam DXF.

THEOR. VI. PROPOS. XXX.

Superficies coni recti ad suum circulum habet proportionem, quam latus ipsius coni ad radium ipsius circuli.

Sit conus ABC, & circulus quicumque BF. Dico, quod ita sit superficies conuexa coni ab circulum BF, vt est latus AC ad IB radium.

Probatur, Habet enim superficies coni BAC ad circulum suæ basis BOC eam proportionem, quam latus AC ad radium OC suæ basis ex pr. 26. h. Quia radius, qui est media proportionalis inter latus, & radium basis coni facit circolum superficiei coni æqualē ex 26. h. ergo ex 21. Euc. Cor. circulus æqualis superficiei erit ad circulum basis, vtpote figuræ similes, vt CA latus ad CO radium sc. in duplicata ratione suorum diametrorū.

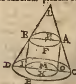
COROLLARIVM.

Hincq; est, quod superficies coni CAB sit ad quemcumque circulum FX, vt quad. ex media inter CA, & CO ad quadratum diametri FB, quod circulus ex media æquans superficiem coni CAB, ita sit ex 41. lib. 6. ad circulum FA.

THEOR VII. PROP. XXXI.

Superficies frusti conici eam habet proportionem ad annulum planum, cui insistit; quam segmentum lateris eam mensurantis ad segmentum annuli illum mensurantis.

Sit superficies frusti conici AFBCED, quæ mensuretur segmento lateris AC, & annulus, cui insistit sit CEDOBI, & segmentum diametri illud mensurantis sit CO: Dico ita esse in proportione, vt CA ad CO, ita superficies frusti conici AFBCED ad annulum planum CEDOBI.



Progr. 1. Probatur, Ita est est totius coni superficies CBOL ad totam suam basim CED, vt est superficies coni ALFB frusti coni ablata ad suam basim AFB ablatam. Ergo & propos. 22. lib. 5. reliqua quoq; superficies AFB CED erit ad reliquum annulum CED, OIX, vt conica superficies tota LCD ad totam basim CAD, vel vt ALB superficies conica ablata ad basim ablatā AFB.

Progr. 2. Quod verò sit tota superficies conica CELD ad basim CED, vt superficies conica ALFB ad basim AFB.

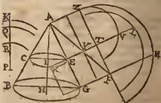
Probatur. Quia ita est latus AL ad radium AN, vt LC latus ab radiū CM, quæ est eadem proportio ob parallelas ex 4. lib 6. propterea erit ex 16. lib. 5. eadem proportio superficiei CELD ad basim AED, quam superficiei ALFB ad basim AFB, cum sit eadem vni tertiæ proportioni AL ad AN, vel CL ad CM 30. h.

Progr. 3. Cum itaque LECD superficies sit ad CED basim, vt CL ad CM, & hæc sit, vt AL ad AN erit etiam, vt reliquum CA ex CL sublato AL ad reliquum CO ex CM sublato AN. Verùm iam ostensum est progr. 1. quòd, vt LCEO superficies ad CED superficiem; ita est residua frusti coni superficies AFBCED ad annulum CED OXI. Ergo ex 16. lib. 5. vt superficies frusti conici AFBCED ad annulum CEDOXI ita est CA segmentum lateris mensurantis ad CO frustum diametri.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXII.

Superficies conica frusti coni recti æqualis est circulo, cuius semidiameter sit media proportionalis inter semidiametros basium infimæ, & supremæ tamquam vna linea, & latus frusti coni.

Sit conus ABC, in quo basis infima BG, & suprema CE constituant frustum coni CEBG. Ex IE, & HG radijs vna linea fiat, & inter illas, & GE media proportionalis sit inuenta TL. Dico, quod si hoc radio describatur circulus PQ: hunc esse frusti superficiei conicæ CEGB æqualem.



Probatur, & Progr. 1. Nam si inter AG latus, & HG semidiametrum media proportionalis inueniatur NF ex hac FN velut semidiametro constitutus circulus FB æquabit superficiem coni AAG ex prop. 16. h.

Progr. 2. Fiat deinde rectangulum ex BI, & BA, quod sit AY, & aliud ex GH, & IG, quod sit BF, & tandem aliud ex BG, & AI, quod sit XO, vel GY, quod erit æquale complemento YZ ex propos 43. lib. 1. Elem. Ideoque tria rectangula AY, & BF, & GX, idest YZ æquabunt rectangulum AF constitutum ex AG, & GH, vel æquali GF. Et Gnomon XFGBY æquabit rectangulum FX nimirum duo rectangula alterum ex XG, & GH, & alterum ex IG, & EI, quod rectangulum GX æquetur rectangulo BY, idest complemento YZ. Progr.

Progr. 3. Inuenistur autē medis proportionalis inter ZT, & TY linea TV; & quadratum ex TV æquabitur rectangulo YZ, sic inuenietur media proportionalis TL inter FG, & TX nempe inter latus BG, & inter duos radios EI, & HG, & quadratum ex TL æquabit rectangulum FX, nempe ex dictis progr. 2. gnomonem illi rectangulo æqualem AFYZ. Ideoque duo quadrata TV, & TL æquabunt quadratum ex FN æquale rectangulo AF ex latere coni toto AG, & radio GH. Ratio est, quia illa duo quadrata ex TV, & TL æquant rectangulum AF quadratum quidem TV rectangulum YA, at quadratum TL gnomonem reliquum FYZ, & quadratum FN est æquale rectangulo AF.

Progr. 4. Cum itaque sit circulus ad circulum, vt quadratum ad quadratum ex diametris, seu ex semidiametris ex prop 41. lib 6. Elem. Ideo si duo quadrata TV, & TL æquant quadratum FN, etiam circuli ex illis constituti TV, & TL quales sunt PR, & PQ, circuli æquabunt circulum FN, vel PX; Cum ergo circulus ex PK occupet totam superficiem coni GAB; circulus autem ex PR superficiem coni CAD, reliquus quoque circulus PQ æquabit reliquam superficiem frusti conicBRO. Quando quidem circulus PR, & PQ æquant, vt supradictum est circulum KP, qui totam superficiem coni sua planitie exequat.

THEOR. IX. PROP. XXXIII.

Similium conorum rectorum superficies sine basibus sunt in duplicata proportione altitudinum, & peripheriarum, seu diametrorum, aut radiorum.

PRobatur. Nam similes coni sunt illi, qui æqualibus angulis ad verticem continentur, vt OPR, & OXS. Quare cum triangula ad axem rectangula OTR, & OTS sint similia, erit OS ad IR, vt OT ad TS, & permutando OT ad OT, vt IR ad TS, & ideo vt OR ad OS, aut PR ad XS, & pariter, vt peripheria ex IR ad peripheriam ex TS ex 43. l. 6. sed conica superficies æqualis est rectangulo sub vno latere, & dimidia circumferentia cōprehenso, & rectāgula similia sunt in duplicata ratione laterum homologorum Ergo etiam conicæ superficies erunt in duplicata ratione semicircumferentiarum, & laterum; sed ita est semicircumferentia ad semicircumferentiam, vt tota ad totam, & tota circumferentia ad totam circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex prop. 43. lib. 6. & vt semidiameter ad semidiametrum, & perpendicularis axis ad axē. Quare duplicata proportio, seu laterum, seu axium, seu diametrorum, seu radiorum, seu circumferentiarum est illa, quam vnius coni superficies habet ad aliā superficiem alterius coni similis.

COROLLARIVM.

HInc est conos æqualium basium referri, vt altitudines. quòd cylindri æquales ipsis, qui habēt pro altitudine latus coni, & pro diametro radium, & ideo æqualium basium referantur, vt rectangula sibi æqualia, ex peripheria, & altitudine ipsorum, idest cum sint æqualis peripheriæ, vt altitudines.

THEOR. X. PROPOS. XXXIV.

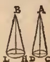
Conicæ superficies conorum rectorum similium habent proportionem compositam ex lateribus, & semiperipheria.

PRobatur. Quoniam talem proportionem etiam cylindricæ æquales eis superficies inter se gerunt, nempe compositam, ex proportione altitudinum, & peripheriarum; altitudo verò cylindricæ superficiei, quæ æquet conicam est æqualis lateri coni, sicut peripheria semiperipheriæ ex propos. 24. huius. Quare etiam conicæ superficies habebunt laterum coni, & semiperipheriarum compositam proportionem.

THEOR. XI. PROPOS. XXXV.

Superficies conorum rectorum eandem altitudinem habentium se habent ad inuicem, vt peripheriæ, aut diametri.

SInt duo coni eiusdem altitudinis ACD, & BHL, erit triangulum per axem CAD ad triangulum per axem HBL, vt basis CD ad basim HL, sed basis CD diameter ad HL diametrum est vt semiperipheria ex CD ad semiperipheriam ex HL, & ideo, vt latus æquale semiperipheriæ ex CD rectanguli, cuius alterū latus, & altitudo sit AD ad semiperipheriæ ex HL æquale latus eius rectāguli, cuius altitudo LB eadem, quæ AD. Sed rectangulum ex latere æquali semiperipheriæ CD ad rectangulum ex latere æquali semiperipheriæ HL eiusdem altitudinis est, vt basis ad basim, idest vt semiperipheria ad semiperipheriam, vel vt peripheria ad peripheriam, vel ex 43. lib. 6. vt radius ad radium, vel diameter ad diametrum, ergo erit etiam superficies coni CAD ad superficiem coni HBL eiusdem altitudinis, vt radius ad radium, vel vt diameter ad diametrum, vel vt peripheria ad peripheriam basium, vel vt medietas ad ipsarum medietatem.



EXPENSIO IV.

De superficie Sphæroidis Elliptici.

QVamuis, quod viderim apud authores, nondum hæc superficies tetragonismo subacta fuerit, curabimus tamen pro nostris viribus tam ad planam superficiem redigere.

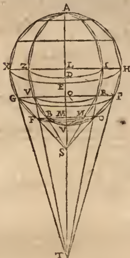
THEOR. I. PROPOS. XXXVI.

* *Sphæroidis Elliptici superficies ad superficiem sphæræ se habet, vt superficies Ellipsis ad superficiem circuli.*

SIt sphæra AHVX, & circulus maximus in ea, & sphæ-

ſphęroides in eo AIVZ, quę, & exprimat Ellipſim ſphęroidem generantem. Dico, quod vt ſuperficies ellipſis AIVZ eſt ad ſuperficiem circuli AHVX; ſic ſit ſuperficies ſphęroidis ad ſuperficiem ſphęrę.

Diuidatur AHVX circulus in ſphęra maximus in partes æquales, & rectæ ducantur normales ad diametrum AV, & ſint HL, & VQ, & OM, quæ ſecabunt ellipſim in I, R, N; eruntque applicatæ in ellipſi IL, QR, & NM. Per partes ergo circuli HP, & ellipſis IR ducantur rectæ, quæ ex oſtenſis propoſ. 72. Tract. 24. conuenient in T diametro maiori producto.



Sic ſi ducantur rectæ FO, & RN, conuenient in diametrum productum maiorẽ, & tandem OV, & NV in V, ſic dicas de alia parte. Itaque omnia erunt triangula æquicrura HTX, & ITZ æqualis altitudinis, ſicut, & PSG, & RYS, & cęt. quę ſi intelligantur circumuolui in ſphęra, & in ſphęroide inſcribent ſegmenta conorum in ſphęra quidem HEXPG, & cæt. In ſphęroide verò IDZRY, & cęt.

Probandũ itaque eſt in primis horum ſegmentorum ſphęroide inſcriptorum, & cęt. ſuperficiem ZDRIY eſſe ad ſuperficiem conicorũ ſegmentorum inſcriptorum ſphęra XEHPG, vt ſuperficies IRZY ad ſuperficiem PHXG ſegmẽtorũ, quæ circulo, ellipſiq; inſcripta ſunt. Spatia IQRL ſemiellipſis ſunt ad ſpatia ſemicirculi LQPH, ſicut RQLM ad PQRM, & cęt. vt ſemidiameter IL ad ſemidiametrum LH ex prop. 14. Tract. 29. Ideoque dupla ipſorum IZRY ad HPXG erunt, vt diameter IZ ad diametrum HX. Vt autem diameter IZ ad diametrum XH; ſic eſt circulus IDZ ad circulum XEH ex prop. 33 lib. 6. Elem. ita circulus ex RY ad PG circulum cum radij applicatarum ellipſi QR, & MN, & cæt. vt propoſ. 72. eadem cit. conic. ſint ad radios circuli ſinus PQ, & OM in eadem proportione, ac ſemiaxis IL ad ſemidiametrum LH. Vt autem circulus IDZ ad circulum HEX, ſic eſt coni ſuperficies eiuſdem altitudinis IDZT ad coni ſuperficiem HEXT ob eandem altitudinem ex prop. 35. h. & vt circulus ex RY ad circulum ex PG, ſic eſt ſuperficies coni RYT ad coni ſuperficiem PGT ob eandem altitudinem, ergo vt ſuperficies IZT coni ad ſuperficiem coni HTX. Ideoque ablata ſuperficies coni RTY erit ad ſuperficiem coni PTG ablatam, vt ſuperficies coni totius ITZ ad totam ſuperficiem coni HTX, & ideo etiam reliquum ſuperficies IRDZY erit ad ſuperficiem HPXGE, vt tota ad totam, ideoque vt ſpatium planum IZYR ad ſpatium planum HXPG, cum etiam ſpatiorum, vt dictum eſt ſit eadem ratio, quę IZ ad HX. Idem oſtendes, & eodem prorſùs argumento de ſegmentis RYNB, & POFG, quorum ſuperficies circulares erunt in ea proportione, quod conueniant in eundem verticem, qua baſes circulares, & ideo, qua diametri circulorũ, & ideo, qua ſpatia diametris contenta YRNB ad PGFO, &c.

Cum ergo ſingulæ ſegmentorum conicorum ſuperficies ſphęroide inſcriptorum; ſint ad ſingulas ſuperficies ſegmentorum conicorum ſphęra inſcriptorum, vt ſingulæ ſuperficies planæ ellipſi generanti figurę inſcriptæ ad ſingulas ſuperficies figurę inſcriptę circulo, omnes quoque ex propoſ. 17. l. 5. erunt ad omnes in eadem proportione ſc. conicæ ſuperficies ſphęroide inſcriptæ ad omnes ſuperficies conicas ſphęræ inſcriptas, vt omnes planæ ſuperficies ellipſis ad omnes planas ſuperficies circuli.

Quò poſito inſcribantur tot ſuperficies conicę circulo, & ſphęroide elliptico, quod poſſũt inſcribi multiplicatis lateribus figurę, & ellipſi, & circulo inſcriptæ, quouſque poſſunt multiplicari, hæc inſcriptio omne ſpatium, quod inter curuam, & rectam eſt, occupabit alioquin ſi adeſſet locus, adhuc noua inſcriptio poſſet inſtitui contra hypotheſim; Quamobrem cum omnis poſſibilis multitudo conicarum ſuperficierum ſphęræ, ſphęroideque inſcriptarum ęquent ipſam ſphęræ ſphęroidiſque ſuperficiem. Sicut, & poſſibilis multitudo laterum in multilatero circulo, ellipſique inſcripto æquant ipſos circulum, & ellipſim: Erit ſpatium ellipſis ipſa ad circulum, vt ſuperficies ſphęroidis, ęquęam generat, ad ſuperficiem circuli: quod erat oſtendendum.

THEOR: II. PROPOS. XXXVII.

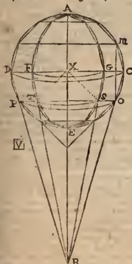
* *Superficies ſphæroidis Elliptici eſt æqualis ſuperficiei ſphæræ, cuius radius media proportionalis ſit inter axes maiorem, & minorem.*

SIt ſphęra ACBD, & ſphęroides ellipticam ABCE. Et inſcribantur in eo corpora ex ſegmentis conorum conflata, vt in anteced. factum eſt, & figura ſolida ſphęroide inſcripta ad figuram ſolidam ſphęra inſcriptam, vt diameter AB ad diametrum CD, vel vt ſpatium Ellipticum AGFB ad circulare ſpatium CABO, quoad ſuperficiem referętur.

Rurſus ſupra oſtenſum eſt cum ageremus de planis ſuperficiebus ex propoſ. 25. tract. 30. ſuperficiẽ figuræ circulo HIKL inſcriptę eſſe ęqualem figurę tuntundem laterum Ellipſi ABFE inſcriptę eo quod HI diameter ſit media proportionalis inter AV, & CO. Modo ante omnia oportet oſtendere, quòd ſuperficies

quoque

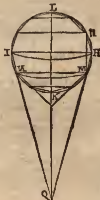
quoqꝫ e ex ſegmento conico HIMN, & cęt. quod connexum intelligas refertur ad CDOP ſegmentum conicum, vtpote, quod conueaum intelligendum ſit, vt HIMN ſuperficies plana ad CDOP ſuperficiem planam, & ſic de ſingulis alijs.



Nam HIQ conus habebit proportionem duplicatam ad conum CDR, quoad ſuperficiem ſuæ baſis ambitus HI ad baſis ambitum CO, ſiquidem ſunt coni ſimiles recti, eo quod angulus HMN æqualis angulo HQL ob parallelas HN, & QL ſit equalis angulo C O M. i. eſt ob eandẽ rationẽ angulo CRA, quod ſubtendit ſimilem arcum H n, & C m cum ergo ſuperficies faciant cum axe eundem angulum apud Q, vt apud R. erunt ſimiles coni COR, & HIQ. Quod cum ita ſit ſuperficies coni COR, & HIQ, vtpote in duplicata ex prop. 33. huius, ratione ſuarum circularium baſium, & ideo diametrorum, dicent ad inuicem eam proportionem, quam GF, ad CD, ſiquidem ex effectione UF, HI, & CD ſunt tres continuæ proportionales, ideſt quam ſpatium Ellipticum GFST ad ſpatium circuli CDOP, & ideo quam ſuperficies globoſa fruſti conici GFST ad ſuperficiem rotundam fruſti conici ſphęra inſcripti CODP ex præced. propoſ. 36.

Coni quoque ſuperficies MNQ erit ad coni OPR in duplicata ratione chordę NM ad chordam OP, quę eſt eadem ex 35. lib 6. ac HI diametri ad CD diametrum, & ideo habebit proportionem, quam GF ad CD, & quam cum ſit eadem ex propoſ. 72. tract. 24. ST ad OP. Cum ergo ſit totus conus HIQ ad totum CDR, vt ablatus MNQ ad ablatum OPR quoad ſuperficiem, erit etiam reſiduum fruſtum conicum HIMN ad fruſtum conicum CDOP in ſuperficie, vt tota HIQ ad totam CDR ſuperficiem, & ideo in duplicata ratione HI ad CD, quę eſt GF ad CD, & quę vt dictum eſt ſuperficiei fruſti conici GFST ad ſuperficiem fruſti conici CDOP: Et ita argumentaberis de alijs ſegmentis conicis, vt vt multiplicatis.

Quare cum ſingulæ fruſtorum conicorum ſuperficies ſphęra LHKI inſcriptorum ſe habeant ad ſingulas ſuperficies conorũ ſphęra ACBO inſcriptorũ, vt conicę ſupficies ſphęroidi ĩſcriptę ad eaſdem conicas ſuperficies ſphæra inſcriptas, etiam omnes ex prop. 17 lib 5. Elem. taliter erunt ad omnes. Quamobrem tota ſuperficies fruſtorum conicorum ſphæra LHKI inſcriptorum ſe habebit ad totam ſuperficiem figurę ſolidę conorum ſegmentis conflatæ ſphęra ACBO inſcriptę, vt ſuperficies figurę ſolidę ex fruſtis conicis in ſpheroide Elliptica inſcriptę ad eandem ſuperficiem figurę ſolidę ACDB. Quare ex prop. 17. lib. 5. ſuperficies figurę ſphęra LHKI inſcriptę ęquabitur figurę in ſphęroide inſcriptæ AGFE; cum eidem eandem obtineat proportionem; quam GF ad CD, vel quàm ſuperficies Elliptica AUFE ad circuli ſuperficiem ACDB.



Quod cum ita ſit modo oſtendendum eſt ſuperficiem quoque ſphęrę HKIL eſſe ęqualem ſuperficiei ſphęroidicę ACAF. Id autem oſtendetur. Non enim eſt maior, aut minor ſuperficies ſpęrę LHKI ſuperficie ſphęroidali. Ergo æquabitur. Namq; ſit maior ſuperficies LKHI ſphęrę. Tunc ſuperficies LSHI dicet ad ſuperficiem ſphęrę ACBO maiorem proportionem, quam ſuperficies ſphęroidis Elliptici AGFE; ſit itaque V ſuperficies illa, in qua dicit maiorem proportionem; ita quod ſi illa à ſuperficie ſphęrę LHKI abſcinderetur; tunc eandem proportionem diceret ad ſuperficiem ſphęrę ACBO quàm ſuperficies ſphęroidis Elliptici AGEF. Inſcribantur itaque tot ſegmenta conica in ſphęra LHKI; donec differentia, quę inter ſuperficiem ſphęræ mediat, & inſcriptam figuram ſit minor quantitate V, igitur figura inſcripta ſphęrę LHKI dicet maiorẽ proportionem ad ſuperficiem ſphęricam ACBO, quam ſuperficies ſphęroidis elliptici AGEF, cum ad hoc, vt diceret eandẽ tota differentia V ipſi figurę inſcriptę ſuperficiei debuiſſet deficere. Quare tantò maiorem proportionem dicet ſuperficiei inſcriptę figurę conicę ADCB, & tantò dicet maiorem proportionem, quam figura inſcripta ſphęroidi, quę ſuperficie ſphęroidis minor eſt. Sed ſupra oſtenſum eſt dicere eandem. Ergo diceret eandem proportionem, & maiorem ad eandem figurę conicę inſcriptę ſphęrę ACBO ſuperficiem, quod eſt abſurdum.

Quod

Quod si dicatur ad sphęricam superficiem ACSD superficies LHKI minori in proportione, quàm sphęroidalis superficies AGIF sit assignata differentia V, quę si deficeret sphęroidali superficiei, tunc diceret eandem proportionem. Inscribantur itaque in sphęroide tot segmenta conica, donec differentia, quę intermediat inter sphęroidis superficiem, & superficiem conicorum segmentorum inscriptorum sit minor superficie V. Igitur figura Ellipticę sphęroidi inscripta dicet maiorem proportionem ad superficiem sphęrę ACSD quàm superficies sphęrę LHKI, cum vt diceret eandem deberet illi deficere tota differentia V. Ergo multò maiorem dicet ad figurę conicę inscriptę eidem sphæ1ę ACSD, quę minor est, & multò maiorem, quàm figurę ex segmentis conicis conflatę sphęrę LHKI inscriptę superficies, quę minor est. Sed supra ostensum est, quod dicebat eandem figura sphęroidi inscripta ad figurę conicę superficiem inscriptę sphęra ACSD, quam conicę figurę superficies sphęrę LHKI inscriptę. Ergo diceret eandem, & maiorem, quod est impossibile.

COROLLARIVM.

EX hoc doctrina clarè deducitur idem dicende segmentis sphęroidalibus V.g. de segmento STB, nempe quod eius superficies sit æqualis segmenti sphęrici NMB superficiei, cuius subtensa MN sit media proportionalis inter subtensam seu applicatam ST, & chordam OP: Eadem enim prorsùs demonstratio valet, vnde eam non repilcabimus. Igitur cognosces sectoris sphęroidalis superficiem XSBTX, siquidem illa constat superficie conica SXT, & superficie segmenti sphęroidalis STB, nempe æqualis superficiei segmenti MNB, sphæræ. Hic verò etiam deduces sphęroidalem superficiem ADEF, esse quadruplam circuli LHI a talis est enim superficies sphęræ HAIL, cui æquatur respectu sui circuli, ceterasque similes proportiones ex tuo ingenio venaberis.

EXPENSIO V.

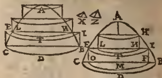
De superficie cuiuscumque corporis circularis ad axem suum recti.

CVm multa dentur corpora, quę neque conoidem parabolicum aut ellipticum imitantur, sed videntur omnino irregularia, videndum tamen est an illorum aliquo modo area inueniri possit, loquor autem de illis, quæ super suam basim directè, normaliterque insistunt.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

* *Omne corpus, quod ex plano axem circa suum circumuoluto formatur, habet planum per axem ad superficiem conuexam in ea proportione, qua basis diameter ad peripheriam basis.*

SIt corpus ex parabola constans rectum ad axẽ cuius superficiei plani per axem ductæ nota sit quantitas. Dico, quod ex hac inueniri poterit etiam quantitas eius superficiei conuexæ. Nam planum per axem ita se habet ad superficiem conuexam, vt diameter BC ad peripheriam BCD.



Nam sic superficies BAC plana non est ad conuexam BACD, vt BC diameter ad BDC peripheriam. Erit ergo V. g. superficies plana BAC ad conuexam BACD in maiori proportione quantitate Z; tali modo, quòd si quantitas Z à superficie plana BAC tolleretur; tunc ea superficies plana BAC esset ad conuexam corporis dati BACD, vt BC diameter ad peripheriam BDC: Inscribantur itaque tot rectangula donec superficies eorum minùs differat à superficie plani per axem ABC, quam quantitas X ex prop. 1. Tr. 30. & sit hæc minor differentia quantitas X. Ergo quia rectangulorũ EP, & SH, & cæt. inscriptorum series minus differt à superficie plani per axem BAC, habebunt maiorem proportionem ad superficiem conuexam corporis dati BACD, quàm diameter DC ad peripheriam BDC: Verùm, vt BC diameter ad peripheriã BDC, ita est FO diameter ad peripheriam FMO, & ita est rectangulum inscriptũ EP ad superficiem frusti cylindrici OMFE cum sint superficies eiusdem altitudinis, at vt FO rectangulum ad MOFB superficiem cylindricam, ita est HL rectangulum ad NLH superficiem cylindricam ex prop. 1. lib. 6. cum sit eiusdem altitudinis rectangulum illi superficiei æquale ex pr. 4. tr. h. Quare ex prop 17. lib. 5. tota series rectangulorum ad totam seriem superficierum conorum conuexam erit, vt diameter aliquis V. g. FO, vel BC ad peripheriam aliquam puta BMO, vel BDC. Sed rectangulorum inscriptorum omnium superficies ponitur habere maiorem proportionem ad superficiem conuexam corporis dati BADC; quàm diameter BC ad peripheriam BDC. Et superficies eadem rectangulorum inscriptorum habet eandem proportionem ad superficiem ipsorum cylindrorum conuexam, quam BC diameter ad BDC peripheriam. Ergo cùm eadem planorum superficies rectangulorum inscriptorum ad conuexam corporis dati BADC habebat maiorem proportionem, quam ad cylindrorum conuexam superficiem ex 12. lib. 5. erit maior cylindrorum superficies, quam continentis corporis BADC, quod est absurdum.

Quod si ponas obtinere superficiẽ per axem BAC planã ad superficiem conuexam corporis dati BADC minorem proportionem: sit differentia quãtitas Z, quæ si adesset, addita superficiei planæ; tunc esset vt diameter BC ad peripheriam BDC; Tunc circumscribantur rectangula adeò multiplicata, vt differentia X sit minor, quàm Z, quam obtinent à superficie plana BAC plani per axem ducti, & erit adhuc minor proportio rectangulorum circumscriptorum ad conuexam superficiem BADC corporis dati; quam BC ad BCD: Fiant ita, vt priùs frusta cylindrica circa rectangula. Rectangulaque

ad illorum omnium superficiem etunt, vt BC ad BDC. Cum itaque eadem rectangulorum superficies ad superficiem cylindrorum habeat eandem proportionem BC ad BDC, & ad superficiem SADC corporis dati minorem, quam BC ad BDC erit maior ex 12. lib. 6. superficies corporis dati BANC licet inscripta superficie circumscripta rectangulorum; quod est absurdū. Cū ergo superficies plani per axē dicat, nec maiorē proportionem, nec minorem proportionem ad conuexam superficiem, quam diameter BC ad peripheriam BDC; Dicet itaque eandem proportionem: quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Itaque cum nota sit dictis pr. 33. Tract. 30. superficies plani ducti per axem conoidis parabolici, quæ est parabola, etiam superficies eius conuexa patebit sine basi considerata. Nam ita se parabola per axem ducta in conoide parabolico se habebit ad superficiem conuexam ipsius, vt diameter, seu applicata ad peripheriam circuli, quæ eo semidiametro deducitur.

EXPENSIO VI.

De superficie sphæræ mensuranda.

Archimedes, dum sollicitatem sphæræ perquireret, hoc nobis indigne problema reliquit, quo sphæricam superficiem summa facilitate mensurare possemus, quod eum apud ipsum obscurè omninò tradatur, nos clariùs, quàm fieri possit explanare curabimus.

THEOR. I. PROPOS. XXXIX.

Chordæ parallelæ coniungentes latera æqualia figuræ circulo inscriptæ parium numero laterum, omnes simul tamquam vna ad diametrum eam habent proportionem, quam chorda vnum latus diametro coniungens ad ipsum latus.

Sit pr. 40. fig. duodecim V. g. laterum circulo inscripta. Dico, quòd chordæ BC, BF, HG, IT, ML coniungentes latera, & parallelæ eam habent proportionem ad diametrum AD, acceptæ tamquam vna linea, quam habet chorda CD subtensa omnibus arcubus semicirculi vno dempto ad ipsum latus CA subtendens arcum reliquum; quod vt ostendatur ducantur rectæ de vna ad aliam BC, HF, IG, & LI, quæ erunt parallelæ, vtpote æqualis latera coniungentes, & ideo omnia triangula AOB, OCB, PRQ, QPS, & cæt. erunt æquiangula, vnde ex El. l. 6. prop. 4. Cor. habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, erit que vt BO ad OA, sic CO ad OP, & ita BQ ad QP, & sic FQ ad QR. Sic quoque GS ad SN, & IK ad KN, & cæt. Quare sicut vna ad vnam, sic omnes ad omnes ex prop. 17. lib. 5. Ideo linea ex omnibus chordis BC, FB, GH, TI, ML extensa, ita erit ad totam diametrum AD, vt vna V. g. OB, vel OC ad vnam OA; Sed vt est OC ad OA, ita est CD coniungens latus diametro ad AC latus ex prop. 8. lib. 6. ob rectangulorum similitudinem. Ergo quam proportionem omnes CB, FB, & cæt. ennumeratæ quinque, velut vna V. g. YH ad diametrum, hanc habet CD chorda prædicta ad latus CA.

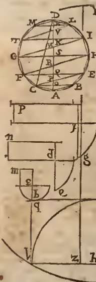
COROLLARIVM.

Collige ita, esse latus ex aliquibus chordis cum dimidia compactum V. g. CB FB, & dimidia HS ad diametrum intereceptum AS, vt CD ad CA ratio est, quis dicunt eandem proportionem ea præced. propositione, quam OB ad AO, & candem dicit similiter CD ad CA.

THEOR. II. PROPOS. XL.

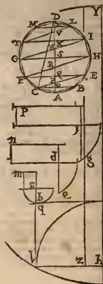
Corporis ex portionibus conicarum superficierum constantis in sphæra inscripti superficies æqualis est circulo; cuius semidiameter possit quadratum æquale rectangulo, cuius vnum latus omnes frustorum conicorum diametros æquet, & alterum latus ipsorum.

Sit figura præcedens, sed intelligatur globosa, & sit LMO apex coni, cuius circulus basis ML diametro constet; Sic ILTM frustum coni, cuius basis circulus diametrum KI, possideat, & sectio, item circulus ML diametro LM gaudeat, & sic effare de alijs.



Inueniantur tantem circuli æquales superficiebus frustorum horum conicorum iuxta dicta propos. 32. huius; sitque proportionalis a b inuenta inter AB BO: inter OS rursus, & QS tamquam vna, & SS media pro portionalis d e. Sic in BQ, & SH tamquā vna, & SH media pro portionalis f g reliquę quoque tres inueniantur proportionales, quæ erunt tribus prędictis æquales, sicut ipsa tria rectangula, ex quibus prodeunt erunt æqualia, vt am, d n, & f p. Rectangula autem ex quibus mediæ proportionales inuentæ, si in vnum rectangulum

gulum ex 4. lib. 2. Elem. componantur. Quia primum ex OS efficitur pro vno latere secundum ex OS eodem, & BQ tertium ex EQ eodem, & SH, pro alio semper BA deseruiente cum BA: SS, EN, & cæt. ex Thesi æquentur semper, ideo dum singuli sinus replicantur lines h y ex omnibus sinubus duplicatis extensa æquabitur omnibus chordis BC, FE AF, HG, & cæt. Et ideo omnia rectangula sub eadē altitudine lateris AB erunt æqualia rectangulo ex AB pro vno latere, & quinque lineis chordisq; BE, & XF, & cæt. tamquam alio latere compacto, vt est ZY ex 4. lib. 6. si ergo inueniatur media proportionalis inter z h, & h y, quæ est l h, hæc quadratum constituet æquale ZI, & consequenter omnibus rectangulis sex, quorum duo sunt s m duo d n, & duo f n, & ideo etiā quadratis æqualibus quibus ex d e; s b, & f g. Quamobrem, si ex inuenta proportionali l h l tamquam radio constituatur circulus, hic circulus erit quoque æqualis omnibus sex circulis de duobus radijs æqualibus duobus lineę s b duobus lineę d e, & duobus lineæ fg; sed illi sex circuli ex pr. 32. h. sunt æquales superficiebus frustorū conicorū, omniū quæ figurā solidam in sphæra inscriptam componunt: Ergo, & circulus ex semidiametro h l, cuius quadrantē cōtinet quadratum h q illam superficiem æquabit.



COROLLARIVM.

QVia ex Cor. pr. 39. est CD ad CA, vt aliquę chordæ V. g. CB, & XF cum dimidia HS ad AS; quia probatum est in ipsis ita esse prædictas duas cum dimidia ad AS, vt SO ad OA, & ideo rectangulo ex BC, BF. & dimidia HS tamquam vno latere & ex AB pro alio latere quadratum æquale habebis latus. quod assumptum pro diametro describet circulum æquale superficiei corporis conici AHB inscripti portioni alicuius sphæræ.

THEOR. III. PROPOS. XLII.

Superficies figuræ solidæ in sphæra inscriptæ est minor quadruplo circuli maximi eiusdem.

SIt figura duodecim laterum, vel talium, quæ quaternario numerentur in sphæra AHCD inscripta, datusque sit circulus eius superficiei ęqualis descriptus diametro l h ex præced. & quia demonstratum est primo pr. ita esse h y compacta ex omnibus quinque chordis ex FB, & cæt. ad diametrum, vt est CD chorda ad CA latus; Si constituatur ex medijs nimirum AD, & CD rectangulum hoc erit æquale rectangulo ex extremis constituto AC, & h y ex propos. 17. lib. 6. Elem. vt duod. propos. huius Cor. ideoque quadratum hq ex h l æquale prædicto rectangulo Z Y erit etiam æquale rectangulo ex AC, & CD constituto; sed hoc est minus, quam quadratum ex AD. Ergo quadratum l h est minus quam quadratum diametri. Quare, & quadruplum ex h l quale est quadratum ambiens circulū, cuius radius h l, quod æquatur figuræ inscriptæ solidæ superficiei ex 40. h. erit minus, quā quadruplum quadrati ex AD; sed sicut se habet quadratum ad quadratum, ita circulus ad circulum, ideoq; circulus quoque, cuius quadrans in h q æquans superficiē figuræ sphæra inscriptæ minus erit quadruplo circuli maximi, veluti est AHCD,

THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Figuræ solidæ circa sphæram descriptæ superficies maior est, quam quadruplum maximi sphæræ circuli.

SIt sphæra ABCD circa quam sit duodecim laterum circumscripta figura solida ex frustis conorum, vt præcedens integrata quamobrem rectangulum ex chorda ED, BD diametro confectum æquabitur rectangulo ex EA latere, & linea æquali omnibus quinque chordis simul, quarum vna est AF, cui, & æqualis quadrati latus tamquam radio facit circulum æqualem superficiei figuræ solidæ sphæræ inscriptę ex 41. h. sed hoc rectangulū ex DE, DB est maius, quā quadratum ex diametro sphærę comprehensę OH in fig. conica; quia habet latus BD maius; latus verò BD est æquale diametro OH, quòd ob parallelismum NA, PX fit duplum radij PX. Ergo rectangulum ex DE DB compactum erit maius quadrato ex diametro sphæræ comprehensæ OH. Quapropter, & si fiat quadratū æquale rectangulo à DE, & DB lateribus comprehenso erit quoque maius, quam quadratum ex diametro

metro OH, consequenterque quadroplum eius erit maius quadr uplo quadrati ex diemetro OH sphęrę. Circulusque in eo Inscriptus circulo quadruplo maximi circuli sphæræ, sed ille circulus maior quadruplo maximi sphæræ circuli est æqualis superficiei figuræ solidæ sphæra circumscriptæ, & in maiori sphæra Inscriptæ, quia est æqualis quarta eius pars rectangulo ex OS MB, quòd æquatur rectangulo pro vno latere ex chordis quinque cumpacto, & pro alio ea SB, cuius quadrati latus



Pro radio vsurpatum circulum facit illius figuræ solidi circumscripti sphæræ superficiei æquale quale latus in præced. fig. est h i, quòd quadratū, quia æquale est rectangulo ex quinque chordis pro vno latere, & pro alio ex SB, quod æquatur DX, & DB rectangulo maius quadrato ex OH diametro, si quadruplicetur, erit quoque maius quadruplo quadrati ex OH, & ideo circula in eo quadrato quadruplo maiori inscriptus, erit quoque maior circulo quadruplo maiori, quàm circulus ex OH.

Vnde, & fig. conicę circumscriptę superficies est maior quadruplo maximi sphęrę circuli ex OH.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Quæcumque sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur.

Sit circulus SIF sphæræ maximo circulo BGC quadruplex. Dico, quod is circulus est ęqualis superficiei sphæræ. Nam si talis non est, erit, aut maior, aut minor, sed nec maior, nec minor esse potest: ergo æqualis.



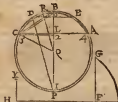
Nam si est maior, erit aliquis circulus alius æqualis superficiei figuræ solidæ circulo circumscriptæ, qui vel æquabit prædictum circulū, vel eo erit minor: siquidem si VIS affirmetur maior superficie sphæræ, & superficies omnis circumscriptæ sphæræ corporis solidi, sit quoque maior; dabitur aliqua superficies solidi corporis inter infinitas, quæ erit quidem maior superficie sphæræ, sed minor prædicto circulo IFS, si enim V. g. superficies corporis solidi 12. laterum est nimia, potest assumi 24. laterum, aut 48. aut 96. & sic in infinitum donec decrescat vsque quo sit minor, vel ęqualis circulo IFS, cum ergo quælibet superficies corporis solidi sphæra circumscripti sit maior ex 42. h. quadruplo circuli maximi, foret etiam maior circulo prędicto IFS, quod esse nequit, cùm minor electa sit.

Sit rursus superficies sphæræ minor, ISF quadruplum circuli maximi BGC ipsius sphæræ. Dabitur itaque eodem modo circulus maior, quàm IFS, qui æquabit aliquam superficiem corporis solidi in sphæra inscripti, siquidem si maiorem non det fig. 12. laterum potest assumi 24. laterum aut 48. aut 92. & sic in infinitum donec fiat maior, quàm circulus IBF minor superficie sphæræ. Sed hic circulus est minor quadruplo maximi circuli sphæræ ex 41. h. ergo esset maior, & minor circulo FIS, quod est absurdum cum itaq; nec maior, nec minor esse possit, erit ei æqualis, & ideo superficies sphærę quadrupla erit circuli eos.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Portionis figuræ conicę superscriptæ sphæræ superficies est maior circulo, cuius radius sit chorda à vertice portionis ad basim eius ducta.

Sit portio sphæræ O34. cuius vertex O basis 34. chorda à vertice ad basim educta O3. circa quā portionem sit descripta figura solida conica æquilatera AEBDC, & circa eam circulus AECP. Deinde esto circulus, cuius semidiameter sit latus quadrati æquale rectangulo sub latere BO, & omnibus chordis latera figuræ coniungentibus, & dimidia basi contento, vt est latus FO, cuius quadratum æquat parallelogrammum FH, HK, cuius latus FH æquat BD chordam latera figuræ coniungentem, & CL semibasim, & alterum latus FH æquat XV, & ideo superficies corporis conici inscripti AEBDC.



Probandum est ergo, quod quadratum ex FG sit maius quadrato O3. & consequenter circulus, cui pro radio deseruit maior circulo, cui radius est O3. Quia ergo ex Cor. propos. 41. h constat, quod FH sit ad LS, PD ad SO, ideo rectāgulum sub medijs LS, PO erit æquale ei, quod ab extremis comprehenditur rectāgulo FH, & BD, idest rectangulum ex FH, HK. Rectangulum verò hoc LX, PD est maius rectangulo ex IO O2. vt demonstrabo, cui rectangulo IO. O2. quadratum O3. est æquale, vt pariter infra ostendam, cum ergo rectangulum PO, & LS æquale quadrato OF, & ideo rectāgulo ex HF, HK sit maius rectāgulo IO O2. & quadrato O3. patet propositum, nimirum quod circulus ex FG radio factus æqualis superficiei figurę circumscriptæ portionis sphæræ ex Coroll. prop. 40. h. erit maior, quā circulus ductus ex O3. chorda à vertice O. ad basim 23. deducta, & ideo circūscripta superficies.

Duo itaque remanent ostendenda primo quadratum

drstum O3, esse æquale rectangulo IO. & OA. lateribus clauso; secundò rectangulum BL, PD esse maius rectangulo prędicto ex IO. & OA. & consequenter etiam quadrato O3.

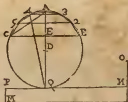
Primum sic ostendo ex pr.35. l. 3. Quadratum A 3. est æquale rectangulo IA. & AO. cui si addas quadratum ex 2O. fiet totum rectangulum IO. OA. æquale duobus quadratis ex 2O. & A 3. sed istis est æquale quadr. O3. ex. 47. l. 1. ergo hoc quadr. erit æquale etiam rectangulo IO. & OS & ecce primum.

Secundum verò, quod hoc rectangulum IO OA. sit minus rectangulo LB, PO. sic demonstro linea LB est maior, quam OA. cum triangula BCL, & O83. sint æquiangula, & minor sit 83. quam LC, & 3O. quam BC, & ideo etiam OS. minor erit, quam LB, alterum vero latus PD est æquale IO. lateri. Quia enim AB est medietas lineæ BD, & QR medietas diametri IB, ideo erit BR ad BO, vt AQ ad AI, & ideo etiam erit ita QR ad PO: quare PO erit etiam dupla lineæ QR, quę est semidiameter minoris sphæræ, & ideo PO eius diameter, & æqualis IO. quare rectangulum PO, BL æquale in latere PO maius in latere LB, rectangulo IO OA. erit ipso IO OA. absolutè maius, quod est secundum.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Portionis figuræ conicæ solidæ sphæræ inscriptæ superficies est minor circulo, cuius semidiameter sit linea à vertice portionis ad basim eius deducta.

SIt superficies portionis sphæræ BAC linea à vertice ducta ad basim BC sit AC; corporis conici inscripti sint æqualia latera B 2. & 23. 3 A, & cæt. quę rectis coniungantur 25. 34. Fiat rectangulum latere constans omnibus chordis, & radio basis æquale, nimirum rectis 2. 5. 3. 4 & EC, & pro latere habeat A 4. & sit MN, quibus lateribus inueniatur media proportionalis, & sit NO circulus, itaque radio NO erit æqualis toti superficiei illius corporis solidi sphæra inscripti ex Cor. prop. 40. huius. Quia verò ex propos.39. Cor. eadem proportio est omnium chordarum in portione cadentium cum dimidia, vt est PN ad EA segmentum diametri interceptum, quam Q 4. ad latus 4A ideo rectangulum ex medijs Q 4, & EA erit æquale rectangulo MN ex extremis ex pr 17. l 6. El. nempe A 4, & omnibus chordis cum dimidia, quæ linea est PN, hoc autem rectangulum est minus quadrato AC, vt ostendam, ideoque etiam MN, & ideo quoque quadratum ex NO, cum hæc tria inuicem sint



æqualia; & ideo, si ex AC fiat circulus, tamquàm radio erit maior, quam circulus factus ex radio NO, qui ęquatur superficiei fig. conicę inscriptę ex Cor. pr. 40.

Sic verò demonstro quadratum AC esse maius rectangulo ex Q 4, & EA lateribus extructo. Nam est æquale rectangulo ex QA, & AE confecto; Sed hoc rectangulum est maius rectangulo Q 4 EA, quod habeat latus QA maius, quàm Q 4: Ergo etiam quadratum ex AC rectangulo illi maiori QA, AE æquale erit maius rectangulo Q 4. AE; quod autem quadratum AC sit rectangulo QA, AE æquale, patet. Nam est æquale ex pr. 47. l. 1. quadratis EA, & EC; at quadratum EC est æquale rectangulo QE, EA ex 35. lib. 3. cui si addas quadratum EA fiet vnicum rectangulum QA, AE ob eandem altitudinem EA æquale duobus quadratis ex EA, & EC, & consequenter quadrato AC; Cum ergo quadratum AC sit æquale rectangulo ex QA AE; erit maius rectangulo Q4. AE, & rectangulo MN, & quadrato ex NO. Vnde, & circulus illo radio AC descriptus erit maior circulo descripto ex radio NO.

THEOR. VIII. PROPOS. XLVI.

Superficies cuiuscumque portionis sphæræ minor dimidia est æqualis circulo, cuius radius est chorda à vertice portionis ad basim deducta.

SIt eadem fig. quæ superioris propos. BACQ, & portio eius BAC minor dimidia sphæra. Sitque chorda à vertice sphęræ deducta AC, ex qua tamquam radio fiat circulus. Dico hunc circulum esse æqualem sphæræ portionis BAC superficiei.

Probatur. Nam si non erit ęqualis, erit aut maior, aut minor; sed nec vnum, nec aliud esse potest. Ergo erit ęqualis circulus ex AD superficiei sphęrę.

Probatur, quod maior esse nequeat. Nam si maior est, circumscribatur ipsi portioni conicum corpus, vt propos. 44. huius factum est, adeo multiplicatis lateribus, vt eius superficies sit quidem maior sphęra, vt semper est, sed tamen minor circulo ex AC, qui maior ex superficie sphęrica prędicatur; tuncque circulus AC descriptus contra ostensa propos. 44. huius erit maior superficie conici corporis circumscripti, quod est absurdum.

Probatur quoque, quod non possit esse minor; tunc enim poterit describi in sphęra corpus conicum adeo lateribus multiplicatis, vt sit minor quidem eius superficies superficie portionis sphęrę; sed maior circulo ex AC, qui superficie portionis sphærę minor dicitur, & ita sequetur contra ostensa in præc. propos. quod superficies circuli AC possit esse minor, quam corporis inscripti conici superficies, quod absurdum item est.

Cum ergo circulus ex AC radio, nec maior, nec minor esse possit superficie segmenti sphęrici BAC, ipsi erit æqualis, vt asserit propositio.

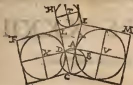
THEOR. IX. PROPOS. XLVII.

Superficies cuiuscumque portionis sphæræ maior dimidia est æqualis circulo, cuius radius est chorda à vertice portionis ad basim deducta.

SIt sphęra ABCD, eius portio maior dimidia sit BCO. Ducatur diameter AC perpendicularis sectioni AD; deinde duæ chordę AD, OC. Fiatque ex diametro CA, tamquã semidiametro circulus; erit

hic

hic enim erit quater maior circulo maximo sphæræ datæ, qui est ASCD; quia etiam quadratum, in quo concluditur est quadruplo maius, vt patet in quadrato CM, cum habeat proportionem lateris

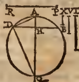


duplicatam, eritque çquale duobus circulis ex AD radio, & DC radio constrctis. Nam est quadratum CM çquale duobus quadratis IH, CF: quare, & circulis ex centro T, & centro X inscriptis in illis ea centro V descriptus circulus erit æqualis. Circulus autem IH est çqualis superficiei portionis sphçrç BAD, vtpote chorda AO, tamquam semiradio descriptus cum IL sit dupla AO ex 4.l.6. ob duplam CI ipsius CA. Ergo circulus X çqualis, cum T, circulo alteri V, & ideo toti superficiei sphçrç, erit çqualis se solùm residuç superficiei portionis sphçrç SCOA.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

* *Datam sphæram, sic secare plana superficie, vt portionum superficies similem cuicumque portioni datæ retineant proportionem.*

*Sit sphçra data BADQ, & semidiameter AQ; sitque proportio data, quam vnum ad duo scilicet X ad I. Inueniatur duabus X, I media proportionalis V, diuidaturque diameter AQ ex Cor. 1. prop. 13. lib 6. iuxta proportionem, quam habet X ad I, & ducatur à puncto diuisionis H normalis HD, & per H agatur planum BD. Dico sphçræ superficiem esse diuisam in proportione data.



Probatur. Nam ducta AD, QO ex præced. pr. 46. & 47. superficies portionis BAD est æqualis circulo cuius radius est AO: item superficies sphæricæ portionis BQD est æqualis circulo, cuius radius est QD. Quia itaque triangula sunt çquiangula ADH, HDQ erit AH ad AD, vt HO ad DQ, & *permutando* erit AH in proportione ad HO, vt AO ad DQ; vt autem AH ad HO, sic est HO ad HQ ex Cor. prop. 16. lib 6. quare erit AH ad HD, sic X ad V, quia etiam V est media proportionalis inter X, & I, sicut HO est media proportionalis inter AH, & HQ, quç ex constructione sunt in eadem proportione, vt X ad I, & ideo, vt X ad V lineas, sic erit AH ad HD, & AD ad DQ, & ideo vt AH ad tertiam HQ, vel X ad I ita ex 21. lib. 6. Cor. quadr. AO ad quadr. OQ. vt autẽ quadr. AO ad quadr. DQ; sic circulus inscriptus ad circulum inscriptum; vt autem circulus inscriptus in quadrato AD ad circulum inscriptum in quadrato DQ, sic quadruplum circuli AO ad quadruplum circuli DQ: Sed quadruplum circuli inscripti quadrato AD est æqualis superficiei portionis sphæricæ BAD, & quadruplum circuli QO quadrato inscripti est çqualis superficiei portionis sphæricç BQO. Ergo ex 16. lib 6. vt X ad I, sic sphçricæ portionis superficies BAC ad sphæricæ portionis BQO superficiem.

PROBL. II. PROPOS. XLIX.

* *A sphæræ superficie portionem abscindere æqualem superficiei circuli dati; dummodo semidiameter circuli diametro sphæræ sit minor.*

*Sit datus in fig. propos. præced. semidiameter circuli PR, & ex propos. 1. Elem. 4. accommodetur in data sphæra maximo circulo BAOQ ducto priùs diametro AQ à puncto Q, & sit V. g. QD, ducatur deinde OS planum normale ad AQ dico BQO esse portionem sphæræ, quæ habet superficiem æqualem circulo, cuius semidiameter PR.

Probatur. Quia PR effecta est chorda QO: chorda vero QD vsurpata pro radio describit circulum æqualem circulo ex PR, quod sit ei æqualis, & item æqualem superficiei portionis sphçræ, DQB quam secat BD basis, vt supra ostensum est.



TRACTATVS XXXII.

De superficiebus corporum in planum redigentis,

PRoiectio superficierum corporearum, quę in planum extenduntur, aliquibus videbitur forte non omninò Mathematica, cùm per puncta, per quæ habili manu lineæ flexæ ducuntur supetficies eiusdem rationis, & quantitatis, ac illæ, quæ circumambiunt corpora desctibantur: Verùm si istæ consideret, quod & Ellipticæ, Parabolicæ, Hypetbolicæque superficies, ita delineantur, sicut, & Quadrattices, & Asymptoticæ lineæ sic descriptæ in præcedentibus furere; non infitiabitur tigorosam esse hanc superficierum corporeatum in planum extensionem, maximè, quia fundatur omnino in Orthographia, quæ certè Mathematica descriptio est. Verum tamen est, quod singulis proiectionibus ostensiones non adferemus cùm eas supta tract. 25. satis preduxerimus,

EXPENSIO I.

De superficiebus cylindricis in planum extendendis.

PRæssumo tamquam euidens, quo magis multiplicantur Inscripta plana, eorum superficiem magis accedere ad superficiem corporis conuexi, in quo inscribuntur: Siquidem In Cono recto BAI si sit inscriptum triangulom BAF, eius superficies erit breuissima ex def.7. tract 3. quæ inter eius iineas terminatrices interiaceat, ergo erit breuior, quam BHF superficies coni, & idem dicas de alijs æqualibus inscriptis: Si verò in segmēto FBA coni; duo alia triāgula Inscribātur BAH, & AFH hæc simul erunt maiora, quā BAF, siquidem BH, & FH triāguli BFA latera sunt maiora



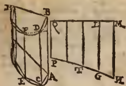
simul, quam BF, triangula verò BAH, & AFH sunt maiora, quam BAF, quòd sint æqualis, & terminent in maiorem altitudinē, quam BAF. Quare simul dicent maiorem proportionem ad BHAF superficiē coni, quàm triangulum BFA ex 8.l.5, & idem dicas de alijs BAQ, AQT, & cæt. æqualibus. Sed adhuc erunt minora superficie coni cum superficies triangulares inscripiæ, vtpote planæ sint breuissimæ inter lineas BA, & AQ V g. non autem conicæ, globosæ inter easdem lineas BA, & AQ, & alias conclusæ. Quare semper magis fit accessus ad æqualitatem, quò magis multilaterum inscriptum facies multiplicat, cum semper maiorem proportionem globosæ superficiei, cui inscribitur dicat.

THEOR. I. PROP. I.

Si sint trapezia tot plana, quæ altitudinem trapeziorum cylindro inscriptorum æquent, & latera eiusdem longitudinis obtineant, quam inscripta cylindro: hæc omnia simul æquabunt superficiem multilateri corporis cylindro inscripti.

PRobatur. Nam ex propos.13. tract.29. trapezia æqualis altitudinis, & basium æqualium sunt inuicem æqualia. Cum itaque trapezia DADE, & cæt. inscripta Cylindro sint æqualis altitudinis, & basis ex thesi, ac MO, LT, & cæt. trapezia plano extensa. Consequenter singula singulis erunt æqualia. Proptereaque ex 18.lib.5. omnia simul trapezia Cylindro inscripta, idest superficies multilateri in ABEFGH æquabitur superficiei extensæ MNQP.

PROBL.



PRORL. I. PROPOS. II.

Cylindri concaui ab alio cylindro secti rectangulè superficiem, partesque eius proijcere, & deinde illam in planam extendere.

SIt datus Cylindrus concauus, cuius basis, seu annuli dimidiū sit CASDFH sectus à duabus superficiebus cylindricis, quæ proiectæ ex 9. prop. tract. 26. sint KMN, & OPQ, inter quas interceptus in sectione AS in figura 11 t videre licet, cylindrus intelligatur. Et primò partes cylindri intercepti sint proiciendæ, atque adeo tota eius superficies. Ducatur circulus medius, & vtcumq; diuiso aliquo eorum V. g io part. 6. ducantur radij, seu radiorum portiones FLA, t 2 3, & à punctis, in quibus circulos secant, demittantur perpendiculares ad BC, quas distinctionis gratia ab extrinseco semicirculo profectas trahemus continuas, vt 3 4. & à medio punctatas, vt 2 5. ab interno interruptas t 6. & sic ab alijs punctis quoq; 10 t t. 12. & B, G, D, & vlterius producemus vsque ad 7.8.9. nempe vsque dum secent duos circulos KMN, & OPQ, quibus cylindri secantis insistunt superficiea, inter quas, superficies cylindri secti intercluditur. Et KONQ erit cylindri superficies proiecta, tum quoad totum, tum quoad singulas partes.

Probatur. Nam KMN, & OPQ sunt cylindri ad planum recti superficies proiectæ, quoniam ex pr. 8. tract. 26. superficies omnis perpendicularis plano in lineam transit, cum sit eadem, ac superficies proiectrix, & ideo in plano fit sectio superficiei proiectricis. Talis est autem superficies cylindri secantis, cùm ponatur orthogonalis plano. Vnde in lineam transibit. Sectio verò eius cum plano circulus est aut ellipsis; ergo proiectio eius talis erit. Rursus si in cylindrica superficie secta partes lineis parallelis axi distlocte intelligantur, cùm axis plano orthographo parallelus sit omnes erunt parallelæ ex propos. 6. & æquales ex 5. prop. tract. 26. distantiæ verò earum ad inuicem mensurentur arcu normali, & sint 1 F, 10 t, & cæt. Ideoque distantiæ earum proiectæ ex prop. 8. tract. 26. erunt partes diametri 28 19. & aliæ. Vnde PM 6 9. & aliç erunt partes proiectæ quoad latitudinē, & distantiā ab inuicē. Sed etiā quoad longitudinem. Nam cum sint parallelæ plano orthographo æquales erunt illis, quas KMN, & OPQ secantes cylindricę superficies detrūcant à superficie cylindrica originaria secta DFH. Siquidem, vt diximus KMN, & OPQ proiectricium superficierum sectiones sunt. Vnde 6 M P 9 erit superficies cylindri DFH proiecta, & sic de alijs partibus dicas, vnde totus p partes tali modo proijcietur, & iam apparatus erit completus necessarius ad superficiem quæsitam inueniendam.

Quare seorsim ducatur recta RT, & in ipsa circuli interni, (si superficies interus desideretur) partibus FI, t 10 & 10. D partes çquales assumātur, vel certè ipsa linea ST per quadratricem, vel per computum, vt supra docuimus, vel practicè minimas partes arcus FI, 1 10 & 10 D trāsferendo, & deinde in tot numero partes, quot arcus G, 10. 1 F, diuisus est, diuidatur, ducanturque perpendiculares t3 15. 14 16. R t7. T t8. deinde assumatur interuallum 19. M, & transferatur à linea TR, & fit T 23. & 28 6; fit t3. 24. sic B7. 28. mensuret 24. 25. & tandem D 29. distantiam donet R 26. perque hæc puncta flexa ducatur 26. 25. 24. 23.

Idem fiat de alijs punctis in arcu OQ repertis. Nam assumptis interuallis t9. P transferatur in T t8. sic 28. 9. in t3. t5. sicque alis interualla 27. 30. in t4. 16. & D 3t. in R 17 perque puncta reperta flexa ducatur 17. 16. t5. 18. quæ terminabit superficiem internam 26 23. t7. 18. quadrantis cylindri D 10 t 8, & idem fit de superficie externa assumendo distantias à linea BC ad arcum KM, & ad arcum OP, sed in lineis continuis à punctis extrinsecis A 3 12 proficiscentibus.

PROBL. II. PROPOS. III.

Superficies coniunctiuas eiusdem Cylindri perquirere.

SI annulus solidus esset diuersis fagmentis compositus, vt solent portarum arcus lapidei, quæritur, quænam esset superficies ea, qua coniungeretur lapis ad lapidem.

Sit igitur exquirenda superficies, secundum quam segmentum 31 FA, segmento 3 1 12 10. coniungitur, quia t3. t5. pertinet originatiuè ad punctum t. Ideo illi lineæ deberet applicari. Nam illa dat longitudinem illius internam 24 15. Ab hac ergo linea t3. 15. mensuretur interuallum 1. 2. & fit 13. 37 & interuallum 2 3. & fit 37 36. ducanturque perpendiculares 37 35. & 36 34. ad lineam RT. Mensuretur exinde distantia 2t. 5. à puncto 37. vsque ad 33. & 20 4. à puncto 35 in 32 & ducatur flexa portio Ellipsis 31. 33. 24. Rursusque accipiatur interuallum 21. 8. & 20. 7. & transferatur in 37 35. & 36 34. & per puncta 34. 35. 15. flexa ducatur, quæ erit portio Ellipsis, & erit superficies 31. 24 34. 15. quæ quçritur, nempe ea, secundùm quam segmentum A 3 1 F coniungitur cum segmento 3 1 t2 10.

Probatur verò primo propositio antecedens. Nam altitudo TA ex effectione est çqualis arcui normali D 10. 1 F; latitudo verò T t8. & cętere mensuratę linea T t8. & cęteris vsque ad R t 7. est æqualis latitudinis t9 P vsq; ad O 3t. erit superficies 23. 18 26. 17 altitudine quidē çqualis quadrāti DF, latitudine verò superficiei t9 P D 31. Vnde ex prop. t. h. çquabitur multilatero superficiei Cylindri inscripti inter superficies, alteram cuius sectio B t9 alteram cuius sectio OP intercepti.

Ita dicas de superficie RT 26 23. Nā altitudine quidē normali çquat quadrātē D 01 t F latitudine verò latitudinem D 29 M t9. Quare çquabitur multilateri superficiei inter superficies planam

cu.as,

cuius sectio D 19. & curuam cuius sectio R M. Quare si hæc minor R T 23. 26. subducatur ab illa R T 17. 18 remanebit superficies inter medis æqualis superficiei intermediæ inter superficies cylindricas, conuexas M N Q, K O O interceptę multilateri Cylindro inscripti: vnde iam multilaterum, si sit adeo multiplicatis lateribus inscriptum, vt superficies eius sensibiliter non differat à superficie cylindri etiam superficies 26. 23. 17. 18. à cylindrica superficie, quę efficitur in secum D F; continetur verò inter circulos, vel inter superficies, perpendiculares arcubus O P Q, K M N, æqualis erit.

Secundò idem probatur de superficie coniunctiua. Nam altitudo quidem 13. 36. est eadem, quæ 1. 3. longitudo, verò inter arcus K N, & O Q contineri debet eo in situ; quo lineæ 5. 8 & 4. 7. per illa puncta transeuntes intercipiuntur inter prædictos arcus; tales verò sunt ex effectione 34. 38. & 35. 33.

PROBL. III. PROPOS. IV.

Cylindri concaui superficiem internam inuenire à superficie angulari secti rectangulè.

SIt idem, qui superiùs Cylindrus concauus, seu cylindri quadrans B A F D, diuisus. vt supra, & lineæ similiter ductæ 1 40 44. & 2 41 43. & cæt. quę secent lineas angulares V P X, & Z R M, super quas, superficiea erectę intelligantur perpendiculariter ad axem cylindri, & erit portio cylindri proiecta præced. Etiam apparatus erit adornatus, vt ea co ex electio superficiei cylindricæ, quæ intercipitur inter latus V P X, Z R M, & superficiem concauá quadrátis cylindri in 1 10 2 texit, diduci queat.

Sit linea R T S, quæ exprimat sectionem B C Sitque portio 1 P quadrantis extensa super eam, & sit T 13. at 1. 10. æquet 13. 14. & cæt. perpendicularesque ad R S, vt superiùs ductæ sint, vt 3. 46 49 sic T 18. 50. & cæt.

Deinde sumatur distantia 19. P, & sit translata in T 18 rursùs 38. 40. & sit 13. 46. Ita 27 52. & æquet 14 47. & tandem D 52. & æquet 2 3. quibus punctis repertis ducatur flexa per illa 53. 47. 46 18. Idem fiat de alijs interuallis alteriùs angularis lineæ Z R M, nempe de interuallo 19. Y, qui erit T 50. & 22. 44. & erit 13. 49. itaque si per puncta 54. 48 49. 50. ducatur flexa, erit vndique terminata superficies 53. 18. 54. 50. quæ erit ea, quæ cylindri quadrantem interiùs texet.

Probatur verò, vt supra. Siquidem altitudo est T R, quæ est eadem ex effectione, quæ lineæ circularis P I 10. D, at latitudo superficiei R T 18. 53. eadem, quæ D 19. P 52 Rursùsq; latitudo R T 54. 50. eadé, quæ D 19. Y 95. ablata itaque prima longitudine, ab hac postrema remanebit 53. 18. 54. 50. ęqualis longitudini 52 P 95 Y; quę intercipitur inter lineas angulares, cum autę superficies interna cylindri quadrantis sit latitudine quidem æqualis 52 P 95. superficiei, cum inter superficies V P, Z Y cuius insistentes intercipiatur, longitudine verò quadranti P D, erit quoque æqualis longitudine, & altitudine superficiei 18. 53. 54 50.

At si quis vellet superficies coniunctiuas eodem modo operabitur, latitudines enim erunt eędé 13. 37. 36. à quibus ducendæ parallelæ 56.38. & 57. 59. & deinde distantia 21. 42 transportanda in 37. 56. sicut, & 20. 41. in 36. 57. & deinde ducenda est recta 46. 56. 57. Sic translatis interuallis 21. 43. in 37. 58. & 20, 45. in 36, 59. ducenda est recta 59. 58. 49 & sic habebimus superficiem coniunctiuã 59. 57. 46. 49. æqualis superficiei, cuius altitudo 3 2 1, longitudo verò inter parallelas 40. 44. & 41. 45. intercipitur, De qua eadem ratio, quæ superius militat.

PROBL. IV. PROPOS. V.

Cylindri circularis concaui superficiem internam inuenire à superficie gemina cylindrica secti plano perpendiculariter insistentis, sed non ad axem recti.

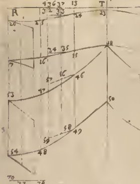
SIt superficies sectionis, vt supra cylindri secti B A F D non rectangula ad axem, ita quod axis A C non incurrat in axem cylindri secantis. Deduces, vt supra normales à dato quadrante B N A F à punctis 1 2 3. & ceteris, vt supra deductæ, vltra rectam p q planę superficiei cylindrum secantis seu eius vestigiũ, nempe sectionis B A C E F D, quam seorsim in linea 70 71. extendes cum singulis eius partibus 1 F, quæ sit 73. 72 & cæt. accepta postmodum distantia 96. 61. transferes in 72. & 74 & sic de ceteris partibus originarijs ab F 1, 1 10. & 10 D arcus F D efficies & hæc regula in cętera omnibus extendendis planis superficiebus, tum interna circulari, tum coniunctiuas seruabitur. vt ex ipso exemplo potes percipere, & ita superficiem 77. 78. 7 5. 76. obtinebis; sicut & coniunctiuas, quarum vna est superficies 79. 90. 91. 92.

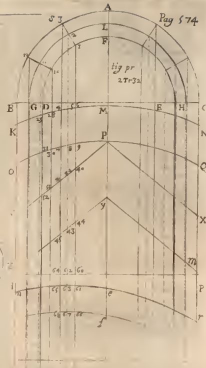
PROBL. V. PROPOS. VI.

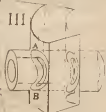
Cylindri Elliptici concaui internam superficiem hinc obliquè à superficie plana secti inde rectangulè à cylindrica; in planum proiicere.

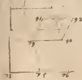
SIt semicylindrus Oualis, seu Ellipticus A B C D, cuius oporteat superficiem in planum proijcere, & quia cylindrus Ellipticus potest secari à plana superficie tali modo, vt sectio sit circulus, hęc talis sit, & circuli interni sit datus quadrans E H, & externi F L, semidiameterque totus ab externa superficie pertingens ad ęquali semidiametro G L, vel G S. Sit verò ab alia parte detruncatus à superficie cylindrica, cuius sectio sit ad axem cylindri perpendicularis, vt est videre seorsum in cylindro N C, qui superficie cylindrica m n detruncatur, ita quòd axis p q sit orthogonalis axi eius e e; superficies verò e licet rotunda non sit, tamen ipsi axi e e ad angulos rectos est.

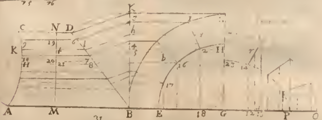
Diuidatur itaque circulus, seu exterior F L, seu interior E H, & trahantur portiones radiorum 1 8 t 2. & cęt. & ab illis punctis L, 1. & à H, & alijs ducantur parallelę vsque ad ss parallelam radio G L vt sunt L 8, 1 3. & alię continuę ab extrinseco ambitu, & punctis eius L, & 1. & alię parallelę prĩctatę à punctis intrinseci ambitus, vt sunt H 4 2 5. & cęt.

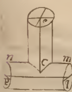

Superficies extensa pr 2

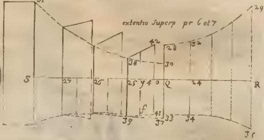

fig pr 2 Tr 32


III








extentio Superf pr 6 et 7

& cęt. A rectâ deinde ox centro B, interuallo xx ducatur arcus, qui occurrat lineę CD altitudinis dati cylindri elliptici G 22. in o, & trahatur oa, quę erit ęqualis xx, vtpote radius, & ideo radio 1o & deinde ducatur oa, & à ceteris punctis 3.4 5. & alijs parallelę prędictę ox educantur vt sunt continuę 36. & cęt & punctatę 4 7. 8 5. &c. & tandem ab istis punctis ducantur parallelę lineę DC, vt sunt 6 9. 7 10. 11 8. & cęterę, quę erunt lineę in superficie coni existentes : sed proiectę in plano CAOB, & ideo cylindrus erit proiectus, cuius basis ad axem rectangula erit x3. 22. P o proiecta in lineam NM ex propos. 8. Tract. x6. & obliqua BLAH proiecta in DE, & cylindri secantia superficies in lineam curuam A 11 C, quia omnes istę, vtpote normales plano orthographo ACOB in lineas transeunt ex 8. prop. aut 16. tract. x6. prop.1. Lineę verò, quę in superficie conica distingunt partes lineis parallelis interceptis exprimentur, vt ex demonstratione prop.1. colligere potes, vel ex 6. tract. 26.

Postmodum ducatur GO perpendicularis ad MN, vel GL, quę erit semidiameter maior sit constitutus, & positus, vt 2G, vel GL.

Interuallo itaque perpendiculari H x. & LI super diametrum GO erigantur perpendiculares ta 14, & 13 15, & cęt. quę distent à GH, vt est distantia perpendicularis H S. vel 1 L, & sic fiat de ceteris punctis internis 16 17. & etiam externis correspondentibus, & habebimus semidiametrum maiorem ellipsis uo similiter truncatum, & diuisum, prout est diuisus EG à perpendicularibus, quarum vna est 18 x. Transferantur itaque altitudines externę superficiei MN in G 22. & M 19. in 13 15. & cęterę, tum internę M 20. in G 23. & M 21 in 12 14. & cęterę punctatis, & parallelis interceptę super punctatas perpendiculares correspondentes t2 14. & cęt. per puncta verò 23 14. & cętera in illis existentia deducatur ęquabili manu curua, nam hęc erit ellipsis interna, quę cylindri axi rectangula est : Deinde per puncta extrema in lineis continuis reperta vt 2x. 15. & cęt. ducatur rursus æquabili manu linea curua. Nam hęc ellipsis extrinseca erit, quę axi cylindri item rectangula est.

Quod ostenditur, aut ex propos. 13. tract. 26. quia ibi asseruimus proiectionem ellipsis ellipsim esse, vel ex propos. 7x. tract. 24 de conicis. Nam perpendiculares sinus, vt 18 2. & cæteri deducti in lineam SK redacti fuere per parallelas ad eius diuisionibus similiter sectum minorem semidiametrum MN externum, M 20 internum; Quare u 23. 12 14. interni, sicut, & externi o xx. & cęt. quilibet suę portioni in MN correspondenti æquales lineę erunt similes sinubus originarijs 23 G ipsi GH vt 12. 14. ipsi 18 2. Quare isti sinus 12. 14. G 22. erunt applicatæ ad partes easdem diametri NO, vel GP; & ideo per eorum extrema transibit ellipsis, cuius o 23. minor diameter est.

Itaque habemus iam. In Cylindro AC20 ambitũ axi orthogonalem: tum intrinsecum 23. 14. P tũ extrinsecum 22. 15. o: Quare si per minimas particulas in lineam rectam vtcumque ambitum proiciamus; ita vt QR sit ęqualis intrinsecę x3 14 P, & QS sit ęqualis lineę 22 15 o extrinsecę ellipticę habebimus longitudinem ambitus cylindri in planum extensam, saltem quàm proximè, faciamusque singulas partes singulis quam proximè ęquales Q x4 flexę 23 14. & cęterę cęteris; sicut, & Q 25. flexę Ellipticę 22. 15. & alię vsque ad s alijs equales, vt sunt 25 26. 26 27. & 75 s perque singula diuisionum puncta perpendiculares ducantur 28 Q, & 29 R, & cętere intermedię, sicut, & S 31. Q 30. & cęterę interpositę; quas singulas singulis correspondentibus in cylindro CDAX faciemus æquales tali modo. Quia QR est ambitus 23 14 P, cuius diameter M 20, & quęlibet latitudo eius, vt Q 24 correspondet cuilibet ambitus 23 14 P V.g portioni 23 14 linea quoque Q x8 erit ea, quę secundùm longitudinem transit per punctum x3. quę est 20 7. linea in cylindro ACXO. Vnde 20 7. longitudo transferatur in lineam Q 28 à linea QR punctoque Q vsque ad x8. & sic de alia punctata fiat; assumpta enim eius longitudine 2 1.8 transferatur in 24 32 & sic successiuè de al 32. Deinde longitudo residua punctata 20 10. transferatur in Q 33. & x1. 31. in 24 34. & sic de alijs, perque extrema puncta 28 3x. & cęteris vsque ad 29. ducatur ęquabili manu flexa 28 3x 29. sicut, & per puncta 33 34. & alia vsque ad 35 flexa ducetur, & erit superficies interna extensa x8 29 33 35. Cylindri prędicti COAB, cuius ambitus interior x3 14 P radius maior GP minor M 20. axis AB, patet verò quòd cętera pars semicilindri eiusdem ab hac, quæ est quarta pars non differet.

Eodem modo superficies externa extendetur. Nam No transferetur in Q 30. at 19 6. in 25 38. & sic de alijs. Pariter 19 9. in x6 39 & NC in Q 37. & sic de alijs notatis. Ergo omnibus punctis normalium, tùm hinc, tùm inde lineę QS coniunctis flexa 30 38 31. sicut & alijs 37 39 36. habebimus superficiem extrinsecã pro sui parte dimidia semicylindri COAB, cuius sectio plana cognita BLHE expressa per lineam DE. & ad aliam partem, cuius sectio est cylindrica expressa per arcum AC, & ambitur externę plani ad axẽ recti 2x 15 o.

Probatur verò, quod talis sit. Nam eiusdem altitudinem, nempe quartam partem ambitus per lineam QS expressimus, & lineę flexę longitudinem terminantes V.g. 30 38 31. & 37 39 36. pec datas lõgitudines duximus, nẽpe per 30 Q ęqual e longitudini ND, & Q 37 ęqualis longitudini 19 9. & sic dicas de alijs; quare ex ostensis prop.2. deductis à prop.1. superficies 28 29 23 31 ęquabitur superficiei cylindricę internę prędictis superficiebus interceptę, sicut etiam superficies 30 31 36 37 erit ęqualis externę prędictis superficiebus abscisę.

PROBL. VI. PROPOS. VII.

Superficies coniunctiuas eiusdem semicylindri plano distendere.

QVis Cylindrum prędictum concauum fingimus, diuersisque quasi doliorum asseribus coagmentatum, ideo si quis etiam ipsarum iuncturarum superficiem vellet agnoscere, id faciliter fiet.

Nam earum superficierum crassitudines, seu latitudines habemus expressas in lineis 22 23. 14 25. & alijs, quę vtramque ellipsim intrinsecam, & extrinsecam connectunt, longitudinemque tum intrinsecam, tum extrinsecam in superficiebus oper inuentis. Sit ergo inuenienda superficies iuncturę t4 15, hęc erit longitudinis extrinsecę 38 39. quare à puncto 25. super lineam SQ versus,

sus, quam volueris partem transfares interuallum 14 15. quod erit 25 40 : ductaque linea 41 42. habebis quoque terminum extrinsecum, nempe longitudinem 24 38. vel 11 8. quod interuallum transferes in 40 42. ducesque 38 42 & erit terminata ab hac parte superficies quæsita. Rursus transferes 24 34. vel æquale 11 11. in 40 41. At quia superficies ista quatenus terminat in cylindrũ CA nõ facit sectionẽ lineã rectã, ideo terminus huius superficiei coniunctiuæ, quã prestare volumus linea recta non erit, ideoque aliud punctum medium, per quòd linea flexa ducatur inueniendum erit: ideo diuisa linea 2 1 in a ducatur parallela, alijs lineolis continuata a h, deinde h i, deinde i k: habebimusque longitudinem t a. Deinde distantia pũcti a 12. à linea LG assumpta transferemus à G in u, & ducta perpendiculari u r dabit punctum r, distantiam ergo istam 14 t transferemus in 25 y, ductaque y f transferemus distantiam t a nuper inuentam in y f, habebimusque tria puncta 39 f 41. per quæ ducta linea curua terminabit superficięm coniunctiuam 38 42 39 41. Et sic ages in alijs similibus.

Ratio verò, & euidentia operationis ex ratione prop. 1. huius satis innotescit; patet vero ex prop. 22. tract. 25. lineam curuam 39 f 41. ellipsis non esse portionem.

PROBL. VII. PROPOS. VIII.

Semicylindri concaui, & rotundi superficiem hinc obliquè à superficie plano sectis, inde à Cylindro item axi obliquo, in planum extendere, & repræsentare.

SIt datus Cylindrus ABCD, qui secetur, vt ostenditur seorsim, nempe à superficie plana a b, & à cylindri f e superficie, quæ ambę obliquè ad axem c d secent, seu æquidistantes, seu non, versùs tamen easdem partes, ita, vt linea a b maximę declinationis superficiei planę sit in eodem plano ac axis f e, & detur alius ambitus ad axem rectus, cognitus nempe circulus, cuius diameter exterior sit 8 Z, & interior sit XP.

Diametro itaque 8P fiat circulus LMH, & diametro interiori XP alius eodem centro G, insuperque addatur alius circulus intermedius, vt placet, diuisoque altero eorum in quotlibet segmenta, ducantur radij M N, 8 1, & alij, & à punctis, in quibus circulus secant ducantur parallelæ, tùm diametro LH, tùm diametro GM, à punctis quidem intrinseci gyri propter distinctionem continuę, vt M B & 2 10 à medio punctatæ, vt 3 11. 4 5. & 3 7 ab interno lineolis continuatæ, vt 1 18, 1 9, & producantur, quantùm sat est.

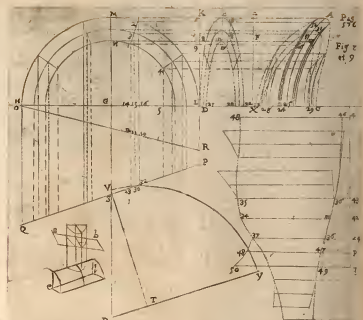
In plano deinde LHPQ, ducatur OR, quæ repræsentet maximam obliquitatem planæ superficiei, cum axe GS, & rursùm PQ, quæ item repræsentet obliquitatem superficiei cylindricæ secantis, cuius cylindri semidiameter sit TS.

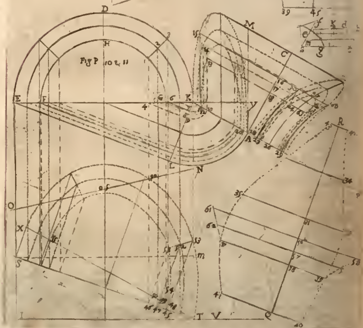
Distantiæ itaque, vt 14 12 intrinseca, 15 11 media, 16 10. extrinseca assumantur, & super parallelas in iisdem lineis, quibus oriuntur lineæ assumptarum distantiarum transferantur: nimirum 14 12 in lineolis distinctam 1 9 17. à pũcto 9 vsque ad 17. distantia 15 11. in lineam punctatam 3 7 18. à puncto 7. vsque ad 18. & sic 16 10. in lineam continuam extrinsecam 2 6 10 à puncto 6 vsque ad 19. & ita agatur de ceteris; quibus omnibus translatis per puncta in singulis parallelis signata, quę intrinseco semicirculo nascuntur duces flexã 20 n. 17 21. quę erit dimidiata ellipsis: Deinde aliam per puncta signata in parallelis à medio gyro profectis punctatis, & tandem omnibus maiorem D 2 8 2 per puncta signata in parallelis à gyro extrinseco exortis, quę erit extrinseca Ellipsis. Coniunges deinde tres ellipses lineis curuis per puncta tria vnum in lineolis deductis alterum in punctatis tertium in continuis reperta 17 18 19. quę imitabuntur, & stabunt loco segmenti radij 8 3 1. Quod autem prædictæ circumferentiæ sint ellipses, patet ex tr. 25 pr. 22. vbi sectionẽ cylindri obliquam ellipsim esse ostẽdimus, & pr 17. tr. 26. par. 1. Et etiam, quòd longitudines 16 10. & 15 11. & cæt. translatæ sint proportionales ob earum parallelismum in triangulo LOHR non completo; quare vt est HL ad H 14. ita est OL ad 14 18 deducta distantia utr ab vtraque, & sic de alijs, vnde ex prop. 72. tract. 14. Coroll. descripta erit semiellipsis, & prælectus semicirculus LMH; & alij interiores.

Sed modo vertamus opus ad describendas orbitas; quas cum cylindri superficie obliquè secti facit semicylindrus propositus: Sciendumque est quaslibet superficies parallelas axi in obliquo cylindro ex TS rad. non efficere sectiones circulos licet cylindrus sit circularis, sed ellipses ex prop. 88. tract. 25 Et quia omnes eundem angulum faciunt cum axe cylindri secantis omnes erunt ęquales ex eiusdem prop. Coroll. ideoque oportebit priùs dato diametro cylindri secantis inuenire saltem quartam ellipsis, cuius semidiameter minor est TS, vel TY, nempe semidiameter circuli, qui cylindro secanti basis est, & alter TV, prout TV parallela axi SM cylindri secti transeundo obliquè per centrum T augescit. Quo ellipsi descripta ex repertis axibus TS, & TV. Fiat modulus ex papyro, seu aliqua alia materia, vt non tibi sint describendæ tot ellipses æquales, quot opus sunt. Deinde assumpta distantia 14 13. & alijs linearum parallelarum deductarum, mensuretur ab L versus Z super lineã LZ, & sit L 24. Sic 15 8 sit L 25. applicato dein modulo TVY, ita vt linea VT cõgruat lineæ 2L, & punctum V puncto 24. deducatur ellipsis 26 24. sic applicato rursùs modulo super eandem lineam eodem modo, sed ita, quod punctum V congruat puncto 25, deducatur portio ellipsis 25 A, & ita fiat de cæteris, & vbi prætractæ ellipses secant parallelas lineolis ductas 27 N, & 26 1, & cęteras à semicirculo intrinseco deductas ea puncta notentur, & per ea deducatur orbita 28 27 26 29. Sic fiat de lineis punctatis desumendo distantias 15 30. & 01, & cęteras, et transferendo illas ob L versus Z, & deinde singulis punctis eodem modulo elliptico applicato alię portiones ellipsium trahantur, & per puncta quibus parallelas, vt 4 31. flexa ducatur: Iterumque idem fiat de distantijs in lineis continuis desumptis 32 16. quod interuallum cum cæteris in lineis eiusdem generis desumptis transferatur ab L versus Z. Et applicato eodem modo modulo TVY portiones ellipticę ducantur, & vbi secant parallelas continuas, vt MA per ea puncta, vt per A orbita ducatur quę erit 33 A C. Et tandem ipsæ orbitæ, & puncta per quæ deducta sunt lineis, vt 27 31 A, & 26 31 32. quę etiam flexæ erunt, coniungantur.

Itaque portiones ellipsium, vt 24 26. & aliæ




Fig 7 et 9


Fig P 10 & 11

discedentes à distantijs 14 23. eadem quę 1 24. in plano parallelo axi 10 eodem, qui 1 25. proiectę occurrunt lineis 1 26. & alijs, & puncta, quibus illę 1 26. & similes occurrunt superficiei cylindriaę decernunt. Vnde, & longitudines exhibent 14 23. non quidem in plano; sed in sua naturali eleuatione, quę est lineę 9 26.

Iam verò omnia apparatus conclusus ad superficiem, tum extrinsecam, tum intrinsecam extenendendam.

Ducatur linea recta 40 41. & singulę partes circuli interni per eam extendantur, vt IN equalis lineę 42 43. cęterę cęteris partibus, & ab ijs punctis erigantur perpendiculares, vt 42 34. 43 35. & alię. Deinde sumatur distantia à linea LK ad quodlibet punctum in lineolis parallelis repertum, vt 9 17. & transferatur à puncto 44. in 36. & punctum 9 26. in eadem lineolis contexta, & transferatur super eãdẽ 44 37. & sic fiat de omnibus alijs punctis in ijsdẽ parallelis discontinuis repertis. Et iam in perpẽdicularibus 44 37. 42 34. & 43 35 & alijs hinc vsq; ad 46 38. inde vsq; ad 45 39. cõsequemur puncta, per que ducta flexa 46 36 45. & 39 34 48. dabit superficiem concauam internam cylindri propositi 46 45 48 39.

Si verò superficies exterior in planum proiicienda sit, id non alio modo peragemus; sed puncta in lineis continuis, que proueniunt à semicirculo extrinseco quęrenda V. g. in linea MA, vt 2e, 6 19. & alijs eiusdem generis.

Patet verò assignatam superficiem esse intrinsecam cylindri, quia altitudines, vt 42 44. sunt semicirculi intrinseci in partes octo ęquales diuisi, cuius vna pars, IN, é perpendicularibus 44 37. & alijs, in quas distincta est superficies prędicta: Longitudines verò patet esse V. g. lineę 24 12 23. sed cum additamento, quòd allipsica curuitas cylindri secantis superaddit. Hę curuitates allipticę ab allipsi deductę V. g. curuitas 24 26. à puncto 2 distans, vt 14 à 23. prouecta vsq; ad altitudinẽ 26. superaddit aliquid, & fit longior linea 9 26. quam 24 2, & consequenter, quàm 14 23. Ideoque desumpta longitudo 27 8, dabit longitudinem superficialem, eo in puncto 41 34. à quâ detracta longitudo 41 m ęqualis longitudini 8 n relinquit longitudinem cylindricę superficiei eo in puncto m 34. ęqualem longitudini n 8. & sic de alijs punctis.

PROBL. VIII. PROPOS. IX.

Superficies coniunctiuas eiusdem semicylindri plano extendere.

SIt iunctura 1, 2. 3. plano extendenda; quia 36 37. superficiei intrinsecę extensa ad eam ex ordine pertinet, hanc superficiem coniunctiuam ei addemus: Sumpto itaque interuallo 1 3. & 3 2. transferãtur, & eodẽ interuallo parallelę eidẽ 36 37 ducantur 47 48. & 49 50. Deinde sumatur interuallum 7 18. in punctata, & 19 6 in continuata, transferaturque 19 6. in q 49. & 7 18. in P 47. ducaturque linea, quę flexa per tria puncta transeat 36 47 49. Deinde assumptis distantijs 7 51 transferatur in P 48. & 6 52. in q 50. & per tria puncta ducatur flexa 37 48 50. eritque iunctura 36 49 37 50. quę per 1 3 2. transit. Eodem autem pacto propositio ostenditur, ac pręcedens.

PROBL. IX. PROPOS. X.

Superficiem semicylindri inuenire, dato eius ambitu ad axem recto, qui secetur à superficie plana, nec axi, nec plano per axem, & per diametrum ducto rectangula: ab alia autem parte conica superficie secetur, cuius coni axis ipsius axi rectangulus sit.

DIffert hæc propositio ab antecedenti. Nam plana superficies secans erat plano per axem cylindri secantis ad rectus angulos; at verò hęc superficies plana nequaquam, vt est videre seursum: nam cylindrus a e c d b secatur à cono g a e f, & planum secans c b d plano g b per axem n m cylindri transeunti non est perpendiculare, vt est i i æ, quod prę supponitur cognitum, nempe esse circulum (posset verò, & esse ellipsis, vt, & in præced. propos. etiam poterat esse ellipsis) Axis tamẽ coni g f est ad angulos rectos axi m n. Sit ergo circuli cylindri interni semidiameter AB, & externi AC, ex quibus interuallis duo circuli ducantur ENB, & GHI diametro extrinseco AC intrinseco AB, aliusque medius.

Diuisisque, vt supra illis circulis EDB, vel GHI radijs 1 2 3 deducantur perpẽdiculares 1 4 lineolis 2 5 punctis 6 3 continua deductæ. Dato verò quod ad alteram partem magis distet à recta ad axem superficies quantũ est MT ad punctum K ducatur æqualis LK, & à punctis 6 5 4. & omnibus alijs à perpendicularibus 1 4. & ext. notatis in diametro KA ducantur parallelæ, & eis normales 6 7. 5 8. 4 9 & cæterę. Deinde ducta AK; vtcumque fiat angulus CAM, quo planum num secans obliquè AM declinat à plano CA secante axem rectè, & facto centro in K lineae arcubus 9 10. 8 12. 7 11. deducantur ad AK & à punctis quibus secant 10 12. & 11. & alijs erigantur parallelæ ad AM, vt sunt 10 13. 12 14. 11 15.

Assumptis verò altitudinibus 1. 4. & alijs transferantur supra AC ab A, & 1 4. fit A 18. & 5 2. fit A 17. & 6 3. fit A 16. & sic agatur de omnibus alijs altitudinibus, seu sinubus, & per puncta signata parallelæ ducantur 13 16. 14 17. & 13 18. & cęterę, occurrent enim primò ductis punctatæ punctatis, continuę continuis, & interruptæ lineolis interruptis. Per puncta itaque vbi se continuæ secant ducatur ellipsis A 15 R, & per puncta vbi punctatæ se tangunt, ducatur ellipsis 20 14 22. & per puncta vbi interruptæ se secant vltimo, minorque ellipsis ducatur 19 13 21. Erunt autem hę flexę dimidiæ ellipses ex 22. tract. 35. quia planum secans obliquè ad axem cylindrum facit sectionem ellipsim. Coniungantur q; tandem puncta 13. 14. 15. & similia, & iam erit parata constructio, quæ ad sectionem planam spectat.

Sit deinde axis coni IV, cuius basis circulus, & superficiei secantis vestigium NO: A singulis punctis V. g. 90. assumantur rectangulè distantię ab axe IV, & facto centro in P, ducatur arcus 23 24. sicque fiat de cæteris punctis V. g. assumpta puncti 93. distantia rectangulè ab axe IV coni NO eodem centro P ducatur circuli arcus 26 27. &c.

Puncta verò pertinentia ad idem genus linea-

rum nectantur flexi, vt ducta est 29 27 24 23. nectanturque puncta 24. 30. flexa, quæ portiones ellipsium erunt ex 6. tr. 23. siquidem sunt plana secantia cylindrum per axem 3. 2. 1. secundum eam sectionem, quam secando conum in eius superficie relinquunt. Iamque est proiectus cylindrus in AMZ 29 8, & portio coni, quæ ab ipso secatur in 28 30. Z 60 29. Et obliqua superficies secans obliquè in K 15, A, vt ex 12. tract. 25. par. 1. colligi potest.

Hoc apparatu præstito, iam superficies interna eodem modo, ac superior in planum distenditur. In Linea seorsim ducta QR circuli intrinseci partes transferantur, quarum vna est IH translata in 31 38. & per puncta diuisionum rectæ perpendiculares ducantur 33 35. 39 37. & cæt. Assumpta deinde distantia à linea AC ad quodlibet punctum pertinens ad superficiem intrinsecam linearũ discontinuarum vt 18 13. transferatur in 38 37. deinde assumpta distantia 18 63. transferatur in 38 39. & sic agatur de alijs ad ellipsim intrinsecam 19 13 10, & orbitam alteram 29. 27 24. pertinentibus. Habebimusque puncta 40 39 33 34 42. & cætera, per quæ flexa æquabili manu trahenda; sic & habebimus puncta 41 35 43. & alia, per quæ similiter flexa ducta totam superficiem extrinsecam cylindri propositi exhibebit 40 41 42 43. Extrinseca verò eodem pacto fiet assumendo puncta ad extrinsecam orbitam, & ellipsim spectantia.

Sed si quis ipsam sectionem, & semiellipsim; qua planum secat cylindrum datum in sua naturali magnitudine exoptet; id consequetur hoc modo, Ad 2 T à punctis 6. 4. 5. & cætera perpendiculares ad 2 2 ducatur, nempe 4. 46. 5 47. 6 45. & cæt. ab istis verò punctis ad sectionis lineam S T perpendiculares rursus ducantur, vt 45 48. 47. 49. 46 50. & quantum sufficit ad aliquatenus maiorem altitudinem, quàm AM: assumpto deinde interuallo AT transferatur in AX ad eam partem, quà magis sectio S T accedit ad AS, & ducatur XT. Deinde altitudines 10 13. 82 14. 11 15. transferantur quælibet in lineam eiusdem generis, & correspondentis, & fiat 48 53. 49 52. 50 51. Sicque fiat de alijs, & per puncta in lineis eiusdem generis æquabili manu ellipsis ducatur V. g. per puncta pertinentia ad lineas continuas ducatur ellipsis X 53 T, & aliæ per alia, vt meliùs videas, & habebis superficiem X 53 T 54 51 55. ortam à sectione obliqua cylindri, & est ellipsis: sed cuius diameter a T est ex coniugatis non à generatione, quod autem talis sit, patet quod a T partes proportionales K a lineæ partibus, obtineat, & applicatas item vt 50 51. etiam proportionales ob parallelas 15 16. & cæteras, quibus detruncatur, & terminatur, vnde ex prop. 72. Coroll. tract. 24. ellipsis erit, quod, & potest ostendi ex prop. 22. tract. 25.

PROBL. X. PROPOS. XI.

Superficies coniunctiuas eiusdem Cylindri reperire.

HOc fit eodem modo, ac superiori. Nam ducuntur parallelæ per puncta 56. 57. ad interuallum à linea 39 37. quæ est 1. & 2. rursusque inter 2. & 3.

Sic verò terminabuntur interuallum 55. 15. transportabitur in 56 51. & 17 14. in 57 62. & per puncta 57. 62. 61, ducatur flexa 57 62 61. Sicque præstabitur ad aliam partem: nam interuallum 16 60. transferetur in 58 56. sicut, & 17 61. in 57 59. & per tria puncta flexa ducetur 39 58 39. & erit superficies coniunctiua 58 59 57 61. idemque ages in alijs.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Semicylindri superficiem à perpendiculari eiusdem rationis, sed Cylindro secti, & data sectione plana declinante, & inclinata, alio modo in planum proijcere.

IN præced. pr. Cylindri ambitus circularis vel rectus præsupponebatur cognitus; hic autem ipsa sectio plana præsupponitur cognita, at verò ambitus cylindri, seu semicylindri conquirendus est, & posset quidem eodem modo exquiri, ac præcedens, sicut, & præcedens probl. hoc modo in opus deduci, sed doctrinę abundatioris gratiâ.

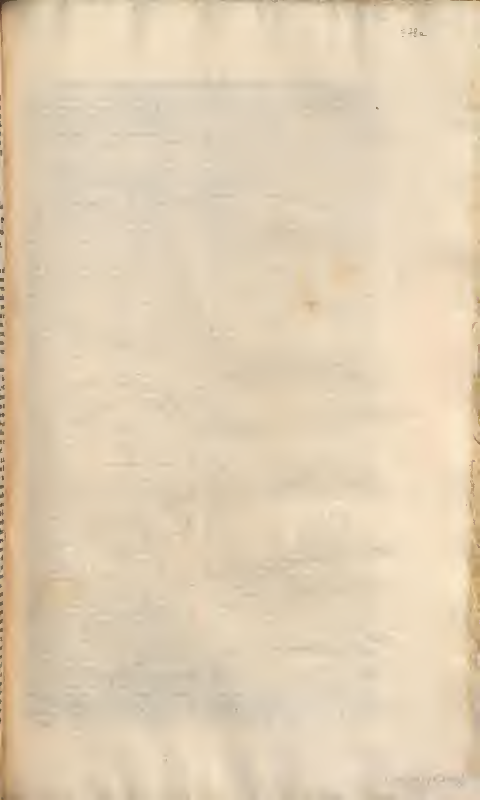
Sit data sectio conica plana circularis ADCGE, & inclinatio ad planũ per axem ductum exprimatur per lineam AH inclinatã ad AC; declinatio verò per LS ad AC non æquidistantem.

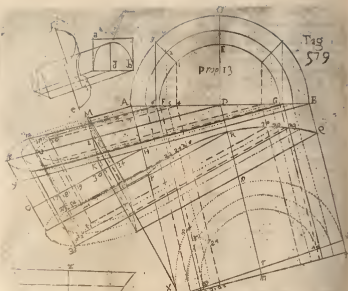
Per puncta 1. 2. 3. quibus radij de more ducendi secant tres circulos, (vt in alijs factum) ducantur parallelæ ad diametrũ AC, vt sunt D 4. 7 6. 3. 5. 2 8. & cæterę vsq; ad A 4 & facto centro in A, iterum deducantur arcubus ad AH, vt linea AH representans sectionem sit æqualis secundùm omnes diuisiones lineæ A 4. & ab omnibus punctis, in quibus secatur ab arcubus prædictis perpendiculares, vt sunt continua 11 11. & 14 12. puncta 15 18. & lineolis producta 56 13 & aliæ eadem.

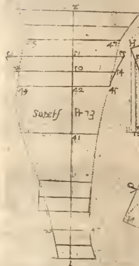
Deducantur rursus ab ijsdem punctis 3. 2. 1. & alijs similibus perpendiculares ad AC, quæ, & producantur vlteriùs 8 19 20. 2 21. & 3 22. Assumpta verò distantia A 13. interruptæ perpendicularis 16 13. à puncto A, transferatur à puncto 19. vsque ad 20. & 24. vsque ad 25. sic distantia A. 28. in 27 21. & ad aliam partem quoque, & distantia A 13. in 23 22. & sic de cæteris distantijs hinc inde illas transferendo, vt in prima factum est: Per puncta verò pertinentia ad eiusdem generis lineas, vt per F 20. 25 G, & alia, flexa, curuetur, & erit proiecta ex tract. 24. pr. 72. vel ex 16. prop. 16. tract. 26. par. 1. semiellipsis, sicut, & per cætera puncta aliæ ellipses ducentur, deinde quælibet tria puncta, vt 20. 21. 22. nectantur rectis.

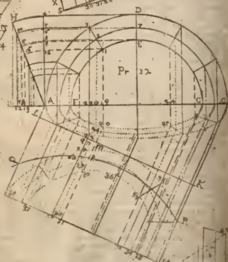
Ab istis verò punctis omnibus perpendiculares ad sectionem obliquam declinantem LK agantur, & producatur quantùm sufficit, deinde assumpta distantia 12 24. originata à puncto 3 transferatur super lineam habentem eandem originem à linea MN, & sit 26 27. & sic ad aliam partem 34 35. sic altitudo 18 15. proueniens à 2. transferatur super lineam 21 28. habentem eandem originem, & sit 28 29. Idem fiat de altitudine 13 16. & transferatur in 31 30. lineam originatam ab 1. & idem fiat ad aliam partem qualis est 32 33. & sic de omnibus alijs fiat eandem distantiam hinc inde transferendo, perque puncta pertinentia ad idem genus linearum flexæ ducantur, quæ, & erunt ellipses, vt constat ex Coroll. 2. propos. 72. tract. 24.

quia


=78a


Tag
579
Prop 13


Superf Pr 13


Pr 12


Superf pr 12

quia tum tu secta proportionaliter est, vt AC ob parallelas; sicut, & altitudines IT M, & cæteræ sunt altitudinibus BD, & cæteris proportionales: quare erunt descriptę tres ellipses, quæ expriment Ellipses axi rectangulas existentes, quod requiritur, vt superficies expetita in planum distendi possit.

Ducta itaque seorsim linea OP, sit superficies interior extendenda. Semiellipsis 37 30 36 33 38. cum suis omnibus partibus in lineam ipsam OP extendatur, quo facto per puncta ad illam perpendiculares ducantur, vt 39 40. 41 42 43. Sumatur deinde interuallum m 20. & transferatur in 41 42. deinde interuallum m P, & transferatur in 41 43. & sic fiat de cæteris omnibus interuallis linearum interruptarum, quæ pertinent ad intrinsecum circulum FSG, & ab illius punctis originem trahunt interclusis inter ellipses F. 20. 25. G. & KL, sicut, & inter QPR cylindrum proiectum, & eandem LX, & inuenies perpendicularium 43 41 42. & cæterarum longitudines. Quamobrem per puncta extrema 44 42 40 45. ducta flexa, & alia simili linea per puncta 46. 43. 47. & cætera, istę duæ terminabunt superficiem cylindri internam 44 45 46 47. quæ exquiritur.

De superficiebus verò coniunctiuis non multa dicenda cum latitudo 30 27. vt est 41 48. altitudo verò q 22. det altitudinem 49. 48. & q 60. det altitudinem 48 50. Vnde ducta per puncta 42 49. recta, & flexa 43 51 50. dabit superficiem coniunctiuam 42 49 43 50.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Semicylindri superficiem in planum proijcere, cuius sectio plana declinans, & inclinata nota sit, seceturque Cylindro ad aliam partem rectangulo ad axem.

SIt semicylindri nota sectio plana effecta, quæ sit circulus, seu annulus planus ACBGSF: Sitque linea declinationis BH, at inclinationis LX, vel angulus DLX. A portionibus radiorum 1. 2. 3 & cæteris ducantur perpendiculares; ab extrinseco quidem circulo continuę, à medio punctatæ ab intimo interruptæ, vsque ad AB, vt 1 4. 2 5. 3 6 & à punctis, in quæ incidunt, ducantur perpendiculares lineæ AH, vt sunt 4 7. 5 8. 6 9. & producetur vsque dum sufficit. Ducta deinde parallela BM, ipsi AH assumantur altitudo 4 1. & feratur in 7 10. sicut, & 5 2. & collocetur in 8 11. & 6 3. & transporteur in 9 12 & sic fiat de cæteris alijs interuallis, transferendo ea super illas lineas, quę originem ducunt ab ijs punctis, quæ interualla transferenda terminant, vt ED in L 13. Per hæc autem puncta, quæ ad idem genus linearum pertinent V. g. Interruptarum ducatur orbita 14 13 10 7. & sic per alia puncta reperta, tum in punctatis; tum in continuis, vt extrinseca KU 12. M; quæ erunt semiellipses, quod AH proportionaliter diuisa sit, vt constat ex Coroll. 4. propos. 72. conicorum tract. 24.

Ducta verò NO perpendiculari ad lineam inclinationis LX ad illam perpendiculares ducantur ab ellipsibus, iam descriptis, & à singulis earum punctis ab ijs. quæ in continuis sunt continuę, & ab ijs, quæ in punctatis punctatæ, & tandem ab illis, quæ in interruptis sunt interruptæ, quales sūt 10 19. 11 18. 12 17. & producatur quantùm sat est.

Deinde ab ijsdem punctis, quę sunt in diametro AB perpendiculares ad MI producantur 6 20. 5 21. & 4 22. & cęterę omnes, seruata earum differentia ob confusionem vitandam, quę transibunt per arcum PRQ cylindri perpendiculariter erecti ex thesi super LNX. A pūctis igitur, per quę transibunt, ducas perpendiculares ad LX, vt sunt 26 27. vel 28 33. 29 32. 30 31. & vbi occurrunt lineis parallelis ad LX, notentur puncta, prout quælibet lineam eiusdem generis inuenit, ita 31. punctum pertinet ad interruptas 31 30. & punctum 32. ad punctatas 32 29 sicut, & 33 pertinet ad continuas 33 28. Per puncta itaque, quæ in lineis eiusdem speciei inueniuntur flexę ducantur orbitæ, quæ ellipses non erunt, cum non sit secans superficies, cuius vestigium PRQ, plana.

Tandem deducendæ sunt ellipses, quæ cylindri axi perpendiculares sunt, ad quod in opus deducēdum ducta recta SF assumatur interuallū 34 35. & sit VT, ducaturq; SV, nam si AS ponitur orizontalis, vel eius vicaria KM lineæ BH, cuius loco stat SV, se eleuabit magis à plano versùs B, quàm versùs H, quantum est spatium VT: A puncto autem 34. versùs O assumantur omnium linearum parallelarum interualla, & transferantur in lineas correspondentes ab ijsdem punctis primitiui arcus originatas, tum extrinseci, tum medij, tum intimi. Sic interuallum 34 O à O prouenientis p lineas E O, DE, transferatur in lineā ab eodē puncto profectam D, & sit m n. Sic 34 19 In lineam 22 84. prouenientem à 4. sic 34 18 in lineam a t 35. profectam à 5. & tandem 34 17. originatam à puncto 6. in lineam 20 86. ab eodem puncto 6. ab Initio propagatam, & idem agendum de cæteris, & tandem per pūcta ad idem genus linearum pertinentia ducatur Ellipsis 39 84 40. & per alia puncta extima 8 86. n v, & cætera ellipsis extims 5. 86. n. v, & ita fiat in ducenda media, deinde tria singula puncta rectis copulentur, vt 36 35 84. eritque totus apparatus ad superficiem extendendam necessarius confectus.

Quod autem 39 84 40. & cæteræ sint ellipses patet. Nā diametro 39 40. sunt applicatæ, cū sit 39 40. diameter proportionaliter secta 12, ex 13. l. 6. vt AU, & ipsæ altitudines, sint quoque proportionales altitudinibus primitiuis, qualis vna est 7 10. æqualis 4 1 ob parallelas per HO deductas, vnde HO secta est, vt YH in triangulo HOY.

Istis itaque omnibus præparatis, vt superficies interna dati cylindri in planum distendatur, trahatur linea ZI, & super eam quęlibet pars semiellipsis 39 84 40. extendatur, vel potius subtensæ rectæ ipsi minimę, quàm fieri possit 39 84 & cæterę cæteris, perque puncta 41 42. & per cęteras perpendiculares ad ZI ducantur, quorum terminationes exquirendæ sunt. Quia ergo pertinet ad intrinsecam superficiem à linea HO assumatur distantia 19 20. & sit 42 43. translata, iterumq; 19 44. & sit 42 45. sicque in alijs fiat distantias à linea HO ad ellipsim intrinsecam 15 10 14. & ad orbitā intrinsecā 44 31 91. & p pūcta inuenta 49. 43. 48. & cęt. flexę ducantur. Nam constituent superficiem intrinsecam 49 48 47 45. Quòd ostenditur eodem argumento, ac prop. 2. h. ex principijs propos. 2. huius.

Si verò superficies coniunctiuas exoptemus distantia 86 35. & 35 84. à linea 45 43. mensuretur, & sit 42 50. & 50 51. perque puncta 50 51

perpendiculares ducantur, quæ terminabuntur transferendo distantiam 18 11. in 50 52. & 17 12. in 51 53. ducendoque rectam 53 52 43.

Rursúsque transferendo interualla 18 54. & in 50 54. & 17 57. in 51 55. ductaque flexa 55 54 45. habebimus exoptatam superficiem 53 43 55 45.

Nota, quòd, si cylindrus circularis secans sit iacens non perpendicularis plano, cui insistit datæ sectiones V. g. 18 33. erunt rectæ, quod si iaceat, & eius curuitas secto cylindro obijciatur rectangulè erunt circuli æquales à linea PX ducendi si sit obliquus, tunc ellipses eędem omnes ęquales ducendæ sunt ex prop. 12. tract. 25. quod si non sit circularis, at ellipticus omnes erunt ellipses ęquales ex prop. 22. Coroll. Tract. 25. quod si non sit cylindrus; sed conus iacens, tunc circuli omnes erunt diuersi; at si obliquè iaceat, tunc omnes erunt ellipses diuersę, sed similes ex prop. 4. tract. 25. Si verò conus sit perpendicularis, vt in hac propositione supposuimus cylindrum, tunc sequenti modo agendum est.

PROBL. XII. PROPOS. XIIII.

Cylindri superficiem, qui à cono, cuius axis sit ad eius axem normalis, secetur superficiebus intrinseca, & intrinseca parallelis inuenire.

SIt conus, cuius vertex A, & trianguli per axem latus AB, cuius basis circulus, qui secet cylindrum, cuius sectionem planam faciat annuli quadrans DEIF; Coni verò crassitudo sit CB eadem; que HV circulorum centro X ductorum, radij AV, & XH ęqualibus m c, & m s. Diuiso itaque triplici quadrante IF. & EO. & cæt vt in alijs factum est in quaslibet partes V. g. in tres ducantur radij t a. 3. & cæteri, ab istisque punctis parallelę ducantur diametro HD, idest 1 4. 2 5. & 3 6. & cæt. sicut. & aliæ parallelæ radio HF, quæ sint 3 7. & 2 8. & t 9. & aliæ ab extimi quidem circuli diuisionibus continuę, à medio punctatæ ab intimis interruptę distinctionis gratia, quarum postremarum longitudines à linea A m assumantur, vt 10 7. & interuallo 10 7. centro X arcus ducatur 13 6. vsque dum occurrat lineę 6 3. quę ab eodem puncto 3. natalia ducit, ita de linea 11 8. quo interuallo centro X ducatur 14 5. & cæt.

Per singula ergo puncta, quibus fiunt intersectiones illæ arcuum istorum, vt 13 6. & parallelarum 3 6. quæ ab eodem arcu originem trahunt flexa ducatur 15 6 16 17. & erit in planum subiacens, & in basim ipsam coni proiecta, exterior secta orbita, quam cylindri superficies occurrendo superficiei coni efficit, sic 13 5 18. erit proiecta orbita intermedia, flexa autem 14 4 19. orbita intima ab ambitu F 11. superficiei cum superficie coni causata. Quæ regula etiam obseruanda est in proiciendo gyro, qui in superficie coni interna imprimitur, sumendo interualla normalia inter lineam m A, & singula puncta in CL reperta, vt sunt 10 20. & centro X ducendo arcus 21. & 22.

Patet autem hæc proiectio, nam circulus ille, qui transiret per 10 7. parallelus basi est; quare ex prop. 9. tract. 26. in circulum cuius arcus 13 6 æqualem proijcietur. Distat verò à sectione ipsa per axem coni ducta, & cylindri quantum est subtensa 10, 3. vel distantia inter axem DH, & parallelam 36. ergo 6. erit punctum 3. commune vtrique superficiei coni, & cylindri proiectum, quæ se in arcum D 3 u curuat, & ita fare de alijs.

Nunc sit proicienda quoq; superficies illa, que coni intercipitur inter superficiem extimam, & intimam cylindri. Accipiatur interuallum AA, & centro M ducatur arcus NO. Sic interuallo A 7. centro M arcus trahatur 23 24. & fiat eiusdem longitudinis, ac arcus 13 6. quod potest fieri ducendo parallelam ad eandem distantiam PN à diametro HD, qua ducta est 3 6. absq; sensibili errore, sed exactiùs assumēdo singulas partes 13 6. & trāsferendo illas in arcum 23 24 & idem fiat de omnibus alijs punctis. Rursusque interuallo A 8. à centro M ducetur arcus 26 17. & eadem mensura determinabitur, & ita habebimus singulorum orbitarum conica superficie factarum proiectionem, nempe extimæ quidem D 3 E superficiei proiectionem P 24 O intermediæ 23 27 31. Intimæ verò FI proiectio erit 28 29 30 & consequenter totius superficiei conicę inter vtramque superficiem cylindricam intercepta proiectio erit superficies P O 30 28.

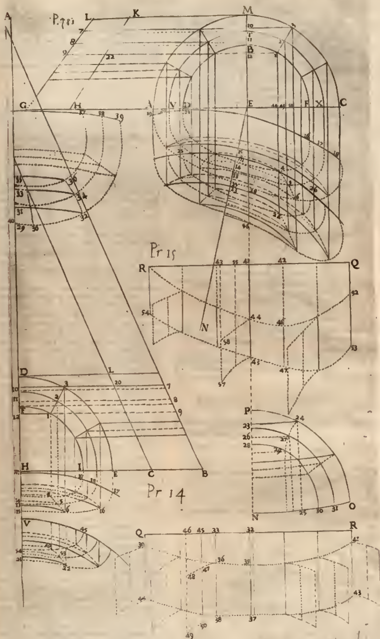
Probatur ex prop. 23. tract. 31. Nam arcus à vertice coni ductus, & eiusdem longitudinis, ac arcus basis, vt est arcus 23 34. subtendit superficiem æqualem superficiei coni, qui arcu basis eiusdem mensuræ 3 6 determinatur, quare cum arcus 13 6. decernat in basi punctum 6. proiectum decernet etiam in superficie conica punctum, 24. quod circulus D 3 E cylindri se intersecando cum circulo coni, cuius diameter 10 7. parallelo basis imprimit in ipso cono, & sic de alijs cum ergo habeamus plurima puncta in superficie coni à cunctis circulis effecta, dum secant circulos extimos cylindri DE I, semper vbicumque secet cylindrū, si ipsis æquales ipsum gyrum impressum in superficie coni P 24 O delineare poterimus, & sic alios quoque intermedium, & intimum, qui superficiem illam concludunt, vnde eam habebimus in plano extensam P O 30 28.

Oporteat postea delineare superficiem cylindri inter superficies conicas extimam AB, intimam CL interceptam. Ducatur itaque linea RQ, quæ repræsentet sectionem HV, in ea quæ extendatur circulus FI. intimus, cuius superficiem delineare volumus interclusam inter CL, & BA, singuliq; eius arcus pariter transportētur V. g. FI in 31 33. ducantur póstea à singulis punctis 32 33. & cæt. normales 31 37. & 33 38. & aliæ. Inque eas à linea QR distantię transferantur H 14 in 38. & 35. & H 42. in eādem in 32 37. sic 34 4. transmigret in 33 36. & 34 40. in 33. 38. & sic de alijs. Deinde puncta à flexa 14. 4 19. desumpta flexa vniat 39 35 41. & à flexa 42 40 45. desumpta pūcta, alia curua vniat 43 38 37. & habebimus superficiem 39 41 43 43. extensam, quam exoptamus.

Patet probatio ex cęteris modis, quos supra declarauimus, cū eodē modo, priùs operati fuerimus.

Si tandem superficies coniunctivas quis exoptet, quarum sectio est t. s. 3. interceptas inter superficiem extimam, & intimam coni eodem modo operabitur, ac in cæteris. Translatis .n. distantis 1 s. & s 3 in 33 puncti repræsentatiuo in 45. & à 45. in 46. deducātur normales 45 50. & 46 49. deinde à punctis 45. in 47. transeat interuallum 51 5. & 46. in 48. interuallum 52 6. rursúsque ab ijsdem punctis 45

&


P.781
A
N
L
K
M
G
H
V
D
E
F
X
C
Pr 15
R
Q
N
D
L
B
P
O
H
I
Pr 14
V
Q
R

& 45. transportetur distantia 51 54. & 52 22. & fiat 45 50. & 46 49. punctaque flexis nectantur & habebimus superficiem 36 48 49 38. coniunctiuam pertinentem ad coniunctionem 1 23. & sic operare in alijs, omnesque consequeris.

THEOR. II. PROPOS. XV.

Cylindri superficiem inuenire, qui à coni gemina superficie non parallela secetur ad eius axem perpendiculari, & axis coni axi Cylindri non occurrat.

Differt hæc propos. à præced. quia ibi fingebatur axem coni super axem cylindri insistere normaliter: hic autem nequaquam, sed extra cadere licet normaliter plano per axem cylindri occurrat.

Sit semiannulus cylindri AMC DBF, qui coni secetur gemina superficie externa GL interna HK, cuius basis circularia, diameter UN, vel FG, & distātia sectionum superficierum coni in basi u m: & axis cylindri MN axi coni super N insistenti non occurrat.

Primo proiiciemus superficies coni à cylindro interceptas; Quod vt efficiamus iuxta morem diuidemus semicirculum DBF in partes libitas, & ducemus normales 1 4. 2 5. & 3 6. diametro AC, & ei parallelas 7 3. 8 2. & 1 9. & alias similes ab alijs intersectionum punctis. Distantiæ verò singulę ab axe UM coni ad superficiē LG accipiantur nempe to 7. & eo interuallo ab N centro ducatur arcus 3 6. donec occurrat normali 6 3. ab eodem puncto 3. interualli 3 7 nascenti. Sic interuallū 8 11. dabit arcum 14 5. & 9 12. interuallum 15 4 sic ML dabit arcum 27. & 28. sumitatis 28. punctum, & si id agatur de omnibus alijs punctis obtinebimus singula puncta arcuum DBF, & AMC, & intermedijs ipsorum proiecta, per quæ ducta flexa 21 4 16. repræsentabit coni sectionē cū extima cylindri superficie, cuius sectio AMC, proiectā.

Sic 19 6 18. eiusdem conicæ superficiei cum interis cylindri, cuius vestigium DBF. & 20 5 17. eiusdem cum media. Eodem modo, quoque traslatis interuallis 12 22. & cæteris, quæ inter axem BM, & superficiem coni internam intercipiuntur centro N describemus arcum 23 24. donec secet normalem 1 24. & dabit punctum 24. ulięque distantiæ eiusdem rationis parient arcus ulios punctorum aliorum indices, quorum qui pertinet originatiuè ad intimum circulum flexa vinciantur 25 24 26. erit intersectio cylindri superficiei cum intima coni proiectâ.

Libeat, itaque nunc exprimere superficiem coni inter geminas superficies extimam, & intimam cylindri interclusam. A vertice coni, qui vertex in fig. expressus non est ob angustiam paginæ singula interualla accipiantur vsque ad singula puncta à parallelis 3 7. 2 8. & alijs impressa qualis sunt 7. 8 9. & cęt. ducemusq; ijs singulis interuallis centro xprimò arcum 29 30. in quē translatus arcus 27 28 exhibebit punctū sumitatis. Ita arcus 13 6 transportetur in arcum 31 32. & 14 5. in arcum 33 34. sic arcus 15 4. in arcum 35 36. & sic de alijs. habebimusque puncta, per quæ flexę ducantur, nempe per eam, quorum mensuræ sumptæ sunt ab arcubus intrinsecis, vt 15 4. quæ faciunt flexam 21 4 16. ducatur flexa 35 36 37. & aliæ flexæ per alia correspondentia puncta consequemur, superficiem 35 37 39 40. coni interclusam inter superficies cylindri intimam, & extimam, quod promissum fuit.

Sit rursus exhibenda superficies illa intima cylindri, quæ interclusa est inter superficiem extimam GL, & intimam HK, cuius semiambitus est DBF arcus. Ducatur recta RQ, in eaque circulus DBF extendatur ita quod singulæ partes singulis correspondeant V. g. 8 1 parti 41 42. & aliæ æquentur alijs, à singulisque punctis perpendiculares ducantur 41 45. & 43 57 & reliquas, inque singulas à linea RQ singulæ intercapedines transferantur, quæ inter CA lineam, & singula orbitarum 21 4 16. & aliarum proiecta puncta intersunt V. g. 48 4. transeat in 41 46. & 8 51 in 41 44. & sic de alijs, perque puncta R 44 46 52 & alia ducatur flexa. Item 48. 24 transportetur in 42 47. & per inuenta puncta omnia 54. 45. 47. 53. & cætera alia flexa ducatur, & erit tota superficies quæsita R 54 52 53.

Si verò cupias coniunctiuas superficies V. g. radij NFM interualla uT, & TM transferes in QR, & erunt 41 55. & 55. 43. à quibus duces normales, & sicut 8 51 exhibet distantiam 41 44. sic 8 56. dabit 43 57. aliæque à singulis orbitis, alias quibus coniunctiuam superficiem obtinebit 57. 58 44 45 pertinentem ad iuncturam MS.

EXPENSIO II.

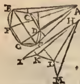
De superficiebus conorum diuersimodè sectis in planum extendendis.

Egimus satis de Cylindri superficiebus nunc ad Conorum paulò difficiliorem superficiem stylus conuertendus.

THEOR. I. PROP. XVI.

Si sint tot triangula plana, quæ altitudinem triangulorum quocumque cono inscriptorum æquent, & basim eiusdem longitudinis consequantur hæc omnia simul æquabunt multilateram figuram cono inscriptam.

Sit conus ABCE, in quo sit inscripta Pyramis multilatera, cuius latera sint ACB, & ACD, &



ADE.

ADE. Dico, quod hæc figura inſcripta ABCDE æquabitur figuræ planæ HIM ſit conflata tot triangulis, quot sũt in ipſa figura inſcripta cono ABCDA, & quę ſint æqualis altitudinis, & baſis, vel habeant latera ſingula ſingulis æqualia.

Patet: Nam ſingula ſingulis erunt æqualia ex Cor. pr. 40. vel ex 23. l. 1. vnde ex 18. l. 5. erũt quoq; tota ea illis triangulis conflata nempe figura plana HMLKI, & ABCDE inſcripta inuicem æqualia.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Coni concaui ſuperficiem externam, & internam inuenire, cuius baſis data rectangula axi, atque circularis ſit.

SIt quadrans coni, ſeu annuli eius ABCD data baſis, Coni verò internũ triangulum ſit GFC, & externum GBD: craſſitudoque eius corporis, & ſoliditas ſit FCDA; quę animo concipiatur inſiſtere annulo ABCD, oporteatque ſuperficiem internam; externamque inuenire, quam proximè.

Diuidatur arcus BD in quotcumque partes V. g. in quinq; & ducantur radij G 13. & G 12. G D, & alij.

Interuallo FC, ſuper lineam 1. 2. ducatur arcus 3. 4, fiatque 2 3. æqualis arcui 5 6. ſicut, & 2 4. æqualis arcui C 5. ducanturq; lineę 1 3. & 1 4 Hęcque erit ſuperficies interna, quæ radijs continetur G 6, & GC, nimirum quinta pars ſemiconi. Ducta deinde perpendiculari C 7. ad latus FC, ſumatur 7 D, & transferatur in 2 8. ſumpto deinde interuallo DA transferatur ab 8 in 9. & centro 9. ducatur portio arcus 10. 11. quæ ſit æqualis arcui D 12 13. ducanturque lineæ 9 11. & 9 10. eritque ſuperficies 9 11 10. extrinſeca, & ea quę continetur radijs G 13. & G D; nimirumquinta pars extrinſecæ ſuperficiei ſemiconi, vel decima totius coni. Superficies vero coniunctiuæ atunt omnes eædem VCDE, at verò ſectio eadem, quæ annulus planus ABCD.

Quod verò res ita proximè ſe habeat, demonſtrabitur de ſuperficie externa 1. 3. 4. & eadem ratio erit de interna. Nam cum conus ſit rectus, ex hypotheſi, omnes lineæ ductæ ab apice ad baſim erunt æquales lineæ FC, vt ſunt ea effectione 13. 2. 1 4. latitudo verò eſt effecta eadem, quam arcus C 6. ergo cum ſuperficies dimidij coni ſit æqualis ſectori, qui diametro latere FC conficitur ea prop. 24 tract. 21. & arcu æquali licet ex maiori ſemidiametro FC ductus circumferẽtiæ A 6 C, & arcus 3 4. ſit factus æqualis quintæ parti ſemicirculi A 6 C, etiam ſuperficies 1 3 4 erit proximè æqualis quintę parti ſuperficiei conicę.

Diuiſo annulo GCEV, in quot libuerit partes, & ductis lineis diuiſionum E. E. & cæteræ demittantur parallele ad AD continua E 3. ab intrinſeco circulo, & a 4. punctata ab extrinſeco; deinde iungantur DA A 3. & A 4. & cætera omnia puncta à perpendicularibus notata ijſdem diſtinctionibus adhibitis linearum diuerſimodè ductarum.

Facto deinde centro in D ducatur arcus A 5. Ita poſito pede circini in 3. ab eodem puncto A ducatur A 6. ſic in 4. poſito circino ducendus arcus A 7 & ſic de cæteris, quæ puncta coniungenda ſunt rurſus primis ſuis punctis; vnde profecta fuere; ſic punctum 5. puncto E iungetur, at 6. puncto 1, punctum verò 7. puncto 2; quod ſit eatenus à 4. pũcto à circulo extrinſeco prouenientẽ, & ſic alia vt eſt punctum 7. rurſus ad eiuſdem circuli punctum eodem ordine reſtituantur. Iamq; præparatum erit, id quod requiritur ad ſuperficiem requiſitam conficiendam.

Seorſùm ergo ducatur LM, & in ea notetur interuallum 5 E, & ſit LM: deinde ſumpto interuallo E 1 centro M ducatur arcus; rurſuſque ſumpto interuallo 6 t. centro L ducatur arcus ad eaſdem partes. Nam punctum 8. in quo ſe interſecant erit illud, per quod ducenda eſt linea L 8

Rurſus ſumpto interuallo 1 9. poſitoque pede circini in 8. ducatur arcus, deinde ſumpto interuallo 1D 9. poſito pede circini in L ducatur ad eaſdem partes arcus, & vbi ſecat præcedentem in puncto 11. ducatur L 11. & ſic de cęteris fiat vſque ad C 12. quæ transferetur in L 13. eodem modo, ac cæteræ. Deinde per hæc puncta M 8 11 13. ducatur parumper flexa; hæc enim terminabit ſuperficiem L M 13. intrinſecam coni, qui in arcum CE finit,

Superficies verò L 15. 14. eſt extrinſeca eadem arte delineata.

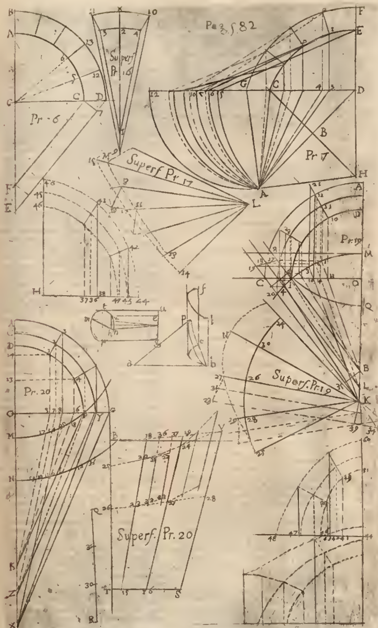
Probatur. Quia latitudinem quintæ partis ſuperficiei datam 1 2 habet, quæ eſt M 8. deinde longitudinem conſequitur, quam Hypotenuſa haberet in ſuperficie coni interna deducta à vertice vſque ad 11 ſiquidem eſt illa, quæ ſubtendit, tùm lineam altitudinis 1 3, tùm longitudinis 3 A, qualis ea effectione eſt 6 1 æqualis L 8. & ita dicas de linea 5 2; Cum ergo L M 8 triangulum habeat, ſua latera eiuſdem longitudinis velut, quam triangulum in ſuperficie coni interna deſcriptum, erit id æquale quartæ parti ſuperficiei ipſius ſaltem proximè, & ideo ea prop. 16. h. etiam tota figura plana L M 13. æquabitur multilatero coni inſcripto, quod ſi erit ex multiplicatis lateribus quantum fieri poteſt conflatum neq; ad ſenſũ differet.

Si autem aliquis exoptet ſuperficies coniunctiuas; is vnius accipiat exemplum, ea qua cæteræ innoteſcent: Sit itaque deſcribenda ſuperficies coniunctiua, qua E 8 1 2 coniungitur cum ſegmento A 1 9: Accipiatur interuallum 1 2. & centro 8 deſcribatur arcus; deinde accepta longitudine 7 2 centro L deſcribatur arcus verſùs eaſdem partes; ſeque interſecabit cum priùs ducto in puncto 16. vbi ergo ſe interſecat, ducatur à puncto 8. recta, & rurſùs ad lineam 8 L parallela 16 17. Nam hæc deducta vſque ad L ſuperficiem coniunctiuam dabit, eam verò non terminamus prope punctum L. Quia non admodum deſeruit, & facilè quiſque ex ſe inuenire poterit.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Dato dimidio arcu in ſuperficie angulari datæ altitudinis, coni ad illum terminantis ſuperficiem inuenire.

SIt data altitudo coni BA, eiuſq; ſemitriangulũ CBA, qui ſecetur angulata ſuperficie ſuper planum CDHA perpendiculariter inſiſtentis in lineis CD, & DH. Arcus verò datus ſit CE, ſeu annulus GCVE, & oporteat reperire ſuperficiem coni in illum arcum CE terminantis.



Pag. 582
Pr. 6
Superf Pr 16
Superf Pr 17
Pr 17
Pr. 19
Superf. Pr. 19
Pr. 20
Superf. Pr. 20

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Coni recti circularis, cylindri superficie concaua secti, superficiem in planum proijcere.

SIt datus conus rectus, vel eius semitriangulum intrinsecum out, extrinsecum verò cko, qui sit circularis basis, cuius quadrans tn interne, externæ verò ca, seceturque cylindro, cuius portio circuli mt, & cuius superficies imaginanda est plano ino perpendiculariter insistere velut ellipsi secat a p c b in fig. seorsim facta.

Diuiso itaque annulo ciao, in quot libuerit partes ducantur, à punctis, quibus portiones radiorum, vt in. 12. secant perpendiculares ad co, sintque 10 t3. discontinuæ, à punctis interni circuli 11 t4. punctata à punctis medij, & 12 16 continua ad extrinseco circulo, & vbi secant oc, ad discontinuas à vertice intrinseco s ad punctatas ab z, ad continuas à vertice coni extrinseco k, ducantur rectæ, vt sunt e 13. z 14. & k 16.

Productis itaque lineis in quadrante zoc, quæ à vertice s proficiscuntur vsquedum incidant in arcum am à punctis, in quæ cadunt t. 2. 3. erigantur perpendiculares ipsi ao, seu parallelæ lineæ co, quæ sint 1 t7. u. 18. 3 t9. perque puncta e7. t8. t9. ducatur flexa, & idem agatur in alijs similibus, & hic apparatus erit sufficiens ad superficiem internam, superficiesque coniunctiuas describendas.

Verùm ad hoc, vt etiam superficiem extrinsecam arcuatã, clausã duabus superficiebus ca, & to intrinseca, & extrinsecu coni facias. A punctis 3 2 t parallelæ oa diametro ducendæ, nos duximus solum à punctis 3. & 4. quæ à circuli extrinseci punctis originem ducunt, quæ parallelæ sunt 3 2t. & 4 23. sed aliç quoque à cæteris similibus punctis in arcu im repertis ducendæ sunt, si volumus, nedum ca, sed medium, & intrinsecum t d arcus delineare. Quibus confectis erit adornatum machinamentum ad superficies extendendas.

Internallo itaque e1 super lineam x 30. seorsim ductam describatur arcus 24. e5. super quem à linea x 30. transferantur minimæ partes quadrantis t d V. g. 30 26. sit æqualis d 10. cæteræque cæteris, & per puncta 26. e4. 25. & alia rectę ducuntur, vt est x 30. & x e6. quæ terminabuntur sumpto interuallo s 8. & translato in x n, sic a 17. & translato in x e7. sic sumpto interuallo u 6. & translato in x e9. & ai in x e5. & eandem ducta flexa, N e7 e9 e5. erit n x 25 superficies interna quartæ parti coni dati æqualis.

Ita autem inueniemus superficies coniunctiuas ad interuallum 10 11. & t3 te. ducemus rectas 31 32. & 33 34. æqui distantes à linea 16 k sumpta deinde distantia u 18. posito pede circini in x ducatur arcus, qui secet 31 3e in puncto 3t. & rursùs interuallo u 19. posito centro in x describatur arcus, qui secet 33 34. lineam in puncto 33, & per puncta e7. 31. 33. ducatur flexa: Rursus ducatur à puncto x perpendicularis x 39. & à n altera 35 e, & sumpto interuallo a puncto 35. vsque ad x transferatur in 39 34. & vbi terminat in puncto 34. ducatur recta x 34. & habebimus superficiem coniunctiuam e7 x 33 34.

At si quis exoptet habere sectionẽ, quã facit conus in cylindro ipso. Super lineã n.44. ab n trãsferatur p particulas assumptus arcus an m. & fit n 44. rursùsque arcus m 3 per minimas particulas assumptus erit n 3?, & arcus m 4. & fit n 43. & tandem arcus m 20. & fit n 44. à quibus punctis excitentur perpendiculares, quales sunt 43 4e. 41 38. n 40. Sumpta verò distantia at. 3 trãsferatur in 4t 38. & 4 2 3. in 43. 42. perq; ea puncta ducatur flexa 40 41 42 44. quæ non erit ellipsis cum cylindri sectio non sit plana, sed quoddammodo eam imitabitur, sic ducetur media 45. 43. & extima 46 47. vt satis constat ex schemate.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Superficiem Coni concaui circularis in planum proijcere secti à superficie conuexa Cylindri ad axem perpendicularis.

HÆc propositio, vt precedens operi consignabitur, nisi quod arcus mt contrariù modo est collocandus, vt arcus tq.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Coni in rectam terminantis superficiem à superficie cylindrica gemina sectam in planitiem consignare.

HVnc conum descrip. prop. 8. tract. e5. vt in eius fig. videri potest; probauimusque ibi eius sectiones basi, rectæ axi, æquidistantes esse ellipses, & qualem repræsentat conus m r n t g k n seorsim factus.

Sit ergo talis conus, cuius basis sit circulus, seu eius vicarius quadrans pd, & triangulum per axem opk, quem repræsentat m n k in figura seorsim facta; Diuiso itaque quadrante dp in quaslibet partes ducantur radij, seu portiones radiorum quarum vna est t 3. & à punctis, in quibus secant quadrantes extrinsecum an intrinsecum dp, & medium cy parallelæ t t4. & 4 13. & cæt. & normales 1 5. c 7. 3 8. & 4 6. & cęt. ducantur ipsi po, quæ normales incident in puncta 5. & 6. sectionis oa basis cum triãgulo opk. Ab ijs ergo punctis ad verticem coni k rectæ ducantur, & sint k 5. & 6 k. A punctis verò 7 8. & sicut p, y, & alijs similibus pertinentibus ad circulos medium, & externum prædictis parallelæ quales sunt 7 19. ipsi 5 k, & y 12 ipsi ek cum ad puncta z, & z assumpta tendant, vt facimus in preced. propos. Istæ itaque secabunt arcum me, & nh exprimentes vestigium superficiei cylindricę conum secantis. Iamque omnis apparatus eric completus ad superficies, quas volumus, tum coni, tum cylindri, tùm coniunctiuas delineandas.

Seorsim itaque ducta linea qa transferatur in eã per minimas partes arcus d 4 p, & sint partes n t, & t t4, & 4 p æquales tribus r 30. & 30 31. & 3t q, & cæterę, cęteris; si adsint. Ducatur deinde seorsùm linea py, quæ exprimat t n in fig. coni, & ei normalis y z quę exprimat g n, in eamq; transferantur omnes sinus versos d 14. & sit y 15. deinde 14 13. & sit 15 15. & tandem dn, & sit ys. Assumpto autem interuallo 5 k centro puncto 15. ducatur arcus versùs z, & interuallo r 30. ducatur arcus centro z, & vbi se de-

cussant

cussant arcus, ducatur recta 5 18 15. Rursus intervallo 6 x centro 16 ducatur arcus, & intervallo 30 31 centro 18 ducatur alius arcus, & vbi se decussant in 19. puncto ducatur recta 16 19. idem que fiat intervallo PA, centro S, & rursus intervallo 31 Q centro 19. & ducatur S V, perque puncta intersectionum arcuum S 18 19 V flexa curuetur, & tota superficies SVTS erit superficies coni propositi, qui in lineam desinit.

Ad quod ratione confirmandũ; sciendum est, quòd omnes lineę in superficie huius coni t·g à peripheria basis m t n r ad lineam g u, in quem terminat ductæ sunt parallelæ plano, sicut e u à vertice ducta plano m n k parallela est, vnde pars e k. in ipsa linea coni terminatrice est sinus h y, & e u eius residuum, & ideo e k parallela, & inter parallelas æquabitur ipsi sinui hy. Et quod t u ducta à vertice coni, & sectio rectanguli per axem est quoque rectangula lineæ terminatrici u g. Vnde superficies coni quatenùs in g u terminat, erit rectangula: Ideo TS representans t u est rectangula lineæ TS representanti u g, & singulę partes in ea sunt æquales singulis sinubus basis, vt 15 S sinui 5 1, vel u 14 ea ratione. Et quia h k æquatur ipsi y e, ideo 15 18 fecimus æqualem rectæ 5 K; quia itaque flexa S 18 V æquatur arcui NP, & angulus T rectus est, vt est angulus u. Ideo S 18 T 15 æquabitur superficiei coni æqualibus lineis rectis sub æquali angulo, & arcu contentę saltem proximè.

Modò sit describenda superficies illa, quę intercipitur inter duas superficies MP, & NH cylindri secantis conum. Accipiatur intervallum 5 17, & transferatur super lineam 18 15 à puncto 18 vsque ad 20. sic 6 18 à puncto 19 vsque ad 24 super lineam 16 19, sic MO super lineam TS, quæ sit u 25. & per puncta 25. 20. 24 V flexa ducatur. Rursus intervallũ MN transferantur in 25 26. & 17 13 in 20 23. sic 18 9 in 24 27. & tandem PL in V 28; perque puncta 26. 23. 27. 28 flexa ducatur 26 27 28. & iam superficies 25 V 28 26 erit illa, quæ inter duas superficies cylindri secantis intercipitur.

Quod patet. Nam cum lineæ 5 a, & aliæ sint parallelæ, & æquales lineis 18 15. & alijs, si cogitentur in cono ipso, vt y e parallela ipsi b k superficiesque nempe basis coni, & cylindri secantis sint rectangulę ad planum OGK trianguli per axem, representati per triangulum m n k interceptæ quoque portiones 5 17. & 18 6. erunt æquales illis, quæ in superficie coni sunt inter basim coni, & superficies cylindri interceptæ, quod est dicendum de alijs. Quapropter 8 15. & 18 20. eo quòd illis 5 17. & alijs æquales sint, mensurabunt intercapedinem æqualem illi, quæ inter basim coni, & superficiem cylindri intercinditur. Sic 25 26, 20 23 equales 17 13 sibi parallelis intercapedinem, quę inter vtramque superficiem cylindrorum reperitur mensurabunt.

Iam si velimus superficies coniunctiuas sumpto intervallo 1 2. & 2 3 arcus DP, CT, & AX trahantur parallelæ ipsi 18 15 lineę 31 32. & 22 33. accepto verò intervallo 7 34 transferetur in correspondentes lineas 36 21. & intervallum 8 35. in 22 37. & ducatur 20 21 22 flexa per puncta 20. 21. 22 sic spatium 7 10 in 36 32. & 8 11 in 32 33. perque puncta 23 32 33 flexa ducatur; & erit superficies 20 22 23 33 coniunctiua in radio 1 3.

Ratio huius operationis potest colligi ex præcedentibus, vnde eam non adferemus.

Tandem superficies cylindri, quę inter vtramque superficiem coni est, ita exprimetur. Extendatur arcus NH in lineam 48 44, & singulę eius partes N 13. & 13 9. & 9 L extendantur in ea 44 41. & 41. 43. & 43 46. & à singulis erigantur perpendiculares ęquales singulis sinubus 41 49 æquetur sinui 5 1. & 43 50 sinui 6 4. & 44 51 sinui OD, perque puncta 46. 50. 49. 51. flexa ducatur, & erit sectio superficiei coni in cylindrica superficie, cuius ambitus NH; ita ducantur alię vt patet in figura, & erit tota superficies 48 60 52 46. ea, quæ quæritur.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Coni obliqui rotundi superficiem inuenire à Cylindri superficie ad axem non perpendiculari sectã.

Sit data basis coni circulus ABC, coni verò triangulum scalenum ADC: Arcus verò superficiei cylindricę secantis EFG; super quem intelligatur cylindrica superficies: sed inclinata, quantùm est linea ML à linea perpendiculari 12. Ad vitandam verò obscuritatem, quantùm fieri potest, loquemur primò de apparatu necessario ad superficiem intrinsecam describendam.

In quadrante itaque BC facta, vt libet diuisionibus 10 11 ducantur perpendiculares 12 11 & 10 13. & à vertice coni D educantur rectæ D 12. & D 13. & DC, & DF.

Deinde seorsim in rectangulis lineis m t, & m n altitudines perpendicularium transferantur, vel etiam potest fieri ad alteram partem, vt in triangulo S L M fecimus pro quadrante sinistro AB; quia enim conus est scalenus, ideo ambæ partes in apparatum necessariò accersendæ sunt cùm superficies quartæ partis sit differens ab alijs quartarum superficiebus. Longitudo itaque m n sit eadem, quæ DS, & altitudo m 15 eadem, quæ 13 10. sicut & m 16. eadem, quæ 12 11 & tandem m t. eadem, quę SD, & ducantur ab n rectę n 15. & cęterę. Ducta deinde u m, quę faciat eundem angulum, ac est angulus MLH, erit inclinatio cylindri, ducatur m r illi perpendicularis; deinde sumptis distantijs punctorum 17. 18. 2 à linea OF, sed rectangulè ad earum distantiam ducantur parallelæ 3 19. & 4 20 vsque dum secet quęlibet suam correspondentem lineam; sic linea 3 19. quę distat tantùm ab m 2 quantũ puncta 12. 17. ad lineam n 19 producenda est, quòd m 16 sit eadem, ac altitudo 12 11. & cęt.

Hoc autem confecto assumantur rectangulè distantię punctorum, vt t 9, & aliorum à linea tm, vt n 16. & transferatur à linea 10 etiam rectangulè ab F versùs 3. deinde distantia 21 81. & transferatur iterum ab S versus 3. deinde intervallo PS, quo descriptus est arcus ABC inferius posito super lineam FP à puncto 6 apud 3. ducatur arcus, qui secet lineam n 12. in 4. & rursus distantia 14 22 eodem modo reperiatur punctum 7. sed translata distantia m x dabit punctum 9. Deinde per puncta reperta 3. 4. 7. 9. in plano 800 ducatur flexa, quę erit id, quod de cono absumit pendentia ipsius cylindri: Siquidẽ omnes aut mu parallelæ in cylindro pendente, si sint æquales, pendent ęqualiter, & ęqualem lineam perpendiculares à verticibus cadentes intercipiunt, quę ad basim coni normalis sit.

His

Fig. 85

Superf. Pr. 21 Fig. 2

Pr. 21 Fig 1

Fig Pr. 21

1 Fig Pr. 21

Superf. Pr. 21

2

Fig. 2 Prop. 21

Fig. 2 Prop 22

Fig. 2 Prop 22

Superf Pr. 21 F. 2

Fig 1 Pr. 22

His ita peractis centro D à puncto 4. ducatur arcus 4 25. sicuti à puncto 7. arcus 7 26. à puncto 3. arcus 3 27. ad partem sinistram, & ab istis punctis 26. 25. 27. perpendiculares ad DG, & DB iacitentur. Deinde sumpta altitudine perpendiculari u 28 transferatur à 27 in 31. & ducatur D 31. rursùs altitudo 19 28. transferatur in 25 30. & ducatur D 30. tandem altitudo 28 20 assumpta perpendiculariter transportetur in 26 29. & ducatur D 29. quæ datę D 4. vel quæ eadem n 25, & altitudinis 25 30. erunt Hypotenusæ, & longitudines superficiei conicæ in illo situ.

Hoc peracto seorsim ducta e f, transferatur super eam ambitus 3. 4.& 4. 7. 7 9. vt sunt e 32. 32 33.& 33 f, istq; erectis perpēdicularibus e l, quæ sit eiusdem altitudinis, ac m n, & 32 34 ęqualis lineæ 3 19. iterumque 33 35. quæ æquetur 4 20 per puncta l 34 35 f curua ducetur, quæ imitabitur superficiem, quam in ipso cylindro obliquo conus secans efficit. Sumpto verò interuallo c x, & alijs inter m 4. & m x similiter sumptis transferemus in f 37. & alias lineas; ducemusque arcum e 37. quò ob pendentiam cylindri minor est superficies l e f.

Iam verò tempus est, vt superficiem internam describamus. Sit linea QR æqualis lineæ D 36 minor, quam DB, quæ secat circulum cylindri VG, assumatur deinde interuallum D 29. & centro Q arcus portio describatur, rursusque interuallum 37. 35. ex orbita l f, & centro R alia portio circuli occulti describatur, vbi ergo se secant in puncto 45. ducatur linea 45 Q: Rursùs assumpto interuallo n 30. centro Q circuli portio describatur, denuòque ab orbita l f interuallum 34 35 assumatur, & centro puncto 45 circuli arcus describatur, & vbi se secant in 44 à Q ducatur recta; iterum sumpto interuallo D 31 ex Q centro arcus fiat; centro verò 44 alius arcus interuallo l 34 intersecet punctum 43: Per extrema itaque harum linearum ducetur flexa R 45 44 43. & erit quarta pars conicæ superficiei descripta: Non alio verò modo alterius quartæ superficies describetur assumptis longioribus interuallis rectarum n 46. D 40. & DE interuallisq; curuarum 47 48. & 48 49. & 49 50. quas seorsim descripsimus in fig. notata n. 2.

Si verò superficies coniunctiuas, quis cupiat dignoscere, ita assumpto interuallo 48 56 describat portionem gyri centro 42. & assumpto interuallo D 57 describat aliam portionem circuli centro Q, qui se intersecabunt in puncto 53. & idem fiat de interuallo 55 56. & de interuallo D 58. qui se intersecabunt in puncto 52. per quæ reperta puncta ducatur flexa 52 53 42 & parallela 52 61. & hæc erit superficies coniunctiua comprehensa numeris 42 51 61. quæ versus 61 terminabitur, vt placet, & sic dicas de alijs.

Scias tamen hunc modum non esse præcisum. Vnde ingenijs scrupolosis. Minùs fortè probabitur, licet quoad vsum, aut saltem, vt plurimum insensibiliter differat ab exactissimo. Qui talis erit. Sit Conus ACB, qui super axem BD trianguli scaleni, & super planum CSF ad rectos collocatus sit angulos.

Sitque cylindri secantis latus OC, & radius DQ, quò eius peripheria DL ducta est, & ei GC rectāgula linea CH, quæ basim cylindri exprimet, & cadet à vertice coni normalis AH, quæ eam terminet, transferaturque CH, super DA, & sit DT, & ab hoc centro rectæ punctatę ducantur ad punctum 10. & similis, quibus perpendiculares cadunt; vt 10 11. & ab istis punctatis assumatur rectangulè ad CF interuallum à puncto, quo secant LDM lineæ T 10. & aliæ, non autem à punctis in quibus secant lineæ 10 11, & cæteræ, ratio est, quia illæ non sunt in plano, quo ponitur esse linea HC, sed sunt in plano AC; planum itaque CFE exprimit basim cylindri, in quò est HC linea, at verò CFB planum triangulare coni, in quo AC axis, & vertex A. Hæc verò interualla transferantur in CH V. g. sit 10 11 æqualis C 4 & 2. 3. æqualis C 12. tota verò constructio B 12 C, fiat vt priùs. Ductis postmodùm parallelis ad CB à punctis 4. & alijs nuper signatis, vt 4. 13. assumatur interuallum rectangulè ad eas puncti B à CB, quod erit 21 B, & 6 à 4 13, quod erit 6 13. & 7 14 puncti 7 à linea 12 15: transferanturque V. g. 7 14 in 2 5. nempe in lineas transeuntes per punctum 2 perpendiculares ad CV, & sine 2 5. & interuallo DQ posito pede circini in centro Q cylindri interuallo Q 5 arcus ducatur, qui pertingat vsque ad lineam E 3. sitq; arcus 5 8. eritque punctum 8 in orbita 15 8 16. quia tantùm remouetur à linea super 2 perpendiculariter, vt 2 5. vel quantùm est 7 14. vnde circulus cylindri, vel saltem portio Ellipsis, quę parum differet à circulo qualis est 15 D 16. transibit per 5. & per lineam CE in 8. vnde punctum 8. tantùm remouebitur à linea CF, quantùm remouetur punctum 7. à CA perpendiculari. Si verò aliquis velit etiam exactiùs rem prosequi non trahet arcum 5. 8. sed puncto 5. applicabit normam factam iuxtà ellipsim 15 D 16. ad perpendicularem DQ, quæ faciat angulum mixtilineum 15 D, Q singulis punctis V. g. puncto 5. & vbi secabit 3 2 in puncto 8 illud punctum 8 erit in orbita 15 8 16. cætera verò omnia executioni mandabuntur, vt priùs.

PROB. VII. PROPOS. XXII.

Dati coni concaui superficie planâ, sed axi non perpendiculari secti, superficiem inuenire,

HÆc superficies axi non rectangula, vel potest pendere versus apicem coni, vel in auersam partem: sed quoquomodo pendeat, eadem est operatio; ita conus potest esse, vel cuius basis sit circulus, vel cuius sit ellipsis; sed quæcumque illa sit eadem etiam est praxis.

Sit ergo datus conus ACB, cuius axis AB, & semibasis CMD, & HBN, planum verò pendens CH, vel CF lineis exprimatur. Ducantur radij, vel eorum portiones t 2. & cæteri; deinde à puncto C ducatur perpendicularis ad CD recta CU, ad quam ducantur perpendiculares x. 5. & 1 6. & aliæ sicut, & ad lineam CB ducantur perpendiculares 1 3. & 2 4. & aliæ à vertice verò L distante à C, vt à idē vertex distat ab A per puncta, in 5, 6, & alia, quę perpēdiculares exdunt rectæ ducantur, & vltra producantur quantùm sat est V. g. ab L ducatur lineæ L 5. & L 6. & aliæ sicut, & à 2 producatur linea 2 3. & 2 4. quantùm sat est.

Lineæ itaque à puncto L productæ secabunt CH planā pendens in oppositū apicis L in punctis 10 & 8. horum itaque punctorum assumetur distantia perpendicularis, vt 11 8 à linea B C, & transferetur super lineam correspondentem rectangulè, sic distantia rectanguli puncti 13 à linea CD signati in linea B 4 13 erit æqualis lineæ 8 11, &

Eee pun-

puncti 14. distantia rectangula à CD erit æqualis distantiæ rectangulæ puncti 7. à 12. & sic de celiquis, vtpote puncti 18 à CD erit æqualis distantiæ 9 20. & puncti 19 à CD distantiæ 10 21. & cęt. Per hæc autem puncta signata in lineis, quæ procedunt à B ducantur flexæ C 13 16. & H 19. 22. & C P 26 16. erit positus, seu situs, quem in plano suo describunt circuli PUN, & CMD ad planum pendens ea producti, sic C 14 15. & H 18 17 flexę, portionesque ellipsium erunt; quas conus semicircularis in plano producit detruncatus à plano CH.

Productis autem lineis SN, & UD, ad easi à punctis prædictis V. g. 13. 19. & alijs eiusdem generis producantur perpendiculares ipsi N, ab ellipsibus, quidem internis H 18 17. & H 19 22; quę terminent in UN productam, ab ellipsibus verò extrinsecis C 13 16. & C 14 15. quæ terminent in AD item productam, sic punctum 19 producetur vsque ad 23. punctum verò 13. vsque ad 24. quę & simul poterunt coniungi linea 23 24. sicut, & puncta 19 13. linea item coniungi quibunt, vt puncta originaria, à quibus prodeunt 1. & 2. coniuncta sunt. istis itaque peractis iam omnis apparatus adaptatus erit, vt ea eo erui possint exoptatæ superficies.

Si ergo conus sit scalenus, peiùs oportebit describere totam ellipsim, at si non, ellipsis quadrantem O 25 Q tali modo. Axis AH ellipsis P 19 22 in lineam rectam extendatur, & sit OP, singulaque puncta, vt 19. 22. & alia, quæ in ipsa sunt in lineu PO notentur, & punctum 22 sit V. g. punctum P, & punctum 13 sit 26. & cæt. ab istis verò punctis perpendiculares erigantur, vt 26 25. eiusdem altitudinis, ac punctum 10. à linea CD, quod interuallum rectangulè sumatur; & sic agatur de alijs punctis, prout originem ducunt à punctis correspondentibus in arcu HIB, sic distantia puncti 27 rectangula à CO erit eadem, ac PQ. & sic de alijs, quibus peractis per puncta extrema O 25 Q, & alia ducatur flexa, quæ erit portio ellipsis: quę exposcitur, & quam conus datus productus vsque ad planum CF signat in ipso: siquidem latitudines adipiscimur per partes axis 22 19 translatas in OP, & altitudines per distantias punctorum 27. & 10. & cæt. à linea CD translatas in rectas 26. 25. & PQ, & alias.

Hac itaque ellipsi erecta, sic deinde superficies interna extendetur. Sit linea B 28. seorsim sumpta æqualis lineæ SN assumatur interuallum B 29. & centro U describatur arcus; rursùsque interuallo O 32 in altera fig. 2. centro puncto 28. in lineu B 28 arcus describatur, & quò se decussant arcus in puncto 35 ducatur recta B 31. sic sumpto interuallo U 30 describatur arcus centro B, & cursus interuallo 32. 33. describatur arcus centro puncto 35. & quò se decussant in puncto 36. ducatur recta B 36. sic fiat quoque interuallo U 31. & interuallo 33. 34 ad uenandum punctum 37. & de interuallo B 33. & 34 35 ad nanciscendum punctum 38. & sic de alijs, vsque ad punctum R: perq; extrema puncta R. 38. 37. 36. & cæt. vsque ad 28 flexa ducatur, quæ superficiem dimidiam dimidij coni integrabit, eritque eodem modo altera dimidia pars facięda cũ hęc pro alio dimidio coni obliqui deseruire nequeat, at si conus sit rectus sufficiet hæc quarta pars cùm omnes quartæ sint æquales.

Verùm aduertendum est quoque in conis rectis alio modo absque ellipsi O 25 Q posse describi superficies proposita. Sit ergo describenda superficies exterior, quam à cono LEC detruncat planum expressum linea CH. Interuallo BD describatur arcus DS, & interualla M A & alia quadrantis C M transferantur in DS; sitque M A æqualis arcui D 39. & alia alijs; ad singulaque puncta ducantur rectæ velut B 39. vel U 40. & cęt. Deinde interuallũ D 41 transferatur super lineam B 39. & sit B 43. sicut, & interuallum A 42. & sit B 44. & sic de alijs. vsque ad 45. perque puncta D 43. 44. 45. & alia, flexa trahatur, quæ terminabit superficiem extrinsecam defficientem à perpendiculari sectione U, D, 45.

At si quis superficies coniunctiuas exoptet, sumpto interuallo B 48 versùs 47 centro ipso B ducatur arcus; deinde sumpto interuallo 48. 41 centro 47 arcus describatur, & quo se decussant in puncto 46 recta ducatur B, 46. & alia 47. 46. eritque superficies B, 46. 47. ea, quæ exposcitur.

COROLLARIVM.

QVod si lineæ CH, vel CF essent flexæ; eodem modo operandum esset V. g. si essent superficies cylindricæ, quarum axis in plano iaceret, maximè si conus esset rectus, at si conus esset scalenus eodem modo, ac in propositione 21. huius de cono scaleno docuimus erit agendum.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

Coni concaui quacumque superficie axi perpendiculari secti, seu conus sit rectus, seu scalenus, seu rotundus, seu Ellipticus superficiem in planum extendere.

SIt triangulum per axem conum exprimens ABC, & eius semibasis AOB, qui quacumque superficie secetur RVG ipsi plano triangulari CAB, & axi CB perpendicularis; oporteatque eius superficiem in planum proijcere.

Diuisa eius superficie tribus circulis descripta in quotlibet spacies ad centrum radij ducantur, vt est 1. 2. 3. & vbi se decussant cum circulis intimo, medio, & extimo ad AB perpendiculares ducantur 1. 4 2. 5 3. 6. deinde à vertice coni C rectæ ad puncta 4. 5. 6. ducantur, quales sunt C 4. & C 5. & C 6. quæ secabunt superficiem REG in punctis 7. 8. 9. centro ergo V. g. 4. interuallo 4 C ductæ portione circuli occulte notetur in AU punctum 12. & ducatur 3 12. Sicque centro 5. interuallo C 5 notetur punctum 11. nec non eodem modo in centro 6. interuallo C 6 notetur punctum 10. & ducatur 1 12. & 1. 10. & idem agatur in omnibus alijs punctis, in quibus radij, seu portiones radiorum tres semicirculos secant. Iamque apparatus erit adocnatus ad superficiem in planum extendendam.

Super ergo AC, seu si libeat super aliam æqualem seorsim ductam centro C interuallo 14 15 ducatur arcus, rursusque centro A interuallo 1 15. alius arcus describatur; & vbi se intersecant in puncto 16. ducatur linea 16 C; cursus centro C interualli 1 2 1 ducatur arcus, & deinde centro 16. interuallo 15 1 alius arcus signetur, & vbi se decussant in puncto 17. recta ducatur 17 C, & eodem modo sumpto interuallo 13 D ducatur recta

18 C3

P 586
Fig prop 24

F. P 23

F. P. 25

18 C; tandem per puncta 18. 17. 16. A ducatur flexa, quæ in cono recto, & circulari, vt in hoc circulus erit, at ea erit in alijs ambitus quicumque. Itaque coni superficies, quæ A 16 18 C continetur est illa: quę quartam partem coni operit.

Superficies autem coniunctiua eodem modo fiet, nam adhibitis interuallis 11. 2 centro C ducetur arcus, & 1 2 à centro 17. ducetur arcus, qui se intersecabunt in puncto 19. & ducetur recta C 19. Iterumque adhibito interuallo 10. 3 centro C arcus ducetur, & 2 3 interuallo, centro 19. alius arcus ducetur, qui se intercipient in puncto 20. & describetur recta C 20. deinde puncta 17. 19. 20. flexa coniungentur, & superficies 17 20 C erit coniunctiua coni integri.

Modo via subtractionis inquirenda est superficies, quæ secatur à superficie FEC, quod vt fiat cētro puncto 21. interuallo 21 22 ducetur arcus, qui secet AB in 23. & ex eo puncto erigatur perpendicularis 23 24. & sic fiat de alijs punctis, quibus perpendiculares 1 4. & E D, aliæque si sint plures incidunt, & ductis arcubus, vt 7 26. erigatur à puncto 26 perpendicularis 26 25. & cæt.

Deinde interuallum 14 24 transferantur à C in 27. super lineam C 16. æqualem lineæ 14 15. & Interuallum 12 25. In lineam C 17. ęqualem lineæ 12 1. & fit C 28, & sic de alijs, perq; puncta ducatur flexa 29. 28. 27. F, & erit superficies, quęsita 29. FC detruncata à cylindro irregulari, seu regulari, cuius positio, seu situs est FEG.

Nec alio modo superficies cōiunctiua inuenietur. Nam centro facto in puncto, quo perpendiculares aliorum circulorum medij, & extimi cadunt V, g. in 5. interuallo 5 8 ducetur arcus versùs BA, & ex eo perpendiculares erigentur ad Hypotenusas 13. 2. & 10. 3. deinde interualla V. g. 11. 30. & 10. 31. transferentur in lineas C 19. & C 20; notabunturque puncta C 32. & C 33. perque ea ducetur linea 28 32 33. eritque superficies 28 C 33 coniunctiua, quæ exquiritur.

PROBL. IX. PROP. XXIV.

Superficiem coni concaui, cuius basis lenticularis, seu semilenticularis, seu cuiuscumque alius figuræ, secti à superficie cylindrica in planum proijcere.

Sit angulus ABC, cui insistat conus aliquis, qui cylindri superficie secetur ad illud planum ABC perpendiculari, vt BDC, oporteatque inuenire superficiem illius coni, qui tamen habeat basim ad libitum electam quamcumque, & triangulum quodcumque, sed tamen tale cuius per axem angulus aliquis sit BCA datus, extendatur arcus super rectam EF, ita vt æquales, aut ferè æquales sint EF, & BDC, & à puncto F erigatur perpendicularis FG, & ad quamlibet longitudinē aperto circino à puncto E ducatur versus O arcus, qui secet FG, eritque recta EO diameter basis coni ad libitum electa, super quā fiat quadrans GL centro M, & centro I super eandem lineam alius arcus EL, eritque basis cuiusdam coni integrata ex diuersorum circulorum portionibus, ipseque conus non propriè conus; sed potius ex portionibus conorum cōpactus: huius ergo coni sit inuenienda superficies.

Ductis radijs, seu radiorum portionibus V. g. 1. 2. 3. & cæteris ad centra circulorum à punctis, in quibus tres circulos secant intimi, extimi, & medij, quales sunt 1. 2. 3. perpendiculares ad EF demittantur pro vt sunt 1 4. & 2 5. sic 2 6. & 3 7. & cęt.

Deinde interualla in arcum BDC transferantur; ita vt F 6. sit æqualis arcui C 8. & 6 7 æqualis arcui 8 10. & 6 4 æqualis arcui 8 9. & cæt. Exinde à puncto A ad singula puncta 10. 8. 9. & cæt. in BDC rectæ ducantur singulæ singulis perpendicularibus correspondentes, quarum longitudines transferantur quęlibet ad perpendicularem sibi correspondentem, & ab ea super FE mensuretur: sic A 9 mensuretur à puncto 4. quo cadit 1 4 orthogonalis, vt sit 4 11 æqualis rectæ A 9. ducaturque 11 1; sic A 8 transferatur in 6 12. & ducatur 12 2. & tandem à puncto 7 mensuretur distantia 10 A, quæ sit 7 13. & ducatur recta 13 3. & sic fiat de omnibus alijs punctis, & iam apparatus fabricatus est ad superficiem exoptatam reperiendam perquisitus.

Ducta ergo seorsùm linea MO ęqualis 20 nascenti ex AC, à puncto F in 2 mensuratę, centro M interuallo 11 1 describatur arcus occultus; rursusque Interuallo O1 centro O alius arcus describatur, & vbi se decussant in puncto 14 ducatur recta M 14. & ita fiat de alijs; donec ad vltimam peruenias M P; quæ erit æqualis rectę A2. Itaque si per harum linearum extrema puncta flexa ducatur P 15 14 O erit superficies quæsita PMO coni, cuius basis globosa ULG.

Si verò requiras superficies coniunctiuas, eadem arte requiri queunt. Mensurabitur itaque linea 12 2. & centro M ducetur portio arcus; rursusque interuallum 1 2. & centro 14. ducetur arcus, qui se intersecabunt in puncto 16. ad quod linea producetur à centro M: quæ sit M 16: eodemque modo interuallo 13 3 centro M ducetur arcus, rursùsque interuallo 1 3 centro 14 arcus ducetur, qui se intercipient in puncto 17. ducetur itaque linea M 17. deinde per puncta 14 16 17 flexa 14 17. trahetur, & erit superficies quęsita M, 14 17.

PROBL. X. PROPOS. XXV.

Coni cuiuscumque irregularis, & à quacumque superficie secti orthogonaliter plano insistente, superficiem inuenire.

Modus, quo hoc problema in opus demandatur idem est, ac duorum præcedentium problematum. Nam primò inuenitur superficies coni irregularis VAB plano insistentis cùm hac tamen differentia, quod cum V A sit recta non est necesse eam extendere, vt iussimus in arcu præcedentis propositionis BDC; sed super ipsam VA erigenda perpendicularis AH, & cætera, deinde omnia exequenda, vt in antecedenti propositione; quibus omnibus obseruatis extenditur superficies HIK; Deinde fingamus hunc conum esse detruncatum à superficie cylindrica angulari Irregulari LMNO, quæ plano VAB perpendiculariter insistat & ad hoc, vt superficiem coni detruncatam in planiciem dilatemus, eadem obseruabimus, quæ propositione 23. huius latè descripsimus. Nam centro I interuallo IM ducemus arcum M 2, exque

puncto a excitabimus perpendicularem a 3. quæ terminabitur in lineam 4 7 æqualem lineæ n 5. Assumpta itaque longitudine 7 3, mensurabitur à puncto e super rectam e 5. & erit e 6: Puncta itaque f, 6. p, & alia simili ratione inuenta erunt ea, per quæ transibunt rectæ f 10. & 10 11. & aliæ, eritque superficies terminata f 6 p a quæ exposcitur.

Ita etiam, vt in prop. prædictis superficies coniunctiuæ prodibunt; nec est necesse rem vlterius verbis prosequi, cum ipsa figura satis, superque id, quod proponitur, demonstret.

Ratio verò harum operationum, quas in istis tribus problematibus postremis docemus consistit in eo, quòd reperiamus omnes hypotenusas procedentes à vertice dati coni, & terminantes in superficiem, quæ finguntur, vel ponuntur conum rescindere: Harum verò Hypotenusarum latitudines adipiscimur, quod in datum arcum, & nobis cognitum terminent, quorum partes ad libitum distinximus, quæ partes, & earum subtensarum, seu hypotenusarum distantiam determinant, & hoc sufficiat cuilibet inerudito intellectui.

EXPENSIO III.

De superficie sphærica, eaque diuersimodè secta varijs modis in planum extendenda.

Faciliores extensiones priùs venabimur, exinde difficiliores, vt ordo doctrinæ seruetur. Faciliores sunt, in quibus sphæra per parallelos secatur, quam in quibus per circulos maximos vnde prius agemus de superficiebus planis æquantibus superficiem sphæræ in partes sectam à parallelis circulis.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Sphæricam superficiem in annulares superficies planas distribuere.

Sit quadrans sphæræ, quod sufficit ACB, cuius superficies in planum proijcienda sit in annulares superficies distributa.

Diuidatur CB quadrans in quotquot partes libeat V. g. in quatuor, & producta AB per primam diuisionem 2. à puncto C occurrat diametro producto AB versus D recta C 2 D: Sicque fiat de punctis 2 3 producta per eos linea 2 3 E; sicque de punctis 3. 4 ducta recta 3 4 F, & sic de alijs, si adsint.

Habebimusque latera conorum rectorum, quorum axis V.g. coni CAD erit axis AD, basis semidiameter AC; vnde superficies erit CA 25 in orbem flexa, quæ circa eum vertitur ad altitudinem A 5, quæ est eadem, ac corporis ex annulis solidis compacti in sphæra inscripti, vt est corpus K; cuius annulus solidus MN PQ est idem, ac portio superficiei conicæ NPQM coni NRM.

Sic dicas de cono 52 E, cuius semidiameter baseos est 2 5., axis 5 E, vertex E latus 2 E. Vnde superficies 5 2 3 6 si intelligatur circa conum gyrata semidiametro 5 2 efficiet superficiem communem tum cono 52 E, tum corpori sphæræ inscripto annulis solidis compacto; cuius vnius annuli superficies operiat planũ 2 5 3 6. Patet verò ex demonstratis Archimedis Tr.18. prop. 9. quod superficies hæc parùm differat à superficie ipsius sphæræ, cum, & multilaterum ipsi circulo inscriptum parum differat à circulo maximè si multilaterum inscriptum plurimis lateribus constet, vt propos.43. Tract.21.

Iam verò notum est ex prædemonstratis sectorem circuli, cuius semidiameter sit latus coni, & circumferentia æqualis circumferentiæ ipsius coni esse æqualem superficiei ipsius coni exclusa base ex propos.24. Tractatus 31. Quare etiam portio annuli plani diametro eodem descripti erit æqualis annulo circa conum descripto, dummodo habeat eandem altitudinem, & eandem circumferentiam quo supposito.

Centro a interuallo a 4 describatur sector a 4 8 itaque peripheria 4 8. æqualis basis quadranti iste erit æqualis superficiei conicæ quartæ parti coni 7 4 a. Sic centro f internallo f 3 describatur rursus circuli sector 3 9 f; sitque peripheria 39. æqualis quartæ parti peripheriæ ipsius basis iste sector erit æqualis superficiei coni 3 6 f; sic, & sector 4 10 f eadem ratione erit æqualis superficiei coni 4 7 f, ablatis ergo istis æqualibus superficiebus coni 47 f, & 4 f 10 sectoris; hæc à sectoris superficie 39 f, illa à coni superficie 36 f remanebunt superficies coni residua 3 6 4 7. & sectoris 3 4 10 9 æquales.

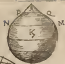
Remanet itaque docendum, quomodo sectoris peripheris fiat æqualis peripheriæ basiali coni semidiametro 7 4. vt est A 5 fiat circulus, ita semidiametro 6 3. vt est A 6; istique circuli diuidantur in quotlibuerit partes, quoad fieri possit minimas, vt 12 14. & 13 15. illæque transferantur in peripherias 3. 9 & 4. 10, sitque æqualis 13 15 parti 3 11. & 12 14 parti 4 16. & sic de alijs, donec sint numero æquales, quæ in quadrante 13 15 6. & in peripheria 13. 11. 9 sic, & illæ, quæ sunt in ambitu 12 14 5. ac quæ in 4 16 10. æquabuntur; phisicè, & sensibiliter peripheria 13 15 6 ac 3 11 9 parique modo quadrans 12 14 5. ac ambitus 4 16 10. Si ergo omnes semiannuli superficiales circa conos in annulorũ planorum portiones proijciantur, quæ eis sint æquales habebimus quadrantem sphæræ superficiei in annulos planos, seu eorum portiones proiectam, vt erat agendum.

PROBL. II. PROPOS. XXVII.

Sphæricam superficiem à triangulari superficie sectam in annulares superficies proijcere.

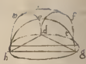
Docebimus in sequentibus eadem ratione subnixi diuidere sphæram, & eam in tales annulares planas superficies proijcere, quæ rursus circumuolutæ ipsi sphæræ, & in formam sphæricam redactæ emisphærium eius in triangulum diuidant, V.g. si sphera triangulari superficie plano perpendiculari h d m, & h o g, & d f g secetur. Inuenire superficiem residuam, & ab ipso triangulo sphærico comprehensam h d g m o f. Facto circulo a b c d; diuisoque in quadrantes; in eo inscribatur triangulum b d i, & ab aliquo eius angulo, vt ab b ducta recta b x vltra circulum quantum sat erit. Diuidaturque quadrans b c, in quot libuerit partes, & per puncta terminantia rectæ agantur, vt s 3

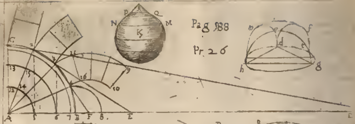
versùs



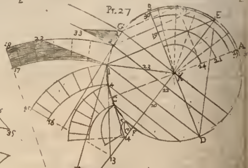
Pag 588

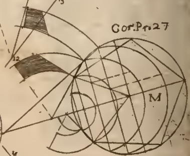
Pr. 26

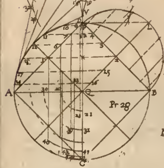


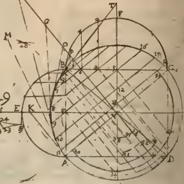


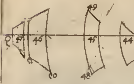












versùs 12. sic 3. I vsque ad 12, sic t 4 vsq; ad 13. sic 4 c vsque ad 14. sic c 5 vsque ad 7; nempe ad lineam ekf ii. Deinde modo superiùs descripto fiant portiones annulorum planorum V g. I 4 15 16, & alias, quæ singulę ab f vsque ad I terminabuntur, modo superiùs descripto, vt satis vides, eruntq; superficies, quæ sphericū segmentum o i f extra triangulum edt remanens operiunt.

Modo accedamus ad superficiem inuestigandam, quæ intra tertiam partem trianguli okt remanet. Ducto itaque arcu I 17. & mensurato semidiametro 20 I super k 19 erit quadrans 21 19 circumferentiæ basis coni 20 t 12: quam minimis partibus assumptam mensurabimus super I 17 & à centro 12 trahemus lineam 17 18. & puncto 3 eodem centro ducemus arcum 3 18. & esset superficies, quæ aperiret conum 21 3 12 quoad partem 22 3 t 20. sed volumus solùm eam partem, quæ operiat 22 23 20 I.

Assumpto itaque 22 3 mensurabimus super k 25. & ducemus quadrantem 25 30. Deinde super eundem ka mensurabimus lineam 22. 23. & erit k 24. trahemusque à puncto 24 rectam 24. 31 perpendicularē ad ae, quæ occurret arcui 25. 30 in puncto 31. atque arcus 30 31, quem subtendit 22, 23. quem mensurabimus à puncto 18 vsque ad punctum 32. & ducetur recta I 32. eritque superficies nigra t 32 18 17. quæ quæritur operiens solum partem 21 23 I 20.

Rursùs mensurabimus 32 18 super arcum 3 33. & ducemus 6 33. rectam, eritque reliqua superficies k 22 23 planum operiens.

Patet verò, quòd reliquæ duę partes in triangulo eoi sunt istis æquales: Vnde replicatæ superficies 2 3 33. & I 32 18 17. & assumptæ seales totum triangulum æquabunt in superficie sphæræ à triangularibus superficiebus secantibus relictum. Vnde tum superficiem portionis sphærę dif, & reliquarum ead, & bbi, tum trianguli eoi remanentis inuenimus.

COROLLARIVM.

IDem poterit fieri etiam si sit quadratum, aut pentagonum, vel qualibet alia figura: quę sphęram secet, vt patet in figura m appolita, quæ nullis literis adornatur.

PROBL. III. PROP. XXVIII.

Superficiem sphæræ à quatuor superficiebus in quadrum positis circulo maximo perpendicularibus sectam; intraque eas comprehensam, inuenire.

SIt Circulus abcd, exprimatque sphæram, in quo sit quadratum eisdem literis insignitum, quod demonstret vestigia superficierum plano, & circulo abcd incumbentium, sitque reperienda superficies sphęrica, quæ ab illis superficiebus clauditur.

Super latus da fiat semicirculus dlb, & diuidatur in quotlibet partes, ducanturque perpendiculares à diuisionibus factis l 2. & ex illis punctis signatis in latere bo ducantur parallelę ad diagonalem ba, vt 2 5, vel 3 6. sic 4 7. & p 8. & continuentur vsque ad circulum in 10. 11. 12. 13. Deinde alię quoque ad libitum ducantur prædictis parallelæ, vt 15 17. & 16 18.

Producta deinde altera diagonali cd vsq; ad n ad eam per puncta rectæ ducantur V. g. 14 17 n, & 17 13 m, & 13 12 o, & cæt. deinde super eandem diagonalem c n, vel aliam rectam alicubi facto centro in d interuallo d 10. ducatur arcus 18 19. & à puncto 8 ducta ad 8 p perpendiculari, occurrat quadranti 20 21 radio I 10 descripti; assumaturque arcus 23 21. & mensuretur à linea do in vtramque partem super arcum 18 19. postea assumpto interuallo ld tangentis ol in puncto d vbi on terminat vsque ad ei normalem ql, centro 18 arcus deducatur, & rursus centro o alios arcus, & vbi cōuenient in pūcto 24 ducatur arcus 18 o, & idē fiat ad aliam partē, ducendo arcū 19 d & erit 18 19 d portio prima superficiei quæsitæ. Eodem deinde modo centro o interuallo v 10 describatur arcus 25. & 26. fiatque æqualis arcui 18 19. vel duplus arcus 23 21. rursúsque interuallo v 11 eodem centro arcus describatur 27 28 Ducta deinde 7 29 parallela ad dc occurrentē arcui 30 31 ex semiradio 32 11 in puncto 29. & assumatur arcus 29 31. & mensuretur à linea od hinc, & inde, & fit arcus 27 28 duplus arcus 29 31. Deinde interuallo ld tangentis dl in puncto d facto centro in punctis 27 25 duo arcus ducantur, & quo se decussant in puncto 32: facto centro, ducatur arcus 25 27. & sic fiat ad aliam partem, eritque superficies secunda sphęrica iminens plano 7 4 8 p, & sic fiat de alijs; donec peruenias ad 5 2; vbi cum iam non ampliùs circulo dlb occurrant, sed maximo, ideo rectis poterunt terminari. Verùm si aliquis harum superficierum terminationem exactiorem exoptet, poterit tria puncta reperire, vt videre est in arcu 34 36 35 posita superficie z iuxta superficiem x ad hoc, vt totius superficiei x z simul tria puncta habeamus, eodem enim modo, quo reperta est distancia 37 34 ex arcu 40. 41. & 38. 35. ab arcu 42 43, & 39 35 ex arcu 44 45 eodēmodo, & punctum 36 intermedium inter 34 & 35. & alia quęcumque intermedia puncta cuiuslibet alterius superficiei reperientur.

PROBL. IV. PROPOS. XXIX.

Superficiem sphæræ à quatuor superficiebus in quadratum oblongum positis, & plano circulari perpendicularibus sectam in planum proijcere.

HÆc praxis parum differt à præcedenti. Talisque est. Facto circulo, & diametris se decussantibus secto, descriptoque in eo parallelogrammo abcd, super vtrumque latus semicirculi describantur aeb, & bfc, à quorum altero, vt à bfc in partes æquales diuiso demittantur perpendiculares quales sunt f 5. 2 3. & 4 6. & aliæ, & punctis, in quibus secant 6 3. 5 deducantur parallelæ 16. 9 diametro ac, quibus, & aliæ addantur pro libito 10 12. & 11 3. Per centrum autem v ducatur recta perpendicularis ipsi diametro ac; quæ sit vg, ad quam per bina puncta in arcu a 8 b signata, à lineis super ad illum immissis ducantur rectę 11 10 m, & 10 9 n sic 9 8 o, & 8 7 o, & tandem 7 19 p; quibus interuallis ducantur arcus

facto

facto seorsim centro super lineam EQ in R V. g. interuallo R 19. ducatur arcus 23. 24. deinde 25. & 26 arcus interuallo P, 19 hinc arcus 27. 28 interuallo P 7. & sic de alijs, vt fecimus in antecedenti, vel semper eodem centro R adhibito, vel si spatium deficiat, vtlibet sumpto.

Ex inde in singulas chordas suus semicirculus super AC erigatur V. g. diametro chorda 11 14 sic 10 15, sic 9 16. & sic de alijs velut vnus ex ipsis est circulus 29 30 31. diametro chorda 9 16 deductus; deinde à singulis punctis, in quibus prædictæ chordæ latera secant R 17. & R 5. sicut, & 5 V, & 17 V perpendiculares ad AC excitentur velut sunt 6 V 30. sic 3 32, sic 5 33; sic 17 34. & cæt. quæ quælibet ad suum circulum terminent; qui super eam chordam, à qua discedunt lineæ effecti sunt, quibus habitis.

A puncto 35 in linea EQ mensuretur arcus 36 37. & sit 35 24; deinde arcus 36 38. & sit arcus 35 23 mensuretur; deinde super E 39 linea ipsi EQ normali ab E deducta distantia 1 E facto centro in puncto 39. & exinde in puncto 24. interuallo B T tangentis in puncto s vbi 5 B terminat, & centro puncto 39. duo arcus describantur, & quò se intersecant in puncto 40 facto centro ducatur arcus 24 39. & sic fiat ad aliam partem t sed interuallo adhibito A X tangentis in puncto A, & vbi in puncto 50 arcus se secant, arcus ducatur 23 24. eritque 23 24 39 prima superficie quæsita. Eodem verò modo protsùs, vt arcus 23. 24 terminatus est, terminabitur quoque arcus 25 26. At arcus 27 28 terminos præbebit arcus 42 41, cui subtenditur recta 4 6, & quia linea EQ stat loco lineæ GV 30; ideo vt arcus 42 41 terminat in ipsam 30 G. Sic & arcus 27. 28. Postmodum ducentur arcus 26. 28 interuallo B T, & arcus 27 25 interuallo A X, & in antecedenti prima superficie factum est, & erit 27 25 26 28 superficies secunda. Ita quoque efficiemus superficiem 44. Sic & superficiem 45. cuius arcus 48 49 æquabitur arcui 33 30 34. quem linea 17 5 subtendit, & hinc superficies residuæ 46. & 47 eodem quidem modo quoad arcuum longitudines determinabuntur; sed latera V. g. 50 51. vel rectis terminabuntur, vel tribus punctis repertis: si superficies illis sit latior. Verùm præsuppono istas superficies adeo esse paruæ latitudinis, vt arcus 50 51 per tria puncta repertus vix differat à linea recta. Vnde securi lineæ recta pro curua possit vsurpari absque scrupulo sensibilis erroris.

PROBL. V. PROPOS. XXX.

Superficiem sphæricam à quatuor superficiebus in quadratum positis plano alicui circulari sphæræ orthogonalibus in planum proijcere alio modo, ac in præcedentibus factum est.

Sit sphæra circulo ABDC expressa, & literæ quadratum quoque notent, at AB; BD; DC; CA latera sint vestigia superficierum secantium sphæram perpendicularium ipsi circulo ABCD. In quadrato alij circuli concentrici inscribantur V. g. GHFE, & alij arcus IR, & LQ quot quot placet à quibus, vbi secant BC, ducantur eidem AC perpendiculares veluti 0 5. 2 6. 3 7, 4 8; L, 9. & I 10. per que puncta, in quibus secant arcum BD ducantur rectæ, quæ secent productam AD; sic per puncta 10. 9 ducatur recta 10 9 11. & per 9 5. recta 9 5 12. sic per puncta 5 6 recta 5 6 13 & cæt. & vt supra fecimus in 26. pr. h. reperiantur superficies sphæricæ, quæ inter circulos concentricos veluti GFEH, & 2. 15. 14. extenduntur qualis est superficies 5. 6 16. 17. & reperiantur aliæ, & ita totum spatium circulo GFEH circumscriptum superficiebus suis, nempe 5 16 17 6 6 21. & 7 22. & 7 8 si quater sumantur erit opertum.

Ad hoc autem, vt reperiamus superficies angulo EFH interclusas; ducta seorsùm linea, electoq; in ea sicubi puncto N, assumatur arcus B 10. & à puncto N mensuretur, & sit NO, deinde sumpto intercapedine 11 10 centro M per O arcus 22 23 arcui 19 18 æqualis, factoq; centro in puncto 23. & rursus in N ducantur duo arcus interuallo tangentis EX in puncto E vsque ad X in lineam normalem FX, & quo se decussant arcus in puncto 24. facto rursùs centro eodem interuallo ducantur 23 N, & idem fit ad aliam partem ducto arcu 22 N, eritque superficies 22 23 N prima anguli, quę quæritur. Deinde rursùs centro M aliquo in linea M N interuallo 11 10. ducatur arcus 25 26 æqualis eidem 22 23. & rursùs eodem centro M; sed interuallo 11 9 ducatur arcus 27 28. Fiatque æqualis arcui 21 20; ducantur deinde arcus 28. 26. & 27. 25. vt ductus est arcus 23 N, & eodem interuallo, & erit secunda superficies, quæ requiritur 27. 28. 25. 26, & sic tertia quoque reperienda erit. Spatia autem A 20 C implebuntur, vt supra factum in pr. 27. h. vt satis constat ex figura ipsa.

PROBL. VI. PROPOS. XXXI.

Sphæricam superficiem angularibus duabus superficiebus eiusdem plano circulari perpendicularibus sectam in planum proijcere.

Sit sphæra expressa per circulum ABCD, sintque vestigia angularium superficierum DE, & EC angulum quemcumque facientia in E; sitque propositum reperire superficiem sphæricam, quæ ab illis superficiebus concluditur.

Trahantur rectæ parallelæ ad libitam distantiam, prout commodiùs fuerit 1 2. & 3 4. & 6 5. vel plures vsque ad radium ED, & rursùs aliæ ad eandem distantiam ab EC, qua distant ab EO primo ductæ, vt 6 9 7 10. 8 11. quæ pertingant saltem occultæ ad semicirculos super priores parallelas tractos, nempe 8 11 ad 6 11 5, sic 7 10 ad 3 10 4. sic 6 9 ad 1 9 2.

Postmodùm vt fecimus supra per puncta 6 F ducatur ad EC productam recta 12 F 6. & cæt. & ducantur arcus V. g. 6 13 centro 12 interuallo 12 6. & alij omnes. Fiat autem arcui 6 11. arcus 6 13 æqualis, & ducatur F 13 recta, quæ licet in sphæra curua sit, non tamen in multilatero, inscripto, & erit superficies F 6 13 prima, quæ quæritur, quę operit planum F 6 14. Eodem autem arcui 6 11, fiat quoque arcus 6 15. & arcus 3 16 arcui 3 10; ducaturque recta 15 16. Et erit secunda superficies 15 16 6 3. quę imminet plano 14 17 6 3: Eidem verò arcui 3 10 fiat æqualis arcus 3 18. at arcus 1 19 arcui 1 9. & ducatur 18

19.

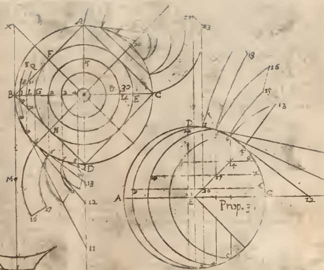


Fig. Prop. 34

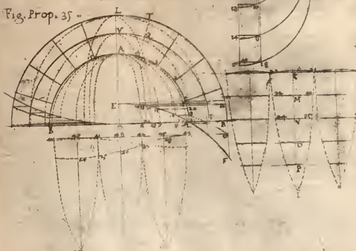


Fig. Prop. 35

19. eritque superficies 1 3 18 19, quæ in sphæram flexa operiet planum 20 17 1 3. pars verò residua superficiei 20 21 D 1 erit (cum præsupponatur minima circularis) veluti superficies cylindri diametrum SD habentis. Vel fiet æqualis Trapezio 1 23, cuius latus D 23 æquatur arcui D2, & latus D 24. arcui 1 9.

THEOR. I. PROPOS. XXXII.

In quacumque corpore sphærico, Elliptico, seu etiam Parabolico, & Hyperbolico corpus planis superficiebus constans inscribi potest.

Sit corpus aliquod, aut sphæricum, aut Ellipticum, aut Parabolicum, seu Hyperbolicum. Dico, quod corpus in illo multis superficiebus constans inscribi potest: Secetur in fig. p. 33. per aliquem axem multis planis AFE, & AOH, deinde parallelis maximo ipsorum BLC, & MFGN, & cæt. ductis verò subtensis FG, & EH, per eas agatur planum FGEH, & ita fiat de omnibus aliis vndequaque & erit corpus inscriptum corpori exhibito.

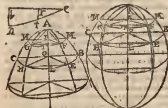
Probatur. Nam tunc dicitur aliquod corpus inscriptum alicui alteri corpori, cum omnibus suis angulis solidis tangit corpus, cui inscribitur, sed omnis superficies inscripta tangit corpus circumambiens suis angulis, quod transeat per F, O, & E, H extrema, quæ in superficie exhibiti corporis sunt. Ergo etiam omnis angulus solidus, qui angulis planis constat in superficie corporis dati terminabit. Vnde erit inscriptum corpus multis superficiebus constans in corpore conuexo exhibito.

Quod autem per FO, & EH superficies ductæ sint planæ, constat ex eo, quod FO, & EH sunt parallelæ ex eo, quia plana parallela MFGN, & BLC, aut circuli sint in sphæra, aut etiã ellipses, vt in sphæroide, & conoide omnes verò ellipses parallelæ similes sunt ex 11. tract. 25. & ex prop. 40. lib. 6. omnes quoque circuli. Quare erit applicata OH ad 10, vt OS ad F1 ex prop. 54. Tract. 24. & ex prop. 43. lib. 6. quare ex 4. lib. 6. cum triangula GIF, & HOS sint æquiangula, etiam EO, & EH erunt parallelæ laterum proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Si sit aliquod corpus sphæricum, vel Ellipticum, aut etiam Parabolicum, vel Hyperbolicum; in quo inscripti alicuius corporis omnia triangula; quæ inter plana per idem punctum secantia continentur, cognosci possint, etiam tota superficies corporis inscripti obtinetur.

Sit corpus sphæricum ABC, & secetur diuersis circulis (intellige verò si sit Ellipticum de Ellipsibus per idem punctum quomodocumque ductis, at si sit Parabolicum, vel Hyperbolicum de parabolis, seu Hyperbolis per axem ductis, vt ex Defin. tract. 25. constat) V. g. circulo ALB, & AGM, & cæt. inter quæ sit inscriptum aliquod corpus polygonum, quod posse fieri supra demonstrauimus: habeaturque nota normalis AT sicut TG arcum, & eius subtensam, & deinde AG, & ideo subtensam ipsius: si ergo super basim SE ipsi TA æqualem faciamus triangulum, cuius singula latera ut, & tr sint æqualia triangulo ATG, patet ex prop. 23. lib. 1. esse triangula æqualia. Deinde sit trapezium FGEH. Ducaturq; planum HF normale plano TL, & sectio quoq; BL normalis erit. Tunc cũ iam habeamus notam TG, & GM ex præsupposito, &



angulum rectum, si extendamus r e, & fiat r l æqualis ipsi TL æquabitur triangulum TGL triangulo e r l: ducta per imaginationem subtensa l e ex prop. 21. lib. 1. Quare si data LM, & eius super l e fiat triangulum l n e hoc erit æquale triangulo LGM, vnde trapezium f l e n æquabitur trapezio TLMG. Vnde patet; quod etiam si non ducatur l e idem tamen potest præstari habitis punctis L, & M in plano, quæ sint l, & n.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIV.

Sphæricam superficiem in planas superficies per circulos maximos diuisam extendere.

Hæc est huius expensionis pars secunda, in quà conabimur sphæricam superficiem in planis proijcere, quæ tamen non parallelis, vt in prima parte præsupponatur diuisa, sed circulis maximis.

Sit ergo sphæra ABC, circulis maximis secta, quæ se decussent in centro E, & quia ex propos. 13. tract. 29. circuli eleuati à plano situm consequuntur in ipso plano, qui non est; circulus; sed ellipsis, cuius semidiameter maior est ipse radius, at minor subtensa arcus, quo dictus circulus ab ipso plano eleuatus distat à vertice. Ideo, si aliquis arcus distet à vertice quantum est arcus BI formabitur in plano ellipsis BF, cuius semidiameter maior est radius EH, & chorda 2 1. subtendens arcum BI semidiameter minor; Sic dicas de circulo, qui sit eleuatus à plano quantum est CE, nam subtensa E 3 minor semidiameter erit ellipsis in plano eius situm exprimentis; quare erit ellipsis EG.

Ellipsibus ergo prædictis descriptis ex tract. 24 propos. 27. vel instrumento, vel saltem ellipsis quartam partem EG, quæ sufficit, super singulos V. g. sinus 1, 2 fiet quadrans circuli, sic super 4. 5. & 2 3. & cæt. qui erunt 1. 6. 11. & 4. 9. 12. & 2, 10. 13. à punctis verò; quibus sinus secant ellipsis ambitum EF V. g. à puncto 7 erigatur parallela ad radium EH, vsque quò secet quadrantem 1 6 11 super sinum ipsam erectum in puncto 6. sic à puncto 8 alia parallela 8 9 ad EH ducatur, donec secet quadrantem 4 9 12 in puncto 9. & cæt. quibus

bus præstitis erit parata constructio ad superficiem extendendam. Fiat ergo ellipsis 33 Y B facta ex axe 40 H, & HB, in qua puncta subtensarum arcus 18 17. & 14 15. & cætera, quale vnum ex ijs est punctum 40. ex præc. reperiuntur, transferendæque essent partes, in quas secatur à radijs Y 41. & cæt. sed cum sensibiliter illæ partes non differant à quadrante A Y B, vel C E B; ideo transferantur illæ partes.

Seorsim igitur agatur linea B L, & singulæ partes quadrantis B C transferantur in eam, nimirū B I, & I 4. & 4 2, & cæt. quæ sint K M, & M N, & cæt. p quæ puncta notata K, M, N, O, P, ducantur ad L K perpendiculares, quæ fiant æquales hinc, & inde lineæ K L distantijs normalibus, quæ intercipiuntur inter radium A H, & parallelas, quæ sunt 7. 6. 8 9. & cæt. ita vt K 20. & K 21 æquetur lineę 40 18. sic M 22 æquetur interuallo 14 15. sicut, & eidem M 23 sit æqualis, linea verò N 24 ęquabitur interuallo 10 13. & pariter ipsi rectæ N 25. & sic de cæteris: per puncta verò 20 22 24. & alia vsque ad L sicut, & per puncta 21 23 25 vsque ad L flexæ duæ ducantur, & habebimus superficiē 20 21 L, quæ erit quinta pars dimidij hemisphęrij, & planum situmque H E C, cæteraque æqualia operiet.

Id verò ex 33. h. satis euidenter constat. Nam latitudo 21. 20 æquatur subtensę arcui C E, longitudo verò quadranti C B, singulæ quoq; partes, vt 21 23, vel 24 25 subtensis arcubus parallelorum, qui repræsentantur, in quadrantibus B 10 13. aut 14 15 19 similiter æquantur; quæ partes parallelorum inter circulos maximos intercipiuntur; quorum vnus repræsentatur per lineam flexam, & quartam ellipsis 28 F, alius verò subintelligitur ad aliam partem ductus.

Si vero quis cupiat superficies, quæ iuncturas coniungunt, si sphæra sit alicuius grassiciei, iam per se clarum est, annulum planum, vel eius quartam partem F Q C B eam præbere.

Poterit etiam alio pacto superficies 20. 21. L, & promptiùs inueniri: nam ductis perpendicularibus Y, 35; V, 33. & alijs ducantur arcus 33 34 & 35 36 & alij, qui à duobus radijs A H, & Y H intercipiantur: Deinde diuisa lines 4L in partes æquales partibus quadrantis B A, & ductis, vt supra lineis 20. 21. & cæt. fiat 21 20 arcui A Y, & 22. 23 ęqualis arcui 33. 34. sic 24 25 arcui 35 36. & cęt. Nam ferè eadem puncta habebimus, vt priùs, sed modus non est adeo perfectus, & deficit à veritate, licet expeditior.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXV.

Sphæricam superficiem circulis maximis diuisam in planas proijcere superficies, à cylindrica superficie plano eiusdem circulari perpendiculari sectam.

SIt sphęra A B C; oportetque reperiri superficies eius secta à cylindrica superficie, cuius vestigia sunt, vel conuexę G D, vel concauę E C F.

Proiecta itaque in planum superficie sphęrę, vt superiùs, cuius partes sint 40. 44 41. & 41. 45. 42. & tandem 42. 46. 43. quę circumoperiant sphęram quantum est arcus C, 5, ducantur quoque quartę ellipsium, prout requirit eleuatio, cuiuscumque circuli maximi, sic ducentur singulę ellipses, idest Ellipsis A 6 pro circulo ęleuato ab horizonte arcu C 4; Ellipsis A 7 pro circulo C 3. Ellipsis A 8 pro circulo eleuato arcu C 2, & tandem A 9 pro arcu C I, & si plures diuisiones placitum erit in quadrante A C distinguere plures etiam describentur ellipses pro vniuscuiuscumq; circuli maximi per illas diuisiones ducti eleuatione, & ab ijs punctis, quibus prędictę ellipses secantur ab arcu B C F, vel G D ducantur rectę parallelę ad diametrū B C, quales sunt B 13 12 5; 15 20; 16 18; & 7 11

Et si cupimus etiam superficies coniunctiuas, si sphęra sit alicuius grassitiei, & orbis, tunc etiam ducantur ellipses, quę sint iuxta eleuationem illius circuli, cuius desideratur ea superficies coniunctius, sic si desideretur superficies, quę coniungit G B 4 T cū C R 4 T. Ad eleuationē per punctū R Q circuli trāseuntis describatur ellipsis V 22. & ellipsis L 23 circuli transeuntis per punctum R T; & à punctis 13. 14. in quibus secantur ab arcu E F, ducantur parallelę ad D R: quę sint 13 11 pertingens ad quadrantem medium, cuius V 22 est ellipsis, & 14 10 pertingens ad quadrantem L R, cuius 23 L ellipsis est, & iam erit omnis apparatus constructus ad superficies, tum coniungentes, tum obuoluentes sphęram ritè terminandas.

Et vt incipiamus à coniunctiuis 5 11. 10. ducatur flexa 5, 11. 10. & erit superficies A L 5 10. quę quęritur; sic si per puncta 18 P 19. quę proueniunt ab ellipsibus trium arcuum coniunctionis 2 ducatur flexa 18 P 19 erit A L 18 19 superficies applicanda loco, & situi 2. & sic si aliç exposcantur.

Transeamus ad superficies ipsius sphęrę, & globi: Accipiamus itaque interuallum C 1, quod transferatur à linea 40. 43. super rectam 47. 44. & sit 47 24 sic interuallum C 5, & transferatur in 41. 25; sic C 20. & transferatur in 48 26, sic C 18. & transferatur in 42 27. sic tandem C 21, & transportetur in 49 28. & per puncta signata 24; 25; 26; 27; 28; 43 flexa ducatur, quę terminabit superficies 24 25 44. & 25 45 27. & tandem 27 46 43; quę octauam partem simul sphęrę exęquant.

THEOR. IX. PROP. XXXVI.

Superficiem sphæricam circulis maximis diuisam in planas superficies proijcere à superficie cylindrica sectam, cuius axis sphæræ axi sit parallelus, vel à superficie plana Orizonti non perpendiculari.

SIt sphęra, vel semicirculus eam repræsentans I A D: sitque diuisus quilibet quadrans in quot quot partes erit voluntas, vt in partes 18. 17. 16. 15. & singularū describētur ellipses punctatę vt pr. 34. h. Sit verò superficiei cylindricę secantis curuitas C E, vel planę pendentis angulus F C G, & G C perpēdicularis. Ductis verò à singulis partibus, tum intrinseci ambitus A D parallelis ad B L, veluti 19 A, 18 2D. 17 21. 16 22. 15 23. & si etiam superficies coniunctiuę exoptentur à circulo medio, & extrinseco lineę eiusdem rationis producantur, & ellipses earum circulorum, vel quartę earum exarentur, quę ad eam coniunctionem pertinent.

Igitur assumpto interuallo 24 19 nascente ab A transferatur, & sit 42 43. sic 25 20 super ellipsim

sit n a 40 productum perpendiculariter ad LB in 4t transferatur, & sit 40 41, idem fiat de distantia 37 21, & fit 44 45. & sic de alijs vsq; ad L: Deinde ducatur flexa L 45 41 43; quę pertinet ad describendam superficiem semisphęrę LAB sectam à cylindrica CA; quod si & continuetur superficies exoptentur, idem erit agendum, sic transferetur G B in 42 K, & alia puncta reperientur, & ducetur flexa M 51 K. Sic, & 31 32 interuallū transportabimus in 42 O; & alijs eodem modo transfatis ducemus flexam N 50 O.

Si verò agatur de eadem sphęrica superficie describenda; sed à superficie plano pendente ad partes internas, vt CF; centro C interuallo quolibet puncto in FG, vt C 24. ducemus arcus 24 28. & 25 29. & cęt. deinde transferemus interuallum normale 24 28. in 42 6. sic 29 25 in 7 3, sic 27 30 in 8 3. & cęt. & ducemus quartam ellipsis 6 1 3 4 5 8, & ita medias, & extrinsecas quoq; pertinentes ad circulum mediū, & extimum ellipses iudagabimus, quas flexas iungemus 4 34.

Cùm enim CF sit sectio sphęrę, & ideo circulus patet ex 13. tract. 25 eius proiectionem ellipsim fore in quacumque sphęra, seu ambitus maioris, seu minoris.

Hęc verò puncta, per quę prędictę ellipses ductę sunt, reducemus ad quadrantem AL, vel AB, prout commoditas postulabit rectis lineis ad LB parallelis; sic reducemus linea 5 10 punctum 5 in 10. & punctum 4 10 11. Sic quoque faciemus de punctis in flexa L 43 repertis, productis tamen quadrante BA in 46. & 35 in 80. & HC in 48. rectis ad LB perpendicularibus; ducemusque parallelas 43 46. 4t 47. & cęt. Omnisque pręparatio erit adornata, quā superficies exoptatę possint describi.

Quod igitur pertinet ad superficies cooiunctas ita erit agendum: Sit ergo describenda superficies coniunctius orbis alicuius, quę a plano BC secetur, & ea sit t6 13, quæ in plano capiendum lines productas 4 33 34; transfato itaq; interuallo ellipsis B 33 in aream N 14. & 35 34 in M ta habebimus tria puncta 12 14. II. per quę flexa ducta ta ti erit superficies 12 tt H A, quę quæritur coniunctioni 13 t6 applicanda.

Sic si exoptetur superficies coniunctiua pertinens ad iunctaram t8. 13. sed orbis à cylindrica superficie ca secti distantiæ puncti 50. & 5 t à lines LB normaliter sumptæ transferantur in 35 53. & c 49. & per tria puncta flexa ducatur 47 53 49. & erit superficies, quæ desideratur A M 53 49.

Sed iam transeamus ad superficiem ipsam sphęrę in superficies planas reducendam. Itaque ductis seorsim lineis VT, PQ, & RS describantur superficies 60 T 6t. & 60 Q 6t. & 62 5 63; vt iam docuimus propos. 33. huius; quibus modo erit illud addendum, vel subtrahendum, quod superficies secans, vel cylindri, vel plani requirit: Itaque pro superficie secta à plano pendente CF; punctum 6t erit punctum L, vt interuallum V 64 erit arcus L 10. & punctum 60. 66 erit arcus L tt. & cet. per quæ flexa ducta 6t 64 66 68 68 eas superficies terminabit, ad quartā partē hemisphærij à superficie plana pendente secti spectātes.

Sic si velimus addere id quod addit superficies cylindrica secans CE, erit punctum 6t idem quod punctum B, at interuallum V 65, idem B 52. & 67 60 idem interuallum, quod B 53. & cæt. vsque ad interuallum R 69 idem quod E 46; Per quæ puncta flexa ducta 61 65 67 69 70 69. dabit superficiei quartā partē osferētes 61 r 67. & 67 Q 70. & 70 s 69 hemisphęrij; cum parte addita circulo cc o. hogonali, tamquam si esset cylindrica superficies ccr addita sphæræ. At si velimus quod sit sphęrica, eodem modo agemus, ac in superficie 61 R 68 ablata. Primò enim centro C omnis interuallis in lines CC inuenta, vt cu, & C 31. & C 24. vel C 25. & alia arcubus in CE deducemus, distantiasque 24. 19. à punctis, in quibus arcus secant CF vsque ad CC normalem; singulas; sed normaliter assumemus & transferemusque normaliter in ellipses V. g. a 40 41 prolungatas; non per lineas rectas, sed per propriam orbitam; hęcque puncta parallelis, vt 4t 40 non in lineas rectas s 46. sed in arcus productos AB, R 35. & HC, punctorumque, in quę parallelæ incidunt ab HC linea normaliter assumptæ transferentur normaliter quoque in lineas 70 62. & alias. Sed quæ sint eorumque, vt sunt 60.66.Q, & si fortè incipiant seiungi, vt faciunt 62 s, & 61 Q essin singulis replicando, ita vt distantia 62 70 sit notata, tum in 62 s, tum in 61 Q productas. Interualla autem, quæ in RS, & alias rectas incidunt solum vnies notatione contentæ erunt V. g. 42 43 notabitur in R 69. 44. 45 in P 69: & sic superficiem 6t R 69 superadditam dimidio hemisphęrio, quæ sit pars alterius hemisphęrij consequemur.

EXPENSIO IV.

De superficie conoidis Hyperbolici Parabolici, & sphæroidis Elliptici, annuli que solidi in planas superficies extendenda.

Sphęræ sphęroides succedit, cuius cum sit frequentissimus vsus visum nobis est eius superficiei extensionem non esse prætermittendam, maximè quia quasi eodem modo, ac sphæra eius superficies in planum vrgetur, & conoidum quoque Hyperbolicorum, Paraboliorumque superficies extendere ex eius proiectiona addiscemus.

PROBL. I. PROPOS. XXXVII.

Superficiem Sphæroidis, & Hyperbolici vel Parabolici conoidis sectam circulis circulari plano per axem ducto parallelis in planas superficies proijcere.

Sit Corpus Ellipticum, seu Parabolicum, seu Hyperbolicum ABC: diuidaturque in quodlibet partes A 3; & 2 3. & cæt & productu axe sc in D, per partes prædictas rectæ ducantur, quæ sint 2 3 O, & 4 3 E, & cęt. Centris deinde D, & E, & cęt. ducantur arcus 2 30 interuallo D 2. & 3.3 t interuallo D 3. qui termineotur iuxta prędicta de sphęricis superficiebus propos. 27. & erit præstitum, quod proponitur.

PROBL. II. PROPOS. XXXVIII.

Eandem corporum prædictorum superficiem in planas superficies distendere sectam secantibus maximis Ellipsibus, quæ in ipsis deduci possint.

SIt idem corpus quodcumque ex dictis ABC, cuius circularis plani quadrans sit CFG, cuius diameter CF æquat diametrum minorem BA. Superficies verò diuidentes, & secantes ipsam basim CFG impriment sectiones, & earum vestigia FC, & F 6. & F 7. & cæt. diuidentes basim circularem CFG in partes æquales, & conuenientes in puncto B, & se inuicem veluti faciunt in sphæra circuli maximi in axe BC secantes: Cum autem interualla æqualia sint, assumatur quodlibet interuallum, vt 6 16. & transferatur super BA, & sit H A; fiatque portio ellipsis, seu quarta eius BHC datis diametris BH, & BC, vel si corpus sit parabolicū, seu hyperbolicū dimidiata Hyperbola, seu parabola describatur data altitudine BC, & applicata BH, quę sit H 10 C. Siquidem Tract. 26. prop. 15. & 18. probauimus parabolam inclinatam, vel hyperbolam, hyperbolā similiter describere, vel parabolam sua in plano situatione: Ducantur deinde à punctis, in quibus secat perpendiculares prędictas situatio H 10 C rectæ parallelæ axi AC, quæ sint 8 12. & 9 13. & 10 14. & cæt. centro deinde 16. & interuallo qualibet perpendiculari V. g. 16 5 ducatur arcus 19 12. 5 sic centro 17 interuallo 4 17 ducatur arcus, & sit 20 13 4. & cæt. & sic apparatę erunt delineationes, quæ ad superficiem describendam necessariæ sunt.

His itaq; cōparatis ducatur seorsum linea QT, & ei perpendicularis KL, super quā partes omnes circumferentię AC transferantur, & sit a 21 ęqualis parti A 2. sic 21. 22 ęqualis parti 2. 3. & sic aliæ alijs vsque ad L, ita vt tota KL æquet totum ambitum AC; perque singula puncta nimirum 21. 22. 23 24 ducantur parallelæ ad Q T. Assumatur deinde arcus 19 18. & transferatur hinc inde, sitque ei æqualis 24 25. & 24 26: Sic arcui 20 13 fiat æqualis 23 28. & 23 27. sic fiat de alijs; perque puncta 8. 26. 27. & alia vsque ad Q ducatur flexa, & rursùs per puncta L 25 28. vsque ad 1; & erit superficies Q 1 L quinta pars superficiei, quę operit sphęroidem BAC, nempe quartam partem dimidię sphęroidis, vel totius conoidis.

PROBL. III. PROPOS. XXXIX.

Corpus Ellipticum in planum proijcere sectum Ellipsibus se inuicem superantibus.

SIcut corpus Ellipticum potest maximis Ellipsibus secari, & ideo inuicem æqualibus, vt in præcedenti propositione, sic, & ellipsibus, quæ à maxima ellipsi deficiāt, & tandem in circularē eius basem se constringant, vel si maximus ambitus, qui corpus ipsum circundet sit circulus aliæ ellipses paulatim in minimam ellipsim decrescent, & hoc euenit quando ellipses partientes corpus ellipticum non sunt ipsi circulo elliptici corporis perpendiculares, sed maximę, vel minimę ellipsi, quę in dicto corpore describantur.

Sit ergo ellipticum corpus, vel quod sufficit eius dimidium BDC; diuidaturque quarta eius pars in quot partes libuerit, & ducantur à centro A rectę A 20. & A 21. A 19. & cęt. describanturque deinde ellipses dato diametro minori AB, & successiuè alio maiori, & maiori, vt A 23, deinde A 22. & cæt. Prima itaque ellipsis erit GFH, vel eius quarta pars dato diametro minori AB, qui sit FG, & maiori A 23. quæ sit HO, secundæ item pars FO dato diametro eodem minori AB eodem ac FG, & diametro A 22 eodem ac FG; Tertiæ quarta pars erit FM dato diametro maiori 21 A, & eodē semper minori, & idem agatur de diametro 20. & describetur ellipsis PN. Eruntque descriptę Ellipses, quæ corpus Ellipticum ex 10. Tract. 25. diuidunt. Super AB verò circulus DAK est, & ellipsis descripta super DC maiori axe ipsa est ellipsis primo proposita, cuius quarta pars est CB.

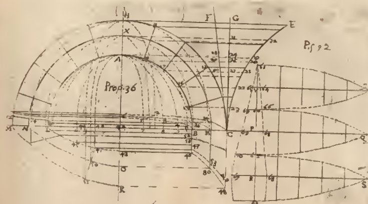
Istis omnibus Ellipsibus descriptis, Ellipses etiam describendę sunt, quę oriuntur à planis Ellipsium parallelè ipsi DBC ellipsi maximę, circulū, cuius diameter AC, secantibus, & in partes ęquales diuidentibus, & transeuntibus per sinus, & sectionum vestigia 2 T, & 1. 10 9. & ręt.

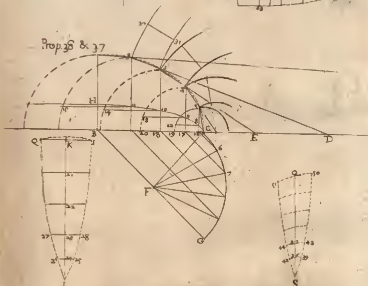
Cum itaque istę ellipses sint parallelę erunt inuicem similes ex 11. Tract. 25. quare poterunt describi, vt diximus prop. 72. Tract. 24. diuidendo DA, A 20. & A 21. &c. in partes proportionales ipsi DA, quod factum est duplando semidiametros singulos A 20. & A 21. & alios, vt fiant diametri, & accommodando illos in triangulo DCK. Sic mensurata dupla 20 A in D 8 ducetur arcus 83, & trahetur D 3 ad punctum 3 in quo secat latus KC, sic dupla A 21 dabit longitudinem D 5. & arcus eo interuallo ductus 5 4 signabit punctum 4. ad quod ducetur D 4 & sic de alijs. Porrò triangulum DCK habet pro duobus lateribus diametrum DC Ellipsis maximum, & minimum D K angulum K rectū claudētibus. A partibus, itaq; diametri circuli T 2. & 29 &c. parallelę descendāt, diuidentq; D 3. & D 4 in partes proportionales ex prop 13. l. 6.

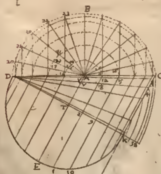
Singulę itaque partes proportionales in singulos correspondentes semidiametros transferantur sic pars 8a Y transferatur in A 13. & Y 15. in A 17. perq; puncta singulis in diametris impressa transeat flexa, quę constituet ellipsim 17. 29. 16. & ita agatur de alijs. Tandem in ellipsibus priùs factis inueniantur sectiones istarum postremarum ellipsiū, & quia transeunt per sectiones T 2, & 1 2. &c. ideo partes T 2. & 29. &c. transferātur in ęqualem diametrum FP, & sint O 30 & 30 31. & ręt. ducāturque parallelę 30 32. & 31 33 & cęt. abscindentque ab ellipsibus portiones orbitarum ęquales illis, quę intercipiuntur ab ellipsibus parallelis 17 29 16. & alijs similibus, & erit constructio pręparata ad superficies elliptici corporis in planum proijciendas.

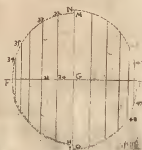
Sit itaque extendenda superficies, quę operit 20 A 19. Seorsim linea ducta Q 8, ab aliquo puncto 2, ellipsis FM facta super diametrum A 21 ellipsium inæqualium extendatur, sitque QS æqualis ellipsi FM, singulęque partes singulis V. g. 8 34 parti F 36 & 34 35 parti 36 37. & cęt. Postea accepto interuallo 47 F ducatur arcus centro 8, sic 13 26 in fig. priori ducatur alius arcus, & punctum in quo se secant sit 39. sic sumpto ab ellipsi NF interuallo F 45 ducatur centro 2 arcus, rursusque interuallo 26 40 alius arcus, & punctum in

quo

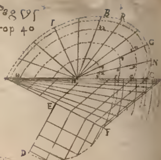

Prop.36
P.592
H
X
F
G
E
A
N
L
B
C
O
R
Q
S

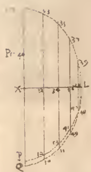

Prop.38 & 37
H
B
C
E
D
Q
K
F
G
L
S

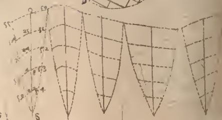

B
D
C
E
K

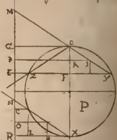

Fig. Prop. 39
N
M
F
G
H

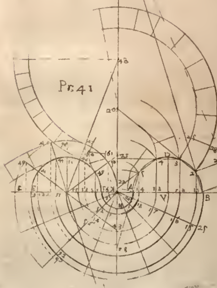


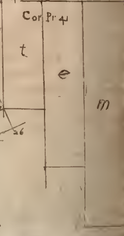

Pag 595
Prop 40


Pr 44




P


Pr 41


Cor Pr 41
t
e
m

quo se arcus intersecant sit 42. Pari ordine sumpto interuallo 46 45 centro 39 arcus ducatur, & interuallo 29 41 centro 37. ducatur alius arcus, & punctum intersectionis sit 43. Postea centro 42 interuallo 47 48 arcus ducatur, & interuallo 29 17 alius arcus, & punctum, quo se secant, erit 44. & sic successiuè ages in alijs, obtinebisque pũcta plurima, p quę ducta flexa s 51. & s 50 sient, & per puncta 51 Q 50 concludent superficiem quęsitam 51 s 50. quę inter duas ellipses, quarum radij sunt A 20 A 19 intercipitur, si ergo idem agas de cęteris 19 A 23 habebis superficiem quartę partis corporis Elliptici in planum extensam. Hanc tamen propositionem quoad planitiem corporis sphęroide inscripti, non omnino mathematicam esse agnoscimus, quia angulus, quem facit planum per subtensas ellipsibus parallelis V. g. ambitibus 17 29 41. & 13 26 40. & cum planis ellipsium, cuius axes sunt inęquales V. g. cum ellipsi transeunte per HN axem non sunt recti, vt reposcitur ex prop. 34. Verùm adeo pręcisam, vt error sensibilis multiplicatis diuisionibus, quantum fas est, contingere non possit, cùm multiplicatis ellipsibus inęqualibus parũ à recto differre possint anguli effecti à plano ellipsis arcus ellipsium parallelarum bifariam diuidente.

PROBL. IV. PROPOS, XL.

Ellipticum quodcumque corpus, in planas superficies extendere.

PRęcedens propositio est communis omnibus corporibus nedum quorum circulus basis est, sed etiam, quę vndequaque elliptica sunt, & quoad latitudinem, & quoad altitudinem, imo, & omnibus corporibus, etiamsi per axem non sectis etiam ouatis, & huiusmodi; pro qua re hic damus exemplum corporis elliptici ABC, sed per axem nõ secti originẽ ducentis ab ellipsi FBD, quę fit p axẽ minorem BI ducta, quę maximã ellipsim per axem maiorem HG obtineat KML. Sit itaque describenda superficies, quę operiat portionem HGC. Datis ergo semidiametris BF ellipsis per axem minorem BI ductę, & HC describatur ellipsis KLP, deinde dato eodem diametro BF, & NH describatur ellipsis KML; Diuiso autem in partes, in quas PB diuisus est diametro KL ducantur ab illorum punctis terminantibus parallelę ad eorum circumferentias, & sint 32 33. 34 35. 36 37. sic ad alias ellipses 32 22. 34 13. vel 32 30. & 34 11.

Ducta itaque seorsùm recta QS in illam transferatur ellipsis LQ ęquando partes partibus, vt sit S 22 parti L 48, sic 22 23 parti 48 49. sic 24 23 parti 11 30. & cęt.

Postmodum, vt in pręcedenti fecimus sumpta distantia 2 4 describatur arcus centro 22 puncto, deinde centro S interuallo L 39 describatur rursùs arcus, & vbi se decussant in 22 50 punctum imprimatur. Sic centro puncto 23 interuallo 6 7 describatur arcus occultus, rursùsq; interuallo 39.37. cẽtro pũcto 50. alius arcus occultus ducatur & vbi se secãt sit punctũ 51. Sic reperies pũcta nouesta 52. 53. 54. & per illa flexa curuabitur, & ita etiam ducatur flexa 55 S sumptis interuallis à partibus L 40. 40 41. ellipsis LP, & à centris 59. 58. 57. 56. 55. pro arcubus ducentis. Et pro arcubus à centris 22. 23. 24. 25. trahendis, sumptis interuallis 2 3. 6 5. 9 8. & cęt. & tandem per puncta tria 55 Q 54 alia ducatur flexa, & erit superficies 54 S 55. quæ desiderarur, cui si fiant pro alijs interuallis quatuor, quæ remanent, similiter aliç superficies V. g. pro parte BHO, & cęt. habebimus quinque superficies, quæ corporis ABC dimidiam superficiem operient, cui ęquales, similesque erunt, quę aliud dimidium circundabunt.

PROBL. V. PROPOS. XLI.

Cylindri in annulum flexi superficies inuenire planas.

SIt huius cylindri planum AHF, BCE, semicirculus autem ADB; oporteatque superficies reperire planas eius rotundę, & circumflexę superficiei ęquales

Diuidatur semicirculus ADB, in quot libuerit partes V. g. 5. perque puncta terminatiua rectæ ducantur vsque ad perpendicularem CHO, vsque quo necesse erit, extensam; sitque prima B 2 C, secũda 2 3 20 tertia, 3 4 21, quarta 4 5 22 quinta 5 A 23. Facto autem centro puncto, in quo secant, vt in G interuallo GB ducatur arcus B, 26; & rursùs eodem centro interuallo O 2 ducatur arcus 2 27. & sic fiat de alijs, pro vt supra docuimus, agentes de sphęris propos. t.

Vt autem terminentur, ducantur perpendiculares 2 11; 3 12 & cęt. & à centro K ad singulas extenso circino ducantur arcus B 25. & 11. 15. & 12 16. & 13 17. & cęt. vsque ad A 24. deinde mensuretur arcus B 25 super arcum B 26. sic arcus 11 15 super arcum 2 27. & ducatur linea 26 27 ad centrum G: omnino enim per centrum G transire debet, & erit superficies B. 27 B 26. quę iminet situi 11 15 B 25.

Rursus arcui 11 15 adęquabitur arcus 2 28. & arcui 16 12 arcus 3 29. ductaque recta 28 29 versùs centrum 20 terminabit superficiem 3 29 2 28. quę iminet situi 16 12 11 15. & ita de alijs, quibus replicatis quinquies quantum numerus partium arcus BCA requirit, erunt tot, quot semiannuli quadrantem AHCA operient.

Sed si quis optaret hunc annulum concauum, & vellet cognoscere superficies coniunctiuas, quę partes secundum annuli crassitudinem copulant, id pręstitimus ad aliam partem sinistram. Ducto itaque semicirculo BNF alius semicirculus ducetur LMK, quorum interuallum MN crassitudinem annuli ostendet; quibus in quinque partes diuisis per earum partium puncta terminantia ducentur rectę ad perpendicularem CHO; talis est LBK, & 40 41 43. atque 42 44 45. & 46 47 48. & 49 50 21. Facto autem centro in puncto 21 ducatur arcus interuallo 49 21. & rursus arcus 50 21; Sic facto centro in puncto 48 arcus ducetur interuallo 48 45. & rursus alius 48 47. & sic de cęteris qui arcus ita terminabuntur.

Ducentur enim perpendiculares à punctis, à quibus educti sunt, nempe 51 49. 47 53. & alijs ab LK, & à punctis; in quę cadunt centro A arcus describentur, vt 6 7. & 51 52. & 53 54. & 55 56. & cęt. qui arcus transferentur in arcus priùs deductos, sic arcus 6, 7 æquabitur arcui 50. 61. sic arcus 51 52 arcui 49 62. & ducta recta 62. 61 ad centrum 21 dabit superficiem, quæ requiritur coniunctiuam grassitudinis F K 59. 50 cum altera grassitiei parte 49. 50. 46. 47. & sic agendum in

 alijs,

alijs, vt ex delineatione satis, superque constat.

Ratio verò huius propositionis est eadem ac expens. 3. de superficiebus sphærarum in planum redigendis per superficies segmentorum conicorum; siquidem CB V.g. circumducta secundùm circulum ACB efficiet conum ex defin. 1. tract. 24. quare AB erit segmentum conicum, vnde, & superficies inter eius ambitus A 27. & B 26 ex prop. 24. tract. 31. comprehensa erit superficies frusti conici: Siquidem certum est ex prop. 24. tract. 31 sectorem diametro GB ductum, cuius peripheriæ portio æquetur circulo ACB æquari superficiei coni, & sectoris illius partes partibus superficiei conice; ideo etiã sectoris portio A 26 G æquabitur coni portioni, cuius ambitus A 25. & latus BG, & sic dicas de sectore A G 27. quod æquetur superficiei coni, cuius latus A G, & ambitus 11 15, quo dempto à sectore BG 26 remanet superficies A A 27 26 æqualis residuo conicæ superficiei, cuius arena inferior sit A 25. & superior 11 15. & altitudo B 2. Id autem dicendum est quoque de alijs.

COROLLARIVM.

HInc intelligi potest, quod superficies annulum circũuestientes tantò sunt maiores, quę sunt vltra XD diametrum perpendiculari M N parallelum, quantò minores sunt, quæ sunt citra DX, vt in figura P: Nam si sumatur DY æqualis arcus, & signetur in XT, & ducatur XYN erunt parallelæ MT, & NX ex propos. 27. lib. 3. Con. 1. Quare cum NM, & XD sint parallelæ, MD, & NX erunt æquales, ex 33 lib. 1. Quare MY superabit NX linea DY quantùm NT deficit ab NX æquali linea TX.

Ducantur verò à punctis medijs subtensarum I, & H lineæ NM normales IP, & OH, & quia sunt triangula æquiangula DIA, & XHB, vtpote effecta à parallelis ex prop. 4. lib. 6. erit DI ad IA, vt HX ad BX, verùm DI æquatur lateri HX, ergo AI æquabitur ipsi BX. Igitur OH æqualis ipsi AP tantùm deficiet ab XX æqualis ipsi PA quantùm PI accrescit super PA. Si ergo MY intelligatur circumuolui, & fieri conus, sicut NX, erit BY semidiameter, & BX, vt DY, & YX altitudines frustorum æqualium superficierum conicarũ, & LX, & FY annulorum planorum altitudines, & circuli BA ducti, & PI radij intermediæ peripheriæ latitudinẽ plani annuli bifariam, & circulariter diuidentis. Rectangula autem erecta ex latere ipsorum mediorum circulorum æquali ex 12. tract. 30. & altitudine, sunt annulorum planitiei æqualia. Quare cum ita sint circumferentiæ, vt diametri, & diametri se superent ea ratione, vt quanto AX est minor, quam BX, tantò sit maior PI; etiam rectangula æqualis altitudinis LX, vel FY annulorum, sed circumferentiarum, quarum vna ducitur radio AX altera PI se superabunt eodem modo. Nempe si fiat rectangulum e ex LX, & ex circumferentia ducta radio AX, & rectangulum t ex LX, & circumferentia ducatur radio DH, & rectangulũ m ex circumferentia ducta radio PI, & LX, vel FY, cum se referant, vt altitudines ob æquales bases ipsis FY, & LX, & idem inuicem, idest vt peripheriæ, nempe vt diametri ex 33. lib. 6. erit maius m, quàm e tantùm, quantùm minus est t, quàm e; quare, & annuli probati æquale prop. 12. tract. 30. illis rectangulis tales erunt.

Quare, & segmenta conorum, quæ constituuntur ex peripherijs æqualibus ex 24. Tr. 31. nempe frustum conicum ex circumferentia æquali circumferentiæ ductę radio LY extimæ, & ex radio DG intimę, sicut, & frustum ex TX constituitur ex peripheria æquali ex CH intimæ, & ex radio AX extimæ, vnde ex Coroll. propos. 12. tract. 30. erunt eiusdem altitudinis ac rectangula N, & T, & ęqualis basis inuicem TX, vel DY; vnde respectum rectanguli e, & ipsius altitudinis DY tantùm decrescet frustum ex XT quãtum augetur frustum ex DY; Quod & debes fateri de frusto DZ, vtpote, quod sit latus coni æqualis cono MX.

TRAC.



TRACTATVS XXXIII.

De inscriptione, & circumscriptione Solidorum.



Ntequam ad ipsorum corporum trutinandam soliditatem accedamus, oportunum fuit inscriptionem corporum quinque regularium in sphæra, & omninò necessarium quorumcumque corporum in globosis descriptionem attingere, vtpote quod talium corporum cubatio maximè ab hac inscriptione dependeat; Et quia simul agitur de proportione laterum corporum inscriptorum benè præcedit soliditatis cognitionem ipsa laterum doctrina; cùm priùs se se offerant intellectui latera cognoscenda, quàm ipsa ab eis comprehensa soliditas.

EXPENSIO I.

De principijs.

PRiùsquam ipsam rerum soliditatem attingamus priùs definitiones, quæ ad corporum solidorum constitutionem faciunt; oportet exponere.

DEFINITIO I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

DEFINITIO II.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine æqualibus continentur.

DEFINITIO III.

Æquales solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

DEFINITIO IV.

Solidus angulus est plurium, quam duorum planorum angulorum in vnum punctum inclinatio.

Sic superficierum PBE, & PEF, & BPC, & PCF in punctum P inclinatio vocatur angulus solidus. vt in fig. Def. 6.

DEFIITNIO V.

Pyramis est figura solida, quæ planis plusquam duobus continetur ab vno plano ad vnum punctum constituta.

Quare si angulus solidus P habeat superficies suas, quibus clauditur ab aliquo plano, V.g. CBEFH incipientes, & in punctum P terminantes pyramis dicetur, quæ, & trium planorum, & quatuor, & quinque, & sic in infinitum sicut, & solidus angulus potest constitui.

Et hinc est, quod si solido alicui angulo substernatur basis plana, quod illa superficies tot lateribus terminatur, quot planis angulus continetur; cum enim superficies, & plana angulum continentia basim planam ei subtensam terminent, tot rectas lineas habebit terminantes, quot erunt ipsorum planorum sectiones in basi factas.

DEFINITIO VI.

Figura solida planis superficiebus constans in globosa inscripta dicitur cum, vel anguli superficierum, vel solidi tangunt alterius superficiem.



Sic figura solida PBEFHC in cono inscripta dicitur, quia omnes eius anguli tangunt conum, nempe anguli solidi, vt BB FP, & superficierũ V. g. superficiei BPB secundũ lineã cùm FPB. Sufficit autem pro diuersitate corporum cõuexorum, vel quod anguli superficierum, vel quod anguli solidi tangant.

EXPENSIO I.

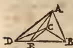
De solido angulo.

ANteqnam solida ipsa pertractemus, de solido angulo est agendum, eum enim similitudo solidorum, ne dum à proportione laterum. Sed & ab angulorum solidorum æqualitate dependeat si non cognosceremus anguli solidi naturam, neque solidorum proportionem pereipere possemus.

THEOR. I. PROP. I.

Etiam, si solidus angulus tribus tantùm angulis planis contineatur, duo quilibet anguli reliquo sunt maiores.

*PRobatur. Nam si aliquis angulus planus in angulo solido ABCD est maior, vel çqualis duobus reliquis. Assignetur, & sit BAD, à quo dematur angulus BAE æqualis angulo BAC; remanetque reliquus EAD, vel maior, quã DAC, vel æqualis. Remaneat primo çqualis angulo CAD; Fiat latus EA lateri CA çquale; substernaturq; basis plana ACDB, & fiẽt ex 22. primi triangula æqualia; nimirũ EAD triangulo ACD ob latus idem AD, & æqualia crura EA, & AC, cũ sint anguli DAE, DAC dicti æquales. At BEA triangulo BAC ob latus idẽ BA & crura EA, & AC æqualia cum sint anguli apud A effecti æquales. Quare basis quoque BC esset æqualis basi BAE, & basis ED basi CD. Non fieret ergo triangulum BCD basis anguli solidi. Nam ex 20. primi oportet duo crura trianguli reliquo esse maiora omnifariam sumpta, & sic pyramis triangularis non daretur, quæ basim triangularem habet, & verticem tribus angulis planis contentam, & hinc neque BD maior esse potest BC, & CD cruribus eadem ratione. Vnde nec angulus BAD potest esse maior angulis BAC, & CAD.



THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis continetur.

*SIt angulus solidus ABCD. Dico angulos eius planos BAD, DAC, & BAC, vel si plures sint esse minores quatuor rectis. Quod, vt probetur, determinentur omnia latera AB, & AD, & AC, & substernatur basis BDC, in quam à puncto A in sublimi cadat ex prop. 10. Tr. 22. perpendicularis IA, & ab angulis B, D, C ad eius contactũ I ducantur AI, & ID, & IC, eruntq; anguli tres DIC, & DIB, & BIC æquales quatuor rectis in plano ADC perpendiculari ad IA Cor. 1. pr. 12. lib. 1. Sed ex propos. 21. præcitati tract. angulus DAC ab obliquo plano effectus est minor, quàm DIC, & sic BAD minor, quàm DIB, & pariter BAC minor, quàm BIC. Ergo omnes simul erunt quatuor rectis minores.

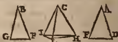


THEOR. III. PROPOS. III.

Si fuerint tres anguli, quorum duo, vt libet assumpti reliquo sint maiores, poterit ex illis angulus solidus constitui.

*PRobatur ad hoc, vt constituatur angulus solidus necesse est, vt basis plana illi angulo possit substitui, quæ saltem triangularis sit: Sed si anguli 2. sint maiores reliquo, habebũt etiam duas bases maiores reliqua: Ergo ex illis tamquam ex lateribus planum triangulare constitui poterit, quod angulum solidum substernat.

Quod verò duo anguli maiores reliquo simul sumpti habeant etiam bases simul sumptas maiores reliqua ostenditur.



Sint anguli tres A, B, C, quorum duo A, & B reliquo C sint maiores. Dico etiam bases DE, & GF simul sumptas reliqua HI esse maiores. Nam primo si vnus ex duobus ipsorũ est maior, vel æqualis ipsi ICH constat, & basim sub æqualibus cruribus contentam, vel esse æqualem ex 22. primi, vel esse maiorem ex 24. eiusdem, & ideo addita altera basi ambas reliqua esse maiores.

At si ambo anguli seorsim sumpti sunt minores angulo reliquo factis omnium angulorum æqualibus cruribus, & suis basibus DE HI, FG ductis, in triangulo reliquo HCI detruncetur angulus LCH æqualis angulo A; remanebit angulus residuus LCI minor altero FBG, cùm duo A, & B hoc toto HCI præsupponantur maiores ea Thesi.

Basis verò HI basi DE, & LI basi minor erit eò, quòd HL sit æqualis DE ex prop. 22. primi ob latera æqualia HC, & CL lateribus DA, & AE, & angulum comprehensum ab ipsis æqualem, at basis LI ex 25. lib. 1. minor basi FG ob angulum minorem LCI angulo FBG, & latera æqualia LC, & CI lateribus FB, & BG. At basis HI est minor cruribus HL, & LI ex 20. lib. 1. Ergo HI erit minor basibus DE, & FG simul sumptis. Vnde ex illis angulis angulus solidus constitui poterit.

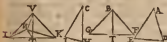
PROBL. I. PROPOS. IV.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocumque assumpti reliquo sint maiores, solidum angulum constituere; oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

*SInt tres anguli in fig. A, B, C minores quatuor rectis, & quorum duo, vt vt assumpti reliquo sint maiores, & fiant ei crura æqualia subductis basibus DE, FG, & HI. Electo verò quolibet triangulo, ad eius basim V. g. ab basim FG in triangulo FBG ducatur perpendicularis BT. Deinde ex basibus

basibus DE, FO, & HI constituatur triangulum KNL, & diuiso KL, vt est æqualis basis, FO in T, ducatur NT, fiatque triangulum NTV ex perpendiculari TB crure EA, & basi NT, cuius latus TV perpendiculariter insistat lateri KL, & secet in NT ex prop. 31. Tract. 38. Deinde iungatur KV, & VL. Dico quòd sit factus angulus solidus constans tribus angulis planis datis A. B, & C.

Probatur. Nam, quòd ex tribus basibus possit triangulum constitui, constat ex hypothesi, in qua supponitur duos angulos fuisse datos maiores reliquo; Quare, & bases, vt prop. anteced. probatum est; Quòd autem ex tribus quoq; nimirum perpendiculari TB latere EA, vel quolibet illi æquali, & NT possit triangulum componi.



Probatur. Nam aut NT est maior, quàm TL, vel minor, vel æqualis. Sit primò maior. Quia ergo ex TV, LV, & LT cōponitur LVT triangulū, LV, & LT erunt maiora latera, quā VT, vnde tantò maiora erunt TN maius ex Hyp. quā TL, & NV æqualis ipsi VL sc. ipsi AB, vel æqualis GB, Aut NT erit minor, quā TL, at TV, & LV sunt maiora, quam TL, ergo tantò maiora latera erunt ipsa VT, & NV æqualia ipsi VL reliquo NT, Aut erit æqualis NT, & LT, & ita si TL, & LV est maior, quā VT, etiā maior erit NT cū ipsa NV æquali VL, quam TV, vnde ex ipsis NT, TV, & NV poterit componi triangulum NVT. Quod verò ita super NT constituendum sit, vt TV cum KL faciat angulos rectos docuimus prop. 31. tr. 38. intersectionum.

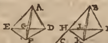
Quod tandem omnes anguli ad V nimirū KVL, & KVN, & NVL sint æquales, singuli singulis assignatis C, B, A, ostenditur. Nam basis KN est æqualis ex constructione basi HI, & crus NV item ex constructione cruri BA, & ideo æquali HC. Crus quoque alterū KV est æquale itē cruri FB. Quod ostenditur, nam TV crus perpendiculare ex cōstructione est æquale perpendiculari TB, & KT cruri FT, & anguli apud T comprehensi à dictis cruribus æqualibus ex cōstruct. ambo recti; Ergo ex pr. 38. lib. 1. basis KV basi FB, & æquali GC erit æqualia, vnde triangulum KNV erit æquale triangulo HCI, & triangulum KTV triangulo FBT, & altera medietas TVL alteri medietati TBG, & crus LV cruri GB, vel æquali BA secundi trianguli. Basis verò NL basi DE ex hypothesi est æqualis, & crus NV cruri BA, vel æquali DA. Ergo triangulum ex 23. l. 1. NVL triangulo DAE æquale, & sic omnia triangula KVN & NVL, & KVL singula singulis assignatis erūt æqualia; quare, & anguli ad V singuli singulis B, A, C æquales erunt.

PROBL. II. PROPOS. V.

Ad datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIt angulus solidus A, cui cōstituēdus sit æqualis angulus solidus B in data linea BC. Ad triangulum planum ADE ab aliquo puncto lineæ AF V.g. ab F deducatur perpendicularis FG, & per G punctum transeat recta DE.

Deinde ex BC detruncetur BH, æqualis AE, & ad punctū B ex pr. 24 l. 1. constituatur angulus planus IBH æqualis angulo plano DAE; fiant verò æquales IB, & AD, connectaturque IH, & in HI sumatur segmentum æquale segmento GE, quod sit LH, ducaturq; BL, & à puncto L educatur plano triāgulo IBH perpendicularis LK, æqualis ipsi GF, iconnectaturque recta KB. Dico *angulum solidum a tribus planis contentum* IBK, & IBH, & BHK *esse æqualem angulo solido dato* A.



Probatur, quia angulus IBH est æqualis angulo DAE, crusque BH cruri AE, necnon, & crus IB cruri AD, ex prop. 22. lib. 1. basis IH erit æqualis basi DE, totumque triangulum IBH toti DAE æquale. Cúmque LH ex effectione sit æquale segmentum parti GE, erit etiam LB ex propos. eadem 22. lib. 1. æquale crus cruri GA; cùm LK est æquale ex constructione cruri GF, & comprehendunt crus BL, & LK angulum rectum ex def. 5. tr. 38. intersectionum, erit quoque ex prop. 22. eadem lib. 1. basis BK basi AF æqualis; sic quia crus IL, vtpote residuum ex LH sit æquale residuo cruri GD, & LK cruri GF ex effectione equale; angulusq; cōprehensus rectus sit, erit basis IK basi DF æqualis ex dicta propos. 22. lib. 1. & eadem ratione HK basis basi FE: Cùm itaque triangulum IBK habeat latera singula singulis lateribus trianguli FAD æqualia, erunt ex triangulum DAF triangulo, & KBH triangulo FAE æquale ex propos. 23. lib. 1. sed iam ostensum est triangulum IBH triangulo DAE æquale; Ergo omnes anguli plani constituti ad verticem B singuli singulis erunt æqualia angulis planis apud A, & sic angulus solidus B angulo A solido erit æqualis.

COROLLARIVM.

HInc autem non erit difficile constituere, & angulum solidum pluribus superficiebus, quàm tribus contentum. Quia potest diuidi in tot angulos tribus superficiebus constantes, & illis exhiberi queunt alij anguli solidi æquales, qui deinde simul compositi æqualem angulum solidum pluribus, quàm tribus superficiebus constantem efficiant.

EXPENSIO III.

De descriptione Tetaedri in sphæra, & proportione laterum ipsius ad diametrum.

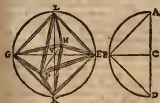
TEtaedrum est pyramis quædam quatuor superficiebus æqualibus, & similibus contenta habens quatuor solidos angulos tribus angulis planis clausos, & latera sex, de qua volumus ex Euclide docere, quomodo inscribatur speræ, & quænam sit proportio laterum, quibus continetur ad diametrum ipsius sphæræ.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VII.

Octaedrum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius Octaedri.

SIt AD datæ sphærę diameter, quæ in C puncto bifariam secta sit; erectaque perpendiculari CB, facto centro in C semicirculus describatur; coniungaturque AB, & DB rectis, eritque factum semiquadratũ ADB, quod sufficit. Seorsim autem aliud quadratum fiat EHPG, cuius latera EP, & PG, GH, & HE lateri AB sint æqualia, & diametri EG & PH diametro AD æqualia. A puncto verò V excitetur perpendicularis KVL, sintque portiones VK, & VL æquales AC, connectanturque eorum extrema octo rectis EL, & PL, & PK, & cæt. Dico primò esse constitutum Octaedrum.



Quod probatur ostendendo omnia eius latera æqualia: quia triangula tum iacentium superiora, tum inferiora ad centrum V. g. EVK, & LVP, & cęt, sunt æqualia ob æqualia crura EV, & VH, & VL ex effectione, & angulum rectum ad V; Vnde bases erunt æquales EL, & EP, & cæt. sicque omnia triangula superficialia, vt ELP, & cæt. æqualia latera possident, scilicet bases triangulorum ad centrum, & ideo æquales angulos ex 23. lib. 1.

Probatur secundò, quòd sphęra complectatur. Nam radij EV, & VG, & VL sunt ęquales rectę AC ex effectione; Ergo circumferentia quælibet interuallo VC centro V per eorum extrema transibit.

Probatur tertiò, quòd eius lateri sit duplus in potentia diameter EG, quia ex 11. lib. 2. ęquat in ELG rectangulo ex 28. lib. 3. quadratum basis EG quadrata laterum æqualium EL, & LG, vnde quadratum EG erit duplum quadrati lateris LG.

COROLLARIVM.

HInc educitur, quod si in eadem spęra descriptum sit Octaedrum, & Tetraedrum latus Tetraedri sua potentia comprehendere lateris octaedri potentiam, idest quadratum, quod potest efficere vna vice cum tertia parte, nam quadratum lateris pyramidis est 4. qualium 6. est quadratum diametri, & octaedri lateris quadratum talium partium 3. pyramidis lateris quadrati erit 4. earundem partium, octaedri vero lateris quadratum 3. nempe Pyramidis latus comprehendet latus octaedri potentiâ semel, & insuper $\frac{1}{3}$ ipsius lateris octaedri.

EXPENSIO V.

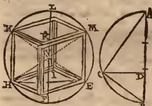
De Cubi in sphæra descriptione, & eius lateris ad diametrum ratione.

CVbus est figura solida sex superficiebus quadratis æqualibus constans, habens angulos solidos octo tribus planis angulis rectis conclusos, & latera duodecim.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Cubum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIt sphęræ diameter quicumque AB; diuidaturq; in tres partes, & sit tertia pars BD, & à puncto extremo D excitetur perpendicularis, quam abscindat in C semicirculus super AB, connectanturq; AC, & CB.



Seorsum verò in aliquo plano fiat quadratum EFHI, cuius latera sint æqualia rectę CA & ab angulis eius excitentur perpendiculares ipsis lateribus ęquales, quorũ extrema L, M, K, N rectis connexa efficient cubum EHML de quo loquitur prop.

Nam, quod sit cubus patet. Etenim ex effectione habet omnia latera ęqualia, cum enim erectę, vt KF sint perpendiculares plano, erunt quoq; parallelę, vnde, & angulos rectos efficient cum lateribus in plano extensis FI, &c. ex prop. 7. Tract. 22. Quia verò sunt ęquales latera quoque suprema M K erunt parallela, & ęqualia lateribus EF, & perpendiculares lateribus erectis, vt FK: quare cũm omnia latera sint ęqualia, parallelaque, & omnes anguli recti cubus constitutus est.

Prob. secundò, quòd sphæra cõplecti possit. Quia dimidia omnium diagonalium, vt MH sunt ęqualia, cum ipsę diagonales sint ęquales. Vnde facto centro in communi eorum puncto medio V poterit ad interuallum VH describi circulus. Qui transibit per extremos angulos V. g. per H, & M, & cęt ita etiam alius per L, I, & cęt.

Probatur tertia pars. Nam diameter sphęrę MH continet in suo quadrato duo quadrata lateris EM ęquali quadrato lateris sibi ęqualis EF, & diagonalis EH: diagonalis verò EH continet quadrata lateris EF, & FH ex 11. lib. 2. ob angulum rectum EFH. Ergo quadratum diametri continet tria quadrata trium laterum ęqualium ME, & EH, & EF, quare vni eorum triplum est.

Est autem MH equalis AB diametro. Quia quadratum AB ad quadratum CB, est quoque triplum. Siquidem est ad quadratum ex CB, idest ME, vt AB ad DB prima ad tertiam proportionalem ex Coroll. prop 25. lib 6. que AB tripla est ad BD. Quare erit quadratum AB triplum quadrati CB, & ideo equale diametro MH, cuius quadratum triplum est quoque quadrati EP, idest CB equalis linee.

COROLLARIVM.

Hinc autem habetur diametrum cubi, seu sphere posse efficere quadratum equale quadrato lateris cubi, & quadrato lateris pyramidis. Nam cùm quadratum diametri sphere eiusdem contineat pyramidis quadratum vna vice, & dimidia erit vt 9. ad 6. & cùm idem contineat lateris cubi quadratum tribus vicibus erit, vt 9. ad 3. Quare composita hec duo quadrata partium 6. & partium 3. efficient quadratum partium 9. quale est quadratum sphere, seu cubi: Vnde AC erit latus Pyramidis, & CB cubi, cuius diameter sit AB.

EXPENSIO VI.

De inscriptione dodecaedri in sphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

Dodecaedrū est corpus duodecim pentagonis equalibus equilateris, & equiangulis constans, simulque angulos solidos 20 comprehensos angulis planis tribus, & latera 30. consequitur.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Dodecaedrum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quòd dodecaedri latus irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

Cum dodecaedrum duodecim facies habeat, & cubus 12. latera hinc est, quod construatur delineando super vnum quodque latus, dodecaedri aliquam superficiem Fiat itaque quadratum b y basis electę ad placitum cubi, circa quem dodecaedrum constituendum est, seceturque eius semilatus r o secundum extremam, & mediam rationem in puncto n, ducaturque lines, m e, & u t perpendiculares, abscindatur n m, & g t equalis maiori segmento n o, deinde coniungatur t r, & extendatur. Nam dico pro. 1. progress. quod impingit in punctum m.

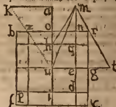
Probatur. Nam quia semilatus o r est sectum extrema, & media ratione, ita est r o, vel r g ad t g, maius extremum, vt n m idem maius extremum ad minus r n; sed talia quoque erunt latera triangulorum t g r, & n r m, quia erit ob angulū rectum apud n. & g, & angulos ad verticem apud r, & m æquales, ita r g ad t g, vt n m ad n r. Ergo t r debebit transire per punctum m. Nam si transiret aliunde, non haberet eandem proportionem, quam habet r g ad t g siquidē si trāsiret supra, vel infra, esset maius, aut minus illud crus trianguli r n m, quā n m, & ideo linea n m, licet maior, aut minor, quā n m eidem r n eandem proportionem diceret, quam r g ad t g, quod esse nequit ex 7, lib. 5,

Progress. 2. Dico t m in r esse lineam sectam secundùm mediam, & extremam rationem, quod pari modo ostenditur. Quia eadem proportione reseruntur t r ad m r, qua t g maius segmentum ad n r, vel t g minus. Ergo *componendo*, vt t r ad summam, sc. t m: sic t g ad t g cum r g, idest e e, vel æqualis o e tota linea extrema, & media ratione secta, sc. e g ad t g, quæ est, vt m r ad r t, cum sit, vt n r ad g t; quare cū minus extremū m r se habeat ad maius t r, vt maius ad totam t m, quadratum maioris segmenti ex prop. 17. lib 6. erit æquale rectangulo minoris segmenti, & totius, vnde extrema, & media ratione secta erit.

Dico Progress. 3. Quod si ducta h m ex e a, & e m fiat triangulum rectangulum u a x, quod basis u x æqualis erit lateri quadrati r b; quod sic probo. Nam est æquale eius quadratum ex 47. lib. 1. quadratis crurum a u, & a x; hæc verò duo quadrata sunt æqualia quadrato lateris r b; Ergo quadrata lateris r b, & cruris u x æqualia sunt, & consequenter ipsa latera æqualia.

Probatur minor, nempe quadrata linearum a s, & s n esse æqualia quadrato lateris r b. Nam quadratum u a est æquale quadrato n b p d cum d n, & e m, ex constr. sint æquales; Quadratum verò ex a k, quadrato ex m b, quod equale est quadratis ex m q, & q h; Quadratum verò ex q m est æquale quadrato g r o n, & quadratum q h æquat q e o h, quæ sunt equalia gnomoni r d f, siquidem ex hypothesi quadrata duo e q u h æqualia existunt rectāgulis duobus y i, & i f, quod sint quadrata maioris segmenti n o. Rectangulū verò q o est æquale rectangulo d g, vt patet, & rectangulum r e est pars quadrati r u. Vnde totus gnomon r d f secundum singulas partes equat quadratum r u habens latus u o, vel q m, & quadratum lateris q h; quę duo quadrata equant quadratum basis m h, vel a k. & hæc enim quadrato n a, vel æqualis b n æquant quadratum basis u k, & ideo erit æqualis lateri r b.

Dico Progress. 4. Quod si ex toto, latere r b, & maiori eius segmento n s. Fiat triangulum isosceles f a 3, & in puncto 4. & 8 secentur eius latera extrema, & media ratione, idest fiant 4 f, & 3 8 æquales basi f 2, ducaturque perpendicularis Q 3. & ei perpendicularis per puncta media sectionis 4 8 æqualis hinc inde à puncto v medietati lateris f 3, quod secabitur in puncto 4. extrema, & media ratione, minusque segmentum erit x 4. Nam ducta f b, parallela perpendiculari 3 Q, & b 3 basi f x parallela: Erit primo v 5 dimidium segmentum maius, vtpote æquale dimidio f Q, deinde probo 5 4 esse aliud dimidium minoris segmenti 43. & ideo duplum ipsorum equari ipsi 3. f vel x 6. In triangulo b 3 f, ita f 3 est ad 4 f, vt basis b 3. ad parallelam 54. sed vt tota f 3 ad maius segmentum f 4 ita est f 4 maius segmentum ad minus 43, ergo vt est f 4 maius segmentum ad



43.

43, minus ita est b 3. basis ad 5 4 sibi parallelam: sed b 3 est æqualis semibasi f Q, idest maioris segmenti f 4 medietati, ergo 5 4 erit æqualis medietati minoris segmenti 43, vnde cum dupla 4 f fiet tota linea æqualis lateri 43. & cũ dupla vs æquali 4 f tota x 6 æqualis lateri quadrati r b in 1. fig.

Progress. 5. Et hinc patet, quod possit fieri pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex 11. lib. 4. quia f 3 2 triangulum est quale reposcit prop. 10. lib. 4. cuius basis f s sit segmentum maius lateris 23. extrema, & media ratione secti. Nam quia 46 æquat f 2 parallelã, & f s, æquat f 4 erit 46 f 2 parallelogrammum æquilaterum. Vnde diagonali f 6 angulus 4 f Q erit diuisus bifariam & ita erunt tres anguli æquales f 32. 3 f 6. & 8 6 f & ita fere in parallelogrammo x 8 f s. Vnde omnes anguli erunt æquales, cum ostendentur æquales angulo f 32. Latera quoque æquabuntur. Quoniã iam tria s f, & f x, & s6 in parallelogrammis 28 f x, & 46 2 f super eandem basim existentibus ostensa sunt æqualia. Vnde remanet de duobus x 3. & 36. Quod patet, nam segmentum 38. ex dictis progr. 4. æquat segmentum 86. Vnde, & anguli 6 3 8. & 3 6 8. subtensi ex prop. 14. lib. 1. æquabuntur, æquales autem sunt f 3 2, & 8 6 f ex dictis. Ergo toti anguli 4 3 6, & 3 6 f æquales erunt, sed inuicem 3 f 6 æquat f 3 2. Ergo reliqui æquales trianguli 3 f 6 reliquis inuicem æqualibus trianguli f 3 2; quare erit æquiangulũ, & isosceles; sed f 3 est idem in vtroque triangulo. Ergo ex 4. lib. 6. f 6 æquat 3 2. & 3 6 latus f 2. & eadem dicas de triangulo 3 x s.

Dico progr. 6. Quod si ducatur m o hæc erit æqualis in prædicto quadrato semidiametro cubi, cuius latus sit r b. Nam erit eius quadratum triplo maius, quam quadratum semilateris cubi r o. Cumq; quadratum diametri cubi sit triplò maius, quam quadratum lateris ex prop. 10. h. Coroll. etiam semidiametri erit triplo maius, quàm eius semilateris; Vnde u m tripla potentiã r o æquabit semidiametrum cubi, cuius semilatus est r o.

Quod autẽ sit triplo maius u m basis quadratũ, quam semilateris o r ostenditur. Nam est æquale quadrato ex e m, vel æquali u d, & quadrato ex e u facto in rectangulo triangulo m e u, hæ verò duo quadrata simul sunt triplo maiora, quã quadratũ ex semilatere r o; quoniã primò ub est iam æquale quadrato u r secundò si aliam partem accipiamus d o, cum occupet idem spatium quadrato e h quadrati r u, & rectãgulo h u erit idem quadrato u r, at cum è i quadratum æquetur rectãgulo e r etiam parallelogrammum d o æquabitur quadrato u r. Tertio u p est æquale rectangulo n o, cui si addamus quadratum alterius cruris e n æquale reliquo rectangulo r e quadrati prædicti e n fiet quãtitas omnis p e r n quadrato tertiò æqualis. Iam ergo ter adæquauimus duobus quadratis ex cruribus e m, & e u quadratum r u factum ex semilatere r o. Vnde, & quadratum u m istis duobus ex m e, & e u æquale erit triplo maius, quã quadratũ ex r o; Vnde erit semidiameter cubi, cuius semilatus r o.

Istis præsuppositis fiat cubus ABCD, secenturq; eius singulæ superficies bifariam planis, seu rectis GH, & cæt. quæ plana excedant plana cubi excessu n m, vel quantùm est segmentum n o; quod interuallũ notetur, quoq; à lines s versùs T, & sit s T. Sic fiat vtrinquè omnibus superficiebus à puncto, in quo se decussant V. g. ab E in P ab M in O, ab H in L, & K, & cæt. Deinde coniungantur puncta KN, & LN, & NT, & TS, eritque factum pentagonum, & si idem fiat singulis duodecim lateribus cubi, vt factum est in latere NB. Dico factum esse dodecaedrum.

Progress. 7. Quod vt ostendatur multa singulatim sunt demonstranda, & primò, quod pentagonum TNBLK sit in eodem plano. Nam sic non esset eadem figura, cùm non esset in eadem superficie. Nam ducta HT, quæ transeat per Q definet in T ex progr. 1. Ergo erit in eodẽ plano cũ latere cubi ex pr. 2. tr. 11. vtpote, quia, cum eo in Q se secat; linea verò LK lateri NB parallela est ex effectione, propteraque erit in eodem plano cum illa.

Quare, & latera TN, & NL, & cæt. prædictas coniungentes erunt in eodem plano, totumque pentagonum LNTKB in eodem plano erit ex pr. 2. T. 11.

Progress. 8. Probatur quod sit pentagonum æquiangulum, & æquilaterum. Nam, si ducantur TL, & TK, & NB sunt inuicem æquales, & se inuicem secant extrema, & media ratione. Vnde sunt lineæ æquianguli, & æquilateri trianguli lateribus, angulisque subtensæ.

Demonstroque primo TL esse æqualem NS. Nam ducta TR perpendiculari plano RLK, ductaque RL, hæc erit æqualis lineæ h m, vel a K, cum sit basis trianguli RHL æqualis triangulo h q m ob L H æqualem h q, & R H ipsi q m. At RT lineæ u a ex constructione; angulusque apud R rectus. Quare, & basis TL erit æqualis basis u K vel r b, & consequenter lateri cubi NA ex 3. prog. & 5. & eadem probatio est de linea TK. Deinde probatur, quod se secant extrema, & media ratione in I. Nam ex 2. prog. TH, vel mt, sic eũ latere NB se secat in Q. Ergo etiam TL, cum enim NB sit parallela lateri KL, ita erit TH ad TQ, vt TL ad TI, sed TQ est minus segmentum ex prædicto progr. Ergo etiam TI, & consequenter IL maius. Cùm ergo NS sit æqualis lineæ TL, & diuisa bifariam Q, parallelaque lateri LK, ipsa quoque secabitur secundum mediam, & extremam rationem, minusq; segmentũ erit NS ex 4. progr. Quare ex 5. pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituetur. Quod si replicetur singulis in lateribus cubi, cum in omnibus sit capacitas, constituentur duodecim penta-

pentagona conficientia Dodecaedrum.

Progress. 9. Probatur. Quod sphæra possit amplecti. Nempe, quòd omnium horum pentagonorum anguli tangant sphęram amplectentem. Nam supra ostensum est progr. 6. m n esse æqualē semidiametro, quę nectit punctum m cum centro cubi u. Quod punctum distat, tum ab a, tum ab n secundùm interuallum maioris segmenti; talis autem est linea pa, & Ts, & cęt. quę angulos pentagoni cum centro nectunt, nam p, & T ex constructione distant à medio u, tum à superficie cubi quantùm est maius segmentum dimidij lateris extrema, & media ratione secti, & sic dicas de omnibus alijs, vt considerare est, quod etiam verificabitur de angulis, qui cubi angulis coincidunt cum, & cubi sit semidiameter.

Probatur quarto, quod latus horum pentagonorum sit Apotome, nam sphęrę diameter cum latere cubi est rationalis linea solùm potentis, vt supra ostensum est, cum triplum maius quadratum, quam latus possit efficere, & ideo ei sit, vt numerus ad numerum. Cum ergo latus cubi rationalis linea sit maius segmentum aL latus ex propos. 47. lib. 9. erit Apotome, vt ibi ostensum est.

COROLLARIVM I.

Hinc elicitur, quod si latus Cubi coniungatur cum maiori segmento ex propos. 47. lib. 6 element. efficietur minus segmentum, & latus cubi assumet sibi vices maioris, vnde fit, quod si aliqua linea secetur secundum mediam, & extremam rationem maius segmentum poterit deseruire pro latere cubi, segmentum autem minus pro latere dodecaedri.

COROLLARIVM II.

Secundo elicitur, quòd linea coniungens sex opposita latera parallela, qualis PT, & MO, sic 1 x alteri apud G, sic quòd est apud v .iteri apud y, vt est linea GH, vel 2 M, secta sit secundum extremam, & mediam rationem cum contineat ex construct. latus cubi, & maius segmentū nēpe medietatem hinc medietatē inde, vt estru, qua cubum excedit.

EXPENSIO VII.

Icosaedrum sphæra inscribere, simulque omnium corporum regularium proportione exponere, & numerum eorum demonstrare.

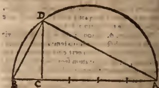
Icosaedrum viginti triāgulis planis cōstat ęqualibus, & similibus obtinens angulos solidos 12. quinq; angulis planis constantes, & latera 30.

PROBL. I. PROPOS. X.

Icosadrum constituere, & sphæra complecti, & ostendere, quod Icosaedri latus irrationalis linea sit.

Facilior est hæc propositio, quàm præcedens, licet corpus pluribus superficiebus circum-septum sit. Ad hoc ergo, vt Icosaedrum constituamus; detur diameter alicuius sphæræ, quā illud volumus amplecti, & sit AB, & diuidatur in 5. partes, vnaqua ex ipsis sit CB, à quo puncto C erigatur perpendicularis, quæ terminet in circulum in D; Ducanturque AD, & DB.

Nam dico AB posse quintuplum magis, quàm DB. Ratio est; quia quadratum totius AB est 25. partium quarum vna est quadratum ex CB factum. Verùm ex quadratis planis, quæ sint mensura quadrati AB; ex CB linea quadratum solùm 5. possidet. Siquidem, cùm ita sit AC crus maius ad CD crus minus in maiori triangulo ADC, vt idem crus CD maius in minori ad CB minus ex Coroll. prop. 16. lib. 6. erit CD media proportionalis, & sic eius quadratum erit æquale rectangulo ex AC, & ex quatuor partium, vnde vna cum quadrato CB faciet 5. quadrata: Istis verò duobus quadratis æquale est quadratum ex DB ex 11. lib. 2. Ergo hoc quadratum erit 5. partium respectu quadrati totius AB 25. partium quadratarum: Vnde cum duo harum linearum quadrata se habeant tamquam numerus ad numerum ipsæ lineæ AB, & DB erunt rationales potentia tantùm commensurabiles.

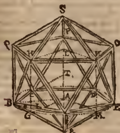


Quo supposito sic conficitur Icosaedrum. Semidiametro DB, fiat circulus ABDC, in eoque fiat pentagonū æquilaterum, & æquiangulū DCALF ex dictis lib. 4. prop. 11. diuisaque circumferentia FA bifariam in G ducātur ad planum circuli facti perpendiculares GH, LA, & MN, & cęt. æquales ipsi DB primæ figuræ, vel G A radio illi æquali. Et harum vertices iungantur N, O, Q, H rectis. Fiatq; triangulum NLH parallelum plano circuli iam factis, extendaturque eius planum, & triangulis 4. ipsi NLH æqualibus à centro H additis complectur pentagonum NOPQH equale pentagono inferiori, cum triangulum NLH sit æquale triangulo HAG, & consequenter ęquali triangulo FAA pentagoni primo constituti, quibus præstitis iungantur anguli, & puncta pentagoni superioris cum inferioris angulis FH, & FN, & LN & HB, & cæt. Habebimusq; 10. triangula æquiangula, & æquilatera. Decem quidem, quia decem latera duorum pentagonorum æqualium perhibeant bases; æquiangula verò, quia æquilatera ob hanc rationem, quæ de vno ostensa pro omnibus ob paritatem inseruiet.

Probatur verò ex eo, quod singula omnium latera sint ęqualia lateri FB. Nam vt diximus propos. 4. Tractat. 20. huius latus pentagoni V. g. FB, vel NB efficere quadratum æquale quadrato decagoni FG, & exagoni, nempe semidiametri

tri BA: Sed etus AF poteſt efficere quadratum æquale quadratis FG, & GH æqualis radio BA, ex conſtruct. vt docet prop.11. lib.2. ob angulum rectum apud G, ergo iſtæ lineæ FH, & FA, quæ æqualiter poſſunt, erunt ęquales, & idē valet de cęteris.

Iſtis tam 10. triangulis conſtitutis prolungetur AL in vtramq; partem in R, & S, vt pars addita LS, hinc, & AR inde ſint æquales lateri decagoni FG; Vertexque eorum R, & S coniungatur cū angulis ſuppoſitorum pentagonorum, & erunt quinque triangula, vt NHS, & cæt. ſupra; quinque infra. vt FRB, aut DCR, & cæt. ſimulque decem, quæ habebunt omnia latera prædictis æqualia, & ideo illis omnino æqualia erunt ex propoſ. 13. lib.1.



Probatur OH eſt ex conſtructione æqualis lineę GA, & ideo lineæ LHI verū SLI & AR lineę decagoni rectangulus verò apud L, aut A rectus, vt āgulus apud G. Ergo triangula LSH, & ARG, & FHG æqualia erunt. Quare baſes quoque erunt æquales SH, & RD, & FH. & ſic dicas de alijs. Cùm ergo omnia latera omnium triangulorum ſint ęqualia erit conſtitutum Icoſaedrum.

Probatur modo, quod ſphęra poſſit amplecti, quod conſequemur, ſi probauerimus lineas TS, & TR, & cęteras à puncto T biſariam SR partiēte procedentes ad angulos Icoſaedri, eſſe æquales. Nam tunc ſphæra omnes angulos continget.

Portio AL eſt latus Exagoni, quia radio ex AB æqualis, & LS decagoni ex conſtructione. Ergo ex prop.3, Tract.20. de circulo inſcriptis, erit diuiſa tota SA extrema, & media ratione, & LS minus ſegmentum, & medietas maioris TL. At ea pr.35. lib.6. Eucl. minus ſegmentum cum dimidio maioris poteſt efficere quadratum quintuplo maius, quam dimidium maioris. Linea verò TS eſt eiuſdem proprietatis. Nam quadratū AS, vtpote, quod ſit dimidio AT linea maior, vtpote æqualis ipſi AL eſt quadruplex ad quadratum lineæ AT. Vnde TB baſis rectanguli TAB poterit efficere quadratum equale quinque quadratis, quatuor cruris AB, & vni cruris AT. Quare poterit quintuplo magis, quàm AT. Vnde cum TS, & TR poſſint æqualia quadrata, nempe quintuplo maiora, quàm quadratum lineæ AT, inuicem erunt æquales.

Probatur deinde, quod tota RS æquet diametrum primæ fig. AB, & circuli ADB. Nam illa poteſt, vt iu notabili quintuplo magis, quam DB; talis verò conditionis eſt SR. Nam vt dictum eſt eius medietas poteſt quintuplo magis, quam medietas TL, & ideo tota SR quintuplò poterit magis, quam tota LA equalis ex conſtruct. Ipſi DB, & ideo eorum quadrata erunt æqualia, vnde, & ipſæ æquales.

Probatur tandem, quod latus Icoſaedri ſit linea irrationalis, quod ſufficit ſcire ne fruſtra laboremus ea nota diametro in inquirendo longitudinē illius adamuſſim, cum id fieri nequeat, quòd ſit, & potentia, & longitudine incommenſurabilis.

Nā vt probaui pr.19. tr.20. Latus pentagoni eſt incommenſurabile diametro, tùm longitudine, tùm potentiā; ſed diameter ſphæræ RS eſt potentia commenſurabilis diametro AB circuli, in quo inſcriptum eſt pētagonum, vt dixi, ergo latus pentagoni FR erit incommenſurabile quoque ne dum diametro AB circuli; ſed etiam ſphęrę SR, tum longitudine, tum potentia ex prop.7. lib.10. Elem.

COROLLARIVM I.

Hinc educitur ſphæræ circumſcribentis Icoſaedrum diametrum eſſe potentia quintuplum diametri circuli pentagonum ambientis ex cuius lateribus Icoſaedrum eſt conſtitutum.

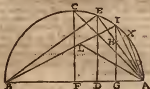
COROLLARIVM II.

Item colligitur ſphæræ Icoſaedrum ambientis diametrum eſſe compoſitum ex exagoni, & decagoni duobus lateribus circulo inſcriptis eodem, cùm AL ſit latus exagoni, at LS, & AR latera decagoni.

PROBL. II. PROP. XI.

Omnium latera corporum regularium eadem ſphæra deſcriptibilium exponere, & inuicem comparare.

Detur diameter ſphæræ AB, & ſemicirculus circa illum deſcriptus ACB; diuidaturque AB in tres partes, & ſit tertia pars AD, ex qua ducta ad diametrum perpendiculari DE, ducatur AE, & EB. Nam. Dico *primo* EB *latus eſſe pyramidis ſphæra deſcriptibilis*, cuius diameter AB.



Probatur. Quia ſit eadem conſtructio, quæ prop.6 h. & fig.1. conſequenter eā lineę quadratum erit ſeſquialterum ad quadratum AD, vt ex probat. tertiæ partis illius propoſ. conſtat.

Secundo ducatur à centro F perpendicularis FC, & ducatur AC, quam dico *eſſe latus Octaedri inſcriptibilis eadem ſphæra, cuius radius* SC.

Probatur. Quia eius quadratum ſubduplum eſt ad diametrum, & quadratum diametri duplum ei eſt, vt 11. propoſ. lib. 2. diximus. Ergo eſt latus octaedri, vt ex probat. tertiæ partis propoſ.7. h. conſtat.

Tertio dico AE *eſſe cubi latus eiuſdem ſphæræ inſcriptibilis*. Probatur. Quia potentia diameter

eſt

est triplus ad quadratum AE; Cùm enim ita sit basis AB ad latus minus AD, vt ipsa AB basis ad latus minus AD ob similitudinem triangulorũ ex prop. 16. ex at. lib. 6. erit quadratum diametri AB ad quadratum lateris AD, vt AB ipsa diameter ad AD; Est autem diameter AB triplus ad portionem AD; quare quadratum quoq; diametri triplum erit ad quadratum AE: quare AE erit latus cubi, cui triplus est diameter sphæræ circumscribentis, vt constat ex prop. 8. progr. 3. huius.

Quarto secetur latus AE extrema, & media ratione in H, eritq; maius segmentum latus AH dodecaedri, vt ex dictis prop. 9. huius constat.

Tandem quintò diuidatur AB in quinque partes, & sit quinta pars AG, & à puncto G ducatur ad diametrum normalis GI, nectaturque AI, & IB, assumaturque latus decagoni, & ei lateri decagoni sit æqualis IL, & ducatur AL, *quam dico esse latus Icosaedri eadem sphæra inscribendi*. Quia enim ex Coroll. propos. 4. lib. 6. AI, est media proportionalis inter AB, & GA, quod ita sit basis AB ad latus minus AI, vt ipsum latus, & basis AI ad latus minus AG, erit quoque quadratum primæ, & diametri AB ad quadratum mediæ AI, vt ipse diameter est quintupla lineæ AG; Ergo, & quadr. diametri AB ad quadr lateris AI quintuplũ. Vnde AI erit diameter circuli, in quo pentagonum describere oportet necessarium ad Icosaedrum constituendum in sphæra, cuius diameter AB, vt ex Coroll. propos. 5. huius constat, & quia latus Icosaedri ex æqualis quadrati potens; tum quadrato prædicti diametri AI, cuius circulus debet ambire pentagonum, tùm quadrato decagoni, consequenter basis AL in rectangulo AIL; potens, & quadratũ ex AI, & quadratũ IL erit latus Icosaedri.

Quod verò attinet ad comparationem, non possumus comparare; nisi trium figurarum latera ad diametrum cum Icosaedri, & Dodecaedri latera sint omninò irrationalia: quare posita diametro partium 6. in potẽtia, idest eius quadratum partium 6. Tetraedri latus erit partium 4. Item in potentia; Octaedri lateris quadratum partium 3. Cubi verò lateris quadratum partium 2. quæ ex præcedentibus satis constant. Ideoque posita diametro rationali, cætera quoque latera trium prędictorum corporum erunt rationalia; sed quia eorum quadrata non adipiscuntur eam proportionem, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, cum respectu numeri 6. nec 4. nec 3. nec 2. sit numerus quadratus, ideo omnia erunt longitudine incommensurabilia, nimirum latus Tetraedri, Octaedri, & Cubi; cęterorum verò corporum latera irrationalia.

THEOR. I. PROP. XII.

Præter prædicta quinque corpora non potest aliud corpus in sphæra inscribi, quod constet superficiebus æqualium; tum angulorum, tum laterum.

PRobatur ad solidi anguli constitutionem, tres saltem anguli plani requiruntur, qui tamen simul minores sint quatuor rectis, vt propos. 2. huius. Illi ergo anguli, qui ad angulum solidum alicuius figuræ circulo inscriptæ constituendum concurrunt, vel sunt triangularis superficiei, vel alterius superficiei V. g. quadratæ, pentagonæ, sexagonæ.

Si sunt triangularis, vel tres anguli concurrunt, & triangulum habent pro basi, & sit Pyramis, Triangula verò ęquilatera, & æquiangula angulos habent, qui sunt $\frac{2}{3}$ vnius recti, ex pr. 17. l. 1. Cor. vnde tres compositi, vt in Tetraedro faciunt $\frac{6}{3}$, Idest duos rectos vnde angulũ solidum constituere possunt, cũ sint minores, quã quatuor recti. Si quatuor sint erunt $\frac{8}{3}$, idest duo recti cum $\frac{2}{3}$, vt in octaedro; Si quinque erunt $\frac{10}{3}$, idest tres recti cum $\frac{1}{3}$ vnius recti, vt in icosaedro erunt minores adhuc quatuor rectis, vnde ad anguli solidi constitutionem poterunt deseruire, at si sint sex triangula ęquilatera, & æquiangula essẽt $\frac{12}{3}$ anguli omnes in vnum solidum conuenientes cum sint sex, & singuli æquant $\frac{2}{3}$ vnius recti, vnde simul erunt $\frac{12}{3}$, nimirum quatuor rectos æquabunt, vnde solidum angulum non constituent ampliùs, & tanto minùs si sint septem, vel octo.

At si sint anguli alterius figuræ cum minus, quam tres plani esse nequeant, qui solidum componant, oportebit videre an anguli illi simul sint minores quatuor rectis angulis, ergo rectus quadrati poterit deseruire, vt in cubo pro angulo solido, quia tres anguli recti non ęquant quatuor rectos. Sic tres anguli pẽtagoni, quia illi nõ sunt ex 32. l. 4. nisi $\frac{6}{5}$ vnius recti, vnde simul tres cõpositi facient $\frac{18}{5}$, nimirum tres rectos integros, & $\frac{3}{5}$ at si plures horum angulorum, quam tres vellemus componere æquarent, vel excederent quatuor rectos, vt in pentagoni angulis, essent etenim quatuor anguli $\frac{24}{5}$ nimirum quatuor recti, vnde angulum solidum non constituerent.

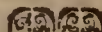
At angulus sexagoni triplex non potest concurrere ad angulum rectum constituendum, neque alterius figurę habentis plura latera, quam quinque quia angulus sexagoni æquat vnum rectum cum $\frac{1}{3}$, vnde tres compositi quatuor rectos æquarent, angulus verò heptagoni tantò est obtusior, vnde tantò minùs tres eius anguli solidum angulum constituent.

Quare poterunt quidem alia corpora sphęrę inscribi, sed diuersis superficiebus constantia V. g. quadratis, & triangulis. Triangulis, & pentagonis, & cęt. de quibus suo loco cum prędictorum corporum constitutione fundentur, non videtur hîc locus de ijs agendi sed singulari tractatu.

EXPENSIO VIII.

De corpore multarum faciarum in sphæra inscribendo.

AD cubandam sphęram Euclidiano modo oportet ostendere, quod sit possibile corpus inscribere sphęrę, quod non tangat intimæ sphęræ superficiem, quod alio pacto, ac Euclides præstabimus, simulque ostendemus segmentorum Inscriptionem, quod videtur pręsupponere Archimedeę sphęræ cubatio.



PROBL.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Inscribere in sphæra conorum segmenta, deinde tale multilaterum planis superficiebus constans, vt solum tangant, saltem iuxta aliquas superficies alterius sphæræ conclusæ superficiem.

SPæra exhibeatur ABPC, quæ concludat aliam sphæram KHF, & oporteat in ea describere corpus planis superficiebus opertum, quod tangat sphęrę cóclusæ KSHF superficiem. Diuidatur illud spatium in duas partes quascumque, & describatur OVLN intermedia sphęra radio maiori, quàm MX, deinde in hac intermedia sphera OVLN, segmenta tangentia intimá sphęram conorũ describantur. Hoc autem facilè fiet; si ducamus MF radium ad intimiorem sphęrã KFH, & ei erigamus tangentẽ LV, & à punctis V, & L ducamus quoscumque parallelos OV, & TL inuicem inæquales, & per centrum sphęræ, eorumque polos ex prop. 6. Tr. 21. p. 1 transeat axis MQ. Nam cum vnus parallelorum sit maior alter minor tangens VL ad axem eorũ inclinabit, & cum illo coibit in Q cũ non possit ipsi parallelã esse ob parallelorum, & ideo radiorum ipsorum inęqualitatem. Si ergo à puncto Q tanquam vertice linea QL intelligatur circumuerti circa parallelos VO, & LT, ex def. 1. tract. 24. describet conum, cuius frustum erit sphęra media OLVLN interceptum, & tanget in circulo EF parallelo sphęram intimiorem, vt ostendam.

Sic fiat de cęteris sphęrę partibus ducendo ęquales ipsi VL, vt est LN, & describantur per extrema L, & N pararalleli prędictis LT, vel VO, & cętera fiant, vt priùs. Et sic agatur de reliquis spatijs donec LV accómodari potest in semicirculo RVLN ab axe diuiso: quod si spatium residuum sit minus, tunc ducetur quęcumque V. g. RV, quę conũ pariter describet, sed non contingentẽ sphęrę intimioris superficiem, vtpote, quod VR minor ponatur, quàm LV, quę tangit.

Istis pręstitis intelligantur singulorum segmentorum conicorum bases, & paralleli VO, LT, & cęt. extenti secare quoq; superficiem sphęrę exterioris, & describere eam secando ex propos. 3. Tr. 21. p. 1. parallelos maiores DSC, & BYA. Describatur ergo circa quodlibet frustum coni multilaterum cõtingens, saltem quoad plures superficies, quod extimę sphęrę includatur superficie tali modo.

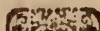
Ducatur MX radius ad sphęrę mediæ superficiem, & ei tangens CA. Per contactum autem X, & axem RP ducatur maximus circulus ex 16. Tract. 23. par. 1. & vbi secat parallelum VO in I erigatur alteri puncto I altera tangens YA, quę tangentes erunt parallelę, vtpote normales eidem plano circuli maximi RIX ex 7. tract. 23. Quare per illas planum AS transire poterit. Ductis itaque similiter alijs planis per tangentes cęteras sibi ęquales, vel minores, quando ęquales capere nequeunt in circulis parallelis singulis, donec in omnibus sint ductę, erit corpus circa quodlibet frustum conicum circumscriptum. Quod dico *tangere ad summum sphæræ intimioris XSHF superficiem.*

Probatur. Conicum frustum OVTL tangit ad summùm sphęrę intimioris superficiẽ KSHF. Nam VL frustũ recta circumducta formatur, quę circa parallelos VO, & TL gyratur, sed illa tangit in puncto E. Ergo etiam cęterę omnes ęquales interceptę inter parallelos circulos OV, & TL similiter tangent, cùm ęqualiter distent à centro M ex 16 lib. 3. omnium maximorum circulorum, & ideo ipsius sphęrę. Quod ostenditur alio modo. Nam per contactum E ducto parallelo FE ex axe QM descripto, hic erit in superficie conica, quę ęqualiter distat interuallo EZ radij à centro E, & axe suo MQ, & in superficie sphęrę, quę, & eodem radio EZ distat ab axe suo ZM. Quare erit parallelus EF in contactu conicę superficiei etiam intimioris sphęrę KFHS. Non potest autem tangere alibi, quia Conica superficies ex def. 1. Tract. 24. recta VL circumgyrata contexitur, quę tangit sphæram solùm in puncto F ex effectione.

Cum itaque superficies plana circumscripta Conicis segmentis ex 11. Tract. 24. non tangat conum, nisi penes lineam XE, quæ tendit à Q vertice, & tangit sphæram intimam tantùm ex effectione in puncto F sequitur, quod planum SA contingat sphæram intimiorem KFMS tantùm in puncto E, quod de alijs planis æqualibus fatendum est. Alia autem plana contingentia minora frusta conica, quę non contingunt sphæram intimam, neque ipsa contingent, & tantò minùs, si ea plana, neque contingant ipsa frusta conica, quę sphæram intimam, aut tantùm contingunt, aut nullatenùs contingunt.

COROLLARIVM.

COlligitur, quod eodem artificio poterunt sphærę circumscribi tum conorum segmenta, tum corpus quodlibet planis superficiebus constans, quod non tangat alterius sphærę circumambientis superficiem. Nam sphæra FHS est talibus superficiebus circumdata, vnde si inter sphæram eam circumdantem duę sphæræ ZAPC, & ELXO intercipi intelligantur, & eadem operatio præstetur corpus circumscriptum non tanget amplexantis sphærę maioris, quam ZDC superficiem cum illam tantùm tangat. Corpus verò conicum circumscribatur eodem modo, ac in propos. & si debeant segmenta conica adeo multiplicari, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem id efficietur, vt sequenti propos.



EXPEN-

EXPENSIO IX.

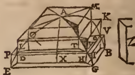
De inſcriptione, & circumſcriptione cylindrorum, vel quorumcumque aliorum corporum; donec relinquant quantitatem omni data minorem.

CYlindrorum, vel Parallelepidorum corporibus globoſis ſolidis circumſcriptio, vel inſcriptio neceſſaria eſt ad cubanda multa corpora talis rationis: quare hoc loco nacti ſumus opportunam occaſionem hanc doctrinam tractandi, in quo agitur de inſcriptione corporum regularium in ſphæra.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Cuicumque figuræ ſolidæ curuilineæ, vel mixtilineæ tot ſolida inſcribi poſſunt, vel circumſcribi, vt relinquant ſolidas partes omni aſſignata ſoliditate minores, ſi tamen concedatur illam ſoliditatem ad ad quamcumque baſim redigi poſſe.

SIt figura ſolida curuilinea ABCE. Dico illi tot parallelepipeda poſſe circumſcribi, vel inſcribi donec relinquant quantitatem omni data minorem. Sit data quantitas Z, quæ ſit eiuſdem baſis, ac EB, vel ad eam redigi poſſit, & diuidatur altitudo XA dati corporis BGAE in tot partes donec parallelepipedũ maius omnibus EV ſit minus quãtitate Z. Quod facile fiet ſi altitudo AX ſubdiuidatur in tot partes donec remaneat altitudo ſolidi EV, minor quàm altitudo quantitatis datæ Z, quæ conceditur eiuſdem baſis, vel ad eandem baſim redacta ſit, ac baſis EB. Quadere erit minus parallepipedum EV, quam quantitas data Z. Sed omnia ſolida parallepipedis cõſtantia, quę intus vacua ſunt, & ambiuntur circumſcriptis ſuperficiebus GP, & GV, & ex inſcriptis HD, & HO, & circumdant partim intra parti extra corpus ſolidum datum ABOE, vt EHV, cuius baſis EH, & HA, & LTK, & QTH ex conſtructione æquant EV ſolidum primum, ſiquidem vbi deſinit primum ſolidum maioris ambitus incipit ſecundi ambitus minor, & vnum intra aliud adaptari poteſt, Ergo omnia ſolida talia ſunt minora quantitate Z. Quamobrem tantò erunt minora quantitate Z ſolida, quæ tantùm circumambiunt, vel intus inſcripta ſunt, & corpori dato globoſo EACA extra remanent, vt extrinſeca GIV EPG, vel GHO EHD intrinſeca: quæ proximè dimidio minora, quam tota GHIYEDLP. Quod intellitur etiam ſi corpora ſolida circumſcripta annulis cylindricis conſtent, aut alterius cuiuſcumque figurę, vt ex te videre poteris.



TRAC-



TRACTATVS XXXIV.

DE SOLIDIS PARS PRIMA.

De solidis planis superficiebus contentis.



Visis corporum superficiebus, & eorum inscriptibilitate, modo ad ipsam corporum soliditatem est accedendum. Ordinique doctrinæ consentaneum fuit, vt priùs lineas, superficies, singulasque exteriores corporum figuras, quæ oculis statim obijciuntur, animaduersioni quoque primæ occurrerent, quàm corpora, quæ istis inuolucris contecta solæ menti peruios sinus admittunt, de quibus agit Euclid. 11. & 12. cuius præcipuas, & necessarias propositiones hoc Tractatu exponemus.

EXPENSIO I.

De Parallelepipedis.

PRima inter figuras solidas, & magis obuia est parallelepipedum; quod obtinet oppositos angulos æquales, & plana opposita æqualia, estque veluti frustum trabis parallelis sectionibus abscissum. Cùm ergo à notioribus omnis cognitio incipiat, per huius solidi cognitionem ad aliorum corporum soliditates hauriendas accessus erit.

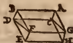
THEOR. I. PROPOS. I.

Si solidum parallelis planis contineatur, aduersa illius plana parallelogramma sunt æqualia, & similia.

SIt planum solidum contentum parallelis sex planis, nempe quatuor planis BH, FD, BC, & AH, & superficie superiori AD inferiorique CE. Dico primo *omnia plana; quibus ambitur esse parallela*.

Probatur. Terminantur etenim ex thesi planis parallelis superficiebus, ideoque sectiones ipsæ erunt parallelæ ex propos. 14. Tract. 22. Sic planum GE terminatur parallelis planis AF, & CE, necnon & parallelis planis AH, & BE, cùm ergo sectiones istæ terminent superficies solidum ambientes ipsa ex def. 35. Tr. 3 erunt parallelogrāma.

Dico 2. Quòd erunt æqualia parallelogramma aduersa. Quod patet: Nam cum aduersa plana vt BE, & AD parallelis secentur, & terminantur, & parallelogramma sint, oportet margines interceptos HG, & CA, sicut, & DE, BD esse æquales ex prop. 34. Elem 1. necnon eadem ratione GF, & AB sicut, & CE, HB, & CD: sunt autem quoque eiusdem altitudinis: quod sint inter parallelas æquales HG, & CA, ergo ex propos. 37. lib. 1 erunt parallelogramma æqualia.



Dico 3. Esse quoque similia. Quia enim latus CH est æquale lateri ED, & HG lateri FE: Ergo vt CH ad HG, sic DE ad FE proportionatum erit: Angulus autem H æquatur angulo E. Nam ductis GC, & FD diagonalibus diuident bifariam parallelogramma æqualia GC, & FD, ex 34. lib. 1. quare diagonales GC, & FD erunt æquales. Quapropter triangula CGH, & FDE erunt æqualia, cum latera, & bases, idest diagonales obtineāt æquales. Ideoq; angulus H æquabitur angulo E. Propterea que ipsa plana aduersa V. g. AH, & BE erunt similia, cum consequantur latera circa æquales angulos proportionalia.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIt solidum AE, cuius duo aduersa plana, vt GC, & FD plano GD secundùm lineas diagonales GC,

& FD secta sint. Dico bifariam illud parallelepipedum sectum esse.

Probatur. Duo prismata GFAD superius, & GECD inferius habent plana similia magnitudine, & multitudine equalia. Ergo ex def. 3. Tr.33. erunt inuicem æqualia.



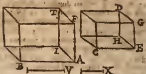
Patet autem prismata obtinere plana similia. Quia triagula CCA huius, & HCG alterius sunt æqualia, & similia, & alia duo triangula FBD, & EAD opposita similiter æqualia, similiaque sunt ex pr. 24. primi, vtpote, quæ in duo diuidant parallelogramma similia, & æqualia, vt supra ostensum est. Reliqua verò plana aduersa iam ostensa sunt æqualia, & similia EA plano AD, & AF plano CA; planum verò FOCG est cõmune: Ergo prismata erunt equalia, & similia CFAD, & GECD; cum constent planis æqualibus, & similibus.

PROBL. I. PROPOS. III.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile, similiterque positum parallelepipedum describere.

DEbeat à data linea AB describi parallelepipedum dato parallelepipedo CO simile, similiterque positum.

Fiat ad punctum A angulus solidus ex 5. Tr 33. æquale solido angulo E, ita vt tres plani anguli apud A sint æquales tribus angulis planis apud E; deinde ex 12. lib. 6. Elem. fiat, vt CE ad EG ita sit in proportione ad aliam quãdam V latus AB; fiatq; lineæ V æquale latus BA: deinde fiat, vt EG ad EH; ita proportionatum sit latus AF ad aliam quandã X cui fiat æquale AI, habebitque ex *equo* AI eam proportionem cum AB, quam EH cum EC. Reliqua verò latera aduersa istis fiant æqualia, & parallela & compleatur parallelepipedum; Quod dico esse simile parallelepipedo DC, & similiter ei positum.



Probatur. Quia singula plana parallelogramma singulis sunt similia ob æqualitatem angulorum, & laterum proportionem eandem, sic angulus GEC est æquale angulo FAB, & latus EC eiusdem proportionis est lateri AG, ac latus AB lateri FA, quare ex def. 1. lib. 6. erunt hęc duo parallelogramma GC, & FA similia, & idem argumentum est de parallelogrammo HC, & IB ob angulos æquales ex constructione HEC, & IAB, & latera proportionalia; quia enim EC est ad EG, vt AB refertur ad AF, & vt EG ad EH ita proportionatur AF ad AI argumentando ex *equo* ita quoque EC proportionem dicit ad EH, vt AB ad AI. Quare etiam hoc planum HC erit simile plano IB, & sic dicas de plano GH, quod eadem ratione assimilatur plano FI. Propter hęc & reliqua plana aduersa istis æqualia, & similia ex propos. 6. huius in parallelepipedo constructo erunt æqualia, & similia parallelepipedo dato. &c.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Solida parallelepipeda super eadem basi constituta, & eadem altitudine prædita, quorum insistentes lineæ in easdem rectas lineas terminent, sunt inter se æqualia.

EXibeantur duo parallelepipeda ABCD, & EFCD, quorũ basis sit eadẽ CD, & insistentes in basi lineæ GA, & GA, FB, & PF, &c. in eandem rectã ea terminẽt: Dico hæc parallelepipeda esse æqualia.



Probatur. Nam ex 35. lib. 1. Element. parallelogramma GAFB, & EGPF sunt æqualia, erunt ablato communi trapezio AGPB æqualia triangula GAE & PFB. quæ & sunt æqualia triangulis aduersis OIK, & LCH, vtpote residua æqualis trapezij HICD ab æqualibus parallelogrammis aduersis; sic BF æquale HE est ablato rectangulo IA communi. Quare cũ & planum DPAK sit æquale plano CG EH, & planum OLCH plano DPIA prismata PK, & GH conclusa dictis planis erunt æqualia ex defin. addatur ergo vtrisq; commune solidum trapezijs clausum ABCD, eritq; parallelepipedum ADCB, æquale parallelepipedo CNEF.

COROLLARIVM.

HInc emergit modus, quo facilè aliquod parallelepipedum æquale in basi, & in altitudine, sed dissimilis positionis ob inæquales angulos alterius anguli ad eandem positionem reducas nimirum faciendo eosdem angulos super eãdem basim intra eãdem altitudinem, sic parallelepipedum HKOD reducetur ad parallelepipedum AIGD; si pro angulo AGP fiat angulus EGP, & pro angulo AOC fiat EOC angulus.

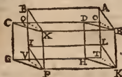
Quod si detur parallelepipedum ęqualis quidem sed dissimilis basis ob angulos parallelepipedo inæquales; sed omnino eiusdem altitudinis; eodem modo ad similem basim reducetur: Nempe intra easdem parallelas HB, & OP mutando angulos. Sic parallelepipedi HKGD basis statuatur HCDA æqualis basi LCDI; sed dissimilium angulorum, ad hoc, vt fiat similis basi LCDI, opportebit trahere latera HC, & KD; ita quod cum CD faciant eosdem ãgulos hocq; modo totum parallelepipedum æquale iam alteri quantitate, fiet etiam illi æquale in angulis.

THEOR.

PROB. IV. PROPOS. V.

Solida parallelepipeda super eandem basim constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia.

SInt duo parallelepipeda AKBF, & DGEF, quorum basi eidem planæ AF insistant latera ZA & ED, & ezt. licet in diuersas parallelas AB, & DC terminent. Dico adhuc ABBF, & DGEBhac esse inuicem æqualia.

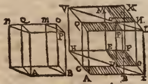


Probatur. Quia productis parallelis, ita vt se intersecent in T, V, O, Q puncta, & ductis lateribus punctatis fiet aliud parallelepipedum OVTF per insistentes rectis punctatas, quod erit æquale parallelepipedo AKEF ex præced. quod hæc duo super eandem basim EF insistant. & eorum latera vt FV, & FI, & ect in easdem parallelas terminent nempe in VA, sic ST, & KL terminat in TA. Rursus hoc parallelepipedum modo factum, erit æquale exhibito alteri DGEF, quòd quoque eius latera punctata, vt FV, & AT eijsdem parallelis TG insistant vt faciunt KH, & FG, & sic de alijs. Ergo duo parallelepipeda exhibita parallelepipedo effecto eidem OVTF erunt æqualia, & consequenter inuicem. Quod verò punctata latera faciant parallelepipedum, patet, quia in parallelarum communem intersectionem terminent, vt satis ex se quilibet comprehendere potest.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Solida parallelepipeda super æquales bases constituta, & æqualis altitudinis æqualia sunt inuicem.

BAses æquales, quæ exibentur, vel sunt diuersæ quidem figuræ, & inæqualium angulorum, vel sunt omninò eiusdem, vel sunt diuersæ figuræ, sed æqualium angulorum. Si sunt omninò similis, & æqualis figuræ, id iam patet ex propos. 4. & 5. idem enim est, quòd sit æqualia omnino, & similis, & quod eadem. Quæstio ergo est differentia figuræ, quæ si est, & inæqualium angulorum, vt sunt GOEF, & ABMO reducetur ad eosdē angulos ea Cor pr 4. vt OF, & super eam fit parallelepipedum eiusdem altitudinis, vt est ABOQ parallelepipedum, quod erit æquale exhibito iuxta ibi tradita. Collocentur ergo bases CB, & BN æquales, & iam similium angulorum tali modo, vt in angulo B se tangant, & latera CB, & DB in vnam rectam conueniant, & fiant recta CB. Nam, & in eadem rectam conuenient latera BD, & DA ob angulos æquales CDA, & BDG ex 14. lib. 1. compleaturque parallelogrammum AHIF, quòd poterit fieri ex prop. 24 lib. 6. cum bases nigræ sint, & æquales, & similes quoque ob æquales angulos. Deinde super eas compleatur totum parallelepipedum, vt vides, ducaturque planum VHIL per diagonios, & ex prop. 28. h. erit diuisum totum parallelepipedum in duo prismata æqualia VAL, & VEL sic etiam vt ex pr. eadem colligi potest prismata VCO, & VEN sunt æqualia, ob æqualia triãgula VMN, VQO, quibus sunt, planaque HAVM æquale plano QOCD, & QVCH æquale plano ONEM; planumque VMVO commune vtrisque prismatibus.



Idem dicas de prismate OBL, & OGL, quæ item sunt æqualia: Si ergo à prismatibus magnis VAL, & VEL æqualibus auferas primo duo prismata æqualia minora VCN, & VEN illud ab illo alterum ab altero, & rursus duo alia prismata reliqua, quæ item sunt æqualia OBL, & OGL hoc ab isto, aliud ab alio, reliqua ablatis æqualibus remanebunt æqualia, vt erant prius, & sic parallelepipedum QOAB remanet æquale parallelepipedo DANX super æquales bases, sed diuersæ figuræ. & sub eadem altitudine constituta, licet æqualium angulorum. Sed parallelepipedum OQAB est æquale parallelepipedo A a m n, cuius basis est inæqualium angulorum basi DEFG iuata Coroll. prop. 9. Ergo parallelepipeda habentia bases æquales, licet inæqualium angulorum, & differentis figuræ, & altitudines æquales, sunt quoque inuicem æqualia.

THEOR. VI. PROPOS. VII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo erit quemadmodum basis ad basim: ita solidum ad solidũ.

VSque modo egimus primo de proprietatibus parallelepipedorum, exinde de illorum erectione, & constructione, & tandem de eorum æqualitate, & inæqualitate, modo de eorum proportione agimus.

Sit itaque solidum parallelepipedum ACBN, quod plano MB secetur parallelo aduersis planis CA, & NA. Dico, quod sicut basis NC ad basim MO, ita solidum super primam basim constitutum ABCM, ad solidum super alteram basim erectam BAMD.

Probatur. Quia ita est prima quantitas ad secundam, vt tertia ad quartam in proportione ex 9. def. 11. 9. elem. cum primæ & tertiæ æquè multiplicia à secundæ & quartæ æquè multiplicibus in qualicumque multiplicatione, vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt.

Sit ergo prima magnitudo basis NC secunda altera basis MO tertia parallelepipedum ABCM quarta parallelepipedum BAMD; multiplicemusq;

primam magnitudinem, nempe basim CN in bases I, II, III, IV æquales, & faciamus super eas eiusdem altitudinis parallelepipeda, quæ æqualia erunt parallelepipedo AECM ex propos. 4. & 5. h. Sic secundam magnitudinem, nempe basim MO multiplicemus, faciamusque eI bases æquales 1. 2. 3.

& super eas parallelepipeda eiusdem altitudinis, nimirum æqualia quartæ magnitudini, & parallelepipedo EBMD. Cum ergo sint æquales bases I. II. III. IV. singulæ basi CN, & 1. 2. 3. singulæ basi NMBO, si ita multiplicentur, vt omnes bases I. II. III. IV. cum CN, idest NH euadant æquales basibus 1. 2. 3. cum MO basi acceptis, idest BN parallelogrammum. Etiam parallelepipeda I. II. III. IV. CK tertia magnitudo æquè, ac prima magnitudo basium suarum I. II. III. IV. multiplicata, idest parallelepipedum HE æquatur parallelepipedis 1. 2. 3. MD quarta magnitudo æquè, ac secunda basium 1. 2. 3. multiplicata, idest parallelepipedo BM ex prop. 4. & 5. h. cum parallelepipedum NB sit æqualis basis MN basi N3, & æqualis altitudinis parallelepipedi MX.

Ecce quomodò si æquales sint magnitudines æqualis quoque est multiplex primæ, & tertiæ, ac secundæ, & quartæ. Verum si minor sit basis primæ multiplex MH, quam basis NL secundæ magnitudinis multiplex, talis quoque erit tertia respectu quartæ, nempe parallelepipedorum. Sic multiplicata prima basis producit basim I. II. III. IV. minorem, quam basis 1. 2. 3. 4. & parallelepipedum quoque EH nempe tertia quantitas AECM, vt prima basis multiplicata, producet parallelepipedum minus, quàm parallelepipedum KL ex multiplicatione quartæ magnitudinis parallelepipedi ESMD consurgens.

Et ecce quomodo multiplex primæ, nempe bases simul sumptæ NH vna cum parallelepipedis simul sumptis EH multiplici tertiæ simul deficiunt, bases nimirum à basibus multiplicibus secundæ NL, & parallelepipeda à parallelepipedibus MK multiplicibus quartæ magnitudinis. Et idem dicas de augmento. Quapropter eandem dicent proportionem basis C N basi MO, sicut parallelepipedum AECM constitutum super primam basim C N parallelepipedo EBMD constituto super secundam basim MD.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

Parallelepipeda sub eadem altitudine constituta sunt inter se, vt bases.

SIt solidum cuius basis A, & solidum, cuius basis RB, quæ solida sint eiusdem altitudinis. Dico, *eadem proportione referri basis* A *ad basim* RB, *vt solidum super* A *ad solidum super* RB.

Quod vt probetur super rectam RS ex 45. lib. I. basis RO statuatur, ita angulata, vt basis BR, & æqualis basi A, erigaturque super eam parallelepipedum RT eiusdem altitudinis, ac parallelepipedum super BR, vel quæ est eadem super A. & iam ex præcedent. 6. propos. patet, quod parallelepipedum super basim RO est æquale parallelepipedo super basim A. Vnde

Ostenditur propositio. Ita se habet parallelepipedum RT ad parallelepipedum RX ipsi annexum, & faciens vnum parallelepipedum integrum SX cum ipso, ac basis RO ipsius RT ad basim RB ex præcedenti propos. Sed parallelepipedum RT est æquale parallelepipedo A, sicut & basis RO basi ipsius A. Ergo ita est parallelepipedum A ad parallelepipedum RX, vt basis A ipsius ad basim RB parallelepipedi RX.

THEOR VIII. PROP. IX.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SInt similia parallelepipeda TI, PN ex def. 2. Tr. 22. planis similibus conclusa, ideoque etiam bases KG huius, & TH alterius similes sint, & habeant homologa latera, sitque NT ad NK, vt NK ad NG. Dico *ea habere proportionem laterum* NT *ad* NK, vel NT ad NG *triplicatam*. quam explicauimus expens. 5. tract. 9. part. I.

Parallelepipeda se tangant in angulo N, ita vt in vnam rectam conueniant latera MN, & NQ, & latera KN, & NG, quod ob similitudinem basium ex contextu prop. 10. lib. 6. eueniet, siquidem anguli ad verticem N erunt æquales: Deinde compleatur basis BN, & super basim sit parallelepipedum eiusdem altitudinis KI, ac TI, & idem fiat super basim nigram KG; Eruntque quatuor parallelepipeda, nempe istud erectum super basim TH aliud super basim NB, tertium, & quartum habentia basim GX, quorum quodlibet suo collaterali erit, vt basis ad basim, cum sint eiusdem altitudinis, & basim habeant continuatam, & ideo, vt latus ad latus basium æquè altarum,

Prob. Latus NT ob similitudinem basium dicit proportionem ad NK, quam NK ad NG, ideoque

permutando

permutanda TN erit ad NK, vt NM ad NG. At ex 1.l.6. quam proportionem dicit latus TN ad latus NK illam dicit parallelogrammum, seu basis TH ad aliã NB, & quam latus TN ad NG latus, eam dicit NA basis ad BK nigram basim. Verùm ex 7. h. quam dicit HT basis ad basim NA eam dicit parallelepipedũ IT super HT ad parallelepipedũ KI super NB, & quam dicit basis NB ad basim nigram GK, eam dicit parallelepipedum KI super NB ad parallelepipedum NX super KG, & quam dicit parallelepipedum KT super BN ad aliud NK super GB, eam dicit HM altera basis eiusdem ad nigram GM ex 7. huius, & quam dicit HM basis ad GM nigram, eam ipsam dicit HN ad NG, & consequentar latus MN ad NQ latus, ex hypothesi. Quare & eamdem dicit basis nigra MB ad basim nigram QG, & consequenter parallelepipedum NX super GM ad parallelepipedum NP super GQ.

Igitur parallelepipedum NT super TH dicit eam proportionem ad parallelepipedum NP super basim GB, quam latus NT ad NK latus; sed non immediatam, sed triplicatã, nempe ter repetitã. Nam parallelepipedum TI super HT dicit ipsam proportionem ad aliud KT super NB, & ecce prima repetitio, & hoc ad aliud NX super GK, cuius altera basis est GM, & ecce secunda, & hoc tandem super MG ad parallelepipedũ NP super basim QG, cuius altera est GB, & ecce tertia repetitio. Ergo parallelepipeda habent laterum TN ad NK triplicatam rationem, ser ter continuè repetitã, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

EX hoc fit manifestum, quod si fuerint quatuor rectę lineę proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse solidum super primam ad solidum super secundam simile, similiterq; positum; Quia prima linea ad quartam habet rationem triplicatam ex def. 10. lib. 5. vt solidum habet ad solidum, & hinc etiam est, quod obtineant duplicatam rationem basium, cum bases sint, vt prima ad tertiam.

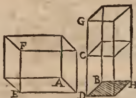
THEOR. IX. PROP. X.

Æqualium parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur illa sunt æqualia.

SOlida, quę exhibentur æqualia, si non sunt æquiangula, reducantur priùs iuxta Coroll. propos. 9. ad æquales angulos, & tunc exhibeantur.

Sint itaque duo parallelepipeda ęqualia, nempe vnum super basim AB, alterum super basim nigram DH æquiãgula, quę sint inęqualis altitudinis. Demattur altiori GC altitudo CD ęqualis minori altitudini EF, & fiat parallelepipedum depressius supra basim nigram DH nunc

Progress. 1. Probatur assumptum. Parallelepipedum super basim AE est ęquale altiori parallelepipedo OH super basim DH. Ergo ex 7. lib. 5. eodem modo in proportione se gerunt eidem parallelepipedo depressiori CH. Sed parallelepipedũ GH euectius dicit eam proportioné depressiori CH, quam basis GB basi CB ex 8. huius prop. & basis GB altari basi CB eam proportionem, quam altitudo DG altitudini DC ex 1. lib. 6. Ergo ita erit quoque parallelepipedum euectius GH parallelepipedo HC; velut altitudo GD altitudini DC.



Progr. 2. sed vt solidum ad solidum, ita est ex propos. 8. huius basis ad basim, si solida sub eadem altitudine existant. Ergo ita erit basis AE ad basim DH, vt parallelepipedum AF super AE ad parallelepipedum super DH eiusdem altitudinis, quod est CH. Sed vt dixi in principio probationis parallelepipedi AF super AE ad parallelepipedum depressius CH super DH ratio est illa ipsa, quàm parallelepipedi euectioris GH super DH ad idem depressius solidum CH. Ergo est illa ipsa, quam habet altitudo DG altitudini DC, vel æquali ex constructione altitudini FE, vt probaui in primo progressu. Ideoque reciprocè AE basis erit ad AH basim, vt GD huius altitudo ad EF altitudinem alterius.

Progr. 1. secunda pars. Nam dato parallelepipedo super basim AE, quæ sit ad basim alterius nigram DH, vt altitudo GD huius ad altitudinem FE alterius, & altitudines sint inęquales, abscindatur altitudo GD in C, & fiat ęqualis DC altitudini EF.

Prob. pr. ita est altitudo GD ad DC, vel ęqualẽ EF, vt basis EA ad basim DH ex Thesi. Vt verò proportione refertur basis EA ad basim DH, ita solidum super AE ad solidum HC super basim DH cùm ęqualis sint effecti altitudinis.

Progr. 2. Ex alia autem parte, vt est altitudo GD ad altitudinem DC, ita est basis GB ad basim CB ex 1. lib 6. Elem. & vt basis GB ad basim CB, ita solidum GH super GB basim ad solidum super CB alteram basim ex 7. huius, quia sunt eiusdem altitudinis; Ideoque iam eidem parallelepipedo CH super DH basim duo parallelepipeda eandem dicunt proportionem AE basis ad DH basim, parallelepipedum AF super basim AE ex 1. progr. & parallelepipedum GH super DH ex 2. progress. Idenque ex 7. lib. 5. inter se erunt ęqualia.

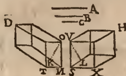
THEOR. X. PROPOS. XI.

Si tres rectæ proportionales fuerint; quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum æquale est descripto à media linea parallelepipedo, quòd æquilaterum quidem sit in se, æquiangulum verò prædicto.

SInt datę tres rectę A, B, C, & ex istis componantur parallelepipedum ND, in quo media B ęqualis sit NO. Ex qua huic ęquiangulum aliud parallelepipedum constituatur SH, cuius omnia

latera

latera sint equalia mediȩ B. Dico *quod hoc Parallelepipedum est æquale alteri* ND *ex tribus datis prius constructo*.



Probatur ex eo, quòd babeant basim VX basi OD ęqualem ex 14 lib.6. quòd VX basis contineatur sub media B, at OD sub extremis A, & C ex effectione. Et etiam ex eo quod habeāt altitudinē, quę mensuratur punctata VL ad angulos rectos ab V cadente in L altitudini alterius perpendiculari DK punctata in K angulos rectos efficiente dimetiræ æqualem. Quod enim perpendiculares punctatæ V, & O sint æquales patet ex 26. lib.1. quoniam angulus N est æqualis ex effectione angulo S, & K, & L recti, basis verò ex hypothesi VS basi NO est æqualis, quare triangula KON, VSL ęqualia, & ideo bases KO, & VL.

Cum ergo hæc parallelepipeda habeant bases, & altitudines æquales ex 11. huius erunt æqualia.

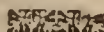
THEOR. XI. PROPOS. XII.

Si sint quatuor lineæ continuè proportionales parallelepipedum sub quadrato vnius extremæ, & altitudine alterius est æquale cubo mediæ proportionalis, quæ extremæ basim substernenti propinquior est.

Sint quatuor continuè proportionales ex prop. 2. Tr.15. A, B, C, D. Dico parallelepipedum EH scilicet ex EF, quadrato ex A, & altitudine D esse æquale cubo AO ex B. Vel si maius parallelepipedum ex quadrato D, & altitudine A lineę æquale esse Cubo ex quadrato lineæ C.



Probatur. Quoniam quadratum XF, ex A est ad quadratum OL ex B, vt A ad C ex 21. lib 6. ob similitudinem eorum, idest ex 21. tract. 16. vt B ad D, scito ęqualis ipsi B ad HF, erūt istis duobus solidis bases altitudibus reciprocè proportionales. Vnde ex ipsis A quadrato, & D altitudine constitutum parallelepipedum erit æquale AO cubo erecto ex B ex 10. huius.



THEOR. XII. PROPOS. XIII.

Si sint quinque lineæ continuè proportionales parallelepipedum erectum ex quadrato vnius extremæ tamquam basi, & altitudine alterius æquatur. Parallelepipedo erecto ex quadrato secundæ, & altitudine tertiæ.

Sint quinq; continuè proportionales A, B, C, D, X, & ex A quadrato eleuetur parallelepipedū ad altitudinem X, & ex B quadrato, & altitudine C illud constituatur. Dico ea esse æqualia.

Pr. Basis A est ad basim B, vtpote, quod sint quadrata, & ideo similia plana, vt A ad C tertiam proportionalem, vt autem A ad C sic est C altitudo huius, cuius basis B ad X altitudinem eius, cuius basis A, ergo. Bases, & altitudines reciprocantur. Ergo ex prop.10. h. erunt parallelepipeda æqualia.

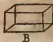
COROLLARIVM.

Hinc autem etiam est, quod, & si parallelepipeda non obtineant bases ex A, & B quadratas, sed ex quocumque alio rectangulo, dummodo sint rectangula similia, & similiter posita idem sequetur, quia etiam basis A ad basim B ex prop. 21. lib.6. erit vt A ad C, vt autem A ad C, sic est C altitudo, cuius basis B ad altitudinem, eius cuius basis A, vnde cum reciprocæ sint bases, & altitudines erunt æqualia parallelepipeda.

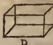
THEOR. XIII. PROPOS. XIV.

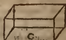
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis similiter, & similia describuntur proportionalia erunt, & si data Parallelepipeda proportionalia sint similia, & similiter descripta, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

Sint quatuor rectæ proportionales A, B, C, D, constituanturque super A. & B duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta: Item super C, & D duo alia similia inuicem, & similiter posita licet à primis A, & B similitudine discrepent; Dico *ita esse solidum* A *ad solidum* B, vt









soli-

solidum C *ad solidum* D.

Probatur. Quia proportio ipsorum solidorum ex 14. huius est in triplicata ratione suorum laterum, cum enim latus A ad latus B, sit, vt latus C ad latus D etiam triplicata lateris A ad triplicatam lateris B, erit, vt triplicata lateris C ad triplicatam lateris D, quæ proportio triplicata est solidorum, quæ super latera dicentia proportionem simplicem quodlibet erectum est.

Probatur secunda pars. Ponitur solidum A ex hypothesi dicere eam proportionem ad solidum B. quam C solidum ad D solidum; sed solida suorum laterum habent triplicatam proportionem, idest ter repetitam, ergo latus solidi A ad latus solidi B dicet proportionem simplicem eandem, quam dicit latus C ad latus D, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

A Modo, quo præcedens proposit. ostensa est, ne dum conuenit parallelepipedis, sed omni generi solidorum similium. Nam & ipsa dicunt triplicatã diametrorum aut laterum proportionem vt V. g. Prisma est dimidium parallelepipedi quare, & ipsa erunt in triplicata ratione suorum laterum, vt; omnia dimidia prismatum, vt infra, sic, & pyramides, vtpote quod quælibet sit tertia pars prismatis. Sic omne corpus ex quinque regularibus. si in libus, cum æqualibus pyramidibus constet, quæ sunt in triplicata ratione suorum laterum, vnde, & omnes pyramides vnius corporis solidi ad omnes alterius erunt in triplicata ratione lateris vnius pyramidis ad latus alterius.

EXPENSIO II.

De Prismatibus.

Breuis de Prismatibus Expensio erit, cum ea ferè omnia, quæ parallelepipedis conueniunt etiam prismatibus applicari, & de ipsis verificari possint, vtpote quod sint ipsorum dimidium.

DEFINITIO I.

PRisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum opposita sunt similia, & æqualia parallelogramma, alia verò opposita æqualia, & similia triangula, seu cuiuscumque figura.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Prismata triangulares habentes bases, & eandem altitudinem inter se sunt vt bases.

SInt duo prismata VCH, & FEDtriangulares super bases ACB, & DEF, & eiusdem altitudinis. Dico *esse inuicem, vt bases*.

Probatur. Nam talia sunt parallelepipeda, quorum medietates sunt; sed prismata sunt dimidium parallelepipedorum, sicut, & bases triangulares sunt dimidiæ basium parallelogrammarum, sed vt totum ad totum, ita est dimidium ad dimidium. Ergo dimidiatæ eam dicent proportionem, quam parallelepipedum ad parallelepipedum. Sicut, & dimidium parallelepipedorum ad dimidium eorundem. Ergo eadem quoque erit proportio dimidiatæ basis ABC ad dimidiatam basim EFD, idest triangularis, quam dimidiati parallelepipedi ACBV ad dimidium parallelepipedum EFDO, nempe prismatis ad prisma.



COROLLARIVM.

VNde prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases sunt æqualia. Sicut & prismata æqualia super æquales bases eiusdem sunt altitudinis, tandemque Prismata æqualia, & æqualis altitudinis, æquales quoque possident bases. Quia, & parallelepipeda prismatum eorum dupla, tales obtinent proprietates.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis; sed aliud super quadrangulam basim aliud super triangulam, & quadrangula sit dupla triangularis basis; æqualia erunt prismata.

SIt prisma ABCO quadrangulam habens basim OC, & aliud EFIVQ triangulam habens basim GIQ; quæ sit medietas basis CO. Dico esse æqualia ipsa prismata si sint æqualis altitudinis.



Ex prismatibus compleantur parallelepipeda, quæ dico esse æqualia ex prop. 4. huius. Quia bases erunt, vt ostendam æquales, & altitudo æqualis ex hypothesi. Bases autem erunt æquales, quia completo parallelepipedo basis triangularis GIQ fiet qudrangula GV, & sic duplicabitur. Vnde erit æqualis basi CO, quæ erit ex hypothesi dupla triangularis, cum ergo parallelepipeda sint dupla prismatum suorum in quæ diuiduntur, ipsa prismata ABCO, & EIFV quoque erunt æqualia.

THEOR. III. PROPOS. XVII.

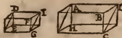
Similia prismata, quæ triangulares habent bases in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SInt similia prismata AAC, & DVH habentia triangulares bases BCL, & GFI. Dico, *quod hæc prismata sunt in triplicata suorum laterum ratione*.

Nam si compleantur Parallelepipeda AHIC, & DVFG sunt in triplicata suorum laterũ homologorum ratione; sed prismata sunt eorum dimidia. Ergo

ex prop.

ex prop. 8. lib. 5. Ergo, & ipsa sunt in triplicata suorum laterum ratione.



Cum autem prisma ACHA ad prisma DIGE consequatur proportionem triplicatam lateris LA ad latus IF; etiam consequetur triplicatam diagonalis LC ad diagonalem IC, quia ob similitudinem triangulorum LCB, & IFG, ita est diagonalis LC ad diagonalem IG, vt latus LB ad latus IF.

THEOR. IV. PROP. XVIII.

Æqualium prismatum reciprocantur bases, & altitudines; & quorum prismatum reciprocantur bases, & altitudines illa sunt æqualia.

Probatur ex dictis. Quia bases, & altitudines parallelepipedorum, quorum sunt medietates reciprocantur, & ita est basis A ad basim B, vt hęc



solidi altitudo in basi B ad solidi altitudinem in basi A, sed ità est totum ad totũ, vt dimidium ad dimidium, ergo, & dimidia basis A erit ad dimidiam basim B quales sunt bases prismatum, sicut altitudo solidi B ad altitudinem solidi super A. Pars étiam 2. prop. patet eadem ratione.

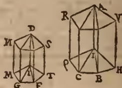
THEOR. V. PROPOS. XIX.

Omnia, quæ de Prismatibus triangulares bases habentibus ostenta sunt illa, & de cæteris verificantur.

Quæ dicuntur de prismatibus triangularibus, ea dicuntur etiam de prismatibus multilateribus V. g. pentagonis octagonis, & cæt. Quia ea omnia diuidi possunt in triangulata prismata, de quibus singulis eędem propositiones militabunt, Vnde, & tota ijsdem rationibus erunt obnoxia, vt patet.

Sic prismata ABH, & DNT pentagona, singula resolui possunt in tria prismata triangularia, quotum vnum est BCAI, aut IFUD, quę in eadem proportione erunt; qua bases, ita vt sicut se habet basis ad basim, sic se habet quodlibet prisma super eã basim, ad aliud super alterã basim. Nã V. g. basis HIB est ad basim BIC, vt prisma HIBV ad prisma BICA. Quare ex 18. l. 5. si componantur simul basis cum basi, & fiat basis HIBC hęc erit ad CIB simplicem, vt compositum prisma ex duobus HVAC ad simplex BICA: & quia basis simplex CIA est ad alteram simplicem ICQ, vt prisma simplex BICA ad

aliud simplex CQAR; erit quoque ex *æquo* composita basis HIC ad simplicem CIQ, vt prisma compositum VACIH compositæ basi iunixum, ad prisma ABICQ simplici iunixum. Quare *componendo* rursus tota basis ex tribus iam composita pentagona erit ad vnam basim CIQ, vt prisma pentagonum ad prisma simplex QIRC.



Progr. 2. Et idem filosofandum de altero prismate pentagono TMD, quod nempe sit pentagona basis ad simplicem aliquam TIF, vt prisma pentagonum ad simplex TFID.

Progr. 3. Iam habemus basim pentagonam ad simplicem triangularem comprehensam QIC dicere eam proportionem, quam pentagonum prisma ad triangulare comprehensum CQIR. Sed basis QIC ad basim alterius prismatis triangularis TFI, ita prisma in ipsa iunixũm ICQR ad prisma in hac situm TIFS; Et vt hæc basis simplex ad pentagonam; qua clauditur, ita hoc prisma simplex ad pentagonum TMD, cuius est pars, ex secundo progr. Quare ex *æquo* ita erit pentagona basis HIQ ad pentagonam basim TMI. Vt pentagonum prisma AHQ ad pentagonum prisma DTM.

COROLLARIVM.

Hinc est. Quod si daretur prisma pentagonum, & aliud triangulare idem esset argumentum. Nam ostensum est Pentagonam basim HIQ esse ad simplicem IQC, vt prisma pentagonũ AHQ ad simplex triangulare ICQR, & esse b simplicẽ QIC triangularẽ ad basim item triangularem TIF, vt prisma in ea situm CIQR ad prisma in hac collocatum STLF, quare ex *æquo* Ita erit pentagona basis HQI ad triangularem TLP; vt prisma pentagonum AHQ in peotagona basi positum ad hoc prisma SDTF in triangulari situm, quod si prisma triangulare ad aliud obtineat triplicatam proportionem etiam multilaterum ad aliud multilaterum, quorum sunt partes obtinebunt triplicatam proportionem, vt est in fig.



EXPEN-

THEOR. VI. PROPOS. XX.

Prisma ad prisma æquales basis se habet, vt altitudo ad altitudinem.

Detur prisma ABHT si basis HO non est normalis, talis fiat ex Cor. pr. 4. h. & alterius DCTB basis DBT, si non est similis basi AOH similis fiat, & eum ex Thesi sit æqualis ei erit DT æqualiũ laterum ipsi AOH. Eruntque prismata eiusdem altitudinis HO, vel BT. Quare inuicem referentur, vt bases ex pr. 15. h. AB, & DC. Sed AB ad DC est vt latus HB ad BC ob æqualem altitudinem TB. Ergo prisma AOHT ad DBCT erit, vt HB altitudo ad BC altitudinem.

EXPENSIO III.

De Pyramidibus.

Soliditas pyramidum paulùm captu difficilior, sed quæ viam sternit ad sphæræ corporumque sphæroicorum soliditatem inueniendam.

THEOR. I. PROPOS. XXI.

Omnis pyramis triangularis diuiditur in duas pyramides triangulares æquales, & similes inter se, & etiam toti similes, & in duo prismata æqualia per bifariationem omnium laterum. Prismata sunt æqualia quoque prismatibus alterius pyramidis in æquali basi, quoad aream, & vnum latus, quæ sit eadem altitudine prædita.

Sit pyramis BACI. Dico diuidi in duas pyramides æquales inuicem; similes, tum inter se, tum toti: quod fit diuidendo singula latera in C, H, K bifariam, & basis etiam latera in B, & F, sic enim ductis lateribus puncta connectentibus erunt factæ duæ pyramides GKHA, & KEIF, quæ erunt æquales, & similes inter se.

Probatur. Quod sint compositæ ex cruribus parallelis cruribus primæ pyramidis, & ideo quod eiusdem angulis polleant ex propos. 30. lib. 1. & æqualibus cruribus; sic crus HA est æquale cruri EK, quod sit æquale cruri HC, eo quod sit inter parallelas HK, & FC, quod crus HC, vtpote medietas est æquale cruri AH. Sic GH est æquale cruri BF: eò quòd ita sit AH ad HO, vt AC ad CB, & quia AH est dimidium cruris AC, etiam GH erit dimidium cruris BC, & tale quoque erit BF eodem argumento, quod sit TF ad FB, vt TC ad CB, at TF est ex effectione medietas cruris IC ergo etiam BF cruris BC.

Et sic argumentare de alijs & idem potes philosophari de angulis; Sic angulus AXH est æqualis angulo KIF ex prop. 30. lib. 1. Elem. ob bases parallelas GHK, & BIC, & sic de alijs, Vnde pyramides erunt æquales, & similes inuicem, & etiam totis similes ijsdem argumentis.

Prob. etiam. Quod diuidatur in duo prismata. Nam diuiso latere BC in D, & ducta HD, & ED, duo prismata erunt completa, nempe GHE BDF super basem triangularem BDO, & prisma KBF HOC super basem quadrangularẽ FCDE, quæ CDEF est dupla basis BDF, & ideo cum sit eiusdem altitudinis ex propos. 19 h. prisma triangularis basis erit æquale prismati quadrangularis basis.

Dico tandem hæc quoque prismata BGDKH, & BDFCXH esse æqualia prismatibus NPOSRT, & POQMVT alterius pyramidis æqualis basis, quoad aream NRM areæ BIC, & latus NM lateri BC, & eiusdem altitudinis MZ, ac CY, similiter diuisæ.

Probatur. Nam triangula BIC & RMN in pyramidibus dissimilibus, quarum apices A, & L sunt necessariò inter parallelas, cum ex hypothesi sint æqualia ex pr. 39. l. 1. Cor. & habeant æqualem basim. Quare si diuidantur latera RN, & RM, & NO bifariam in P, Q, & O linea PQ erit æqualis lineæ EF ex ratione præcedenti, eo quòd DC, & OM sint æquales, vtpote dimidiæ æqualium BC, & MN, & EF, & PQ sint eis æquales, vtpote inter parallelas BO, & FC; necnon, & inter OP, & MQ. Quare ex 13. Tract. 29. trapezium OPQM erit æquale trapezio EDFC: quare erunt eiusdem altitudinis. Quapropter triangulares quoque bases NPO, & BBD erunt eiusdem altitudinis; basis verò BD æquatur basi NO æqualium BC, & NM dimidiæ. Quamobrem sunt quoque æqualia triangula NPO BBO. Altitudo quoque prismatum est eadem ob triangula DHC, & OTM æqualia ob æquales bases DC, & OM, & æqualem eleuationem, vtpote eleuationis dimidiæ Pyramidum æquè altarum. Ergo Prismata GEHBBD, & SVTNPO, necnon, & BDCFHK, & PQMVT erunt inuicem æqualia ex prop. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Pyramides triangulares æquali basi prædita vt priùs, & in eadem altitudinem eleuatæ sunt inter se æquales.

Sint duæ pyramides, in præced. fig. quarum vertices æqualis perpendicularis altitudinis sint A, & L; bases verò æquales, & triangulares etiamsi dissimiles BIC, & RNM. Dico pyramides esse quoque æquales.

Probatur. Nam si differunt hæc erit maior altera. Minor assignetur, & sit A minor pyramide L quantitate V. g. X. Ablatis ab ea prismatibus duobus, & ab L etiam prismatibus suis prædictis æqualibus remanebunt duæ pyramides ABKH, & KEIF in A æquales inuicem, similesque toti A, duæ pyramides in L similes toti, & item æquales inuicem LSVT, & VRPQ. Ab eis ergo prismata æqualia quatuor hinc à pyramidibus in A, & quatuor inde à pyramidibus in L demantur, quæ ob eandem rationem præc. prop. erunt æqualia inuicem: Et residuæ erunt Pyramides eiusdem speciei, ac priores à quibus æqualia item prismata poterunt resecari.

Id ergo fiat demendo à singulis æquis vicibus, donec in minore A remaneant adeo paruæ pyramides, vt omnes simul sint proximè minores differentia Z, ita quod residuum in L quod semper est maius residuo in A, ablatis vtrique æqualibus sit, aut maius, aut æquale differentiæ X. Quod si ablatio omnium prismatum ab omnibus pyramidibus esset nimia ab vna, aut duabus pyramidibus, tum residuis pyramidis A, tum residuis Pyramidis L detrahan-

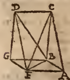
trahantur, aut prisma, vel dimidium, vel triens prismatis vtrinque. Ab istis itaque pyramidibus maioribus differentia x reliqua prismata auferantur, donec prismata tot sint, vt æquent differentiam x, vel superent. Id enim fieri potest, cum hę pyramides in L residuæ fuerint maiores, vel ęquales differentiæ x. Quia itaque à pyramidis minoris A residuis pyramidibus tot prismata prædicta pyramidis L ęqualia prismatibus auferri possunt ex pręc. demantur tot vicibus quot à residuis pyramidibus pyramidis maioris L ablatum est. Et tunc à pyramidibus minoribus, quam quantitas x Auferretur, aut magis, quàm quantitas x, aut quid ei æquale, quod est absurdum, non erit ergo minor pyramidis A pyramide L, sed ęqualis.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Omne Prisma triangulari basi innixum diuiditur in tres pyramides æquales triangularibus basibus fultæ.

*Sit prisma CDBF triangulares possidens bases ABG, & FGD: cuius parallelogramma ambientia tribus diametris BF, & CF, & DA secentur. Dico in tres pyramides esse diuisum ABCF, & BDFC, BDCF, quas dico æquales esse inuicem.

Probatur. Quia Pyramis ABFC habet æqualem basem ABF, basi BFG pyramidis FBGD ex 34. lib. 1. El. ob diagonalem BF, æqualem verò altitudinem, quòd terminent in eandem parallelã DC basi GB. Ergo erunt ex pręc. inuicem ęquales.



Prngr. 2. Pyramis verò CDFB habet quoque verticem in eodem puncto F, quo altera prædicta FBGC, & habet basem CDB illius basi BGD ob diagonalem BD ex 34. lib. 1. æqualem: Ergo, & istæ sunt æquales nimirum FBGC, & CFBD: sed FBDC erat æqualis primæ propositæ CB A. Ergo omnes sunt æquales.

COROLLARIVM.

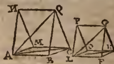
Hinc enascitur quamlibet pyramidẽ esse tertiã partem prismatis, quod eandem cum ea habeat basim, & altitudinem, seu prisma tale pyramidis in illo contentæ triplum esse.

THEOR IV. PROPOS. XXIII.

Similes pyramides, quæ triangulares habent bases in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

*Sint pyramides BCAQ, & FLHG similes, sitæ in basibus triangularibus BCQ, & FHG. Dico pyramides ipsas esse in triplicata homologorum laterum BQ, & FG ratione.

Fiant ex illis prismata MAN BCQ, & OLP FHG, quę ob pyramides similes erunt, & ipsa similia. Nam planum BMAC, & LOFH faciet cum BQC, vel FGH plano eundem angulum, vt faciebat priùs, cùm erat triangulare, & idem dicas de alijs; quare similia omninò erunt prismata BCN, & FHP, propter oppositos angulos æquales oppositis ob laterum ęqualitatem, & parallelismum denuò ductorum priùs ductis lateribus.

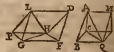


Probatur propos. prismata sunt ex dictis in triplicata suorum laterum ratione. cùm sint similia; sed pyramides in eadem proportione sunt, cùm prismatum tertia pars sint ex propos. 18. lib. 5. El. Ergo erunt, & ipsę in triplicatą suorum homologorum laterum ratione.

THEOR. V. PROP. XXIIII.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangularibus basibus prædita inuicem sunt, vt bases.

*PRob. Nã sũt tertia pars prismatis, quod super earũ basim inscriberetur. PFD CQN. habent verò eandem altitudinem, & eandem basim, vt in pyramide ABCQ, & GPHL patet. Quare cum tertia pars ad tertiam partem habeat eandem proportionem, quam totum ad totum ex prop. 18. lib. 5. quę sunt prismata sub eadem altitudine eorum basibus innixa NCQ, & DFP, & prismata inuicem sint ex prop. 15 b. vt bases; Pyramides quoque eandem proportionẽ; quam bases consequentur ex 18. l. 5.



THEOR. VI. PROPOS. XXV.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines.

*Sint duæ pyramides ABCD, & FGHI, quæ habeant bases triangulares CBD, & GHI. Dico earũ bases, & altitudines reciprocari. Nam possident eandem altitudinem, & basim, quam prismata GKFI, & CDAL. Sed prismatum propos. 18. h. vt dictum est bases, & altitudines reciprocantur. Ergo pyramidum quoque, quæ sunt tertia pars prismatis ex 21. h. bases, & altitudines reciprocabantur: & ita erit basis CBD ad basim GHI, vt altitudo IF ad altitudinem DA.



CO-

COROLLARIVM.

HInc elicitur nempe à tots capenſ. paſſim quòd idem dicendum ſit de pyramidibus, quarum baſes plura latera numero çqualis poſſideant, quàm tria. Nam eu reſolui poſſunt in tot pyramides triãgulares V.g. pyramis ſexagona reſolui poteſt io ſex pyramides, quę erũt tertiu pars ſuorum priſmatum; quare pyramis ad pyramidem æqualis altitudinis eam habebit proportionem, quam baſis ad baſim, & ſi baſis erit çqualis, & æqualis altitudo pyramidea quoque erunt æquales, ut ſi ſint inæquales baſi ſolùm, eſſent vt baſes, ſi altitudine tantùm, erunt vt altitudines ſi prorſùs inæquales, ut ſimiles in triplicata ſuorũ homologorum laterum ratione. At çquales, ſi altitudines, & baſes reciprocentur. Quod verò omnes pyramides reſolui poſſint in pyramides triangulares patet, quia baſes poſſunt diuidi in triãgula V g. VQC, ILX, & in triangula TQS, & FXO, & per lineas rectas, centraque triangulorum QS, & QT, vel XF, & XO, & per v. rtires S, & A plana agi queunt. quæ vtique pyramides triangulares efficient QTPA BXOP, & reliquas.

THEOR. VII. PROP. XXV.

Fruſtum quadrangulæ pyramidis parallelis baſibus abſciſum, eſt æquale parallelepipedo baſim habens comprehenſam duobus lateribus, quæ ſingula conſtent ex latere minoris baſis, & ſemidifferentia homologorum laterum, & trienti parallelepipedi in baſi ſiti à ſemidifferentia eorundem laterum comprehenſa, quæ omnia ſint eiuſdem altitudinis.

*SIt fruſtum pyramidis ABC cuius baſes quadrangulæ ſemibaſis ſuperior AT, inferior, BC; differentia homologi lateris AE ab homologo latere CS ſit aH, & tota ſit CP cum HS: Sic ſemidifferentia homologi lateris ST ab homologo latere HN ſit KH, & tota ſit KH cum MN.

Dico igitur. Quod parallelepipedum ex baſi YS, ex vno latere HP, & HS; alio NK, KH, & altitudine KE pyramidis conſtans vnà cum triente parallelepipedi in baſi MK ſiti, & eiuſdem altitudinis eſt æquale fruſto pyramidis SA. Cadant igitur ſuperficies I M, & KA, & aliç normales ipſi in planum CS, & fuciant parallelepipedum MA, intelliganturque extenſæ, vt ſecent ſuperficies fruſti pyramidis, & ſint HETN, & IKAO, & cęt. Igitur diuident fruſtum pyramidis in parallelepipedum AM exiſtens in medio, & duo priſmata æqualia KA, & NE, quæ ſimul vnita conſtituent parallelepipedum baſis KP, & altitudinis YE, & duo IT, & YA çqualis tũ inuicẽ, tum prędictis, quod ſint ſuper baſes æquales MI ipſi KP, vtpote complementa circa diametrum, & YO ipſi YN, vnde & ipſa vnita conſtituent parallelepipedum æquale priori baſis MI, & altitudinis YU. Tandem conſtituent quatuor pyramides, vt MNBT, & alias ex angulis conſtitutas, quarũ ſingulæ eſſent duo trientes priſmatis, ex baſi MB in altitudinẽ MT conſurgentis ex Cor. propoſ 88. p. 1.; & ideo trient parallelepipedi eadẽ baſi MB ſiti eandẽ altitudinem habentis. Itaque tres pyramidea facient parallelepipedum HS in altitudinẽ KS, vel YX: Duo priſmata KP; & NE efficient parallelepipedũ ex baſi KP, & altitudine KE. Duo autem priſmata OX, & MU conſtituent parallelepipedum eu baſi MI, & altitudine UY Ideoque cum parallelepipedo medio YS conficient totum parallelepipedum BA ſitum ſuper baſim parallelogrammũ YS, quę eſt ex latere PH vna cum ſemidifferentia HS pro vno latere, & pro alio MK cum ſemidifferentia KH pro alio latere, cui ſi addas pyramidem MBT, ideſt triens parallelepipedi ſuper baſim MB altitudinis MT erit fruſtum pyramidis parallelis baſibus conſtantia æquale illi parallelepipedo ex baſi YS ad altitudinem UK eucćto vna cum triente parallelepipedi baſis MB ad altitudinem eandem MT eleuato, quod erat probandum.

COROLLARIVM.

*PYramidis triangularis fruſtum eſt æquale priſmati triangularis baſis V.g ſemibaſis TY, quæ conſtituatur ex latere PH minori, & ſemidifferentia SH pro vno latere, & pro alio ex alio minori MK, & ſemidifferentia KH, & triente priſmatis eu baſi, cui ſemidifferentię prędictę KH, & HS latera prętent. Quia fruſtum illud Pyramidis erit dimidium fruſti baſi quadrata ſub iiſdem lateribus, & angulo comprehenſi, ſicut priſma baſi triangulari ſitum eſt dimidium parallelepipedi baſis quadratę ſub eodem angulo, & lateribus comprehenſæ, dummodo omnia in æqualem altitudinem ſint eleuata.

TRACTATVS XXXIV.

PARS SECVNDA.

De soliditate corporum curuorum.



Xpedita soliditate corporum planis superficiebus contentorum restat, vt curuis planis contenta corpora videamus illa verò sunt in triplici differentia alia, quæ continentur, curuis quidem, sed rectilineam habent basim, vt fornices quadrati, alia quæ curuis superficiebus, sed rotundam, & planam basim continent, vt coni, & cylindri, alia sunt, quæ superficie omnino curua absque vlla admixtione planitiei consequuntur, vt sphæræ, & sphæroides.

EXPENSIO I.

De Cylindris, & Conis.

POst corpora, quæ planis superficiebus continentur, succedunt mixta, quæ superficie curua altera, aut duabus planis constant, inter quæ præcipua sunt coni, & cylindri, de quibus, & soliditates, & soliditatum proportiones sunt indagandæ.

THEOR. I. PROPOS. I.

Sicut se habet basis triangularis inscripta sectori in proportione ad sectorem, ita prisma rectè in basi collocatum ad corpus solidum in sectore normaliter existens, eandemque cum prismate altitudinem possidens.

SIt basis triangularis KML inscripta sectori KML super quam sit prisma KLMQ, sectorq; KML, super quem ad eandem altitudinem corpus sit triangulare velut prisma, sed rotundæ superficiei LMKQ, quod apellabimus sectorem solidum. Dico, quòd sicut est basis triangularis LMK ad sectorem planum LMK, ita est prisma LKMQ in basi prædicta ad sectorem solidum LMKQ.



* Probatur. Nam, si sumantur æque multiplices basis, vt LMN, NOL, & sectoris item LNO, LMN; superque bases fiant prismata sua, & super sectores planos sectores solidi sub eadem altitudine. Prismata erunt æqualia inuicem ex pr.15.cor.pat.1 h.nec non, & sectores solidi MNLQ, NOLQ, KLMQ; quia, vt patet, continentur, tum prismata inuicem, tum sectores solidi inuicem superficiebus æqualibus, & similibus planitie, & numero ex def. Tract.33.

Si ergo crescent bases triangulares prima quantitas magis, quam sectores plani secunda, crescet & tertia, nempe crescent prismata magis, quam sectores solidi quarta quantitas. Si verò velibet multiplicentur bases triangulares prima quantitas, & æquet secundam quantitatem sectores; prismata quoque tertia quantitas, nempe velut bases basibus, reperientur æquales quartæ quantitati, nempe sectoribus solidis, quod si prima quantitas multiplicata sit minor nempe bases, quam sint sectores plani secunda quantitas, vt vt multiplicati, erunt quoq; æque, ac bases suę multiplicata prismata tertia quantitas minora, quã sectores solidi quarta quãtitas multiplicata, vt sectores.

Crescentibus itaque basibus crescunt prismata decrescentibus decrescunt, & cum equales sunt equantur illæ cum sectoribus planis, hęc cum sectoribus solidis, vnde ex 9. def. Tr 9. inuicem dicent proportionem, & ita erit basis triangularis ad sectorem planum, vt prisma ad sectorem solidum.

THEOR. II. PROP. II.

Sicut se habet basis triangularis ad sectorem planum, ita se habet pyramis in basi sita ad portionem coni in sectore constitutam; dummodo æqualem possideant altitudinem, & coni sint recti.

* HÆc propositio ostenditur, vt antecedens. Nam supposito cono recto portiones omnes coni, quę super sectorem planum fiunt, sunt similes, & æquales V.g. IMKQ, INMQ, OINQ, &c. quod ex def. superficiebus similibus, æqualibusq; & numero equali contineantur; sicque pyramides QIMK, MINQ, NIOQ, & cęt. factæ super bases triangulares in sectoribus inscriptas inuicem erunt æquales ex prop.20. Tr.h.pa.1. quare si bases multiplicentur, ita quod superent sectores, pyramides

quoque

quoque ita erescent, vt superent portiones conorum: Si verò bases triangulares ita multiplicentur, vt minus sint, quàm sectores, erunt quoque pyramides, minus quàm portiones conorum: Si tandem ita augeantur equè multiplices bases, vt adequent sectores; pyramides quoque æquabunt portiones coni: quare vt est basis pyramidis ad sectorem planum, ita pyramis ipsa ad portionem coni recti super sectorem eleuatam in æqualem altitudinem.



COROLLARIVM.

* Hinc eruitur ita esse circulum ad multilaterū sibi inscriptū, sicut conus in ipso locatum ad pyramidem in multilatero constitutam, nam cum diuiso circulo in tot sectores inuicem equales in quot triāgula æqualia basis multilateri inscripti diuisa est, ita erit quodlibet triangulum IMB ad quemlibet sectorem circuli, vt quęlibet pyramis colocata in triangulo ad quemlibet sectorē conicum æquè, ac pyramides eleuatum. Ergo etiam omnes ita se habebunt ad omnes ex 17. lib 5. & omnia triangula multilateri, idest multilaterum ipsum ita se habebit ad omnes sectores numero ęquales, vt pyramides in triangulis sitas ad sectores solidos conicos in sectoribus planis locatos.

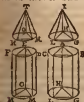
Et idem dicendum est de prismatibus, quæ sint ad cylindros, quibus inscripta sint, vt bases triangulares prismatum in sectoribus inscriptę ad circulum qui basis cylindri est, vt ex prę. propos. eodem argumento colligitur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Coni recti, seu Cylindri eiusdem altitudinis, & diuersæ basis sunt inuicem, vt bases.

Sint Coni GILH, & MDNT, vel cylindri BACGHL, & DFSMON recti sub eadem altitudine, sed diuersę basis GHL, & MON. Dico esse ad inuicem in proportione, vt bases. & ita referri conus GHLI ad conum MTON, vel cylindrus BACGHI ad cylindrum DFSMON, vt basis GHL ad basim MON.

* Probatur. Nam ex propos. 40. & 41. lib. 6. ita est circulus GHL ad circulum MON, vt multilaterum GHL ad multilaterum MON, ideoque *conuertendo* circulus GHL erit ad multilaterum GHL, vt circulus MON ad multilaterū MON, sed vt circulus GHL est ad multilaterū GHL, sic cylindrus CABLHG, seu conus ILHG ad prisma AGHL, seu pyramidē IGHL ex s. h. & vt basis circulus MON ad multilaterū MON, sic Cylindrus DFB MON, seu conus TOMN ad prisma E MON, vel pyramidem inscriptam TOMN: Ergo ex propos. 16. lib. 5. ita erit cylindrus BACGHL ad sibi



inscriptū prisma AGHL, vt cylindrus DFB MON ad prisma sibi inscriptum EMON. Quare *conuertendo* ita erit cylindrus BAC GHL ad cylindrum DFB MON, vt prisma inscriptum AGHL ad prisma inscriptum EMON; sed prismata se habent ad inuicem, vt bases ex prop. 33. par. 1. h. Ergo etiam cylindri.

Et sic quoque erit conus IGHL ad pyramidem inscriptam sibi IGHL, vt conus MTON ad inscriptam sibi pyramidem TMON. Quare pari modo *conuertendo* ita erit conus IGHL ad conum MTON, vt inscripta pyramis IGHL ad inscriptā pyramidem TNOM; sed inscriptę pyramides sunt inuicem, vt bases ex prop. 33. p. 1. h. Ergo etiam coni se habebunt ad inuicem, vt bases.

COROLLARIVM.

* Hinc est. Quod si Conus, & Cylindrus sit pyramidi, & prismati æqualis basis, & eiusdem altitudinis sit ei ęqualis. Quod patet ex Cor. p. s. h. Nā ita est cylindrus, & conus ad prisma, & pyramidē sibi inscriptā, vt basis coni, vel cylindri ad basim prismatis; vel pyramidis inscriptę, si sint ęqualis altitudinis; sed prisma, vel pyramis inscripta ad prisma aliud, vel pyramidē Z eiusdem altitudinis, & æqualis basis O illi circulo, qui basis est coni, vel cylindri, est vt basis sua inscripta circulo coni, vel cylindri ad basim O ęqualē circulo qui est basis cylindri, vel coni Z. Basis autem inscripta ad basim coni, vel cylindri, & ad basim O huic æqualē eandē vtpote ad ęquales dicit proportionem. Ergo etiam prisma inscriptum cylindro, vel pyramis cono inscripta ad conum, vel cylindrum suum, & ad prisma, pyramidemq; Z æqualiū basiū eandē proportionem dicet; quare ex 7. lib. 5. erunt prisma, vel cylindrus æqualium basium, & eiusdem altitudinis, sicut etiam pyramis, & conus æqualis.

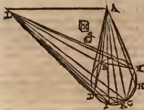
THEOR. IV. PROPOS. IV.

Coni, seu recti, seu scaleni, sicut, & cylindri in æqualibus, seu in eadem basi constituti, & in eandem altitudine sunt æquales.

* Sint coni, seu cylindri super eandem basem rotundam CN, quorum vertices A, & L, hos dico esse æquales; quod si quis neget; alterū maiorē altero necesse est esse, assignet conum, vel cylindrū maiorem, & sit L, ideoque A conus, seu cylindrus minor erit V. g. quantitate B. Auferantur ab vtrisque pyramides quadratę æquales, seu prismata ob eandem altitudinem, & eandem basim ex Tr. h, propos. 1. & 29. NBCOL, & ABCDN, & remanebunt segmenta conorum, vel cylindrorum quatuor, qualis sunt CDIL, & CDIA, à quibus segmentis auferantur, rursus pyramides triangulares CIDL, & CIOA æquales, aut prismata æqualia ob eandem altitudinem, & æqualem basim, & residua erunt segmenta conorum CIKL CKIA, & cętera, vel cylindrorum, si pro conis cylindri assumpti fuerint à principio: Sed ad vitandam confusionem loquamur de solis conis, quod, & de cylindris intelligetur, à quibus ablatis rursus pyramidibus triangularibus IKCL, & IKCA æqualibus remanebunt adhuc sectiones conorum minores. Id ergo

totics

totics fiat; donec remaneant segmenta conorum simul in cono minori A minora quantitate, & differentia X proximè (auferendo, vel omnia eorum, quæ simul auferenda sunt, vel aliqua, sed semper æquo numero ab vtraque pyramide. Ideoque segmenta conorum residua in pyramide maiore L erunt minora, vel æqualia differentiæ X, sint ergo æqualia primò, & à cono E auferantur tot pyramides triangulares, donec exequent segmenta conorum minora quantitate X residua coni A, aut proximè superent. Nam cum deinde, & à segmentis ipsis coni A tot pyramides æquales auferri possint, aut nihil remaneret segmenti conici, quòd est absurdum, cùm pyramis sit minor segmento conico, quod eam continet, aut à minori auferretur maius, scilicet aliquod æquale differentiæ X) quod item absurdum est.



Quod si sint maiora hæc segmenta coni L, quàm differentia X. Auferantur à cono ipso L tot pyramides æquales triangulares; donec ipsę pyramides ablatę exequent, vel proximè superent differentiam X, & eodem modo eum, & à segmentis coni A residuis æquales tot pyramides auferri possint, auferreretur à minoribus conicis segmentis differentia X, aliquid, aut æquale, aut maius Differentia X; quod item est absurdum.

COROLLARIVM.

Hinc elicitur idem dicendum esse de segmentis conorum, & cylindrorum. Siquidem idem argumentum valet etiam de segmentis CIOL, & CIDA. Nam auferatur primo ab vtrisque pyramis triangularis CDIA, & CIDL. Deinde triangularis CATL, & CKTA, & sic consequenter; donec restans segmentū à CIDA minoris coni remaneat minus differentia Q proximè, qua differt minus à maiori, deinde à residuo maioris deducentur tot partes solidæ, donec superent ablatæ differentiam Q. & auferrerentur etiam tot pyramides à residuis segmenti conici minoris, quod est absurdum.

THEOR. V. PROPOS. V.

Sub eadem altitudine existentes Coni, & Cylindri inuicem sunt, vt bases.

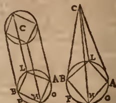
Sit conus, vel cylindrus eiusdem altitudinis A. & alius B, siue obliqui sint, siue recti, dico, quod ad inuicem sunt, vt bases.

* Probatur Nam cum obliqui sint ęquales rectis ex preced. & recti sint ad inuicem, vt bases ex prop. 3. h dummodo in eamdem perpendicularem altitudinem extollantur, etiam obliqui eiusdem altitudinis erunt inuicem, vt bases.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Coni, & Cylindri obliqui ita referuntur ad pyramides inscriptas, vel prismata inscripta, vt circulus, in quo sunt, refertur ad multilaterum basis pyramidis, vel prismatis seu rectæ, seu sint obliquæ figuræ solidæ.

Sit conus, seu cylindrus CLOP, in quo inscribatur pyramis, vel prisma ABC LN super basim multilateram LAN. Dico, quod, vt est circulus LOP ad multilaterum basis AALN; sit conus, seu cylindrus LOCP ad pyramidem, seu prisma ABLNC.



Prob. Nam si sit conus, seu cylindrus rectus super basim circulum LOP erit æqualis obliquo æquèalto ex præced. 4. sic si super multilaterū, basimque LNAB sit pyramis, seu prisma ALBNC erunt æqualis rectum obliquo ęquèalto ex prop. 18. Cor. & ex 2 t. par. t. b. sed conus, seu cylindrus rectus est ad pyramidem, vel prisma inscriptum *communicando* pr. t. h. & 2. Cor. vt basis circulus LOP ad multilaterum ANBL. Ergo etiam obliquus conus, seu cylindrus LCOS refertur ad pyramidem, seu prisma inscriptum, vt basis circulus LOP refertur ad AALNC multilaterum. basimque ANBL.

THEOR VII. PROP. VII.

Omnis conus est tertia pars Cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

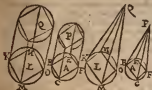
*Probatur. Nam ita prisma est ad cylindrum sicut basis multilatera prismatis est ad circulum circumscriptum, qui cylindri est basis, & ita quoque est pyramis in ea basi multilatera ad conum, qui in circulo eodem collocatus est ex preced, sed ex 11. lib. 5. quę eidem rationi sunt eędem rationes, & inter se sunt eędem rationes. Ergo ita erit prisma ad cylindrum, vt pyramis ad conū: Ergo *permutādo* ita erit Prisma ad pyramidē quantitates eiusdem generis, vt cylindrus ad conum eiusdem item generis. Sed prisma comprehendit ter pyramidem, illiusque est triplum, dummodo eadem basi sita, ad eademque altitudinem sit eleuata: Ergo ita quoque erit cylindrus respectu coni, & conum ter continebit, quòd erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Coni, & Cylindri ſunt inuicem, vt Pyramides, & Priſmata in illis inſcriptas.

SIt cylindrus, ſeu conus FBBCP, & alius OMNKQ, inſcribanturque conis pyramides, & cylindris priſmata ſimiliũ baſiũ. Dico ita eſſe ONMKQ cylindrus, ſeu conus ad FBBCP cylindrũ, ſeu conum, vt eſt priſma, ſeu pyramis inſcripta ONMKQ ad priſma, vel pyramidem inſcriptam FBBCP.



Pr. Ita eſt ex 6. h. ONMKQ cylindrus, ſeu conus ad priſma, ſeu Pyramidem ſibi inſcriptam, vt circulus L baſis ad baſim multilaterã OMBN, vt autem circulus L ad ONMK baſim inſcriptã ſibi; *permutando* propoſitionem 40. & 41. lib 6. ita circulus altera baſis A ad baſim multilaterã inſcriptam ſibi FABC, vt autem circulus A ad multilaterã baſim FBBC ſibi inſcriptam, ita eſt cylindrus, ſeu conus FBBCP in circulo A ſitus ad priſma, ſeu pyramidem in FBBC multilatero ſitam. Ergo ex prop. 12. lib. 5. ita erit cylindrus, ſeu conus ONMKQ ad priſma, ſeu pyramidẽ ſibi inſcriptam, velut cylindrus, ſeu conus FBBCP ad priſma, vel pyramidem ſibi inſcriptam, vt etiam dixi prop. 7. h. Quare *permutando* ita erit cylindrus, ſeu conus ONMKQ ad cylindrum, ſeu conum FBBCP, vt priſma, vel pyramis inſcripta ONMKQ cylĩdri, vel coni ad priſma, vel pyramidem cylindro, ſeu cono FBBCP inſcriptam.

THEOR. IX. PROP. IX.

Similes Coni, & Cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, qui in baſibus.

SInt duo coni, & cylindri ſimiles, quorum altitudines Q, & P, quarum baſes OMNK, & FBBC. Dico hos conos, ſeu cylindros eſſe inuicem in triplicata ratione diametrorum. Inſcribantur in cylindris priſmata. In conis pyramides quotlibet laterum æqualium V. g. quadrangulæ ſed ſimiliũ baſium, vt in fig. prçc. propoſ. Priſma ONMBQ, ſeu pyramis ad priſma, ſeu pyramidem FBBCP habet proportionem triplicatam lateris MK ad latus BC ex prop. 14. & 25. & Cor. prop. 26. Sed vt ex prop. ant. P. L. ita eſt pyramis, ſeu priſma Q inſcriptum ad pyramidem, ſeu priſma P inſcriptam, vt eſt conus, ſeu cylindrus Q circumſcribens ad cylindrum, ſeu conum P circumſcribẽtem, ergo cylindrus, ſeu conus erit ad conũ, ſeu cylindrum P in triplicata ratione KM ad BC eadẽ ex 41. l. 6 diametri circuli L ad diametrum circuli A.

COROLLARIVM.

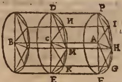
QVare patet, quod etiam erunt in duplicata ratione baſium ſuarum.

THEOR. X. PROPOS. X.

Si Cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo erit, Cylindrus ad Cylindrum, vt axis ad axem.

SIt Cylindrus AB ſectus plano DMB parallelo planis PHF, vel illi aduerſo. Dico ita cylindrum ſuper axem AC eſſe ad cylindrum ſuper axem CB, vt axis AC ad axem CB.

Diuidatur circulus baſis PHGF in partes æquales, & per eas partes, & per axem ducta plana, & per ſubtenſas PH, & HF, DM, & ME conſtituantur priſmata inſcripta PHAC, & BMCB, & cæt. vſque dum inſcribant totum cylindrum. Quæ in cylindro AC erunt omnia æqualis altitudinis, ſicut & omnia, quæ inſcribunt cylindrum CB, & æqualium baſium AHF, & CMS. Et ideo erunt inuicem, vt altitudines, nempe quæ ſunt in cylindro AC ad ea, quæ ſunt in cylindro CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 20. par. 1. h.



Rurſus inſcribantur alia, vt ſunt AGFC AGHC, & cęt. dimidiatis arcubus priorum in cylindro AC, & CEBS, & CXMA in cylindro CB, & hæc etiam ſecundò inſcripta in cylindro AC ad ea, quę inſcripta ſunt ſecundò in cylindro CB erunt, vt altitudo AC ad altitudinem CB, vtpote, quod omnia ſint æqualium baſium AGF, & CKE, ſicut AHN, & CMK, & cęt. ex effectione.

Rurſuſq; idem replicetur toties, donec inſcripta priſmata adeo multiplicentur, vt omne ſpatium abſumant, quòd poſſibile eſt abſumi remanens inter ſuperficiem rotundam cylindri, & ſubtenſas planas priſmatum ſuperficies. Satis enim conſtat ſine oſtenſione particulari, quòd quantò magis priſmata multiplicantur, tantò minus ſpatium remanet inter ſuperficiem globoſam cylindri, & priſmatũ ſuperficiem planam. Quia ergo omne ſpatium, quod abſumi poteſt à priſmatibus inſcriptis, & quantum fieri poteſt multiplicatis abſumptum eſt. Ergo illa priſmata æquabunt cylindros AC, & CB, & ea quidem, quę inſcripta ſunt in cylindro AC ipſum æquabunt, ſicut quæ inſcripta ſunt in CB cylindro ipſum ęquabunt quoque. Siquidem ſi non ęquarent, remaneret aliquis locus nouę inſcriptioni contra pręſuppoſitum. Verùm ea omnia priſmata in AC ſunt ſemper ob ęquales baſes, in quibus ſunt, ad ea omnia, quę in CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 21. h. p. 1. Ergo etiam cylindrus AC erit ad cylindrum CB, & altitudo AC ad altitudinem CB.

THEOR.

Quod autem basis KML æquetur basi RBA. Pr. vt QT diameter ad RA diametrum, ita est altitudo YX ad altitudinẽ ZX in triangulis per. asẽ æquiangulis RAX QXT, sed vt YX ad altitudinem ZX, sic est SV altitudo ad GV altitodinẽ, quod sint æquales. Vt autem SV ad GV, sic est CV ad MV ob similitudi. triangulorum SVC, & MVG; vt autem CV ad VM, sic NC ad BM ob similitudinẽ triangulorũ NVC KVM. Ergo ex 16. l. 5. vt QT ad RA, sic NC ad MB: sed QT, & NC sunt æquales: Ergo ex 14. lib. 5. RA, & KM erunt æquales. Rursus eodem arg. ex 42. l. 6. peripheria QDT est ad peripheriam RFA, vt diameter QT ad diametrum RA; Iam verò ostensum est QT esse ad RA, vt NC ad BM, nempe vt CV ad MV, & in triangulis similibus CXV, & MLV, vt CB ad ML: Quare ex prop. 16. lib. 5. ob similitudinem rationum QOT peripheria erit ad ARB peripheriã, vt CB crus ad ML, sed QOT peripheria, & CB crus ex effectione sunt æqualia. Ergo ex 14. lib. 5. ARB peripheria, & ML crus erunt æqualia. Propterea que ex 3. Tract. 30. basis KML æquabitur circulo RSA ob BM æquale diametro RA, & ML æquale crus peripheriæ RBA. Igitur pyramis KMLV, & conus RFAX æquabuntur ob bases, & altitudines æquales ex prop. 3. h. Coroll.

Si ergo à cono QOTX, & pyramide NC SV ex effectione æqualibus auferatur hinc pyramis KMLV, inde conus ASBX, quę æqualia ostensa sunt, restabit frustum coni RAQTD æquale frusto pyramidis NCBXML: sed frustum pyramidis KMK NCB æquat prisma, cuius basis duo latera sint constituta vnum ex diametro KM minori, & semidifferentia, vt idem latus; alterum ex crure ML peripheriam minorem æquante, & semidifferentia eorundem, & insuper triente prismatis, cuius basis crura efficiant vnum semidifferentia diametrorum NC ab MK, & alterum semidifferentia CB ab ML, quę est peripheriarum ex Cor. prop. 35. p. 1. h. Ergo etiam illi æquale prismati erit frustum conicum QOTRA.

EXPENSIO II.

De soliditate Annulorum, & Rhomborum solidorum.

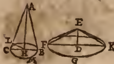
CVm quandoque annuli soliditas perquiri oporteat, hinc corpus annulare inter cętera corpora rotunda tetragonismo supponimus maximè; quia ad sphęrę soliditatem perscrutandam apprimè deseruiat.

THEOR. I. PROPOS. IX.

Duo Coni Isosceles; cuius vnus habeat basim superficiei alterius æqualem; & altitudinẽ alterius lineæ ductæ orthogonaliter à centro basis ad latus coni primi, erunt inuicem soliditate æquales.

SIt conus ABC, in quo à centro basis sit ducta HL perpendicularis ad latus AC, & huic lineę sit ęqualis altitudo DE coni EFG; sicut superficies curua coni ABC basi circuli BGFB sit ęqualis. Dico *hos duos conos esse inuicem æquales.*

Quia superficies BAC æquatur basi EFG, & æqualia ad idem relata eandem habent proportionẽ fiet, vt sicut EFG basis est ad basim BMC; ita superficies BAC ad basim eandem suam BCM; vt verò superficies BAC ad basim BCM, ita vt ostendimus tr. 31. propos. 30. AC ad CH, & sicut AC ad CH, ita AH ad AL ob triangulorum similitudinem, quæ est æ-



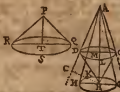
qualis DE, igitur sicut bases EGF ad basim BMC; ita Altitudo HA ad altitudinem HL, vel DE; Quare reciprocam bases altitudinibus habent proportionem; vnde ex prop. 12. Tr. h. coni CAB, FEK erunt æquales.

THEOR. II. PROPOS. XV.

Si ex duobus conis Isoscelibus Rhombus solidus componatur, æquatur cono illi, qui basim habet æqualem basi compositorum conorum, & altitudinem æqualem altitudini vtriusque.

SIt Rhombus ex duobus conis integratus ADHO; Sitque alter conus, cuius basis GKN basi OLD æquetur, & altitudo HA sit eadem. Dico *Rhombum, & conum esse æquales.*

Probatur. Sicut AH ad AM; sic Rhombus solidus OAOH ad conum OAO, quia coni compositi eandem habent basim, quare sunt inuicem, vt altitudines, vt autem AH ad AM, ita quoque ob æqualitatem basium GAN, OLD est conus AGN ad conum OAD. Ergo cum eidem cono OAD eandem dicant proportionem inuicem sunt ęquales Rhombus DADH, & conus HNA. Quod intelligitur etiam si coni OAD, OHO inuicem non sint æquales.







THEOR. III. PROPOS. XVI.

Si sit Rhombus, vt superiùs, & sit conus alterius conorum Rhombi superficiei basem possidens æqualem, & altitudinem æqualem lineæ à vertice coni Rhombum componentium perpendiculariter in latus productum cadenti, conus iste prædicto Rhombo solido æquatur.

SIt Rhombus BOAO sonicus, & à vertice H in latus AC productum, si oportet cadat perpédicularis HC, & fiat QPR conus altitudinem TP æqualem perpendiculari HC, & basim QTR æqualem superficiei OAD coni possidens. Dico *Rhombum* HCAO *huic cono* QPR *esse æqualem*.

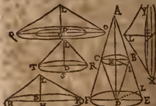
Probatur. Quia superficies coni OAD æquatur basi QTR, erit superficies OAO ad propriā basim CLD, sic basis QTR ad basim GBM, OLO basi equalem. Sed vt superficies AOO ad propriam basim OLO; sic AD ad DM ex dictis prop. 30. Tract 31. cum circulus æqualis superficiei conicę sit ex radio YQ media proportionali inter latus, & diametrum basis, & sicut AD ad DM; sic ob similitudinem triangulorum AH ad HC; Ideoque etiam basis QTR ad basim OBN, sic AH ad EC, idest altitudo AH ad altitudinem PT; quæ æqualis lineę HC est effecta. Cum ergo habeant bases conus GAN, & QPR altitudinibus reciprocè proportionales ex prop. 82. Tract. h. erunt inuicem ęquales coni GAN, & QPR. Quare etiam Rhombus OADH, qui probatus est ant. prop. æqualis cono OAN cono BPQ ęquabitur.

THEOR. IV. PROPOS. XVII.

Si à Cono Rhombus inscriptus auferatur, residuo conus ille æqualis est, cuius altitudo perpendiculari à vertice opposita Rhombi ad latus deductæ, & cuius superficies residuæ conuexæ superficiei æquetur.

SIt conus FAE, cui inscriptus Rhombus ABCO, qui scilicet verticem in centrum O defigat, & linea LD à vertice D cadens perpendiculariter in latus EA feratur. Fiatque conus, cuius altitudo OL basis verò KMN; ęquetur superficiei, quę ambit residuum coni EBCF, vt ex propos. 32. Tract. 31. effici potest. Dico *hunc conum* KLE *esse æqualem illi residuo* EBDCF *sublato cono* BCD.

Fiant duo alij coni primus maior, cuius basis OPQ coni AEF toti superficiei conuexę æquetur, & OL sit altitudo, qui ex dictis ęquabitur cono EAF. Deinde alter constituatur, cuius basis RST ęquet



superficiem BAC coni conuexam, & altitudinem OL, iste quoque conus æquabitur Rhombo BACO. Basis verò OPQ æquatur basibus BMN, & SRT, quòd æquetur toti superficiei conuexæ EAF, cui quoque duę bases BMN, & RST æquantur ex constructione, cum quę tres isti coni LRT; KLN, & OLQ, vtpote altitudine ęquali præditi se habeant ad inuicem, vt bases ex prop. 5. Tract. h. Sequitur quod OLQ conus basis OPQ, cùm ad ambas bases simul KMN, RST dicat proportionem ęqualitatis, quod etiam ad conos KNL, & RLT eadem relatione feratur, & eos equet, & ideo conus EAB duos conos æquabit KLN, & RLT. Vnde sublatis æqualibus cono RLT, & Rhombo BACO residua conus KLN, & EBDCF residuus annulus triangularis erũt ęqualia.

COROLLARIVM I.

*HInc elicitur frustum coni ABCFD equale esse duobus conis primo, cuius basis sit ęqualis superficiei frusti conici, quam inuenies ex propos. 31. tract. 31. & altitudo LO, alterum cuius altitudo IZ, & superficies basis ipsius coni CDS superficiei ęqualis.

COROLLARIVM II.

*HInc elicies, quod si fiat conus OLQ æqualis toti cono EAF, & TLR V. g. cono BAC, postea fiat conus, cuius basis circulus æquet residuū annulum sublata basi RST à basi OPQ, vt ex 18. tract. 30. *potes efficere, & super hunc circulum erigatur conus YLX altitudinis DL. Iste æquabit frustum coni EBCF.

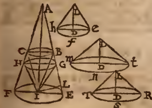
Probatur. Nam cum coni sint omnes eiusdem altitudinis, ita erit conus RLT ad conum OLQ, vt basis RST ad basim OPQ, sicque conus XLY ad conum OLQ, vt basis XY ad basim OPQ; Ergo ex propos. 25. lib. 5. prima quantitas LRT conus cum quinta, nempe cum cono XLY erit ad secundam OLQ, vt tertia basis RST cum sexta basi YX ad quartam OPQ basim: sed basis RST, & YX sunt æquales conicę basi OPQ. Ergo etiam conus YLX, & LRT sunt ęquales cono OLQ, sed LRT æquat conum BAC partem, & OLQ æquat totum conum EAF, ergo residuus conus YXL ęquabit frustum coni reliquum CBEF.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XVIII.

Si à Rhombo Rhombus auferatur inscriptus, residuo conus ille æqualis est, cuius altitudo æquetur perpendiculari à vertice opposita, Rhomborum deductæ ad latus, & superficies residuæ conuexæ superficiei.

SIt Rhombus AGIH, in eoque inscriptus alter Rhombus BACI, & linea à vertice communi conorum I deducta, quæ sit IL. Sit que ELh altitudinis IL, & basim efh habeat superficiei conuexæ, quæ ambit GBCH, residuæ Rhomborum BACI & AGIH ablato cono BAC æqualem. Dico hunc conum ELh æqualem esse soliditati residuæ Rhomborum si alter ABCI ab altero AGIH Rhombo auferatur. Fiat itaque conus, cuius basis RLT æque-



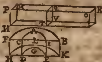
tur BAC coni superficiei conuexæ, & altitudo DL sit IL iste conus erit æqualis Rhombo BACI ex 16. propos. h. item sit ELm, cuius basis Enm æquet superficiem conuexam coni GAH, & altitudo eadem DE, eritque ex præhabitis propos. 16. conus iste ELm æqualis Rhombo GIAH Et quia tota huius basis æquat superficiem totius coni GAH, & RLT superficiem conuexam coni BAC; & efh. superficiem residuæ BGHC erit basis Enm basibus efh, & RST æqualis, & altitudines DE erunt æquales, cum ergo coni æqualium altitudinum ex prop. 5. Tr. h. se habeant ad inuicem, vt bases, erit conus ELm æqualis conis ELh, & RLn, & item ex dictis Rhombo GAIH; sed conus RLT æqualis est Rhombo BACI: Ablatis itaque istis æqualibus erunt residua æqualia ELh conus, & BGCH residuum Rhombi.

THEOR. VI. PROPOS. XIX.

Annulus solidus, cuius basis quadrata, æqualis est parallelepipedo, cuius vnum latus sit æquale annuli altitudini, & basis æqualis annulo eiusdem plano.

SIt Annulus solidus ABCDSI. Dico hunc esse æqualem parallelepipedo NR, cuius vnicæ superficiei QO æquetur superficies annuli HLE SGD, & altitudo NP altitudini LE.

Sit prisma NR quadrãgulę basis, & æqualis basis NO basi AAPL cylindri SFAHE, & portio parallelepipedi, seu prismatis æqualis basi QP cylindri interni CAIDE basi DGS, & eorũ omnium sit æqualis altitudo NP cylindrorum ipsorum ęqualis altitudini SS. Isti cylindrus, & prisma erunt æqualia ex prop 3. Cor. p. 8. h. quia habent bases cylindrorum basibus æquales, & sunt æqualis quoque altitudinis, scilicet cylindrus BAHEK prismati NR, & cylindrus internus IADE prismati NQ. Ablato itaque EADI cylindro interno à cylindro maiori BAHEK

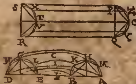


sicut, & prisma NQ æquans cylindrum à prismate NR. residua nimirum prisma TR, & annulus solidus KIACH remanebunt æqualia, cuius basis OQ plana æquabit annulum planum ELHDOS, vtpote, quod sit quoque residua æqualis basis RP circulo BAPL ablata plana basi PQ æquante IACL basim.

THEOR. VII. PROPOS. XX.

Annulus solidus rotundus æquatur Cylindro, cuius rectangulum per axem sit æquale annulo plano, qui per diametrum transit, & circulus basis æquetur annuli circulo.

SIt annulus solidus circularis quoad superficiem ABCDGS, & cylindrus, cuius rectangulum per axem SRQP sit æqualis annulo plano ABPIEO, & eius circulus circulo basis QOP. Dico hunc annulum esse æqualem cylindro SVRO.



Probatur. Nam inscribatur primo in cylindro Prisma QOPRTS basis quadratę, & similiter in annulo prisma æquale, & eiusdem basis ECDHAA ex præc. erunt æqualia. Inscribantur rursus conicæ superficiei segmenta plana SXTPZO, & RVTQYO, & OLEHSK, & DNGAMH in annulo solido omnia erũt æqualia inuicem ob æquales bases DNG, & SXT, &c. & æqualis altitudinis, ac circulus GCH: siquidem ex prop 41. Coroll. Tract. 32. quantùm augescit extima quælibet, vt BNGMH, tantùm decrescit intima correspondens superficies, & sumpta in æquali remotione à puncto O, vel H; quare supplentibus illis, quæ augescunt defectum superficierum deficientium, omnes erunt ęqualis altitudinis ac longitudo, quam præbet circulus GCH. Quapropter si in cylindro QS figura solida tot laterum æqualium inscribatur, cuius latera æquentur inscriptarum annulo solido superficierum rectis lateribus, vt QY ipsi LE, & alia aliis erunt omnes

 super-

superficies solidæ figuræ cylindro inscriptæ eiusdem altitudinis, ac quę in annulo solido inscriptæ fuere. Siquidē cylindri altitudo ponitur ex Thesi ęqualis annuli circulo ocн, cuius altitudinē mutuò se supplendo inuicem ęquant superficies ānulo inscriptæ, ideoque planæ superficies annulo inscriptę erunt eiusdem altitudinis ac illæ, quæ in cylindro fuere inscriptæ. Sunt autem etiam bases æquales, vtpote triangulorum oNo, & QYO æqualium ex thesi. Quare omnia solida prismata annularia inscripta annulo solido erunt ęqualia prismatibus inscriptis in cylindro V.g. GHOCAMH prisma ānulare prismati recto RVTQYQ ex prop.19 Tract. h. quia scilicet sunt eiusdem basis RY, & altitudinis RV.

Si ergo in annulo solido tot prismata annularia inscribantur, quot possunt inscribi, similiterque in cylindro tot quot possunt inscribi, omne spatium annuli prismata ipsi inscripta, & cylindri cylindro inscripta aęquabunt, sed facta qualibet multiplicatione semper perseuerant ęqualia: Ergo soliditas cylindri, & soliditas annuli, quas æquant, erunt æqualęs.

COROLLARIVM.

HInc autem est superficies globosas tum annuli, tum cylindri esse æquales, quia omnia plana annulo inscriptibilia, quę figurā eius quantū potest multiplicata æquant, sunt omnia si simul sumantur supplentibus incrementis excrescentium defectibus deficientium æqualia omnibus planis figuræ cylindri æquali numero laterum similiter inscriptę, vt patet ex ostensione præc. propos.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

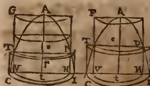
Annulos solidos cylindris æquales, vel proportionales reperire.

DEscribatur Parabolicum conoides TAC, & circa eum cylindri describantur æqualis altitudinis NF, & IT inscribatur quoq; eisdem ęquèaltus DV. Dico residuum ablato DV à TE cylindro esse annulum solidum æqualē solido cylindro NF.

Probatur. Quia annuli solidi residui ablatis cylindris inscriptis à circumscriptis omnes sunt remanentibus ad altitudinem axis residui euectis, & circumscriptis cylindris ęquales.

Quod sic ostendo in Parabola ATC est TA ad EA ex propos.5. tract.24. vt quadratum TT ad quadratum EN, sed TA est dupla TE ex constructione. Ergo etiam quadratum TI duplum erit quadrati DE; quare etiam circulus ex IT semidiametro duplus erit circuli ex EN radio, & ideo etiam cylindrus IT duplus erit cylindri DF ex prop.5. tract. h, sed etiam NF duplus est cylindri VN. Ergo cylindrus IT, & NF sunt æquales, ablato itaque cylindro VN communi annulus residuus solidus IT remanebit solido cylindro DF æqualis.

Eadem ratio, atque ostensio erit de cylindris quibuscumque inscriptis, & circumscriptis, aliis. Sic TA est ad EA ex prop.5. Tract 24 vt quadratum TT ad quadratum PC, & ita circulus TT radio, & cylindrus TT ad circulum ex PC, & cylindrum PG, sed TA ad EA est, vt 3. ad 2. Ergo etiam cylindrus TT ad cylindrū PG, vt 3. ad 2. erit, sed huic HG



lindrus quoque est, vt 3 ad 2. quod sit, vt altitudo TA ad altitudinem EA. Quare cylindrus TT, & HG erunt æquales ex 9. l.5. ablato itaque communi cylindro PV remanebunt æquales cylindrus residuus PG, & annulus TGHPT, & sic de cæteris.

COROLLARIVM.

HInc colliges omnes superficies orizontales horum annulorum ęquari cylindricis V.g. SHCV, vel PF. Ratio est, quia bases dicunt eandem proportionem ac cylindri. Vnde si cylindri crescunt per augmenta æqualia etiam bases annulares eodem modo crescent.

EXPENSIO III.

De quorumcumque corporum soliditate, quorum sectiones basi parallelæ sunt similes, aut æquales.

CVm aliquando corpora reperiantur, quæ irregularis quidem figuræ sunt, sed tamen cubationem non respuunt; hinc de illis agere oportet; quorum multa attulit Ambrosius a Sancto Vincentio agens de Ductibus; sed nos ab ipso non nisi vnicum exemplum excerpemus.

THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si dentur tria plana communem habentia altitudinem; in quibus ductæ æquidistantes parallelæ sint continuè proportionales, & ex illis planis corpora formentur, ea corpora erunt æqualia.

DEtur portio circuli BCPC, & BAC ex quibus superficiebus rectangulè in linea CA vnitis intelligatur corpus erectum, quod ex duabus partibus superficie globosa eorūdem arcuū BPC curuata, vel BAC comprehendetur ex alia parte verò superficiebus planis BROC, cuius vnicum latus curua terminatur BPD alterum verò plano BAC. Dico hoc corpus esse æquale corpori, quod ex duobus semicirculis AVC quadratè vnitis exoritur.

Inscribantur singulis planis ęqualis altitudinis rectangula, vt TQ, & VQ, & QA, & cętera singulæ lineę in plano BOC ductæ singulis in plano BAC existentibus eędem sint, & ex illis componantur rectangula eas rectangulè vniendo, illa erunt æqualia quadratis ex lineis in BEC constitutis. Siquidem ex prop.35. lib.3. Rectangulum ex PQ, &

Qa

QA æquale est quadrato QB, sed QB æquatur VQ, ideoque quadratum VQ æquabitur rectangulo ex PQ, & QA. Sic ex eadem prop. 35. lib. 3. rectangulũ ex AN, & NM æquetur rectangulo ex BN, & NC, quod æquatur quadrato NE ex eadem propos. vnde rectangulum BN, & MN æquale erit quadrato NE, sic dicas de alijs. Si ergo ex istis basibus parallelepipeda intelligãtur erecta æqualis altitudinis omnia erunt æqualia illis ex prop. 19. Tract. 23. quæ quadratis basibus æqualis altitudinis eriguntur V.g. parallelepipedum PQ super rectangulum ex PQ, & QA erectum erit æquale parallelepipedo ex VQ quadrato erecto in altitudinem eandem P m, & sic dicas de alijs.



Si ergo hæc duo corpora alterũ ex APGC superficiebus, & AAC, alterum ex semicirculo BVC dicantur inæqualia. Dicatur V.g. corpus ex APC constitutum maius quantitate e. Et inscribantur tot parallelepipeda in vtroque modo prædicto, vt ex prop. 17. Tract. 23. fieri posse ostendimus donec solida in vtroque inscripta relinquant minorem quantitatem, quam e, tunc rectangula solida in corpore ex semicirculis BVC, quod dicitur maius, constituta, essent adhuc æqualia illis, quæ in corpore minori ex planis APGC, & BAC constituto inscripta sunt, hæc itaque essent maiora corpore, in quo inscripta sunt. Siquidem superarent differentiam e, quæ inter corpus, & corpus inuenitur, quod omninò absurdum est.

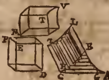
COROLLARIVM.

ERit autem eadem ostensio etiam si BVC non sit semicirculus, sed portio circuli. Quamobrem generaliter quando dantur tria, aut quatuor plana, in quibus ductæ singulæ, aut sint tres continuæ proportionales, aut quatuor proportionales, ex quibus nimirum medijs fiant rectangula æqualia extremis, illa plana rectangulè composita, & secundùm alia latera superficiebus rectangulè se coniungentibus, seu curuis, seu rectis circumuestita prout latera curua sunt, sed rectè constituent corpora æqualia illis, quæ superficiebus operiuntur, quorum parallelæ æquè diuisæ inscriptæ æquè possunt, sic propos. 70. Tract. 24. semiellipsis FHG cum altera eiusdem portione rectangulè vnita, & superficiebus sibi inuicem incidentibus vestita constituent corpus æquale triangulo semiparallelogrammi FG si secundum diametrum FG rectangulè vniatur, & similiter rectangulis sibi inuicem superficiebus terminentur, idem asseres de prop. 69. eiusdem Tract. & sic de cæteris.

THEOR. II. PROP. XXIII.

Duo corpora quæcumque habentes bases in eandem altitudinem subuecta parallelo ductu basis, inuicem erunt, vt ipsæ bases.

AD perfectam corporum cubationem præter conos, & cylindros videtur etiam necessarium noscere omnia ea corpora, quæ cylindri naturam sapiunt, & sunt ea, quæ parallelis lateribus inuicem à quacumque basi, seu elliptica, seu cuiuscumque incertæ figuræ in altum eleuentur, siue obliquè, siue rectè, dummodò in alteram, æqualem, & similem basim terminent: ea verò cylindracea dicemus.



Sint duo corpora ABCL, & DEF, quorum bases sint BAC, & DE altera quidem quæcumque BAC V.g. curuis AB, & BC, altera verò quadrata DE. Dico, quod sicut BAC est ad DE: ita corpus BACL super primam basim ad corpus DEF si sint æquealta.

Inscribantur tot rectangula in basi ABC ex propos. 1. Tr. 30. donec minus euadat spatium, quòd inter curuas AB, & BC intercipitur, & rectangula inscripta, omni data possibili quantitate, & super illa parallelogramma, vt GH erigantur parallelepipeda GHI, æquè eleuata, ac solidum DEF ob eandem altitudinem datorum solidorum ABCL, & DEF, quæ omne quoque spatiũ possibile inter CBL curuam superficiem, & superficies solidorum inscriptorum occupabunt: Quare parallelepipeda inscripta ipsa tandem ABCL soliditatem adæquabunt: Nam si non æquerent, nonæ inscriptioni parallelepipedorum, & ideo suarum basium daretur locus in basi ABC, & sic contra Thesim omni possibili quantitate minus spatium non remansisset. Verùm parallelepipeda singula inscripta, vt GHI sunt ad solidum eiusdem altitudinis DEF, vt bases V.g. GHI ad DF, vt basis GH ad basim DE, & sic de alijs.

Quare ex propos. 17. lib 5. omnia quoque solida inscripta in ABCL erunt ad solidum DEF, vt bases omnes parallelogramma GH, & cæt. inscriptæ in ABC basi ad basim DE; sed illæ æquant ABC basim solidi ABCL, sicut & parallelepipeda inscripta solidum ABCL, vt dixi, ergo solidum ABCL erit ad solidum DEF ex 7. prop. lib. 5. vt basis ABC ad basim DE.

Sit deinde aliud corpus MVT æquealtum, vt ABCL. Dico iterum; quod corpus ABCL erit ad MTV corpus, vt basis ABC ad basim MT. Quoniã ABCL corpus est ad DEF corpus ett, vt ABC basis ad DE basim, & ob eandem rationem conuertendoque DEF corpus MTV corpus, vt DE ad MT erit ex æquo ABCL corpus ad MV corpus, vt ABC basis ad MT basim.

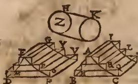
COROLLARIVM.

Hinc patet, quod si hæc solida æquales habuerint bases, & altitudines æqualia sint, quia cum referantur, vt bases, & bases referantur proportione æqualitatis, sequitur, vt etiam ipsa corpora eadem æqualitatis ratione inuicem respondeant.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si corpora cylindracea æqualium similium, & similiter positarum basium sint diuersæ altitudinis inuicem correspondebunt, proportione, vt altitudines.

Sint corpora cylindracea ABCI, EDFG, quæ obtineant bases omninò æquales quoad latera aream, & positionem. Dico ea esse inuicem, vt altitudines.



Probatur. Nam cum bases ponantur omninò similes, si diuidantur parallelis in partes æquales erunt omnia rectangula circumscripta basibus æqualia V. g. RQ rectangulo DO, & alia singula in BAC singulis in DES. Quare, & parallelepipeda super eas bases erecta solida ipsa circumscribentia erunt ad inuicem, vt altitudines V. g. BCT solidum erit ad DSV solidum, vt altitudo QT ad altitudinem OV. Sic rectangulum solidum NRL ad solidum MPY ob æquales bases NR, & MP est, vt altitudo RL ad altitudinem PY idest vt solidum RT ad PV solidum, & ita dicas de omnibus alijs. Quare ex prop. 17. lib. 5. ita erunt omnia solida BCT, & NRL, & cęt. parallelepipeda in corpore solido BCAI circumscripta ad omnia solida parallelepipeda DSV, MPY, & cęt. in corpore DSEG circumscripta, vt altitudo QT ad OV. Ergo & ipsa corpora talia erunt, cùm omnis possibilis circumscriptio tandem ipsa solida exęquet, vt toties diximus.

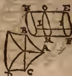
COROLLARIVM.

Hinc autem colligitur, quod etiam si bases non sint similes, idem tamen sequi. Nam detur solidum KA, cuius basis a non sit similis basi CAS; sed tamen ęqualis, & ideo basi FAD, sitq; eleuatum super illam cylindraceum, quoddam corpus ad eandem eleuationem cylindracei DEG ex prçc. Coroll. erunt ęqualia cylindraceum DEFO, & super a, sed CABZ cylindraceũ refertur ad FDEG, vt altitudo AI ad altitudinem EG. Ergo etiam ad corpus in Z locatum æquale ipsi FDEG refertur, vt AI ad EG, idest vt AI ad æqualem aH altitudinem corporis Z.

THEOR. IV. PROP. XXV.

Cylindracea Corpora, quorum reciprocantur bases, & altitudines sunt æqualia, & æqualium cylindraceorum reciprocantur bases, & altitudines.

Sit corpus cylindraceum ABCD, & aliud BFIO; Sitque basis ABC ad basim FBI, vt altitudo BO ad altitudinem CD. Dico hęc corpora esse ęqualia. Quod ostenditur eodem modo, ac prop. 12. Tract. h. fiant enim OLMN eiusdem altitudinis



ON, ac CD, eritque ex preced. IFO solidum cylindraceum ad OLM corpus eiusdem basis, vt altitudo BO ad altitudinem ON, sed vt BO ad ON ex hypothesi, ita est basis ABC ad basim AIA ac OLM, vt autem ABC ad basim OLM, ita est ex prop. præced. solidum ABCD ad solidum OLMN. Ergo eidem solido OLMN solidum BIBO, & ABCD eadem dicunt proportionem altitudinis BO ad ON altitudinem. Quadere ex 7. lib. 5. erunt hęc solida cylindracea inuicem æqualia. Secunda quoque pars eodem modo probatur ac prop. 12. h.

COROLLARIVM.

Hinc enascitur omnes cylindros Ellipticos aliorum quorum basis Ellipsis est esse ęquales si obtineant, vel bases, & altitudines æquales, vel bases altitudinibus reciprocè proportionales: Item esse ad inuicem in ea proportione quã bases si fuerint tantum æquales altitudine, quod si fuerint æquales basibus tantùm se inuicem referent, vt altitudines. Quibus potest addi quod si fuerint similes habeant triplicatam suorum diametrorum, seu axium proportionem. Quia omnes portiones sais ad applicatas ad diametrum eandem proportionem dicunt ex def. ellipsium similium prop. 51. Tract. 24. Ideoque omnia prismata, seu parallelepipeda in eis inscripta similia. Vnde, &c.

EXPENSIO IV.

De Conis Ellipticis, atque conis in lineam rectam terminantibus.

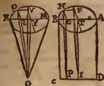
Sunt coni diuersæ rationis ob diuersam basim, quod sit elliptica, vel hyperbolica, de quibus soliditas prętereunda non est, vnde sit.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

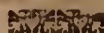
* *Conus in rectam lineam terminans est ad conum in punctum terminantem eiusdem basis, & altitudinis, vt 3. ad 2.*

*SIt conus ABCD, quem descripsimus pr. 8. tr. 25. in lineam rectam terminans. Dico, quod ad conum MNG eiusdem basis, & altitudinis se habet, vt 3. ad 2.



Probatur. Inscribantur enim in cono in lineam terminante prismata hoc modo. Ducatur per subtensam FH, & OI parallelas planum EP, PI. Rursusq; per AT, HO parallelas plana PTI, OHP, eritq; prisma basis quadratæ FHIOIP, fiat verò in basi æquali, & simili ex Thesi coni MNG eadem operatio constituendo super æqualem basim, & similem QVSY pyramidem, quæ erit æqualis altitudinis. Cum itaque prisma, & pyramis sint æqualis altitudinis, & basis erunt ad inuicem, vt prisma ad pyramidem. At vero prisma basis quadratę se habet ad pyramidem eiusdem basis, vt 3. ad 2. Si ergo in cono in rectam terminante inscribantur talia prismata, quo vsque describi possint, & in cono item acuto æqualis numerus pyramidum super æqualem simileq; basem, omne spatium tum huius, tum illius coni absorbebitur, & occupabitur, quare cum semper omnis inscriptibilis multitudo prismatum in cono in rectam terminante, & in cono in punctum finiente se habeant, vt 3. ad 2, nimirum, vt prisma quadratę basis ad pyramidem, erit ipse conus in rectam terminans ad conum in punctum finientem, vt 3. ad 2.

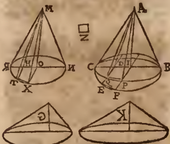
Quod verò prisma quadratę basis sit ad pyramidē eiusdem basis, & altitudinis, vt numerus 3. ad numerum 2. patet. Nam prisma, quod semper obtinet quadratam basim est triplum pyramidis triangularem basim habentis ex pr. 22. p. 1. h. at vero pyramidis quadratę basis ex prop. 5. par. 1. h. est dupla pyramidis triangularis basis. vnde prisma ad talem quadratę basis pyramidem se habebit, vt 3. ad 2.



THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Conus Ellipticæ basis, & eiusdem normalis altitudinis, seu rectus, seu obliquus est æqualis cono eiusdem normalis eleuationis basis circularis; quæ tamen sit æqualis Ellipsi cono Elliptico basim substernenti.

*PRobatur. Nam si assumantur in basi coni circularis partes ęquales peripherię circuli MTR; subtendanturq; rectæ, vt XT, & ab iisdē punctis perpendiculares ad diametrum ducatur XO, & TH, & cęt. Deinde axi elliptico CB basis coni elliptici BAC circūscribatur circulus BEC, cui diuiso in æquales numero partes, vt circulus MTR eodē modo rectę subtrahantur EV, & segmentis peripherię ab iisdemque punctis in axem ac normales ferantur, vt ED, & PI, & ducatur subtensa ambitui elliptico PQ. & fiat prorsùs eadem operatio, quam



exhibuimus prop 24. tract. 30. erunt spatia elliptica PIQD ęqualia spatiis circularibus XTOH, vt ibi ostenditur. Si ergo super hęc spatia Pyramides eleuentur, eum in eandem eleuationem extollantur, erunt ęquales; quamobrem, & ipsi coni erunt ęquales. Si enim coni essent inęquales sequeretur illud idem absurdum, quod in pyramidibus assignauimus pr. 21. p. 1. h. nempe si circularis V. g. esset minor quantitate Z; quòd ab eo tot pyramides inscriptę auferri possent, donec remaneret aliquid minus quantitate Z proximè, & tunc facta æquali numero ablatione Pyramidum inscriptarum continuè ęqualium quantitate pyramidibus à cono circulari minori ablatis, remaneret aliquid maius in cono elliptico BAC, vtpote maiori; quam residuum coni circularis NMR. Si ergo auferatur adhuc ab hoc cono elliptico BAC aliquid equale, vel maius proximè differentię Z, cùm & à cono circulari MNR idem numerus pyramidum ęqualium deduci posset, aufereretur aliquid maius differentia à à residuo coni NMR minore, quam differentia Z, quod esset absurdum.

COROLLARIVM I.

*Hinc primo enascitur conos ellipticos, si sint equalium basium, & equalis altitudinis esse inuicem equales; quia tertiò circulares basis equabuntur.

COROLLARIVM II.

*Quod si habeant bases altitudinibus reciprocè proportionales, quod sint equales. Nam sit coni altitudo TA ad altitudinem coni K, vt basis coni B ad basim coni BAC, sitque coni K ellipticis equalis basis coni G, & equalis altitudo, & ideo conus circularis G, cono K elliptico æquetur; sicut conus NMR circularis, equalis basi, & altitudine æquatur cono BAC; Erunt ergo isti coni circulares G, & NMR ex prop. 12. h. equales, quod & reciprocentur bases, & altitudines, quod sint equales basis coni G ipsi basi coni K, & altitudo altitudini sicut, & equalis basis coni NMR basi coni BAC, & altitudo altitudini.

Quare sicut illę reciprocantur, sic & istę, eritq; basis coni NMR ad basim coni G, & altitudo coni G ad altitudinem coni MNR: Ideo coni NMR & G equabuntur ex h. Propterea que BAC equalis cono NMR, & B conus cono G equalis, inuicem equales erunt.

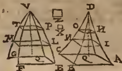
COROLLARIVM III.

*Deducitur quoque conos Ellipticos æqualis basis, & diuersę altitudinis esse ad inuicem, vt altitudines; quia conus circularis NMR equalis altitudine, & basi, & soliditate cono BAC, V. g. est ad conum G, vt altitudo ad altitudinem, qui conus cono K soliditate basi, & altitudine sit equalis quare elliptici CAB, & B ad inuicem referentur, vt altitudines, & idem dicendum de basibus inęqualibus, si altitudines fuerint equales.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Duo corpora coniformia, quorum omnia plana basi ipsorũ parallela similia sint, & inuicem plana huius planis alterius, erunt ad inuicem, vt bases: dummodo in æqualem altitudinem assurgant.

Sint duo corpora ADBC, & EVOF; quæ in eandem altitudinem VQ, vel DQ normalem eleuentur, in quibus si ducantur plana æquidistantia, ea inueniantur similia inuicem, & basi, cui parallela sunt, & etiam æque eleuatis secantibus planis in alio corpore ductis; ita vt nè dum IN V. g. planum ipsi AC, & NO ipsi TM, vel AC; sed etiam AC basis huius ADC sit ad EG basim alterius, vt planum secans NI ad secantem LM, & NO ad PT. Dico, quod eadem proportione referrentur, vt bases.



Probatur. Nam si intelligantur circumscripta cylindracea corpora æquealta: tum inuicem, tam & cylindraceis corporibus alterius, erunt hæc ad inuicem, vt bases ex prop 23 huius. Si ergo hæc corpora CABD, & EFGV asserantur non ad inuicem referri, vt bases, sit minor proportio ABCD corporis ad EVOF corpus, quam ABC basis ad EFG basim. sit ea minor quantitate Z. Itaque tot cylindracea corpora circumscribantur donec differentia, quæ inter ABDC corpus, & ipsa sit X minor differentia, quàm Z, & tunc omnia ista cylindracea corpora corpori ADCB circumscripta dicent minorem proportionem ad EVGF, quam basis ABC ad basim EFG, quò contra ostensa est. Siquidem cum singula referātur in ABCD ad singula in EVGF, vt bases singulæ singulis. Singulæ verò bases obtineant ex thesi eam proportionem, quæ AC ad EG; etiam omnia parallelepipeda referentur, vt ABC basis ad EG basim, & tamen minorem dicerent cum enim conforme corpus ABCD esset ad EVGF in minori proportione quantitate Z, & circumscripta corpora cylindracea nõ addant quantitatem a corpori ABCA, sed solùm quantitatem minorẽ, vtique dicent ad EVGF minorem proportionem basis ABC ad basim EFG.

Quòd & dicas, si ABCD corpus asseratur maius in proportione, nam tunc EVGF minus erit, quam EFG ad ABC basim, vnde eodem argumento vti poteris; cùm itaque ABCD ad EVFG non possit obtinere, neque maiorem, neque minorem proportionem basis ABC ad basim FGE consequetur eandem.

COROLLARIVM I.

*Hinc enascitur; quòd, si hæc corpora fuerint æqualium basium, quòd se referent, vt altitudines: quia plana quoque huius ad plana secantia alterius in easdem numero partes erunt equalia: Quare, & cylindracea corpora huic circumscripta ad cylindracea alteri circumscripta erunt, vt altitudines huius ad altitudines alterius, & cæt. vt eodem argumento persuadere tibi poterit.

COROLLARIVM II.

Hinc rursus elt, quod sint æqualia, si sint equales, tum altitudines, tum bases.

THEOR. V. PROPOS. XXIX.

Solida corpora, quorum omnes bases basi parallelæ similes sint, & altitudines obtineant basibus reciprocè proportionales æqualia sunt.

*Sit ABC corpus quoddam; cuius altitudo normalis HC se habeat ad altitudinem alterius corporis GL; vt basis DYF ad basim ATB reciprocè. Omnes verò sectiones, quæ parallelæ basi fiunt, sint similes ipsi basi. Dico hæc corpora esse equalia.

Probatur. Nam circumscribantur vtrinque solida cylindracea eodem numero multiplicata. Diuidantque altitudines in partes proportionales ex 18. lib. 5. & in singulis corporibus V. g. in ACBT inuicem æquealta, sicut, & in GDFY. vnde erit altitudo EH ad altitudinem LO, vt HC ad GL, idest ex Thesi, vt basis DYF ad basim ATB. Vnde ex

pręc.

pr.25.cùm hæc cylindracea ATAN, & DYTQ habeant altitudines basibus reciprocè proportionales erũt æqualia. Idem asserendum de cylindraceo MENK, & POQR. nam altitudo IE, idest æqualis FH sdos, aut æqualem OL, vt basis POQ ad basim NAM reciprocè, erit quoque solidum MENK solido POQR æquale, & idem asseras de omnibus alijs circumscriptibilibus. Quapropter cum omnia cylindracea solida ACST circumscriptibilia sint æqualia solidis cylindraceis solido DOSY circumscriptibilibus, si hæc multiplicentur quantùm multiplicari possunt, occupabũt ex pr. 14. Tr. 33. omnẽ quantitatem possibilem, quæ inter solida exhibita, & cylindracea circumscripta intercipi queat. Vnde nulla quantitate possibili illa excedẽt, quare etiam ipsa corpora, quorũ omnis plana basi parallela sint similia, & habeant altitudines basibus reciprocè proportionales inuicem erunt æqualia.

EXPENSIO V.

De Conoidibus Hyperbolicis.

Conoides Hyperbolicum efficitur ab hyperbola circa suum axem versata. Quare si secetur à plano rectangulo ad axem illa sectio erit circulus.

At si à plano ad axem obliquo, sectio erit ellipsis, vt supra ostendimus Tract. 25. Expens. 5.

THEOR. I. PROPOS. XXX.

Conus inscriptus ad quodlibet Hyperbolicum Conoidem eam proportionem habet, quam diameter cum transuersa diametro tota, ad diametrum, & diametrum transuersam cum dimidio eiusdem.

Sit quodlibet Conoides, seu rectangulè, seu obliquè sectum ABC Dico conum inscriptum item ABC habere eam proportionem ad conoidem, quam diameter BA cum diametro transuersa AD, tota inquam BD ex istis compacta habet ad duas, nimirum diametrum BA, cum diametro transuersa BD, & huius dimidio FD, idest EF.

Progress. 1. Sit itaque conus Z, cui conus BAC habeat eam proportionem, qua BD respicit FE, Dico huic cono conoidem hyperbolicum esse æquale; quod si tale non est, erit aut maius conoides, aut minus, sed neutrum esse potest; Ergo erit æquale.

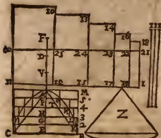
Progr. 2 Nam maius sit, si id esse potest, & inscribatur in conoide figura inscripta, & circumscripta, ex multis cylindris constans eiusdem altitudinis. Quales inscripti sunt SK, LG, & quales circumscripti BG, KH, adeoque multiplicentur ex propos. 14. tract. 33. vt figura circumscripta super inscriptam minus addat, quam conoides super conum Z. Fiatque CM cylindrus ex frustis cylindrum B 2, G 3. & cæt. constans æqualis, tum altitudinis, vt priores. & æqualis basis. Quia ergo circumscripti cylindri minus excedunt inscriptos, quàm conoides conum Z. & hæc circumscripta cylindrorum multitudo est maior, quam conoides erunt etiam inscripti cylindri maiores cono Z.

Progr. 3. Et quia vt diximus supra propos. 7. tract. h. Cylindrus MC ad conum ABC inscriptum habet proportionem triplam habebit eam, quam tripla DE, vt sũt lineæ III ad DE, & vt FE ad TV, quia TA est tertia pars diametri AE, & AV tertia pars totius AF. Quia itaque cylindrus CM est ad conum inscriptum BAC, vt EII ad DE, at conus inscriptus BAC ad conum Z habet eam proportionem, quam BD ad FE ex *æquo* cylindrus CM ad conum Z erit, vt ESS ad FE. Verum illæ III lineæ habent eam proportionem ad DE, quam BF ad VT, vt dixi. Ergo *permutando* DE ad VT eam habebit proportionem, quam IIT lineæ ad BF, idest quam cylindrus MC ad conum Z, idest DA ad VA, idest 3. ad 1. & BA ad AT, idest 3. ad 1. quoniam DA, & BA componunt BD: at AV, & AT componunt VT.

Progr. 4 Cylindrus itaque primus B 2 pars magni cylindri, cuius altitudo MB ad primum inscriptorum EK eiusdem altitudinis habet proportionem, quam bases circuli, & circuli, quam quadrata eorum, & quadrata, quam quarta pars quæ tandem pro latere habent applicatas BS, & GK, itaque cylindrus B 2 ad cylindrum EK habet eam proportionem, quam applicatæ quadratum BS, quæ etiam radius est ad quadratum applicatæ KG ijsdem muneribus fungentis; Quadratum verò BE ad quadratum GA habet eam proportionem, quam rectangulum ex DB, BA quale est 10. 11. ad rectangulum DG, GA quale est 12. 13. ex 6. Tract. 24. Propterea que cylindrus B 2. ad EK cylindrum erit, vt rectangulum 11. 10. ex DA, & BA ad rectangulum 12. 13. ex GO, & GA lateribus. Eodem argumento vteris ad ostendendum cylindrum G3. vel quod idẽ B 2. ad cylindrũ GL habere proportionẽ, quam rectangulũ ex DA BA, sc. 10. 11. ad rectãgulũ ex HD, HA, quod est 14. 15. & sic de alijs; Quare omnes V. g. ex 19. Tr. 27. quatuor cylindri æquales B 2. G 3. H 4. P 5. ad õnes V. g. cylindros inscriptos EB, GL, HL, PO habebũt eã proportionẽ, quã quatuor rectangula æqualis 11. 10. ad quatuor 12. 13. 15. 14. 16. 17. 18. 19. Dixi autẽ quatuor V. g. tot. D. erunt quot cylindri

inscripti, & tot inscribentur, quot oportet.

Progr. 5. Ducta itaque 21. 8. interuallo 25 12 quantum est as habebimus seriem quadratorum decrescentium 8. 10. & 25. 13. & cęt. vsque ad 21 18. & rectangulorum item decrescentium 11.25 vsque ad 21 19. quæ decrescunt: rectangula quidem vnico decremento arithmetico quoad latitudinem, at quadrata duplici decremento arithmetico secundùm vtrumque latus longitudinem, latitudinem; Quare ex 12. tract. 27. erunt integra rectangula V. g. quatuor ad deficientia eiusdem numeri, & altitudinis dupla, vt etiam potes videre. Nam deficientia 12 24. 15 23. 17 22. 19 21. includunt decem partes rectanguli quale est 19. 21. At quatuor æqualia primo 11 25 maiori, viginti partes includũt. Vnde si vtrisque addatur rectangulum 11 25 erit proportio quinque ęqualium ad quinque decrescentes minus, quam dupla.



Sic omnia quadrata V. g. quatuor æqualia comparata 4. quadratis decrescentibus sunt magis, quam tripla, vt ex prop. 14. Tract. 27. vt & etiam ex calculo colligere licet, nam quatuor quadrata æqualia ad decrescentes se habent, vt 100. ad 30. At si vtrinque addas idem quadratum sunt minus, quam tripla cum se habeant, vt 125. ad 55.

Vnde simul quadrata æqualia cum rectangulis æqualibus ad quadrata decrescentia cum rectangulis decrescentibus habebunt proportionem 2. ad 1. & magis, quam 3. ad 1. quæ proportiones aggregatę ex 32. Tract. 17. sunt, vt 12. ad 5. & ideo habebunt proportionem magis, quam 12. ad 5. Vel plusquam diametri DA ad partem eius VT, quæ ex progr. 3. est, vt 2. ad 1. scilicet DA ad AV, & 3. ad 1. idest AB ad AT; si tamen ab vtrisque quadratis, rectangulisque æqualibus, & quadratis, rectangulisque inæqualibus decrescentibus excludas maximum. At si includas iam quadrata, rectanguliaq; integra, & maxima erunt respectu quadratorum decrescentium, minùs quam 2. ad 1. & quam 3. ad 1. scilicet minus, quam 12. ad 5. vel DA ad VT.

Progr. 6. Propter hoc cylindri quoque æquales, si compares V. g. quatuor ęquos quatuor decrescentibus exclusis maximis V. g. 2 2. G 3. H 4. T 5. ipsis 22 OL KN TO qualis comparatio est inscriptorum erit eorum æqualium proportio ad decrescentes inscriptos plùs, quam 12. ad 5. quam DA ad VT. At si compares multitudinem cylindrorum, æqualem æqualium numero cylindris decrescentibus, sed inclusis maximis V. g. 5. qui faciunt cylindrum CM ad quinque 2 · 2M LT NP OA veluti comparantur æquales cum circumscriptis, eorum proportio est minus, quam 12. ad 5. idest minus, quam DA ad VT. Eò quia, referantur, ita cylindri MC ad cylindros inscriptos conoidi, & circumscriptos decrescentes, vt rectangula æqualia rectangulo 10. 11. respiciunt rectangula decrescentia, dummodo æqualia numero sumantur, vt progr. 4. ostensum est.

Prog. 7. Cum ergo cylindri a 2. & cæt. idest totus MC ad figuram cylindrorum inscriptam maiorem habeant proportionem, quam DA ad VT habebit quoque maiorem proportionem ad illam inscriptorum cylindrorum figuram, quam ad conũ Z? Siquidem progr. 3. ad conum Z ostensus est cylindrus MC habere proportionem, quam DA ad VT. idest quam 12. ad 5, si enim quatuor cylindri A 2. G 3. & cæt. quatuor decrescentibus comparati minoribus illis K2, CL, HN, & cæt. dicunt maiorem proportionem, quam DA ad VT, quantò magis, si omnes, quibus constat cylindrus CM, comparentur omnibus inscriptis, qui semper minores numero sunt, nempe vna vnitate minùs cum vidimus cylindrus in conoide inscribi nequeat, qui habeat altitudinem PA.

Progr. 8. Hinc autem sequitur conum Z figurã inscripta esse maiorem, cum illi cylindrus totus MC, quia figuræ inscriptæ dicit maiorem proportionem, quòd eam secundùm plures eius partes contineat, quàm ad conũ Z; hoc autem esse nequit, cum ostensum sit progr. 2. figuram cylindrorum inscriptam cono Z esse maiorem.

Progr. 9. Si verò sit conoides minus cono Z circumscribatur, & inscribatur talis figura solida ex multiplicatis cylindris, vt circumscripta addat super inscriptam quantitatem talem, quæ sit minor quantitate illa, qua conoides à cono Z, in quantitate deficit. Itaque circumscripta cylindrica figura erit minus cono Z, quia enim conoides cono Z est minus, & inscripti cylindri minus sunt, quam conoides, & minus circumscripti cylindri excedunt inscriptos, quam conus, conoidem, vtiq; conus circumscriptis cylindris maior erit, & ipsi erunt illo minus.

Progr. 2. Deinde ea omnia considerentur, quę prog. 3. 4. 5. dicta sunt.

Progr. 10. Cum ergo omnes cylindri æquales MC cylindrum magnum componentes ad quinque cylindros circumscriptos minorem habeant proportionem, quam DA ad VT, siquidem probatum est progr. 4. rectangula æqualia quale est primum 10. 11. ad rectangula decrescentia 11 18. minorem habere proportionem, quam tripla, & dupla scilicet 5. ad 12. nimirum quam DA ad VT si vtrisq; addantur maximo quale 10. 11. & ideo cylindri quoque æquales cylindrum CM componentes, qui ex progr. 3. cylindris decrescentibus eadem proportionem dicunt, quam rectangula ęqualia decrescentibus, si vtrisque addantur maximi, vt hic facere oportet, quia primus 2 2 cylindri CM est etiã circumscriptus, dicent proportionem minorem ad cylindros decrescentes, quam DA ad TV.

Et hinc est quod cylindri circumscripti simul sumpti erunt maiores, cono Z, ad quem cylindrus MC dicit eandem proportionem. quàm DA ad TV ex progress. 3. Sed ex progress. 9. maior conus Z, probatus est. quam cylindri circumscripti simul ergo esset maior, & minor, quod est absurdum.

Cum itaq; conus Z, neque maior, neq; minor esse possit conoide hyperbolico conus Z. & conoides erunt æqualia, ideoque quam proportionem dicit conus inscriptus BAC ad conum Z eam dicet ad conoidem; sed ad conum Z dicit proportionem

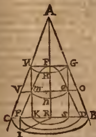
quam

quam BE ad BE. Ergo conus inscriptus BAC dicet ad conoidem Hyperbolicum eam proportionem, quam BA ad BD; nimirum quam diameter EA, & transuersa diameter AD habet ad diametrum eandem BA, & transuersã diametrum AD cum dimidio eiusdem transuersæ diametri, nimirum DF.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Quæcumque rectæ ducuntur in conoide hyperbolico rectangulæ ad planum hyperbolæ generantis usque ad ambitum coni Asymptotici sunt æquales inuicem.

SIt conus ABC rectus, Asymptoticus sectus plano per axem exhibente sectionem hyperbolicam DEF, quæ conoidem generet, & sint Asymptoti eiusdem AB, & AC, fiant sectiones GHN rectę ad axem EA, quę per verticem hyperbolicum transeat, & aliæ, vt SIC, quæ ei æquidistent, & à puncto S, quo secat Hyperbolam generantem normales ad SIC erigantur, vt SF. Dico EF, & aliæ similes si adsint esse singulę ęquales lineę FN, & ideo inuicem.



Probatur. Nam rectangula BE, & SC singula sunt æqualia quadrato FN, vt ex prop. 46. Tract. 24. de conicis, sed etiam quadrata ex AS, & SC sunt æqualia quadrato SI. Ergo quadratum ea SI, & FN sunt æqualia; Vnde & latera eorum SI & FN erunt æqualia.

THEOR. III. PROPOS. XXXII.

Solidum frustum asymptotici coni conoidem Hyperbolicum cingens æquat cylindrum cuius axis æquet axem Hyperbolæ generantis, & radius basis æquet lineam tangentem eius verticem, & in ambitum Asymptotici coni terminantem.

SIt vt supra conus Asymptoticus BAC cingens conoidem hyperbolicum DFS, sitque cylindrus SKGHN, cuius basis GHN habeat pro radio FN verticem hyperbolę generantis tangentem, & in conum asymptoticum BAC terminantẽ. Altitudo verò, seu axis sit AF idem, qui etiam est axis conoidis. Dico spatium NCIS DGF frustum solidum asymptotici coni, cingens conoidem cylindro descripto SKGHN esse æqualem.

Prob. Solidi cylindri cylindrum KG diuidentes, & frusto KNOB annuli circũscripti æqualis altitudinis semper erunt æquales ex prop. 23. b. Cor. vt habes. Quamobrem ex propos. 25. Tract. b. & corpora etiam ipsa erunt æqualia.

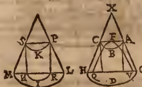
Quod autem bases sint æquales ostenditur. Nã annulus quicumque CISDA basis corporis cingentis æquat NHG quãcumque basim cylindri; eo quia ex præc. EI æquet NF. Et prop. verò 18. tract. 30. XE EI circulũ æquat annulus CIBDE: siquidem circ. ex EI radio, & circulus ex EB radio æquant ex IE circulum, idest ex CE: ablato itaque ex EB circulo restant circulus ex EI, seu ex FN ex præced. ęquales lineę, & annulus CIBDB basis corporis conoidem cingentis æquales.

Idem verò dicas de quolibet alio spatio, siue maiori, siue minori, vt de spatio FNVMNCOOF, qui eadem ratione æquatur cylindro MC.

THEOR. IV. PROP. XXXIII.

Conoides Hyperbolicum ijsdem positis æquatur spatio, quod Cylindrum prædictum circumcingit.

PRobatur. Frustum coni ACBGH, in quo conoides, æquatur frusto coni ESPLEM, in quo cylindrus ex hypoth. & spatiũ FAGVQHCF cylindro BBSNB æquatur P ex 31. b. Aufer ergo à frusto coni PBSMI cylindrũ BPBBN, & à frusto coni OABCHD spatiũ circumcingens conoidem equale cylindro, remanebitque conoides PVQ æquale spatio solido circumcingenti cylindrum PKSMNIL.



COROLLARIVM.

QVare colligitur, quod habita cognitione Asymptotos conoidis hyperbolici, & basis eiusdem, facilè deueniemus in cognitionem eius soliditatis. Asymptotos autem reperiemus ex propos. 47. Tract 24. de conicis sectionibus. Habita autem diametro eã habebimus quoque ex propos. 11. Tract 25. basim GDH datis verò asymptotis soliditatem quoque coni venabimur ex prop. 7. b. inquirendo soliditatem cylindri illum conum comprehendis, cuius conus GDHE est tertia pars. Pariter id efficiemus de cono ABCX sublata altitudine conoidis, & ablato hoc cono ABCX ab illo GDHX erit frustum ABC GDH ex quo auferemus cylindrum PBERIN, & residuum ex præced. erit soliditas Hyperbolæ.

EXPENSIO VI.

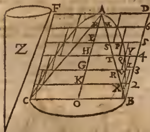
De Conoidis Parabolici proportionibus.

SOlidum Parabolicum efficitur, à parabola circa suum axem versata vsque dum ad terminum vnde discessit redeat, vt diximus Tr 35. in def. Ex. 4. Quare si secetur plano rectangulo ad axem illa sectio erit circulus, si secetur plano obliquo illa sectio erit Ellipsis, vt probauimus Tract 35. Expēl. 4. sed modo de eorum soliditate agendum est.

THEOR. I. PROPOS. XXXIV.

Conoidale Parabolicum quomodocumque sectum, seu rectè, seu obliquè habet proportionem sesquialteram ad conum inscriptum.

ESto conoidale parabolicum ABC, in eoque inscriptus conus item ABC, sitque superficiei secantis diameter BC, in qua tum conus, tum conoides existat. Axis verò AO, & A erit vertex, tum trianguli, tum conoidalis: Circa verò conoidem cylindrus sit eiusdem altitudinis, ac conoides, conusque inscriptus habens latera BD, & FC parallela axi AO; basim verò BC, cono, conoidique communem.



Sitque conus Z sesquialter cono BAC. Huic cylindrus erit duplus, quia est triplus coni inscripti, est sicut numerus 3. ex 7 h sesquialter numero 2. sed triplo numeri 2. nempe 6. est subduplus, numerusq; ipse 6. duplus numeri 3.

Dico itaque hunc conum Z sesquialterum cono BAC esse æqualem conoidi prædicto.

Progr. 1. Quod si talis non est, erit conus Z, aut maior, aut minor conoide, sed nec maior, nec minor esse potest; Ergo æquale erit cono ipsi conoides nam si est maior, sit maius quantitate P.

Et Probabitur. Quod non possit esse maius conoides cono Z sine implicantia, & absurdo. Circumscribatur itaq; & inscribatur conoidi figura ex frustis cylindrorum constans, ita vt quodlibet frustum habeat basim aliquam ex applicatis ordinatim ad axem AO, & sint æqualis altitudinis, vt est cylindrus IO inscriptus, LK circumscriptus, habens pro diametro basis suæ circularis applicatam IK; Tot verò inscribātur, & circumscribantur: donec spatium, quo figura circumscripta superat inscriptam ex prop. 14 Tract 33. minus sit, quàm quantitas ea, qua conoides superat conum, & sic figura inscripta erit maior cono Z cum minus differat à quantitate maiori conoide, quam conus Z à conoide maiori, quàm conus Z.

Progr. 2. Tunc, quia cylindri sunt omnes æqualis altitudinis ea ad inuicem proportione gaudebunt, qua gaudent bases ex prop. 5. Tract. h. Proportio verò basium, quæ sunt circuli eadem est quæ quadratorum ex prop. 40. lib 6. quarum semilatera sunt applicatæ BO, & KI; quadrata verò applicatarum ex prop. 5. tract 34. eam habent proportionem, quam interceptæ diametri portiones: Itaque ita est cylindrus O 2 ad cylindrum IO, vt basis, seu circulus, cuius diameter, & semilatus quadrati ambientis BO ad circulum similis rationis IK: sed vt circulus ad circulum, ita quadratus ad quadratum, & ex 18. l. . quarta eius pars, quale est quadratum, cuius latus est BO ad quadratum, ai, & ita intercepta portio diametri AO longitudine ad AK ex eitat. 5. Tract. 34 & ita etiam ob parallelismum linearum in triangulo BAO linea 2 K, vel BO ad XK. Quare ex 16. l. 5 O 2 cylindrus ad cylindrum O 1 erit, vt 2 K ad KX. Idem autem dicendum de alijs cylindris. Nam ita est cylindrus 3 X ad cylindrum XV vt quadratum 3 G, vel BO ad quadratum VG, & ita est AO ad AG, & BO ad RG, & ideo ex 16 l. 5. est cylindrus X3 ad cylindrū inscriptum XV, vt BO, vel æqualem 3 O ad GX. Et eadem ratione cylindrus G 4 ad cylindrum RQ, vt BO, vel H4 ad TH, sicque de alijs vsq; ad MN vbi nullus est cylindrus inscriptus.

Progr. 3. Si ergo omnes lineę in vnam colligantur longitudine ęquales, qualis vna ex ipsis BO si comparentur cum lineis omnibus ab axe OA ad coni latus deductis, quarum vna est XK habebunt proportionem duplam; quia ea diagonalis secat omnes simul sumptas per medium, ita vt omnium linearum simul media pars sit intra BAO alia extra. Cum ergo lineę ęquales qualis BO habeant ad quasque in cono deductas qualis XK est vna, proportionem duplam, etiam cylindri simul omnes quinque æquales diametris basium, & altitudine ad quinque cylindros in conoide inscriptos consequentur proportionem duplam.

Nam vt OI est ad O 2 sic XX ad OB, & vt KX ad 2, & sic GX ad OB, ergo ex pro 25. l. 5. vt OI & XV ad O 2. & ideo ad duplū O 3 sic KX, & GR simul ad OB, & ideo ad eius duplam OB, K2 & sic dicas de alijs gradatim procedendo.

Progr. 4. Quare totus cylindrus illis constans, & insuper cylindro DN; nempe cylindrus DC habebit ad inscriptos quinque proportionem plusquam duplam: Idem vero cylindrus erat coni duplus, vt supra dictum est, quia factus est coni BAC sesquialter. Figura igitur inscripta ex cylindris minor est cono Z; quod est absurdum, cum poneretur maior, eo quia circumscripta figura minus adderet super inscriptam, quam conoides super conum Z, & ideo cum figura circumscripta sit maior conoide etiam inscripta erit maior cono Z, cum tamen probata sit minor.

Progr. 5. At si aliquis asserat cono Z esse minus conoides. Figura iterum eodem modo inscribatur & circumscripta superet inscriptam ea quantitate quæ sit minor, ea qua conoides deficit à cono Z, eritque figura circumscripta minor cono Z, siquidem figura inscripta est minor conoide, quæ & exceditur à circumscripta minus eo, quo conus excedit conoidem, & ideo necessariò conus Z est maior ipsa figura circumscripta.

Progr.

Progr. 6. Sit itaque primus cylindrus figuræ circumscriptę O S, secundus SL, tertius OY, & cęt. itaque frusta cylindrorum æqualium tot numero O S, K 3, & N 4, & cęt. Itaque, vt est frustum O S ad cylindrũ OB, vt primus circũscriptor. Sic basis circularis, cuius radius SO, vt frusti cylin. dri, ex SO ad eundẽ circulũ, vt basis cylindri circũscripti vtque circulus ad circulũ, ita quadratum ad quadratum, & sic quarta pars quadrati, cuius latus est radius SO ad quartã partem eiusdem quadrati ex 18. lib. 5. vt prius, est enim eadem sub duplici consideratione, vnde habet proportionem æqualitatis. Non sic verò cętera frusta cylindrorũ comparata cum cylindris circumscribentibus. Nam ita est a 3. cylindrus ad SL cylindrum, vt circulus cuius radius B K, idest SO ad circulum TK, & vt circulus ad circulum, ita quadratum ad quadratum, & eius quarta pars, cuius latus B A ad alterius quartam partem, cuius latus Ia, vt autem quadratum B K ad quadratum IK, ita est AO ad AK, & ita ob parallelas K S. vel BO ad XK, & ita in quibuscumque arguendum: quare omnia frusta cylindrorum æqualium inter BN ad omnes cylindros circumscriptos eam obtinebunt proportionem, quam latera æqualia omnia qualis BO B A ipsorum cylindrorum radij ad ductas SO, Ka, RG, & cęt. ab SKE ad latus coni inscriptivt supra pr. 3. ex prop. 25. l. 5.

Progr. 7. Lineæ verò æquales A B inclusiuè vsque ad 6. sunt duplæ ad alias ab X vsque ad N si simul in vnam longitudinem redigantur, vt dixi. Si vero addamus vtrisque SO propter cylindrum primum SA, qui vnus ex circumscriptis est, & vnus ex æqualibus cylindri DC, erunt omnes à A & NO vsq; ad 6. sex lineę sex lineis inter SN minus quàm duplæ, cum hę postremæ non dimidio crescant per additionem SO, sed æqualiter. Quadere cylindri quoque æquales frusta cylindri DC ad cylindros circumscriptos erunt minores, quam dupli.

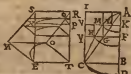
Progr. 8. Sed cylindrus DC ex illis sex cylindris æqualibus constans est duplus coni Z, ergo ex prop. 7. lib 5. figura circumscripta est maior cono Z, cum cylindrus maior CD ad figuram circumscriptam dicat minorẽ proportionem, quod est cõtra id, quod supra dictum est prog. 5. conum Z esse maiorem ipsa figura circumscripta. Cum ergo conus K, nec maior, nec minor sit conoide erit æqualis ipsi conoidi;. Quare cum sit triangulo inscripto ZAC sesquialter, etiam conoides cono inscripto erit sesquialterum.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

Conoides parabolicum, & singulæ partes ipsius æquantur partibus coni prismatici eandem altitudinem, & eandem basim obtinentis.

Sit semiparabola ABC, quæ sufficit ad demonstrationẽ, & intelligatur reformare corpus parabolicum ABCD, cuius partes sint AKM, & FAH, deinde sit prisma TNBS, ex rectangulo GASI, & ex triangulo ZAC, in quo sit conus prismaticus ex pr. 36. h. RSOTE. Dico, quod & totum ABCD ęquatur prismatico cono RSTB, & singulæ eius partes KAM partibus PQSZR intercipientibus eandem altitudinem.

Pr. Nam ex pr. 59. tr. 24. Applicata axi FH, & MK & quęcũq; alia dãs pũcta in parabola M, H est media proportionalis inter KL, & AV inter, & FG, FY, & ideo ex pr. 19. l. 6. rectangulum KL, KV æquat quadratũ AM, & ita dicas de rectangulo FG, & FY, quod equat SH quadratum, & de quocumq; alio. Omnis verò rectangula ex KL, & KV, & AY, FG, & cęt. idest parallelepipeda æqualta super eas bases erecta ex propos. 8. Tract. h. æquantur parallelepipedis æqualtis ex quadratis MP. & MK singula singulis, & ita quartę ellipsium in illis inscriptæ quartis circulorum in quadratis inscriptis ex prop. 16. tr. 30.



& ideo solidę quartæ cylindrorum solidix quartis ellipsium æquabuntur, singulæ singulis æqualtis ex propos. 37. Cor. tr. h. Ideoque ex prop. 19. l. 5. quadrans cylindri ex quadrante KM æquabitur quartæ cylindri PQX, & ceteris cæteri, quia æquealti extolluntur super æquales bases quadrante, nimirum ex radio SM, & quadrante ellipsis descriptæ in rectangulo PQX, quia scilicet dicunt eandem proportionẽ tũ bases, tũ solida super KM, & QPX bases erecta, quam quadratum ex KM, & rectangulum ex PX. idest XV, & PQ idest XL ęqualis.

Cum itaque omnia solida æquealta inscripta, vel circumscripta quartæ parti conoidis ACBD æquent omnia solida inscripta in prismatico cono Z OTB, & hęc si omni possibili numerositate multiplicentur tandem accessura sint ad æqualitatem quadrantes quidem solidi quartæ parti conoidis; Parallelepipeda verò ex quartis ellipsium prismatico cono ZSOTE sequitur, vt etiam quarta pars conoidis AHCBO, & prismaticus conus RSOTB sint ęqualia. Vnde si, & prismaticus conus quadruplicetur super quatuor quadrantes TOE ellipsis integræ, vel circuli integri describendo, & sic quoq; parabolicum conoides. Etiam quadruplicatum conoides Parabolicum, & prismaticus conus æquabuntur ex prop 18. lib. 5.

Quod, & de singulis partibus intelligitur, cum valeat idem argumentum quocumque loco æquè alto tamen, ducantur plana secantia, tum conum prismaticum, tum conoides parabolicum. Possemus hanc propos. reducere ad impossibile. Sed hæc sufficiet ne hoc argumentum reductionis ad impossibile continua iteratione repetatur.

EXPENSIO VII.

De sphæroidibus.

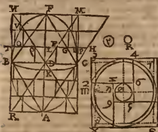
Vsus sphæroicorum corporũ frequentior est in comercijs humanis, ideo eius cubicatio magis quoque vrgens est, talis verò est ex nostro ingenio, lumine tamen desumpto à Luca Valerio, quod idem aliter probat.

THEOR.

THEOR. I. PROP. XXXVI.

Semisphæroide si sit conus inscriptus eiusdem basis, ac circulus semiaxe sphæroidis ductus, & altitudo sit eadē ac alterius semiaxis, hic conus erit æqualis residuo cylindri eiusdem basis, ac altitudinis deducto ipso sphæroide.

Sit sphæroides ABCV, & sit eius dimidio CPB inscriptus conus BPC, cuius basis CBA, ea diametro axis V. g. minoris, at altitudo, vt DF alterius semiaxis maioris (quod, & è contra esse potest basis ex axe maiori, & altitudo semiaxis minoris) Sit deinde cylindrus MB eiusdem basis CBA, & eiusdem altitudinis FD; à quo sit ablatum, semisphæroides CIFOB, & remaneat scaphium CIBOMN. Dico conum CPB esse æqualem residuo scaphio CIFOBMN.



Prodatur, & Progr. I. In Ellipsi rectangulum HB, LB est æquale quadrato LS ex prop. 19 lib. 6. eo quòd LI sit ex prop. 60. Tract. 24. media proportionalis inter LH, & EO. Sed LH æquatur ipsi QP, & EO residuum residuo QT; siquidem tota HL, EO, vel LO æquatur toti PT ob parallelas CH, & PB, & CM, & BN: Ergo rectangulum QT, & QP æquatur quadrato LI: Vnde etiam quatuor quadrata ex LT, & quatuor rectangula TQ, & QP equabuntur. Fiat itaque quadratum 38. ex diametro CB, fiutque in eo quatuor rectangula ex TQ, & QP cuilibet lateri applicata secundùm latus maius QP, scilicet X 8 restabit 23. æquale frustum lateri Z 8. idest QT, quare si aliud rectangulum ei 32. applicetur secundum latus QP æquabitur ipsi 32. vnde latus maius occupabit lõgitudinem 34. idest QP, & remanebit portio equalis ipsi QT, & sic ages de omnibus quatuor rectangulis, relinquentq; quadratū 23 69. cuius latus 6 Z equabitur lineæ SQ, à qua ad adequandum PT equalem 3 X, duę longitudines ablatę sunt equales inuicem SP, & QT nimirum 2 Z, & 64. ab X 3; quare residuabitur 6 2 equalis lineę SQ. Describatur rursùs quadrata quatuor ex LI, idest quadratum totum OT ex 6 l. 2. vt remaneant rectāgula æqualia circumquaq; nempe quatuor rectangula ex PI, & IT qualia sunt rectangulum 37. & & 83. & cæter. Quia itaque quatuor quadrata 7 e quatuor rectangulis equantur 34. X Z, & cæt. si hęc, & illa intelligantur auferri à quadrato toto 3 X 8, restabunt equalia quadratum 69. & telarium circumquaque nempe quatuor ambientia rectangula 37. & 78. & 88. & 83 Et idem semper sequetur quoquo puncto trahas parallelam HT.

Progr. 2. Cum itaque ex 41. lib 6 Eucl. ita sit quadratum ex 3 X ad quadratum 69. vt circulus inscriptus quadrato 3 X, idest basis coni CPB ad circulum inscriptum quadrato 69. idest sectioni SQ coni; ita diuidendo erit quadratum ex 3 X ad quatuor rectangula 38. &c. residua, vt circulus in quadrato 3 X inscriptus, idest CBS ad annulum residuum, cuius latitudinis mensura est n m, vel 23. vel TQ, qui circumambit conum. Vt autem quadratum ex 3 X ad telarium, vel quadratum annulum m n, vel TQ, ita est quadratum ex 3 X idem ad quatuor quadrata ex IL qualis fuus 8 c, ob eorum supra ostensam equalitatem, & vt quadratum 3 X ad quatuor quadrata ex LI: ita circulus inscriptus in quadrato ex 3 X, idest basis coni CAB ad circulum ex diametro ST, idest LT; & diuidendo erit quadratum ex 3 X ad telarium residuū ex quatuor rectangulis 37. 83. & cęt. vt circulus inscriptus in 3 X ad annulum residuum, cuius latitudo t m, vel PI, qui circumambit sphęroidem. Quadratum autem ex 3 X ad quadratum 6 9. dicit eandem proportionem, ac ad tellarium ex quatuor rectangulis sc. 37. & cęt. ob eorum ęqualitatem supra ostensam. Ergo etiam circulus inscriptus in quadrato ex 3 X ad circulum inscriptum in 6 9. dicet eandem proportionem ac ad annulum, cuius latitudo t m, vel SP. Quapropter ex 7. lib. 5. equabuntur annulus planus t m, & circulus in 6 9 inscriptus, idest circulus QS, qui est sectio coni basi parallela, ideoque ablatis æqualibus 6 9. & annulus, cuius latitudo t m remanebunt æqualis circulus radio e t, vel LI, & annulus, cuius latitudo n m, vel S P. sicut æquantur annulus IP circumambiens sphęroidem ac circulus basis coni, vel sectio, quæcumque eius QS quæ per idem planum secans sphęroidem, conum, & cylindrum sit facta.

Progr. 3. Cogitentur itaque cylindrus, conus, & sphęroides secti planis PT ęqui distantibus, quę diuidant cylindrum in segmenta ęqualis altitudinis, & in cylindros circumambientes ęqualtos in eadem numerositate. Quia itaque, vt circulus ad circulum, ita cylindrus eiusdem altitudinis ad cylindrum, qui in illis sint collocati ex propos. 5. h. circulus PT ad circulum QS erit, vt cylindrus SP, ad cylindrum QD. Quare diuidendo circulus PT ad annulum residuum planum ex QT ambientem conum, cuius latitudo SP, vel TQ, vt cylindrus PCTS ad annulū residuum equealtū similiter ambientem conū SPCTQ ac sed circulus PT habet eandem proportionem ad annulum planum SP QT, quam ad circulum IO ex applicata LI tamquam radio, quia supra progr. 2. ostensi sunt ęquales isti circulus ex IO, & annulus ex SP, QT ambiens conum. Ergo etiam cylindrus PS ad annulum solidum PSCDBT, & ad cylindrum IV ex basi IO eamdem dicent proportionem. Ergo annulus solidus DSPTQS, & cylindrus IV in basi IO ex 7. l. 5. equabuntur. Ablatis itaque istis equalibus cylindrus IV ex basi IO, & annulus solidus SPDSQT ęqualia restabunt cylindrus ęquealtus QD super basim QS circumscriptus cono MMD, & annulus IPVTO residuus à cylindro IVO.

Progr. 4. Semper igitur perseuerant equales quicumque cylindri circumscripti cono, & quicumque circumscripti annuli scaphico residuo sphęroidis sc. QD cylindrus, & annulus solidus sphęroidem circumcingens PIOVT. Fiāt itaque cylindri

cylindri circumscripti sphæroidi, & cono equalel, donec omne spatium possibile, quod inter conum eiusdem, & vltimam eorum superficiem expleant; ita quod nullum spatium possibile remaneat inter ov superficiem annuli, & sphæroidis rou superficiem; sicut nec inter superficiem cylindri, circumscripti, & coni; Iam æquabitur multitudo cylindrorū cono circumscriptorū ipsi, & sphæroidi annulorum sphæroidem ambientium; cum enim omne spatium possibile remanens inter ipsos, & corpora, quæ vestiunt, abolitum sit, iam ipsi æquabunt: Quare cum multitudo cylindrorum omnia possibilia æquetur multitudini annulorum, cum data quacumque multiplicatione perseuerent æqualia, etiam conus rec, & inuolucrum solidū cmn sopt sphæroidem circumcingens æquabuntur.

Quod est ostendetur redigendo ostensionem ad impossibile. Nam si conus crs, & scaphium cmnsopt sunt inæqualia, sit minor conus crs, & describatur circa ipsum talis multitudo cylindrorum donec differentia z inter ipsos, & conum sit minor, quam differentia inter scaphium, & conum, quæ sit y. Itaque figura cono circūscripta minor erit scaphio mns sopt cum minus differat à cono minori, quam scaphium; Ergo etiam minor, quam cylindri solidi pi vot scaphio circumscripti, quia minus differt à quantitate minori, quod contra præcedentem demonstr. est, in qua cylindri solidi coni, & annuli solidi scaphij ostensi sunt æquales. At si aliquis affectat scaphium cono esse minus. Iste inscribat tot solidos annulos in scaphio, tot cylindros in cono donec differentia z inter ipsos, & conum sit minor, quam inter conum, & scaphium. Tunc, quia maior est conus, & cylindri coni inscripti minus differunt ab eo, quam ipse à scaphio erunt maiores, quam scaphium. Ergo multò maiores erunt ipsa figura cylindrorum scaphio inscripta, quod probatum est supra impossibile. Ergo conus crs scaphio cmnsopt, neque erit maior, neque erit minor.

THEOR II. PROP. XXXVII.

Semicylindrus semisphæroide circumscriptus se habet ad semisphæroidem, vt 3. ad 2. ad conum verò inscriptum, vt 2. ad 1.

PRobatur. Nam semicilindrus am se habet ad conum cra. vt 3. ad 1. ex propos. 7. Tr. h. Quare ad residuū ablato cono se habebit, vt 3 ad 2. sed inuolucrum sphæroidis solidum cmnsopt est equale cono crs ex dictis; Ergo erit ad ipsum cylindrus, vt 3. ad 1. sicut est ad conum, quare ad reliquum, scilicet sphæroidem ablato scaphico se habebit, vt 3. ad 2. Sic dicas de alia medietate sphæroidis, & cylindri eam circumscribentis; quare ex prop. 18. lib. 5. erit duplus cylindrus lm ed sphæroidem totam fcba, vt 3. ad 2. Quapropter ad conum inscriptum, qui est 1 respectu cylindri se habebit, vt 2. ad 1. ex propos. 29 & 30. Tr. 17.

COROLLARIVM I.

HInc est, quod idpoteris asserere etiam si insectiones, non fiat per axes, & cylindrus obliquus, & conus scalenus, & bases ellipses. Nam erunt ellipses similes, vtpote, quia sunt parallelæ, tum quæ fiunt à cono, tum quæ fiunt à cylindro, tum quæ sunt sectiones sphæroidis ex propos. 4. & 11. & 21. Tract. 15. Vnde eodem prorsus argumento poteris concludere cum sit, vt rectangulum ad rectangulum ex axibus ellipsium, ita ellipsis ad ellipsim sufficit innuisse. Tu ex tuo ingenio argumentum si placet, dispone.

COROLLARIVM II.

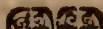
HInc patet, quæ dicta sunt de sphæroide, de sphera quoque verificari; siquidem oi est etiam in circulo media proportionalis inter vt, vel na, & ta cum on æquetur ipsi po ob rectangulum æquicrurum nop, & na residuo on, & oa radio pb, & ob parallelas pt, & bx, lineæ ixi Rectangulum verò no, & on æquatur quadrato oi ex propos. 35. lib. 3. Quare ex propos. 19. l. 6. oi; vt in prop. 36. erit media proportionalis inter tv, & at, quia ot æquat no, vel op, sicut ao equat pb, scilicet tota at totam ob, vel æqualem oa, quæ etiam ob suas partes equales lineę ob ipsam æquat sicut on residuum residuum vt.



COROLLARIVM III.

HInc etiam sequitur, idem dicendum de sphęroidibus, quæ obtineant sectiones per axem vtrasque ellipsim; quod scillicet fit cono, cuius basis sit ipsa ellipsis, quæ per axem transit; & alter axis altitudo ipsius, dupla. Nam omnes ellipses, vtpote parallelę in ipso sphęroide erunt similes, & ideo rectangula ipsam circumambientia similia, sicut in ellipsi circulari sunt quadrata. Vnde id quod enunciatur de circulis circulo maximo parallelis eodem pacto concludetur de ellipsibus ellipsi maximę parallelis transeunti per axem. Omnes autem ellipses basi parallelę similes erūt, quia tale corpus ellipticum madne intelligitur formari ellipsibus axi parallelis, vt ako & suo ambitu per ambitū alterius ellipsis per axem ductę crp transeuntibus. Sit ergo talis ellipsis okm, & ellipsis axi parallela arkn, & in ipso ellipsis fra parallelæ alteri ellipsi per axem pac. Dico hanc ubs ellipsim esse similem crp ellipsi. Quod ostenditur. Nam dia rectangulum est ad dga rectangulum ex propos. 6. Tract. 24. vt ik quadratum ad gr quadratum in ellipsi dga, sed vt dia rectangulum ad dga rectangulum, ita est crp rectangulum ad ugr rectangulum ex prop 48. Tract. 24. Ergo ci p rectangulum est ad nrp rectangulum, vt ik quadratum ad gr quadratum. Vnde, & ipse latera erunt proportionalia cum quadrata, & rectangula sint similia. Vnde ex pens. 7. de similitudine sectionum con. Tract. 24. in præfatione Ellipses crp, & ubs erunt similes.





THEOR. III. PROPOS. XXXVIII.

Frustum sphæroidis æquat duas tertias partes cylindri ambientis frustum deducta portione coni eiusdem altitudinis frusti sphæroidis eodemque plano resecti, qui tamen conus integer habeat pro basi sectionem sphæroidis per axem, & altitudinem alterum axem.

SIt frustum sphæroidis AXC, cuius centrum E, & frustum cylindri eiusdem altitudinis MS sit FH, & detrahatur ei frustum coni HTLG eiusdem altitudinis ME, qui cylindrus, & conus consequantur eandem basim circulum, qui ductus sit radio semiaxe DE, & pro altitudine semiaxem alterum EX consequatur. Dico, quod si frustum coni HTLO deducatur à frusto cylindri HF remansurum concauum inuolucrum quoddam, cui portio ABC sphæroidis æqualis, erit.



Probatur. Nam ex propos. 36. h. reliquum solidi FH deducto frusto sphæroidis ABC est æqualis frusto HTLG; Ideo sphæroidis frustum ABC remanens ab eodem corpore FH æquabit TNHLGF concauam soliditatem cylindri, deducto ipso frusto coni NTLG.

COROLLARIVM.

HInc dato frusto sphæroidis minori versus verticem CRA poterit eius quantitas inueniri si data sit eius sectio ellipsica per axem, nam poterit inueniri axis minor, & maior, & sic haberi basis cylindri, & coni, & ex his inuenta soliditate coni HGE, ab ea demes soliditatem coni TEL, & residuum HTLG demes ab inuenta soliditate cylindri FH, & residuum HNTLFG æquabit portionem sphæroidis CRA.

Si verò detur pars sphæroidis versus centrum ACDQ demes soliditatem frusti conici TLS à solido DF cylindri, & reliquum NHS TSLQF solidum erit æquale sphæroidis frusto ADCQ.

Si verò detur etiam DSQ demes à cylindro HQ conum GEH, & residuum erit æquale sphæroidi dimidiæ; si verò detur frustum centrum includens ACZYT inuenias soliditates conorum XES, & TXL subduces à cylindri frusto NV, & quod remanet erit æquale frusto sphæroidis AZYC.

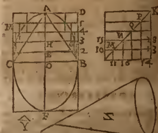
Quæ etiam possent fieri, quamuis sectio non esset rectangula ad axem; si tamen conorum, & cylindrorum bases, quæ tunc essent ellipses, essent notæ, & ideo etiam alio modo frustorum sphæroicorum soliditatem venabimur.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIX.

Hemisphæroides duplum est coni inscripti.

SIt dimidium sphæroidis ABC plano XC per centrum transeunte, seu normale axi, seu non resecti. Dico, quod est duplum coni inscripti XAC.

Præassumpt. Dictum est propos. 14. Tract. 28. quadrata duplici arithmetico decremento minuta excluso vtrique maximo ad maxima, & integra eiusdem numeri esse minus, quam 3. ad 2. Quare Gnomones, qui ipsis successiuè auferuntur, erunt ad integra eiusdem numeri magis, quam 3. ad 1. quoniam, si ea adessent iam decrescentiis ex Thesi maximis essent æqualia. Quare maxima quadrata ad illos gnomones excluso vtrinque maximo erunt minus quàm 3. ad 2. & si vtrinque addas maximum, cum sit augmentum æqualitatis quadrata ad gnomones successiuè ablatos erunt multò minus, quam 3. ad 2. cum minus comprehendant maxima de gnomonibus, quàm quod priùs quandò non erant addita maxima. At si solùm quadratis maximis vnicum addas quadratum maximum, tunc maxima ad gnomones erunt magis, quam 3. ad 2. Ratio desumitur ex prop. 14. Tract. 28. Dimidium enim rectangulum FP in fig. illius prop. deficit ad hoc vt decrescentia quadrata æquent $\frac{2}{3}$ integrorum; Quare gnomones successiuè ablati erunt magis, quàm $\frac{2}{3}$ integrorum, rectangulo dimidio eodem. Rectangulum autem illud FP est minus, quam dimidium quadrati maximi ex prop. 15 contextu Tract. 28. quare dimidium eius erit minus, quam $\frac{1}{4}$ vnius integri. Ad hoc, vt ergo se habeant integra ad gnomones remanentes, vt 3. ad 2. esset non auferendum dimidium rectangulum FP, idest minus, quam $\frac{1}{4}$ integri, aut addendū integris ipsum rectanguli dimidium & insuper dimidiū dimidij, vel $\frac{3}{4}$ totius, idest $\frac{3}{4}$ illius rectanguli, idest minus, quam dimidium integri. Additur autem maximis maximum vnicum totum. Ergo integra vnico maximo adaucta ad gnomones residuos erunt magis, quam 3. ad 2 his notatis.



Proba-

Probatur Progr. 1. Sit enim conus Z duplum coni inscripti BAC. Dico hunc conum sphæroidi dimidię esse æqualem, quod si non est æqualis sit minor conus Z, si id euenire potest, & tunc (vt supra fecimus) inscribatur, & circumscribatur multitudo cylindrorum æqualem altitudinem habentium talis, vt id, in quo circumscripta figura inscriptam excedit sit minus eo, quò spheroides dimidium excedit conum Z; Cum ergo figura solida circumscripta sit maior sphæroide dimidio BAC, & minus excedat inscriptam, quam sphæroidea conum Z, erit maior figura inscripta ipso cono Z.

Cylindrus autem CO constat ex tot numero cylindris, quot sunt circumscripti, estque ad conum inscriptum BAC. vt 3. ad 1. quare ad conum Z, qui est duplus coni inscripti se habebit, vt 3. ad 2. & cylindrus CO dicet minorem proportionem ad figuram inscriptam, quam ad conum ea minorē Z.

Progr. 2 Itaque cylindrus primus 2O. ad cylindrū primum inscriptorum OI habet proportionem, quam bases; cum sint æqualis altitudinis ex prop. 5. Tract. 34. qui sunt circuli, quorum radius maioris est BO, minoris est BI. Circuli autem habent eam proportionem, quam quadrata circumscripta ex prop 40. lib. 6. & quadrata eam, quam quartæ eorum partes ex prop. 18 lib. 5. nempe quadratum, cuius latus est BO ad quadratum, cuius latus est BI. Quadratum autem BO ad quadratum ex BI eam possidet proportionem; quam rectangulum ex OF, OA ad rectangulum ex FB, & BA ex 6. Tr. 24. idem quam quadratum OF ad gnomonem 1. D. MA 11. siquidem 10. x 13 addito rectangulo 11. 13. eiusdem altitudinis 11. 14. & 13. x æquat rectangulū ex FB, & BA, cum latus 13 14. cū latere 13 10 æquet latus FB, & 13 11 æquet lineā BA. Itaq; ablato quadrato 11. M 10. à quadrato toto ex DR efficitur gnomon 11. MX 10. æquans rectangulum FB, BA.

Ita quoque dicendum de alijs. Cylindrus enim 83. est ad inscriptum 2 B, eadem ratione vt circulares bases, & ideo vt quadrata basium, & ideo, vt quartæ partes, nempè vt quadratum O A, ad quadratum ex H G, & ideo ex 6. Tr 24. vt rectangulum FO, OA ad rectangulum FH, HA, & ideo vt quadratum ex OF ad gnomonem 15. NK 16. qui fit ablato quadrato toto ex OH. Siquidem gnomon prędictus est æqualis rectangulo FH, & HA. quia latus 15. 2 est æquale segmento HA, & 15. 18. addito 18. 14 latere parallelogrammi eiusdem altitudinis 16. 18 est ęquale lateri FH, cum latus 18. 14. sit æquale segmento OH, & ita discurre de alijs.

Itaque tot cylindri æquales tot cylindris decrescentibus comparati circumscriptis, vel inscriptis eam habent proportionem, quam quadrata eiusdem numeri ęqualia, quorum vnum est OF gnomonibus decrescentibus, sed numero æquis qualia sunt V. g. 2A 10 quibus M, N, Q, P literæ sunt.

Progr. 3. Nunc videndum, quàm proportionem quadrata ęqualia, dicant decrescentibus gnomonibus. Et iam ex præass. notum est, quadrata maxima ad decrescentes gnomones, si maxima, & ęqualia superent tantùm gnomones vnico maximo & sibi æquali quadrato, dicere maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cum itaque quadrata quinque maxima ad decrescentes gnomones quatuor M, N, Q, P habeant maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cylindrus quoque magnus habens eandem proportionem iuxtà omnes quinque suos cylindros æquales inuicem ad cylindros quatuor dimidio sphęroidi inscriptos, quam quadrata quinque æqualia inuicem ad decręscentes gnomones dicet ad illos maiorem proportionem, quam 3. ad 2. Et ideo cum ille cylindrus magnus ad conum Z ex Thesi sit, vt 3. ad 2. Erit minor figura inscripta in sphęroide cono Z ex prop. 7. lib. 5. quod est contra demonstrata progr. 1. ostendimus enim figuram inscriptam cono Z esse maiorem.

Progr. 4. Si verò aliquis contendat dimidium sphęroidem Cono Z esse minor. Rursùs eadem inscriptio, & circumscriptio cylindrorum fiat adeo multiplicatis cylindris; vt id, in quo figura inscripta exceditur à circumscripta sit minus, quam id in quo sphæroides dimidiū exceditur à cono, idest minor differentia ea, in qua sphæroidea ipsū cono minus est, & tunc quia figura inscripta minor est ipso sphæroide, quod cono minus est, & circumscripta minus addit super inscriptam, quam super sphęroidem conus Z, etiam circumscripta minor erit cono Z, & sic cylindrus CO dicet maiorem proportionem ad circumscriptam figuram, quam ad conum Z.

Progress. 5. Consideretur rursus cylindrus magnus CO, eodemque modo probetur, ita esse cylindrum primum O 2 in ipso, cuius semidiameter OA ad cylindrum circumscriptum ei æqualem O 2, vt basis ad basim nempe, vt quadratum, ad quadratum, & vt quarta pars ad quartam partem; nempe quadratum O A ad idem quadratum OA, & vt quadratum ad ipsum quadratum, ita rectangulum ex FO OA, nempe quadratum ex OF ad illud ipsum rectangulum ex FO, OA, idest æquale quadratum ex OF. Sic quoque comparentur alij cylindri æquales portiones cylindri magni ad cylindros circumscriptos; eritque 2 3, idest O 8 ad 8 G, vt rectangulum ex FO, & OA ad rectangulum ex FA, & AA, & sic dicas de alijs.

Rectangulum verò ex FO, & OA est quadratum, ut ex FA, AA rectangulum est gnomon M, & ex FH, & HA est gnomon N, & sic de alijs, vt supra explicatur progr. 2.

Et ideo omnes cylindri, qui in toto cylindro CO existunt ad omnes cylindros circumscriptos habebunt eam proportionem, quam quadrata omnia ad omnes gnomones maximo etiam quadrato addito.

Progress. 6. Quadrata autem omnia maxima incluso vtrinque maximo ad decrescentes æquali numero gnomones, reliduos ex præassumpto dicunt minorem proportionē, quā sesqualteram, idest quā 3 ad 2. quare cylindrus quoque maximus ęqualibus constans cylindris ad cylindros decrescentes circumscriptos eiusdem numeri habet minorem proportionem, quam sesqualterā. Quare maior erit multitudo cylindrorū circūscriptorū ex pr. 7. l. 5. cono Z; cum cylindrus CO ad conum Z dicat maiorem proportionem, nempe eam, quàm 3. ad 2. quàm ad circumscriptam cylindrorum multitudinem. Hoc autem esse nequit cum hæc multitudo progr. 4. ostensa sit minor cono Z.

Nota verò, quod idē semper sequatur siue sphæroides per centrum detruncatū sit, siue rectangulè per axem, siue non, vnde non sunt multiplicanda argumenta.

Cū ergo sphęroides cono Z, non sit maius, neque minus erit æquale, & consequenter erit duplum coni inscripti BAC, prout etiam conum Z duplum effecimus, vel supposuimus factum.

COROLLARIVM.

Hinc emanat, quod sphæroididea sit æquale cono, qui habeat basim, cuius diameter sit dupla diametri basis coni inscripti. & eiusdem altitudinis, hic enim erit quadruplus coni inscripti. & ideo duplus hemisphæroidi, & ideo æqualis ipsi sphæroidi.

THEOR. VI. PROP. XL.

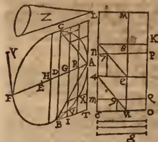
Cuiuscumque sphæroidis frustum siue maius, siue minus habet eadem proportionem ad conum inscriptum, quam axis dimidium cum segmento alterius axis portionis ad segmentum remanentis illius alterius portionis, quæ est in frusto reliquo.

Sit segmentum sphæroidis quodcumque, seu axi rectum, siue non ABC, Axis AB, centrum H frustum, seu segmentum alterius portionis DF. Ostendendum est sphæroidis partem BAC ad conum inscriptum BAC eam dicere proportionem, quam BD, FH, seu æqualem DFY ad BD.

Sit conus itaque Z, qui habeat eam proportionem ad conum CAB, quam FD, FH, idest YFO ad FD: Dico huic fore æqualem soliditatem portionis ipsius sphæroidis.

Progr. 1. Quod si non sit æqualis erit, aut maior, aut minor sphæroidis portio cono Z. sit itaque si id esse potest primo sphæroidis portio maior cono Z.

Progr. 2. Inscribatur, circumscribaturque pr. 14. Tract. 33. portioni sphæroidis multitudo Cylindrorum æqualem altitudinem habentium, adeoque multiplicentur, vt à circumscripta cylindrorum multitudine inscripta minus differat, quã conus, qui positus est minor sphæroidis portione ab ipsa differt, cum autem circumscripti cylindri sint maiores ipso sphæroide, & ipsum maius cono Z, erit etiam inscripta conorum multitudo maior cono Z.



Progress. 3. Secetur deinde DA in tres partes, & sit tertia pars RA, quia YFA est tripla HA, & OA ipsius RA: si auferatur tota DA ab YFA, & RA ab DA reliquum YFD ad reliquum DR erit vt totum YFA ad totum HA.

Quoniam vt est YFA ad HA, ita DA ad RA, ergo vt AYF ad OA permutando, ita HA ad RA, nimirũ vt YFA totum ad OA partem, ita HA tutum ad RA partem. Quare & reliquum YFD ad reliquum HR se habebit, vt YFA totum ad totum HA nempe in proportione tripla.

Tres autem lineæ g æquales ipsi FD dicent ad FD proportionem triplam, quam YFO ad HR. Quare *permutando* tres lineæ ad YFO erunt in eadem proportione, qua FO ad HR: at cylindrus circumscriptus CT ad inscriptũ conum CAB est, vt tres lineę ad FD. Conus verò CAB est ad conum Z *inuertendo* vt FO ad YFD, & ideo ex *æquo* cylindrus ad conum Z erit, vt tres lineæ æquales ipsi FO ad YFD, cum ergo tres lineę prædictę ad YFO sint, vt FD ad HR; etiam cylindrus circumscriptus CT ad conum Z erit, vt FD ad HR.

Progress. 4. Sint ergo parallelogramma æqualia contenta sub FO, OA, quorum primus LK tot, quot sunt in figura circumscripti cylindri, sitque ON dupla DH, idest OS, & remanebunt OA, AS & ideo constituent quadratum reliquum N4. Postmodum a singulis excepto primo auferatur gnomon latitudinem habens AR quale est R 7 4. & a sequente gnomon latitudinem habens AS, vt est Q 4 6. & sic si alij adsint, eritque totus gnomon Q 4 6. æqualis rectangulo FG, & OA, quod Q 4 cũ 96 æquat longitudinem FG est enim Qm6. æqualis lateri FO, & mg lineæ AG, sic totus gnomon 8 7 4 æqualis rectangulo sub RA, & RF contento; nam rectãgulum 8 N cũ 74 æquat longitudinem R 8: est enim P O 4 N æqualis lateri FR, & 7 n lateri RA, & sic dicas de alijs gnomonibus, si adsint.

Progr. 5. Cylindri autem æquales, vt CI, ex quibus componitur cylindrus CT magnus altitudinem eandem habentes, ac segmentum axis portionis sphæroidalis, & basis, cuius radius DB, ita est ad VG primum cylindrum inscriptorũ, vt basis nempe circulus, cuius radius DB ad circulum, cuius radius GV, & ideo ex pr. 5. h. quã quadratũ circũscriptũ circulo maiori ex radio BD ad quadratũ circumscriptum circulo minori ex radio GV, & quam quarta horum quadratorum pars ad quartam partem, & ideo quam quadratum BO ad quadratum GV, & ideo quam rectangulum FD, & OA ad rectangulũ FG, OA ex prop. 6. tr. 34. nimirũ quã rectangulum O 4 ad gnomonem Q 46. & ita dicas de alijs æqualibus cylindris respectu cylindrorum decrescentium, V. g. cylindrus ID erit ad cylindrum OX, vt rectangulum 8 4. ad gnomonem R 74. nimirum FR, & RA, & ita si alij adsint.

Progr. 6. Modo videndum est, quam proportionem obtineant rectangula æqualia ex FD, & DA ad gnomones decrescentes. Et primò certum est ex pr. 13. tr. 28. quod rectangula integra MK ad decrescentia vnico decremento Arith. e P sunt, vt 2. ad 1. sed addito maximo tantùm maximis, & æqualibus sunt magis, quam 2. ad 1. Quadrata verò maxima 8 L, & inuicem æqualia ad decrescentia 7 c, & 9 N quadrata duplici decremento arithmetico illis numero æqualia sunt magis, quam 3. ad ad 1. Quare ad gnomones residuos 8 7 4 & n 9 6. erunt minus, quam 3. ad 2. quia gnomones cum quadratis inclusis æquant maxima, at si addas integris maximum quadratum ex præass. prop. 39. h. erunt magis, quam 3. ad 2. ideoque rectangula tria KM æqualia ad decrescentia V. g. duo P e, & QE erunt magis, quam 2. ad 1. & quadrata item tria maxima 8 L ad gnomones 8 7 4. & e 96 decrescentes duplici decremento magis, quam 3. ad 2. Ideoque simul ex prop. 29. Tract. 27. erunt magis, quam

quam 6. ad 5. nempe quam ON æqualis ipsi BD ad dimidiam HD, & N 6. idest DA ad DB, nimirum quam tota O 6. vel æqualis FD ad totam HA, quæ est illa, quam possidet cylindrus circumscriptus ad conum a, vt ex tertio progr. constat: quare cylindrus ad multitudinem conorum inscriptam habebit proportionem maiorem, quam LB cylindrus circumscriptus ad conum Z, & ideo multitudo conorum inscripta erit minor cono Z. & tamen progr. 2. hæc multitudo cono Z ostensa est maior.

Quod si aliquis asserat esse sphæroidem minus cono Z. Eodem modo inscribatur, & circumscribatur multitudo cylindrorum æqualem habentium altitudinem ex prop. 14. Tract. 23. ita vt circumscripta multitudo cylindrorum minus differat ab inscripta, quam sphæroides differt à cono Z. Quia ergo inscripti cylindri sunt minores ipso conoide, & ipsum minus cono Z, etiam circumscripta figura erit minor cono a.

Progress. 7. Disponantur deinde, cætera vt 3. & 4. progr. factum est, & eodem modo argumentandi vtemur. Quia ergo ex 5. progr. cylindrus æqualium primus in cylindro CT existentium habet eam proportionem ad cylindrum ID eundem circumscriptum, quam quadratum ex DB ad quadratum ex DB idem erit, vt rectangulum FD, DA, vel æquale aL ad rectangulum idem, vel æquale KL. Sic cylindrus, cuius basis radius es ad GV eam habet proportionem, quam quadratum ex GI ad quadratum ex GV ob rationem allatam progr 5 superioris partis huius. & ideo ex expen. t. Conic. quam FD, & UA rectangulum ad rectangulum FG, & OA, & ideo quam rectangulum O 4. ad gnomonem Q 4 S dicto rectangulo æqualē ex 4. progr. præced. & ita effare de alijs: quare omnes cylindri æquales ad decrescentes cylindros circumscriptos eam habebunt proportionem, quam omnia rectangula æqualia ad omnes gnomones incluso maximo rectangulo, nimirum, quam 8L, 84, O 4. ad 8L, K 74 & Q 45.

Progr. 8. Certum est ex præhabitis prop. 12. Tract. 28. quòd rectangula æqualia a c. c O ad rectangula 8 c. & Q N habent proportionem duplam, & ideo ad residua rectangula, & portiones gnomonum a 8 & c Q duplam quoque, quibus si vtrinque addas maximum cum id, quod additur non sit vt a. ad.. sed æqualitatis habebunt maxima tria ad tria decrescentia, incluso maximo proportionem minus, quam duplam. Sic quadrata integra 4 8. & e 6. ad decrescentia *conuertenda* propos. 14. Tr. 28. habent proportionem magis, quam 3. ad 1. & tantò magis incluso maximo. Quare ablatis e 7. & N 9. ad residuus gnomonta 8 7 4. & e 9 6. & 8L, qui simul cum quadratis, quę includunt, ęquant quadrata ęqualia eiusdem numeri non decrescentia erunt minus, quam 3. ad a quare 8L, 8 4. 40. tria rectangula æqualia ex prędictis integrata ad a L, ad gnomones residuos ex gnomonibus prędictis confectos obtinebunt proportionem minorem, quam ex dupla, & sesquialtera constitutam, quę est 6. ad 5. nempe, quam ON ad dimidiam ON, vel ęquale DH, & N 6. idest DA ad duas tertias partes DR idest quam tota FD æqualis lateri O 6 ad totam HR, quæ est ex 3. progr præced. quam cylindrus circumscriptus C T habet ad conum Z. Quare cylindrus circumscriptus ad cylindrorum inscriptorum multitudinem decrescentem habet minorem proportionem, quam ad conum Z, & ideo erit maior ea cylindrorum multitudo cono a, eam tamen ostendetimus minorem, quam conus Z.

Cum itaque, nec maior esse possit, nec minor conus Z sphæroide, ipsi erit ęqualis: sed conus a ad conum inscriptum ABC est, vt YFD ad FO ex effectione: Ergo sphęroides ad conum inscriptum habebit eam proportionem YFH ad FD, nimirum, quam dimidia diameter cum maiori segmento, ad ipsum maius diametri segmentum.

EXPENSIO VIII.

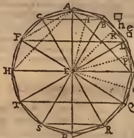
De Sphæra.

Soliditatis sphærę cognitio; cum sit vsibus humanis omninò necessaria prętereunda non est, & præter ea, quæ diximus in pręced. quęst. hic principaliter modus Archimedis magis dillucidè tradendus est.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

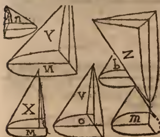
Figura solida sphæræ inscripta, quæ conicis superficiebus æquè altis continetur illi cono æqualis est, qui basim obtinet circulum æqualem superficiei figuræ inscriptæ, & altitudinem normali ad aliquod latus perpendiculariter demissæ.

Sit figura solida, quæ solidis conorum continetur segmentis V. g. cono BAC; & opposito BEC, circaque hunc conum circumuolutum intelligatur corpus LBECF; ita vt LACF superficies annulus intelligatur planus sphęra inscriptus. Sic asseras de corpore LOEHF, & cæt. Deinde sit conus rectus Z, cuius basis circulus æquet sua planitie subtēsas planities omnium corporum sphęra inscriptorū, & altitudo sit radius. Dico hunc conū Z esse ęqualem inscripto corpori sphęra GAHD.



Probatur ex prop. 16. huius. Rhombus conicus BAC 8 ex duobus conis aduersis super eandem basim CB ęquatur cono X altitudinem E I obtinēti, quę est linea à vertice coni in latus normaliter demissa, & etiam basim M superficiei coni BAC ęqualem. Item conus V erit æqualis cono concauo LBECF altitudinem habens lineam EK normalem ad latus eius LB à vertice deductam, & basim O superficiei LACF annuli plani ex prop 18. huius ęqualem, tandem idem dicas de cono concauo LGEFH, quod habeat æqualem conum y eiusdem altitudi-

nis ac linea EP normaliter à vertice E in eius latus demissa, & basim N æqualē superficiei planæ GLHP sphęrę superficiei subtensę ex 17.h. Et eadem afferenda de Rhombo ESOS, & concauis QRETS, & GEQTH, sunt vtpote cū singuli sint singulis prędictis ęquales; Erit igitur V.g. sex coni, duo X duo Y duo



V, qui totam soliditatem corporis inscripti æquabunt. At basis coni Z est æqualis omnibus simul basibus horum conorum; quia basis eius æquat, ex hypothesi superficiem totius corporis inscripti, quam, & bases omnium conorum similiter æquant altitudo verò est æqualis eorum altitudini. Ergo cum conus Z ad omnes illos conos, vt basis ad basim referatur ex 5 h. cum basis ipsius ad omnes bases proportione ęqualitatis referatur, etiam conus Z conis sex erit æqualis. Quare, & corpori solido sphæra inscripto æquabitur,

COROLLARIVM I.

IDem etiam dicendum de sectore aliquo solido V. g. LAEV, quod scilicet sit factus ex Rhōbo conico BACE, & residuo LEBCP. Nam si detur conus aliquis n, qui superficiei illius LBACV sua basi æquetur, & habeat altitudinem EB, iste æquabitur prædicto sectori: Siquidem habebit basem ęqualem basibus M, &, O conorum X, V eiusdem altitudinis; quam EX; quia basis M æquat superficiem BAC, & basis O superficiem LBCV, & has duas superficies æquat coni basis n, quare coni basis æquabit basim M, & O, quare cum sit eiusdem altitudinis conus n æquabit etiam conos X, & V, vnde, & sectorem LAPB,

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Corpori ex conicis segmentis sphæræ inscripto conus æqualis, est minor recto cono, cuius basis superficiem sphæræ exæquet, & altitudinem obtineat radium: Conus autem æqualis eidem corpori, sed sphæræ circumscripto est maior illo cono recto, cuius basis æquet superficiem sphæræ, & altitudo sit radius.

PRob. Nā conus ęqualis corpori sphæræ inscripto habet altitudinem EB minorem, quam diameter BA, & basim vtpote æquantem superficiem corporis inscripti obtinet minorem, quàm basis, quæ æquat superficiem sphærę, vtpotè, quod superficies inscripti corporis minor sit superficie sphæræ circumambientis.

Eodemque modo Prob. 2. pars, quia ille conus, qui ęquat corpus circumscriptum sua basi æquat superficiem maiorem corporis circumscribentis superficie sphæræ, & altitudo est BP æqualis radio BA; basis verò æquans superficiem sphærę, & altitudo radius BA conum minorem constituet cono, qui æqualis sit basis corporis sphęram circumscribentis superficiei, & altitudinis eiusdem.

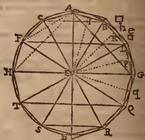
COROLLARIVM I.

ELicitur etiam. Quod si detur conus habens pro basi circulum ęqualem superficiei sectoris sphærę LAP, & alius habens pro basi circulum æqualem sectoris corporis circumscripti eidem superficiei; quod item conus hic posterior maior est primo; si habeant eandem altitudinem BA; quia superficies circumscripta sectori est maior superficie ipsius sectoris;

THEOR. III. PROPOS. XLIII.

Qualibet sphæra est æqualis cono habenti basim superficiei sphæræ æqualem, & altitudinem radio.

DEtur sphæra AGDH, & conus m, cuius basis æquetur superficiei sphæræ AGDH, & altitudo radio BA: Dico sphęram, & conum æquales esse quantitates.



Prob. Nam sphęra non erit, aut maior, aut minor ipso cono m: Ergo illi æquabitur.

Si verò aliquis asserat esse sphæram cono maiorem, sic ostendetur id esse impossibile.

Progress. 1. Inscribatur enim, & circumscribatur figura ex propos. 14. Tract. 23. adeo multiplicatis lateribus, vt spatium, quod inter spæram, & figuram inscriptam intercipitur sit minus, quàm differentia illa V. g. h, quæ inter conum m, & sphæram reperitur: Itaque hæc conica figura solida, vt IKP, & cæt. erit maior conom; quia magis accedit ad sphæram, quæ ponitur maior, quam conus m, cum minor si differentia inter sphæram, & inscriptam conicam figuram, quam inter conum.

Progress. 2. consideretur deinde conus aliquis Z, qui ex præc. obtineat basim æqualem superficiei corporis conici inscripti, altitudinemq; BX; iste conus vtique ex præced æquabit sua solidita-

te

te corpus conicum inscriptum: Verùm iste conus ex Coroll. prop. præc. minor est cono m ergo corpus quoque conicum sphæra inscriptum prog. 1. cono m minus erit: sed ostensum est maius igitur, maius, & minus, quod est impossibile.

Progress. 3. Dicat deinde aliquis sphęram cono m esse minorem, & circumscribatur aliqua conica fig. ex pr. 13. Tr. 33. quæ adeo constet multiplicatis lateribus, vt differētia solida e, quæ est inter sphęram, & se sit minor, quam differentia, quę est inter conum m. & sphæram, & iam fig. conica circumscripta minor erit cono m: siquidem minori differentia à minori sphæra differt, quam conus m prædictus.

Sit deinde conus z, qui constet altitudine a q, & obtineat basim superficiei conici corporis circumscripti æqualem; vt prop. 41. h. Hic itaque conus æquabitur corpori conico circumscripto maiorque erit, quàm conus m ex propos. 42. cum suam basim consequatur maiorem. Ergo etiam figura conica circūscripta, quæ ei æquatur maior est cono m, sed supra ostensa est minor: Ideoque absurdè esset maior, & minor, quod esse nequit. Cum itaque conus obtinens basim superficiei sphæræ æqualem & altitudinem radio non possit esse aut maior, aut minor ipsa sphæra, illi omninò ęquabitur.

COROLLARIVM.

Hinc est quod cum superficies sphærę ex ostensione prop. 43. Tract. 31 sit quadrupla maximi circuli in sphęra inscripti: quod etiam conus iste æqualis sphęrę habeat basim huic circulo quadruplo maximi circuli ęqualem. & ideo consequetur basim obtinentem diametrum duplo maiorem, quam diameter sphæræ: nam sic area circuli ex prop. 36 lib 6. & 6. lib. 2. erit quadrupla circuli maximi in sphęra inscripti. Vnde etiam patet. Quod sphęra est ad conum GAH sibi inscriptum, vt conus qui consequatur diametrum GH pro radio suę basis, & altitudinem radiū AA cum enim iste conus æquet sphæram. ad eundem conum referetur eadem proportione, ac ipsa sphęra.

COROLLARIVM II.

Hinc etiam est sphæram esse ad conum sibi inscripum, vt circulus ex radio GH ad circulum ex radio HE: nam conus ex radio GH ad conum ex radio AH habentium eandem altitudinem AA ita referuntur, vt bases, conus autem ex diametro GH, & altitudine AA æquatur sphærę.

THEOR. IV. PROPOS. XLIV.

Cuiuscunque sectoris sphæræ soliditati æquatur ille conus, qui basim obtineat æqualem superficiei portionis sphæræ, & altitudinem æqualem radio.

Sit sector LBACNFL, & conus reperiatur aliquis n, qui basim consequatur æqualem superficiei LBACF portionis sphęrę, nempe ex prop. 46. Tr. 31. ductam radio subtensa arcui FA, & altitudine EL. Dico hunc conum esse æqualem soliditati sectoris LBACFL.

Probatur. Nam sector solidus sphęræ, nec maior erit, nec minor prędicto cono n. Ergo ei ęquabitur.

Quod verò cono sector non sit maior, ostenditur: si enim sector cono maior est figura conica sectori sphęre inscribatur, adeo multiplicatis lateribus, vt differentia h, quæ inter ipsam est sphęræ sectorem mediat sit minor, quam illa, quæ inter conum n, & sectorem reperitur: Itaque ista figura cono n maior erit cum magis in quantitate ad sphęrę sectorem maiorem ipso cono accedat ob minorem differentiam inter se, & sphęram.

Prog. 2. Fiat deinde conus aliquis æqualis soliditati corporis conici in sphęra inscripti, iste conus erit minor cono n; cum constet basi minori vtpote quod æquetur superficiei corporis sectori inscripti; coni vero n basis superficiei portionis sphęrę maioris: habeat quoque altitudinem minorem EA, quam conus n obtinens altitudinem EL; Quamobrem cum iste conus sit minor cono n, etiam figura conica inscripta sectori LAFL ipsi cono ęqualis erit minor cono n. Itaque esset figura conica inscripta sectori maior quidem ex primo progr. minor ex secundo cono n, quod est absurdum.

Progr. 3. At si aliquis putet sphęram cono esse minorem; Tunc circumscribatur sectori LAFL figura conica, adeo multiplicatis lateribus, vt sit differentia e inter ipsam, & sphæram minor, quam ea, quę est inter conum n, & ipsam sphęram. & iam ista figura conica cono n minor erit; cum minor differentia interponatur inter sphęram minorem cono n, & seipsam.

Progr. 5. At fiat conus alter ęqualis figurę conicę circumscriptę, iste conus maior vtique erit cono n: siquidem constat ex altitudine ęquali EQ, & basi maiori, quę est ęqualis superficiei figurę conicę circumscriptę sectori, & ideo maior superficie LAF sphęrę, cui ęquatur ex th. si basis coni n, & ideo cum constet conus hic ęqualis soliditati sphęrę conicę circumscriptę sectori basi maiori, eademque altitudine, maior erit. Cum itaque sit maior conus iste cono n, etiam figura conica huic ęqualis sphęrę sectori circumscripta cono n maior erit; sed progr. 3. ostensa est minor: Ergo esset maior figura conica circumscripta sectori cono n, & simul minor, quod esse nequit. Cum itaque sine absurdo sector LAFA, nec maior, nec minor esse possit cono n, ipsi ęquabitur.

COROLLARIVM I.

Hinc patet quomodo possit cognosci quantitas LAFA sectoris sphęrę data sectione LF, & subtensa AF, nam cùm iam cognoscamus basim coni n ex prop. 46. Tr. 31. quę ducitur radio subtensa AF, & altitudine AE si constituamus conum, ex hac basi radio AF, & altitudine AE istius coni cognita soliditas, quæ est pars tertia cylindri eiusdem altitudinis, & basis ex prop. 7. h. etiam sectoris sphęrę quantitas innotesset.

COROLLARIVM II.

Hinc quoque exeret quantitas portionis sphæræ. Nam cum habeamus notum diametrū LF, etiam obtinemus basim eius diametro ductam ex prop. 3. tract. 30. datur quoque altitudo coni lineæ in FL terminans educta à centro E; vnde conus constituetur tertia sc. pars cylindri eiusdem basis, & altitudinis; Si ergo hunc conum à

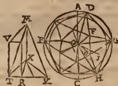
secto-

fectore LAFR fubducamus, erit nota fphęricę portionis LAF folliditas; ex qua etiam venabimur foliditatē reſi lui LGHF, & ſi ſit ſegmentum RLFS fubductis duabus portionibus LAF, & RDS idem conſequemur.

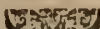
THEOR. IV. PROPOS. XLV.

Omne corpus circa ſphæram circumſcriptibile æquale eſt Parallelepipedo, cuius altitudo ſit ſemidiameter, baſis verò ſit æqualis tertiæ parti ſuperficies ipſius figuræ circumſcriptæ.

SIt ſphęra in ABCD, eique circūſcribatur corpus quoddam V. g. triangularibus ſuperficiebus conſtans, vt ſunt circumſcriptæ eius medietati quę ſunt GDF, & QGF, & GQH, & cæt. Dico, quòd hoc eſt ęquale parallelepipedo, quod habeat pro baſi tertiam partem eius ſuperficiei, & pro altitudine ſemidiametrum.



Probatur. Nam corpus circumſcriptibile ſphęræ eſt illud, quòd habet ſuperficies tangētes ſphęram; à puncto verò contactus ad centrum ſphęrę, linea ducta eſt radius, & ex pr.2.tr.23. eſt perpēdicularis illi ſuperficiei, vnde ſi ab angulis alicuius ſuperficiei illius corporis V. g. GHO ducātur rectę ad centrū ſphęrę Q fiet pyramis GOHQ, cuius altitudo erit ſemidiameter IQ. Omnis verò pyramis eſt tertia pars priſmatis ex dictis ad eādē altitudinē & in eadē baſi: Quare ſi tertia pars baſis GHO aſſumatur, & ad eādē altitudinē QI fiat priſma MVTRX hoc erit æquale toti pyramidi TMNX, quam ſuppono ęqualem, & ſimilem pyramidi OOHQ. At ſi baſes omnes, vt TRK redigantur ad vnam baſim ęqualem quadrangulam ex prop.18.Tract.19. quę ſunt tertię partes baſium pyramidalium, erit illa baſis ęqualis tertię quadrangulę parti baſium omnium ſimul, quę ſubtendunt omnes pyramides polygoni circumſcribentis ſphęram, & ſi conſtituatur ſuper eam baſim parallelogrammum Parallelepipedum ad eleuationem priſmatis RRXVM erit omnibus priſmatibus quale eſt vnum ex ipſis RRVMX quę ſingulas pyramides ęquant ex pr. 22. part.1.h. ęquale, & conſequenter erit ęquale omnibus pyramidibus. Vnde etiam ipſi polygono circà ſphęram deſcripto, quare parallelepipedum, cuius baſis ęquet tertiam partem ſuperficiei polygoni, & ſemidiameter eius altitudinem menſuret, erit ęquale ipſi polygono, quod erat oſtendendum.



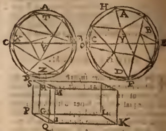
THEOR. V. PROPOS. XLVI.

Sphæra qualibet æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ.

SIt ſphęra ABCD, & ſolidum rectangulum LKMN cuius baſis LKGI, ęquet tertiam partem ſuperficiei ſphęrę propoſitę, altitudinem verò LN menſuret eius radius CY. Dico quòd ſphęra propoſita eſt ęqualis rectangulo ſolido LKMN.

Probatur. Nam, ſi non eſt ęqualis ſphęra ſolido, erit, aut maius illud ſolidum, aut minus ipsā ſphęrā; ſed nec maius, nec minus eſſe poteſt. Ergo ęquale ſolidum erit ipſi ſphęrę.

Nam ſi maius eſt, erit ergo ęquale alicui alteri ſphęrę maiori ea propoſita BACD, vel ſi contendas æqualem aſſignari non poſſe, aſſignabitur ſaltem aliqua maior propoſita, quæ nec ſolidum omninò



ęsquet, ſed inter vtramque magnitudinem conſiſtat: Sit ergo hæc ſphęra HEFO, quæ in aliquo ſuperet ſphæram propoſitam BADC, & ideo ambiet illam, & tamen ſit minor ſolido LKMN. Quo poſito circumſcribatur ſphæræ minori Polygonum, quod ſphæram maiorem non excedat; id enim poſſe fieri ſupra oſtendimus propoſ.13. Tract.33. fiatque ſolidum rectangulum LKQS, cuius baſis LSPQ ſit æqualis tertiæ parti ſuperficiei illius polygoni, & altitudinem eius menſuret ſphæræ radius, quod ex præmiſſa erit æquale ipſi polygono.

Parallelepipedum itaque LKSQ æquale polygono, habebit baſim maiorem LSPQ, quam LSGI baſis illius ſolidi, quod nos dicimus ſphęrę æquale cū illa ſit æqualis tertiæ parti polygoni; hæc tertiæ parti ſphæræ in polygono exiſtentis, vnde cum ſit maius continens, quā contentū erit etiā maior ſuperficies polygoni continentis, quam ſphærę ABDC contentę, & cōſequēter maior erit tertia pars ſuperficiei polygonę, quā ſuperficiei globoſæ ſphæræ, & baſis LRPQ æqualis tertiæ parti polygonæ ſuperficiei maior erit, quam baſis LKGI tertiæ parti ſuperficiei globoſæ æqualis, & tandem ſolidum ſub eadem altitudine SS ſuper baſem maiorem LKPQ maius erit, quam ſolidum KM LS ſuper baſem minorem LSGI, ſed hoc ſolidum dicebatur ab aduerſarijs aut maius, aut æquale ſphæræ maiori EHOF; Ergo ſphęra maior erit minor, quā ſolidum LSSQ rectangulum ſuper baſem maiorem LKPQ; ſed hoc ex conſtructione eſt æquale polygono contento in ſphæra maiori, ergo eſſet ſphæra continens minor contento polygono, quod eſt abſurdum.

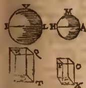
Pro-

Probatur quoque, quod minus esse nequeat solidum prædictum LKMN sphæra proposita AACD. Circa idem centrum Y describatur sphæra, aut æqualis, aut non minor ipso solido LKMM, nec maior sphæra proposita BACD. sed inter vtramq; magnitudinem consistens, & sit TVAA per aduersarios. Huicque sphæræ assignatę XVXZ circumscribatur rursùs polygonum non excedens sphæram primo propositam BACD ex Cor pr.13. tr.33. sitque deinde ex præced. basis æqualis tertiæ parti superficiei polygonæ, quæ sit LKPQ, & super eam ad altitudinem radij YC parallelepipedum LAS. Cum ergo superficies polygoni huius sit minor, quam superficies sphæræ continentis ABCD, etiam eius tertia pars erit minor, quam tertia para eiusdem sphæræ continentis, & ideo erit quoque minor LAPQ æqualis tertiæ parti superficiei polygonæ, quam basis LAGI, quæ æqualis ex hypothesi est tertiæ parti superficiei conuexæ sphęrę CABD vnde parallelepidum LKS licet maius esset, vt æquaua KTVZ maiorem, quam KMLN esset minus parallelepipedo LKMN super illam basim ad eandem altitudinem erecto, quod in illo continetur, quæ omnia absurda sunt, cum ergo parallelepipedum LMN, nec minus esse possit, nec maius sphæra BACD illi erit æquale.

THEOR. VI. PROPOS. XLVII.

* *Sphæræ sunt inter se in triplicata ratione diametrorum, radiorum, & peripheriarum.*

INspiciantur duæ sphæræ AMH, & LVT. Dico eas ad inuicem referri in triplicata ratione diametri AH ad LI, vel radij, vel periphęriæ AMH, LVT, siant ais parallelepipeda æqualia C, & D; quorum latera OP, & QN sunt æqualia semidiametris AH, LI. Certum est hæc esse similia ob basium rectangula



essenti superficierum sphericarū æqualia ex 46 h. sc. circulis ex diametris AH, & LT, tamquam radijs ex 43. tr.31. & ideo ex tr.31. prop 3. triangulis ex ambitu, & radio eorum AH, & LT, sc. comprehensaâ sextante ambituum ex radijs HA, & LT ductorum sc. triente HMA, & LVT peripheriarum, quæ sunt dimidium ambituum ductorum radija HA, LT ex 43. lib.6. Quare ex eadem 43 & 18. lib.5. OA, CA, AD erunt proportionalis lateribus QN, QT, TD, vtpote radij diametri AH, LI, & trientes peripheriarum AMH, LVT. Ergo ex def.3. tr.34. parallelepipeda erunt similia, ideo ex 14. p.8.h. in triplicata ratione laterum, idest radij PO ad radiū QN, vel trientis peripherię OA ad QT, & ideo peripheriarum ex 18. l.5. vel diametri CK ad diametrum TD. Quare etiam sphęrę equales parallelepipedis HMA, & LVT erunt in triplicata ratione peripheriarum ex 7. l.5. vel radiorum, vel diametrorum.

EXPENSIO XI.

De sphæra, vel sphæroidis quadriformis, & vngula Cylindricæ soliditate.

SPhęra quadriformis est figura solida, quæ formatur à plano quadrato, vel rectangulo: sed deinde omnis plana, quæ parallela lateri, & basi perpendicularia ipsi plano per corpus illud ducuntur, aut circuli sunt, aut Ellipses. V. g super quadratum AIOB, sit formatum tale corpus AIOBD, cuius sectio KDL normalis basi AIOB, & parallela lateri AB sit circulus, vel ellipsis, illud corpus erit sphæra quadriformis, si sectiones sint circuli, vel sphæroides quadriforme, si sectio sit ellipsis; de quo corpore soliditas cubica quærenda est.

THEOR. I. PROP. XLVIII.

* *Sphæra ita est ad sphæram quadriformem, vel sphæroides ad sphæroidem quadriforme, vt circulus aliquis, vel ellipsis ad quadratum, vel rectangulum ambiens bases ipsorum corporum.*

SIt sphęroides quadriforme AIDOB, vel eius medietas supra descripta, cuius basis rectangula AIOB, & in ea hemisphęrium KLGD, cuius basis circulus KGL. Dico, quod sphæra KGLD, ita est ad sphæram quadriformem AIDBD, vt circulus KGL ad quadratum AIOB.



Probatur. Inscribantur enim tum in hemisphærio tum in hemisphęra quadriformi in hac parallelepipeda in illa cylindri ęqualis inuicem altitudinis V. g. parallelepipedum MNY, & cylindrus HEPA per continuam subdiuisionem radij DQ; eritque quicumque circulus ad circumscriptum sibi quadratum in eadem proportione V. g. circulus KGL erit ad quadratū AO, vt circulus HFP ad quadratū MN, & sic dicas de omnibus alijs quibuscumque, cum omnis circulus ad alium circulum, vt ex propos.40. lib.t. constat, V.g. circulus KGL sit ad circulum quemcumque HFP, vt quadratum AO ex diametro HL ad quadratū MN ex diametro HP, quod est etiam dicendum de Ellipsibus ex propos.27. Tract.30. vnde permutando sequitur, quod sic circulus KGL ad quadratum AO, vt circulus HFP ad quadratum MN, vel Ellipsis KGL ad rectangulum ambiens AO, vt Ellipsis HFP ad rectangulum se circundās MN, & cæt. Cum ergo cylindri super circulos, vel super Ellipses erecti sint æqualis altitudinis; ac parallelepipeda super quadrata, vel rectangula ex diametris ex Thesi dicant eam proportionem, quàm bases; ideoque omnes cylindri, qui sphęra, vel sphæroide inscriptibiles sunt ad omnia parallelepipeda sphęra, vel sphæroide quadriformi inscriptibilia dicent eãdem proportionem, quam circulus, & basis, cui cylindri insistuntur, dicit ad bases rectangulas parallelepipadorum ex prop.5.h. Omni itaque inscriptione possibili tum Parallelepipeda in sphæra, vel sphæroide quadriformi, tum cylindri in sphæra, vel sphæroide multiplicentur, necesse est, vt adæquent parallelepipeda, quidem sphæram, vel sphęroidem quadriformem

mẽ; Cylindri autẽ ſphæram, vel ſphæroidẽ alioquin, ſi non omninò implerent, noua, & minutior inſcriptio poſſet inſtitui contra hypotheſim, quã poſuimus, omnia eſſe inſcripta, quæ potuerunt inſcribi. Cum ergo omnes cylindri ſphæram, vel ſphæroidem æquent, omniaque parallelepipeda ſphęram, vel ſphæroidem quadriformem, & omnes cylindri inſcripti ſint ad omnia parallelepipeda inſcripta, vt baſes circulares ad baſes rectangulas, illæque circulares habeant ad rectangulas eam proportionem, quam aliquis circulus ad aliquod quadratũ ambiens, vel aliqua ellipſis ad rectangulum circumſcriptum. Erit etiam proportio ſphæræ, vel ſphæroidis ad ſphæram, vel ſphæroidem quadriformem rectãgula baſi ſitam, quę maximum circulum, vel maximam ellipſim ſphęroidis ambiat, vt ipſe circulus, vel ellipſis, ad quadratum, vel rectangulum ambiens.

COROLLARIVM.

* Elicitur. Quod cum ex pr. 43. Cor h. conus, qui ſit eiuſdem altitudinis, ac radius, & habeat diametrum ſphæræ pro radio æquet ipſam ſphæram: Quod etiam Pyramis eiuſdem altitudinis, ac radius ſphærę, quę habeat baſim, cuius latus ſit duplus diametri erit ęqualis ſphęrę quadriformi. Nã ex 6 b. conus quadruplus coni ſphæræ inſcripti ABCD erit ad pyramidem HFA eiuſdem altitudinis in baſi HS circulum ADC ambienti, vt circulus ADC ad quadratum HF; ſed vt ADC circulus ad quadratum HF, ita eſt OI circulus ad quadratum inſcriptũ OI ex 40. l. 6. & ita eſt ſphęra in circulo ſita ad ſphęram quadriformem in quadrato OI ſitam ex præc. Ergo conus ADCB erit ad pyramidem HBF, vt ſphæra in circulo DI ſita ad ſphęram quadriformẽ in quadrato OI collocatam ex 16. l. 5. Verùm conus ADCB ęquat ſphæram, cuius circulus maximus DI, ergo ex 12. lib. 5. etiam pyramis HFB æquabit ſphęram quadriformem in OI ſitam.



Idem dicendum de ſphęroide, & de ſphęroide quadriformi; Nam ſicut ſphęroides æquat conum cuius baſis quadruplum ſit baſis coni inſcripti & eadem altitudo; ſic. & ſphæroides quadriforme ęquat talem pyramidem. Quod etiam intelligendum eſt ſi ſit baſis ellipticę, & ideo ſphæroidis quadriformis baſis non ſit quadratum, ſed rectangulum; vt quilibet per ſe poterit arguere cum oſtenderimus quodlibet ſphęroidem eſſe ex propoſ. 37. Tract. h. Cor 2. ęquale cono, cuius baſis ſit quadrupla baſis ſuę, & eadem altitudo.



THEOR I. PROPOS. XLIX.

* *Vngula Cylindrica eſt octaua pars ſphæræ, vel ſphæroidis quadriformis.*

VNgula Cylindrica eſt portio cylindri abſciſſa ſemicirculo ſemiellipſi, & portione ſuperficiei cylindricę contenta. Sit itaque hemiſphęrium quadriforme A I DC & diuidatur acto per axẽ diagonalẽq; CT plano, iam illud planum erit ellipſis ACDT ex prop 13. tract. 25. cum ſuperficies AHDC perpendiculares ſint circuli plano AED; Ergo fruſtũ ſphærę quadriformis ACBDH continebitur ab ellipſi CAD portione cylindrica CADE, & circulo AED: Ergo erit vngula cylindrica: Eſt autem CAED cylindri ſuperficies; quia eſt normalis circulari plano AED: Ergo ſoliditas vngulę æquabit octauam partem ſphęrę quadriformis: ſiquidem triangulum EHC, ſuper quod innititur CAEDH corpus vngulare eſt octaua pars totius baſis, & maximi ſphęrę quadriformis quadrati TC, & ſingulæ cæteræ partes ſolidæ, quæ reliquis



triangulis collocatę ſunt, habeant omnes ſuperficies ſimiles, & ęquales huic, vt ex definitione ſphæræ quadriformis ſatis apparet. Quod & oſtenditur nam ex prop. 28. Tract. huius corpora conformia æqualia altitudinis inuicem ſunt, vt baſes, ſed baſes hic ſunt æquales EBC, HFC, & cęt. & altitudo omnium æqualis HA, HD, ergo & corpora conformia erunt æqualia. Sed ſunt octo in quæ ſphæra quadriformis diuiditur, vt ſunt octo triangula ex quatuor quadratis HC, HG, & cæt. conſurgentia biſariam diuiſa. Ergo quodlibet corpus vngulare erit octaua pars ſphæræ quadriformis, quod, & poteris aſſerere proportionaliter de vngula alicuius cylindri, qui baſim conſequatur ellipticam, & ipſius vngulæ altitudo ſit, aut maior, aut minor, quam diametri: nam eodem pacto erit octaua pars ſphæroidis quadriformis idem baſim, & altitudinem obtinentis.

COROLLARIVM.

* HInc elicitur vngulam cylindricam eſſe octauam partem pyramidis quadrangulæ, cuius altitudo ſit eadem, ac radius, & latera cõſequatur dupla baſis ſphęrę quadriformis, cuius pars eſt, ideoque AC EDH vngulam eſſe æqualem pyramidi, cuius altitudo HA, & baſis TCC: nam baſis TEC triãgularis eſt ſubdupla baſis TC quadrãgulæ, quæ eſt ſubquadrupla baſis illius, cuius latus ſit duplus lateris GC, & alius duplus lateris TG. & ideo CGT erit ſuboctupla baſis illius pyramidis, quæ ſphæram quadriformem æquat; ideoque, cum. & hæc pyramis in CGT baſi ſita, & altitudinis HA ſit, vt vngula cylindrica ACDEH ipſa ſphęrę quadriformi,

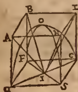
idest

ideſt eidem, vt 1. ad 8. hæc pyramis baſis CGT altitudinis HA; & vngula cylindrica CABDH æquabatur ex 7. lib. 5.

THEOR. III. PROPOS. L.

Sphæræ quadriformis medietas æquat parallelepipedum eiuſdem altitudinis, & eiuſdem quadratæ baſis, cui dempta ſit pyramis eiuſdem baſis, & altitudinis.

COgita in baſi CSBD quacumque rectangula ſphæræ quadriformis DCBOS medietatem, cuius altitudo ſit DA in parallelepipedo ca exiſtentem. Ea præc. enim tota æquet pyramidem, cuius baſis ſit quadrupla ipſius baſi CSBD, & altitudo DA ideſt quadruplum pyramidis BAHIL, dimidia æquabit pyramidem, cuius baſis ſit dupla baſi CSBD: & altitudo eadem; nam hęc item erit

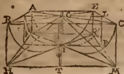


dimidia quadruplę pyramidis ex 24. par. 1 h. & ideo duplum pyramidis LHBAT Cubus verò, vel parallelepipedum vacuatum pyramide LSAHI eſt duplū pyramidis ipſius LHBAT, quia parallelepipedum eſt duplum priſmatis eiuſdem baſis, & altitudinis, & priſma tale eſt triplū baſis triangularis, & ideo vt 3. ad 2. vel ſeſquialter pyramidi duplæ, quæ habet quadrangulam baſim; vnde parallelepipedū LSBO duplum priſmatis, erit ad pyramidem LSAHI, vt 6. ad 2. ablata ergo ipſa pyramide, quæ eſt 2. erit reliquum ad ipſum 2. vt 4. ad 2. nempe duplum. Quare ex 7. l. 5. cubus, & ſphęra æquabuntur cum eidem pyramidi LFHAS ſint, vt 2. ad 1.

THEOR. IV. PROPOS. LI.

Inuolucrum ſemiſphæræ, vel ſemiſphæroidis quadriformis eſt æquale pyramidi quadratum eius maximum pro baſi habenti, & altitudinem eandem.

SIt ſemiſphęrę, vel ſemiſphęroidis quadriformis inuolucrum ABICMQSBM, quod naſcitur dempta ipſa ſphæra, vel ſphæroide quadriformi à parallelepipedo circumſcribente CQAK. & pyramis quadrata GMQKH, ſuper maximam baſim QH,



& altitudinem eandem IG Dico hanc pyramidem inuoluero prędicto eſſe æqualem.

Probatur. Nam hæc pyramis MQKHG eſt ad cubum, vel parallelepipedum CAQH, vt 1 ad 3. ex prop. 22. huius, cum ſit dupla pyramidis triangularis, quæ eſt priſmati, nempe dimidiato parallelepipedo, vt 1. ad 3. & ideo parallelepipedo, vt 1. ad 6. Sphæra verò, vel ſpheroides quadriforme eſt ad hanc pyramidem ex oſtenſis, vt 4. ad 1 cum ſit vt pyramidis ęquealta ſuper baſim quadruplo maiorem, ideſt pyramis quadruplo maior ad ipſam pyramidem inſcriptam GQMKH, & hinc hemiſphęrium quadriforme, vel hemiſphęroides erit ad GQKMH, vt 2. ad 1. vtpote dimidium corporis integri.

Ideoq; ex 2. pr. tr. 17 parallelepipedo, cui inſcriptum eſt ſubſeſqui alterum, ſc. vt 2. ad 3. Si igitur ipſa hemiſphęra, vel hemiſphęroides, quæ eſt, vt 2. ad 3. ad ipſum parallelepipedum auferatur, remanebit parallelepipedum $\frac{1}{3}$ nempe corpus quoddam ęquale pyramidi KMQHG baſim habentis in baſi maxima hemiſphęrij, & altitudinem eandem, quę & ipſa parallelepipedi eiuſdem AMBH eſt $\frac{1}{3}$.

COROLLARIVM I.

HInc eſt quartam partē inuolucri hemiſphęræ, vel hemiſphęroidis CLMPTI eſſe æqualem quartę parti pyramidis QMKHG, nempe pyramidi MPTIG ęquari. Eſt hoc CLMPTI etiam inuolucrum vngulę cylindricę, ſiquidem M PLC eſt dimidium inuolucrum. Quòd ICLMP ſit dimidia vngula cylindrica, & ex dictis conſtat, quæ tota reſultaret addito alio hemiſphęrio, quia continetur quartis circuli IL ſuperficies cylindricę ILC, & Ellipſis IGC.

Cum ergo pyramidis pars PTMIG ſit quarta pars pyramidis MQGKH & inuolucri pars quarta CLMIPT ſit totius inuolucri æqualis toti pyramidi; inuolucrum prędictum, & pyramis PMTIG ęquabantur.

COROLLARIVM II.

ELicitur quoque Reſiduum vngulæ hinc faciliter poſſe cognoſci ſi cylindro in quo eſt ſit ęquale priſma ęqualem habens baſim triangulā, & eandem altitudinem, ſi ab hoc priſmatis dimidio auferatur ſoliditas vngulæ nempe pyramis ex dimidio baſis ſphęrę quadriformis eiuſdem baſis, & altitudinis, remanebit ſoliditas reſidui vngulę. Igitur ſi detur cylindrus DABIHC, & ab eius dimidio DABML auferatur ſoliditas vngulę DALA remanebit reſiduum vngulæ ACIHA, hoc autem ſit prædicto modo vtendo corporibus æqualibus ipſis vice ipſorum.

PROBL. I. PROPOS. LII.

Soliditatem Lunularum, & inuolucri ipſarum reperire.

EX prędictis facilè ſoliditas duorum corporum, quę in fornicibus maximè in vſum veniunt, reperitur, nempe Lunulę, & eius inuolucri, eſt autem Lunula, ſolidum corpus quoddam in acutum deſinens ex ablatione duarum item vngularum ex dimidio cuno per axem exaſcens, ſic corpus ABMC ablatis duabus ſemiungulis MOAC, & OABL erit corpus quoddam in communi vſu loquendi apud Italos Architectos Lunula appellatum, & eſt maximè in vſu in concamerationibus cubiculorum.



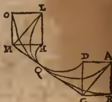
Huius igitur corporis soliditas facilitee inuenietur ex prae. Cor. Nam semicilindri LEMBHC inuenietur soliditas ex prop.3.h. Coroll. & ab ea auferatue vngula integra, Idest duę semiungulę LODA,& OMCA auferendo pyramidē ea pr.49.Cor. æqualem,residua erit soliditas lunulę SACH.



Inuolucrum autem lunulę est illa soliditas, quæ enascitur ablata lunula à prismate ea circuodante, sic si intelligatur semicilindrus CBDQPS,& circa illud parallelepipedum COPN, & agantur duo plana per SA, & PS alterum, alterum per BA,& GQ simul duæ semiungulæ ASQ, & ASB formabuntur, & lunula QPBS ex sectione cylindri, ex sectione verò parallelepipedi tria prismata CABGQ & SAGQPS, & SADPE, quorum duorum duo comprehendent vngulas; sc. CABGQ, & SADPE; medium verò ęquale illis duobus lunulam continebit; eiusque Inuolucrum erit. Igitur si ab hoc prismate GQSASP auferas lunula ABQPS erit lnuétum inuolucri vngulę soliditas, erit que corpus contentum semicirculo, vel semiellipsi QPS, & superficia cylindrica ex ipsa consurgente, & planis superficiebus SQB,SPS triangulis mixtilineis,sicut & GQP, PPS,& tandem triangulo GAP. Si ergo prisma comprehendens inuolucrum vngulæ SAEQPG sit positum super dimidiam basim SQPG parallelepipedi cylindrum ambientis, & eiusdem altitudinis DS, erit dimidium dimidij ex pr.3. tract. 24. Idest quarta pars totius. Quare à quarta parte parallelepipedi cylindrum ambientis à cuius sectione vngula enascitur, auferatur lunula SPAQA residuum erit inuolucrum lunulæ, quod exquiritur.

COROLLARIVM I.

Elicitur,quod si duo ex istis semi-inuolucris ponantur auersis prismatum acuminibus efformabitur quarta pars inuolucri fornicis cruciformis, quatuor lunulis in centrum conuenientibus constantis, vt est in fig. hic apposita, in qua ABDCQ est lunulę inuolucrū,quo cōponitur semiinuolucrū ADCQ, sed auersis acuminibus C,A prismatū ambientium, ità vt acumen huius reperiatur vbi basis alterius, namque DAC correspondet plano SPC superioris figuræ QO est quarta circuli PQ, & QA est quarta ellipsis PQ,sic ACS refert planū PSP sed inuerso acumine C, vt eueniret si oc planum superioris figuræ cylindrica superficie esset sectū, quę incideret in ellipsim BQ. Vnde QP circulus est, qui cum ellipsi QA facit latera curua huius corporis QCA, & QCB, triangulis mistilineis contentum,triangulo rectilineo CAB, & superficie cylindrica ABQ; Et ita dicas de alis portione NOIHQ si itaque quatuor ex istis QOABC componantur, ita vt in vnam basim conueniant, cuius quarta pars sit OACBQ cruciformis fornix erit compositus in acuminibus quatuor,quale esset acumen Q,inixum.



COROLLARIVM II.

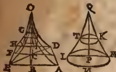
Hinc etiam patet, quod si quatuor corpora inuolucri OABCQ componantur,ita vt quatuor quadratę superficies basim sternant, vt PCIH, & SCPB,& cęt & coniungantur in idem acumen O, & pęnes quadrantes OP, OL,OB,OI equales, vel equales, & similes partes quartas ellipsium in vnū,vt vides in fig. pr. seq. cōponantur,efformabitur corpus acuminatum AHO, ex superficiebus cōcauis consurgens ZOH, SOA curuitate globosa intus vergente, & si costę OS, OH, OD, OA intelligantur ablatę,& redactū in figuram, vel octangulam, vel quācumque aliam, vel etiam ad figuram prorsus circularem efformabitur corpus solidum. Quod poterit apellari pyramis, si rectilinea sit basis, vel conus inflexis constans superficiebus, si sit circularis.

THEOR. VI. PROPOS. LVI.

Prisma quadrangulæ basis se habet ad conum circularis basis, quæ inflexis superficiebus vestiantur, & cuius latus diametro basis coni æquale sit, & superficies sint simil, & æquali curuitate flexæ, & ad candem altitudinem latæ, vt quadratum basis prismatis ad circulum basis coni.

Sit prisma supra explicatum Cor. 8. AHO, cuius altitudo eo ęqualis altitudini PQ,latus AS,vel LP ęquale diametro ML ęquetur; curuitas verò plani OLP per aeem laterum, vt OP, & LO, ducti sic ęqualis, & similis, nempe desumpta ab eadem fig.

V. g. circulo, seu ellipsi, ac curuitas MKQ, vel QTL plani MQL per axem ducti, ita quod NMQL corpus intelligatur inscriptibile in corpore AOH, & singula plana circularia, vt KT inscriptibilia, in quibuslibet quadratis æquialtis, vt IO. Dico, quod corpus AOH erit ad corpus NMQL, vt quadratum AH ad circulum MNL.



Probatur autem prorsus eodem argumento, quod adduxi ad ostendendam proportionem sphæræ circularis ad sphæram quadriformem, nempe eam, quam habet basis quadratum circundans ad circulum, nempe eandem esse proportionem omnium quadratorum ad omnes circulos inscriptos, quam huius quadrati, ad hunc circulum inscriptum, ideoque esse quadratum basis AH ad circulum basis inscriptæ, vel inscriptibilis LNM, vt EG quadratum ad circulum HT sibi inscriptum, vel inscriptibile ex prop. 41. lib 6. & sic de quocumque alio, & ideo æquealta parallelepipeda in quadratis, ad æquealtos cylindros in circulis inscriptis sitos ex propos. 22. h. obtinere eandem propositionem, quam basis quadratum AH ad circulum basis LM: Quare, vt ibi conclusimus, etiam ipsæ figuræ solidæ, nempe AOH ad MNQL eandem proportionem dicet, quam AH basis quadratum ad MNL circulum.

COROLLARIVM I.

Hinc est, quod si bis accipiatur soliditas Lunulæ, & auferatur à duplici prismate eiusdem altitudinis, & basis rectangulæ, quæ ambiat semicirculum basim lunulæ enascetur geminū ungulæ; quod præc. Cor. 1. adnotauimus. Vnde etiam enascetur ex 2. Cor. pyramis flexis constans, qua habita poteris arguere à quadrato basis HA ad circulum inscriptum LNM, ita soliditas pyramidis flexis constans ad aliud, & inuenietur conus prædictus circularis LQMN.

COROLLARIVM II.

Elicitur etiam, quod dicitur de tota pyramide idem dicendum esse de singulis segmentis solidis æquealtis, quod nimirum sit ad inuicem pyramis ad inscriptum conum, vt quadratum basis ad circulum inscriptum. Quod, & verificatur si compararetur quadrangularis ad pyramides cuiuscumque alterius figuræ inscriptas.

COROLLARIVM III.

Qvod si prisma flexis contentum non obtineat pro basi circulum, sed figuram aliquam rectilineam regularibus eodem argumento, ex 26. lib. 6. concludetur esse prisma flexis contentum ad conum rx basi polygonus flexis contentum, vt quadratum ad polygonum. Et idem erit si HA sit rectangulum, & LNM ellipsis

THEOR. VII. PROP. LIV.

Sphæra quadriformis est ad metam quadriformem quadratam, vt basis quadrata sphæræ ad basim quadratam metæ. Pariterq; sphæra ad metam circularem, vt sphæræ basis circulus ad metæ basim circulum.

Meta est corpus quoddam, vel quadratum, vel rotundum, nempe super basim quadratum, aut circulum erectum, quod ex duobus segmentis circuli per axem basi normalem ducti formatur, & dicitur meta, eo quod antiquitùs metæ ad quas, qui primi perueniebant cursu victoria potiebantur, illa figura constabant. Huius corporis figura est AD, cui modulum præbet duplex segmentum BAC circuli BACD, quæ simul vncta penes subtensam AC vel AD faciunt superficiem APOI, quæ secta basi EO, & ab eius singulis lateribus ductis superficiebus quatuor curuatis iuxta ambitum AID formatur. Dicimus ergo, quod si ex circulo BLC sit erecta sphera quadriformis, quod hæc se habebit ad metam quadratam, vt quadrata basis sphæræ ad quadratam basim metæ.



Sit igitur segmentum BAC dimidium plani metam formantis, & basis quadratæ quartæ parti sit latus QA, & BVC circulus sphæræ quadriformis modulus, cuius quadratæ basis quartæ parti sit latus VQ, & APBC circulus residuus ex segmento BAC metæ genitore, in quibus plurimæ lineæ parallelæ ducantur, & inuicem æquidistantes, & super singulas rectangula inscripta æquèeleuata; Quia itaque ex 22. prop. huius rectangulum PQ, QA est æquale quadrato QV, & EN, & NM quadrato NE, & cætera cæteris; erit rectangulum PQ QA ad rectangulum EN, NM, vt quadratum QV ad quadratum EN; & ita erit EN, & NM rectangulum ad EY, YT rectangulum, vt quadratum EN ad quadratum XY, & ita de omnibus alijs. Sed quadrata omnia sunt inuicem similia; Ergo etiam rectangula. Quare ex 26 lib. 6. PQ erit ad EN, vt VQ ad EN latera, & QA ad NM, & cæt. sed QA quadratum ad NM quadratum est, vt rectangulum PQ QA ad rectangulum EN NM; quia cum sint eiusdem altitudinis se habent, vt bases PQ ad EN: Ergo ex pr. 26. l. 6. quadratū VQ erit ad quadratum EN, vt quadratum QA ad quadratum NM, & eadem ratione EN quadratum ad XY quadratum, vt quadratū NM ad quadratū YT: ideoque *permutando* erit quadratum VQ ad quadratum QA, vt quadratum EN ad quadratum NM, & XY quadratum ad YT quadratum: Quare ex 17. l. 5. omnia quadrata QA, NM, YT erunt, vt vnum antecedens VQ ad vnum consequens QA: sed hæc quadrata VQ, EN, XY sunt ad quadrata QA, NM, YT ex 5. huius, vt Parallelepipeda eleuata altitudinibus æqualibus QN, YN, & cæt. Ergo omnia hæc paralle-

 lepi-

lepipeda VN, EY & cęt. ad omnia MQ, NX erunt, vt bases omnes quadratæ ex VQ, EN ad omnes ex QA, & NM, nempe, vt basis VQ ex dictis ad basim QA.

Sed omnia hæc parallelepipeda si multiplicentur vsquedum multiplicari, in sphęra quadriformi queunt inscripta æquant ipsam sphæręquadriformis quartam partē, & QA metæ quartā partem.

Alioquin, si omne spatium inter ipsa, & corpora, in quibus inscribûtur non implerent, nouę inscriptioni daretur locus: Ergo quarta pars sphæræ quadriformis, & ideo eius quadruplū sphæra quadriformis erit ad quartā partem metæ, & ideo integrā metam, vt quarta pars quadrati basis sphæræ ad quartam partem quadrati metæ, & ideo vt basis sphæræ ad basim metę.

Quod si basis sit circulus eodem argumento, ac in præt. factum est, concludes esse metam quadratam ad circularem, vt quadrata basis ad circulum, & ideo ex æqua esse circulum basis sphęrę ad circulum basis metæ, vt sphæra ad metam.

COROLLARIVM I.

HInc constat idem dicendum esse de partibus æquealtis, cum idem valeat argumentum V. g. de corpore formato ex SNM segmento metę, & ANA segmento sphæræ.

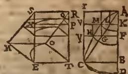
COROLLARIVM II.

QVod si basis metæ non sit circulus; sed aliquod polygonum regulare idem concludes esse sphæram quadriformem ad metam, vt basis quadrata ad polygonam metæ.

THEOR. VII. PROPOS. LV.

Conoides parabolicum quadriforme æquatur prismati eandem altitudinem, & basim habenti, singulæque partes singulis æquealtis partibus.

PRobatur. Nam repetita figura prop. 35. h. pror eadem demonstratione propositum ostendemus. Quoniam omnes ductæ parallelæ ad basim, & applicatæ, vt XM efformantes parabolam generantem conoidem quadriformem, habent sua quadrata equalia rectangulis ex XL lineis, quæ ad eandē altitudinē in triangulo SCA, & ex KV, quę in rectāgulo IB trahūtur, quę superficies quadratè simul iunctæ efficiūt prisma TOSNKS, & ideo omnia rectangula, vt FQX ex illis XL, & KV constantia in eadem altitudine bases sunt parallelepipedorum,



quę soliditatem prismatis TOENKS circumscribunt, quæ æquealta sunt, vt parallelepipeda æquealta super bases quadratas ex KM applicatis, quæ circumscribunt soliditatem parabolici corporis. Quare, cum omnia solida rectangula prismati circumscripta omnibus solidis rectangulis conoidi circumscriptis æquentur, sequitur ex prop. 22. h. vt prisma sit æquale conoidi parabolico; singulęque prismatis partes singulis partibus eius æquealtis.

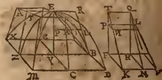
COROLLARIVM.

HInc que fit euidens conoidem parabolicum quadriforme esse subduplum parallelepipedi eandem altitudinem obtinentis, & super eandem basi collocati: singulæque eius partes parallelis abscisas, singulis eius æquealtis partibus subduplas esse; quia tale parallelepipedum est duplum prismatis eadem basi, & altitudine gaudentis.

THEOR. VIII. PROPOS. LVI.

Conoides Hyperbolicum quadriforme æquat frustum pyramidis æquealtum, ac conoides, cui frusto deficiat parallelepipedum super basem tangentem verticem conoidis, & eiusdem altitudinis erectum; Pyramis verò tota eadem basi sita in altitudinem transuersæ axis assurgit.

SIt conoides Hyperbolicum quadriforme, idest quadrare quidem basis DX: sed cui præbeat superficierum à basi eleuatarum curuitatem Hyperbola AEZ normalis basi, vt repræsentat corpus tale fig. CEXEMD. Pyramidis autem latus pertingens ad verticem axis transuersæ sit RK, quæ sit super basim DX; & frustum eius, vel dimidiū frusti sit EMECX; vt perfecimus ad læuam AMC. Dico itaq; in primis antequam demonstrem propositionem, quartam partem corporis hyperbolici quadriformis esse æqualem prismati QFFV, cuius altitudo FT æquet conoidis altitudinem YE; basis verò sit rectangula MF ex RE tangente vertice & FY latere basis, & pyramidi æquealtæ HQV, cuius basis VH sit differentia VM inter ZB, vel QT, & MK, vel DC, ita quod QF trapezium æquetur trapezio plano YERB, & triangulum FYK triangulo in illo descripto YEB.



Probatur. Nam ex prop. 59. tract. 24. vt applicata quælibet æquat suo quadrato rectangulum ex LP, & PN ab eodem puncto P nascentibus, & protensis, altera quidem in superficie SYS, vel æquali TFK ex effectione, altera verò in superficie BKYS, idest FQT. Cum ergo singula quadrata singulis rectāgulis, illa, quę describuntur in conoide hyperbolico quadriformi SXD hæc, quæ in prismate

mate QTMF, & QVH pyramide, & sint quoque equalia ea 18 h. ęquealta parallelepipeda in illis basibus sita. Ex prop. 22. tr. h. ipsa corpora, in quibus describuntur erunt æqualia, nempe quarta pars corporis hyperbolici quadriformis, & prisma MQST, pyramisque VHQ: quæ pyramis, & prisma: si quadruplicentur erunt æqualia toti conoidi quadriformi, simulque conficient frustum pyramidis, cui parallelepipedum ipsi frusto æquealtum constitutã super minorem basim, demptum fuerit.

COROLLARIVM I.

HInc videre potes inuolucrum huius corporis, cuius medietas aACMX, cuius sectio a a sz ablata hyperbola aaa, æquari parallelepipedo, cuius basis sit quadratũ ea RS, & altitudo ys; Nã si demantur à frusto pyramidis quatuor prismata, quatuorque pyramides ęquales conoidi, quod conoides, & auferatur ab eodem corpore frusto pyramidis, remanebit inuolucrum corporis huius, & parallelepipedum illud ęquale.

COROLLARIVM II.

EX serie quoque ostensionis euidens fit, quod conoidis quadriformis singulę assignatę partes basi parallelis planis resectę ęquatur prismatis, & pyramidis portioni ad eandem altitudinem à plano basi parallelo resecatę; Quia scilicet omnia plana parallela basi ad eandem eleuationem, hinc in sphæroide, hinc in prismate, & pyramide ducta sunt inuicem æqualia; Vnde eodem argumento ex prop. 28. huius idem de portionibus concludere poteris; Et hinc ex Coroll. 1. eadem de inuolucro portionis concludes, & de parallelepipedo in minori basi ad eandem altitudinem portionum conoidis hyperbolici erecto. Quod nempe tum partis inuolucrum, tum hoc parallelepipedum sint æqualia.

EXPENSIO IX.

De Corporibus spiralibus.

VIdimus Tract. 30. prop. 53. & sequent. superficies spirales; modò spiralia corpora super ipsas eleuata breuitèr oportet attingere, & eorum mensuras aperire; Sunt autem spiralia corpora in quadruplici differentia; Alia, quæ obtinent basim circulum, & eleuantur parallelis superficiebus à basi, sed spiraliter assendunt per incrementa ambitui circuli proportionalia, altiorque est gyrus in fine, quam in initio; Alia sunt, quæ super basem spiralem sunt constituta: sed in æqualem eleuationem terminant, in basimque spiræ, à qua eleuantur, æqualem, & similem. Alia sunt, quę super basem spiralem sunt collocata. Sed etiam secundùm, quòd crescunt spatio basis sic, & altitudine eleuantur: Alia tandem è contra; Nam in ipsa spirali basi collocata, secundùm quod basis crescit amplitudine, illa altitudine decrescunt.

DEFINITIO.

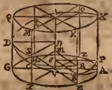
COrpus spirale est illud, quod in altum se eleuando tot partes absumit altitudinis, quot periphęriæ circuli ipsum ambientis, & ab eodem centro descripti.

Soliditates spirales in altitudinem eleuantur proportionaliter ad circulum, secundùm quod feruntur in orbem; ita quod, quot partes absumit circuli in orbem se gyrando, tot altitudinis assequatur in se eleuando: Sicut enim linea spiralis, ita decrescit, vt quot partes absumit circuli generantis, tot partibus diminuatur, sic spira ABCD, si ex sex partibus circuli AEFO eodem centro ducti efficit AE vnicam, etiam vnica parte AB eleuatur ex sex, in quas altitudo AX diuisa sit, si duas ambitus AE, & EF, etiam duas FC: altitudinis occupat, si tres AEFO, etiam tres altitudinis absumit OD, &c.

THEOR. I. PROPOS. LVII.

Corpus spirale super circulum spiraliter in altum ascendens, est dimidium cylindri super eandem basem collocati, & in eandem altitudinem eleuati.

SIt spirale corpus primi generis, quod spiraliter tantùm in altitudinem procedat super basem circularem AEBHZ, spirã ABCOLOA. Dico, quod hoc est ad cylindrum AOQA, vt 1. ad 2.



Probatur. Nam spirali corpori ABCD LOXAO circumscribãtur sectores solidi PABEVE, & REFCMV, & SDFGHV, & cet. equalium basium, eritque sector solidus PAAEVA ad sectorẽ solidũ XAAAVI, vt altitudo SA ad altitudinẽ AX ex 13 h quod sint super eãdem basim VAB. Sic sector solidus SVPRMC erit ad sectorem solidum EKIVMF adest æqualem XTAAEV, vt altitudo FC ad altitudinem FM, idest EK: ergo ex prop 25. lib. 5. prima quantitas SAEFVE sectoris solidi cum quinta EVFCMR sectoris item alterius solidi erit ad secundam ABXVEK, & ideo ad duplam ex 18. l. 5. XIMAVF, vt tertia AE altitudo cũ sexta FC altitudine ad AK altitudinẽ, & ideo ad duplã FM, & AA. Cũ ergo sint duo sectores solidi APBEVE, & AFACVM ad AA KVA sectorẽ solidũ, vt duę altitudines ES, TC ad altitudinẽ AK, & sectorquoq; solidus crescens AFSO DVN sit ad solidũ VFGMIQ idest æqualẽ KAAEVI, vt GO altitudo ad GQ idest æqualẽ KE ex eadem prop. 25. prima quantitas cum quinta, nempe duo sectores solidi APVMFC cum sectore solidos SFVNDO erit ad secundam quantitatem AXEVXI, & ideo ad triplam XKMQ VEFG ex 18. lib. 5. vt tertia duę altitudines BE, FC cum sexta OD ad quartam SK, & ideo ad triplam AK, & FM, & GQ, & sic prosequere vsque ad complementum totius solidi spiralis, & totius cylindri, & tunc erunt omnes se-

ctores

ctores solidi se augentes ad omnes sectores solidos æquales inuicem. vt omnes altitudines se augentes BB, FC, GD ad omnes altitudines æquales t Sed altitudines se augentes sunt dimidium altitudinum æqualium. Siquidem accrescunt proportione arithmetica Quia verò rectangula eiusdem altitudinis ex propos 12. tract.27. decrescentia, seu crescentis arithmeticè dimidia sunt integrorum, etiam bases lineę, quæ sunt in eadem proportione, ac rectangula æquealta ex 1. lib.6. erunt dimidium basium integrarum: Cum ergo altitudines se augentes BE, FC, GD, & cęt sint dimidium integrarum altitudinum EX, FM, GQ, & cæt. æquali numero multiplicatarum; Etiam sectores solidi crescentes BAP EVC, EVE FCM, & cęt. erunt ad integros sectores ABIV, KFIV, MGIV, & cęteros eadem numerositate altitudinum sumptos, vt 1. ad 2. si autem sic sectores circumscribentes intelligantur multiplicati omni numerositate possibili iuxta vsitatum modum arguendi adæquabunt corpus spirale ABCDLNXAEPG, Ergo hoc corpus ad cylindrum ex sectoribus æqualibus integratum erit, vt 1. ad 2. dimidiumque eius adęquabit.

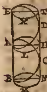
COROLLARIVM I.

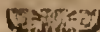
QVod dicitur de toto cylindro, & de spirali corpore, idem dicendum de eorum partibus V.g. ABSPEV sectorem esse duplum corporis ascendentis AIEVE.

Quia si rectangula illi portioni, vt toti circumscribantur, eodem argumento poterit ostendi singulos sectores crescentes esse ad singulos æquales, vt altitudines crescentes ad altitudines æquales, & quia crescentes sunt dimidium altitudinum æqualium, cum arithmeticę crescant, etiam crescentes sectores esse dimidium sectoris integri.

COROLLARIVM II.

HInc est, quod habita primi spiralis corporis in altum ascendentis quantitate, cęterorum corporum spiris ascendentibus comprehensorum quantitates habeantur. Nam BNMCA spirale corpus est dimidium cylindri BML BNM, & ALHNB spirale corpus est dimidium cylindri ALHTXE: sed hic sunt ęquales cylindri; cum eorum sit æqualis basis, & altitudo ob spiram eandem; quę ascendit à B vsque ad A, & ab A vsque ad E. Ergo corpus interpositum inter duas spiras est æquale duobus dimidijs cylindrorum ęqualium; duo vero dimidia ęqualium vnum integrum conficiant. Vnde corpus spirale inter duas spiras BCADE conclusum ęquat cylindrum BNMALH, vel cylindrum ęqualem ALHTXE,

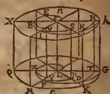




THEOR. II. PROP. LVIII.

Spirale corpus in æqualem altitudinem eleuatum: sed super spiralem basim collocatum est tertia pars cylindri æqualis eleuationis super circulum spiram generantem insistentis.

SIt spirale corpus AHIBECGOFZL super basim spiralem GNPZL, & circulus complectens sit GBQ: cylindrusq; super hunc circulum leuatus ANXCQ. Dico spirale corpus AHIBECGFZL esse tertiam partem cylindri GEQANX.



Probatur ex eodem principio, & ferè eodem argumento, vt ostensa est propositio precedens. Quoniam LDT basis, sectorque deficiens est ad GLE sectorem, vt sector deficiēs solidus TDLNHC inscriptus ad sectorem solidum integrum AOCGBL ex 85. prop.h. At vt PLF deficiens sector basis ad basim sectorem KLM, scilicet æqualem GLE, ita est solidus deficiens SIPPLC ad sectorem solidum super KLM in altitudinem FI erectum, seu æqualem ACLGEO: Quapropter ex prop.15.lib.5. prima quantitas TDL sector inscriptus planus deficientium primus cum quinta quantitate PLF, sectore plano; obtinebit ad secundum GKL, & ideo ad duplum eius ex propos.18 lib.5. GLM, vt tertia quantitas sector solidus deficiens NHCTDL, cum sexta PLSTC ad sectorem solidum integrum LCAGEO; & ideo ad duplum eius GLM basi erectum æquealtum. Iam ergo si sumantur TDL, & PLF simul sectores plani erunt ad GLK sectorem planū, vt sector solidus TDCLPFST ad sectorem solidū GAKOLC, & LYZ sector planus ad sectorē planū MLQ, idest GLK, vt deficiens sector solidus LYZSVC ad sectorem solidū integrum super LMQ æqualem GACCKL sectori. Quadere similiter iunctis sectores TDL, PLF, LYZ ad GLK sectorem integrum, & ideo ad triplum eius, vt tres sectores solidi deficientes illis basibus locati NHCLDT, SVCLFP, VBCLZY ad sectorem solidum integrum AOC GKL, & ideo ad triplum eius ęquealtum basi tripla GKMQL collocatum, & sic de alijs.

Cum itaque omnes inscripti sectores plani sint ad integros planos, vt omnes solidi inscripti deficientes ad solidos integros sectores, erit etiam ipsum spatium spirale omnes sectores solidos tandem adęquans iuxta vsitatum argumentum multiplicationis talis, quę omnem possibilē differentiā inter inscriptos sectores, & corpus spirale tollat, & absumat ad cylindrum ex sectoribus solidis non deficientibus compositum, vt tota basium multitudo, idest ipsum spirale planum ad circulum ge-

neràtorem

nerantem: sed spirale spatium ad circulum generantem est, vt 1. ad 3. ex propos. 53. Tr. 30. Ergo etiam spirale corpus AHIÆBCGDFZL ad cylindrum ambientem GMQXNA erit, vt 1. ad 3.

COROLLARIVM I.

Hinc etiam euidens est: Id quod dicitur de toto solido posse ostendi, de singulis partibus solidis, nempe, quod se habeant ad inuicem, vt portio basis spiralis ad circulum generantis portionem respondentem. Portio verò plani basis est ad sectorem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus cum triente quadrati differentiæ ad quadratum radij sectoris ex prop. 60. tr. 30. Ideoq; spiralis solidi frustum AHCGDL erit ad cylindri partem AOCGXL ambientem, vt solidum parallelepipedum super illud rectangulum linearum LD, LG terminantium, & triens alius parallelepipedi in quadrato differentiæ DK locati, quæ in parem eleuationem sublenata sint ad parallelepipedum æquealtum, ex quadrato GL radij basis sectoris assurgēs.

COROLLARIVM II.

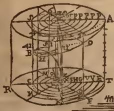
Hinc etiam patet, quod idem verificatur de corpore situato in secunda, & tertia spira, & cæteris de quibus locuti sumus prop. 56. & 58. & 59. tract. 30. Quod scilicet sit ad corpus cylindricum comprehendens, vt ipsa spira plana ad circulum eam claudentem. Nam idem argumentum, quod attulimus in ostensione propositionis, etiam hic valet absque eo, quod replicetur: cùm etiam sectores solidi deficientes ad primum sectorem, & alios maximos æquales solidos, vt sectores plani deficientes illorum bases ad primum sectorem planum, & alios æquales ob eandem altitudinem ex 13. h. sint in eadem proportione.

THEOR. II. PROPOS. LIX.

Corpus spirale basi spirali inixum, & quoad altitudinem spiraliter deficiens est ad corpus spirale eiusdem altitudinis superspiralem basim positum, vt 5. ad 6.

Sit spirale corpus ASI super basim TCI spiralem inixum deficiens spiraliter, quoad altitudinem AT. Dico, quod hoc corpus est ad spirale corpus eiusdem altitudinis super spiram TCI collocatum, vt 5. ad 6.

Ostensio, quæ nostra est sicut etiam totius h. expensionis à multis dependet, quæ priùs declaranda sunt.



Et primo progress. Obseruandum est spirale corpus æqualis altitudinis, de quo præced. prop. 58. locuti sumus posse circummetiri portionibus annulorum eiusdem altitudinis TA, & latitudinis TE, qui à diametro TI, vbi spira basis sumit initium deducti in ipsam spiram terminent, vt sunt PLTEPA 2, 3 AEP, & aliæ, vt vides in fig. Quia enim ex pr. 9. tract. 18. & 52. tract. 31. semidiameter IT diuiditur in partes æquales, secundùm quas quilibet sector arithmeticè, idest æqualiter quoad diametrū decrescit; qui spiræ, aut inscribatur, aut circumscribatur, si omnes illi sectorum arcus, vsque ad spiram à diametro TS deducantur, patet se inuicem superare annulorum æquealtis portionibus, vt sunt PLA, & YSX, & VYN, & cæt. Nam omnes TE, & SY, VY crassitudinem mensurantes æquales sunt.

Diuidatur itaque IT radius (vt huius rei demus exemplum) in octo partes æquales, à quibus singuli arcus ducantur, vt TF, EA, YN, &c. Certum est ex præass. Expens. 7. tract. 31. decrescere singulos arcus radijs interceptos TF, & EK, YN, &c. arithmeticè penes diuisionem diametri; ita quod, vt IX deficit à IT octaua parte, sic arcus EL à TF deficiat octaua parte, & sicut YI deficit ab TI duabus octauis partibus, sic YQ ab TF duabus octauis partibus decrescat; itaque si annulus AL duplicatur, deficiet duabus octauis partibus; si annulus YQ triplicetur, deficiet tribus octauis partibus ab LA, & cæt.

Progress. 2. Itaque sectorum arcus arithmeticè decrescent à se inuicem æquali arcu deficiendo, nempe semper octaua parte earum, in quas primus arcus TF diuisus est. Itaque in sectore IFT erit arcuū, & ideo portionū ānulariū series arithmetica, quorum primus annulus LEFT, secundus LQEY, & cæt. In secundo verò sectore IKL erit adhuc alia series arcuum, & ideo portionum annulorū, quorū primus AL, qui deficiunt, vt illi, qui sunt in sectore IFT, sed incipiendo ab arcu minori LK vnica octaua parte. In sectore verò NIA erit alia series arcuum, & ideo portionum annulorum eodem decremento arithmetico deficiens, sed incipiens ab arcu minori duabus partibus ab FT, sed vnica ab XL. Ita vt etiam ipsæ series arithmeticè decrescant vsque ad finem, totque sint series, quot arcus in IFT sectore, vel quot decrementa arithmetica, quæ in singulis deficiunt, vel quot partes in arcu maximo FT sectoris maximi IFT, vel partes in radio IT. Quæ tamen omnes series simul sumptæ componunt soliditatem totius corporis spiralis basis; sed æqualis altitudinis.

Progr. 3. Quod autem annulares portiones, vt arcus arithmeticè deficiant, patet, quia omnes annulares portiones istis arcubus comprehensæ sunt æquealtæ, vtpote deductæ ob æqualibus partibus ET, & XY, & YV diametri TI erunt ad inuicem, vt bases, nempe vt ipsi arcus. Siquidem ex propos. 14. Tract. 30. æquantur rectangulis ex portionibus intermedijs inter arcum maiorem, & minorem marginalem ipsius portionis annularis plani, sc. arcu intermedio inter LS, & FT, qui in figura expressus non est, ne generaret confusionem. Isti verò arcus intermedij crescunt ad inuicem etiam arithmeticè, vt ipsi arcus marginales cum semidifferentia inter maiorem, & minorem, vel à maiori deficiunt, vel super minorem accrescunt V. g. arcus inter FT, & LX erit maior, quàm LA semidifferentia inter FT, & LE, at arcus intermedius inter QY, & EL erit minor, quam AL semidifferentia inter QY, & LE, quæ duæ semidifferentiæ æqualium differentiarum, quibus decrescunt arcus FT, LE,

QY

QY additæ simul facient differentiam eandem arcua LA ab FT, vel QY ab LA. Exemplum est in quatuor lineis in seorsim ductis arithmeticè deficientibus tantùm enim deficit secunda à quarta quantum prima à tertia. Cum ergo rectangulorum bases intermedijs arcubus æquales arithmeticè decrescant, etiam ipsa rectangula arithmeticè deficient, vt ipsæ bases, vtpote æqualta, & ideo ipsæ quoque portiones annulares LEFT, & QYAL rectangulis æquales ex 24. Tract.30. arithmetico defectu extenuabuntur, & si super istas bases portiones solidæ annulares intelligantur eleuatæ ad eandem altitudinem AT, quæ sunt illæ soliditates, quæ integrant spirale corpus quoad basim solummodo TLKCMOI basi infima, & A 2 3 4 5 6 7 8 basi suprema locatum, etiam ipsæ soliditates cum sint inuicem, vt bases ex 23. prop. Tract.34. par.2. decremento arithmetico eodem semper æquali decrescent: ideoque sector solidus FET AP 2 erit diuisus in portiones annulares solidas decrescentes arithmeticè, vt ipsę bases, idest in seriem solidam arithmeticam, V.g. FTLEAP 2. erit prima soliditas, & EL QY P P2. secunda soliditas, & sic dicas de alijs vsque ad axem.

Eodemque modo sector solidus I E L 2 3 diuidetur in seriem arithmeticam soliditatum, pro ut decrescunt ex 1. progr. ipsæ bases, eritque series, cuius maximus terminus K L Q 2 3 erit minor, quã maximus LEFTPA2 vnica differentia arithmetica, & sic effare de alijs seriebus, ita quòd vnusquisque sector solidus seriem in se contineat proportionalium arithmeticarum soliditatum annularium.

Progress. 4. Considerandum itaque est, quod spiralis superficies corporis basi, altitudineque deficientis, hæc omnia solida æqualia secat ab A descendendo spiraliter per A 9 11 B, & cæt. vsque ad centrum 1, & arithmetico defectu singulas altitudines detruncat, vt ex def. constat. Ideoque debent intelligi spirali superficiei descendenti circumscriptę sectorum solidorum annulares portiones TF 2 APEL, & LEQ 9 1t, & NE 11 2t, & cæt. quæ singulæ à semidiametro APP, & cęt descendant arithmeticè deficiendo tamquam quidam gradus altitudine AT in tot partes diuisa, vt radius Tt, quoa omnes spiralis superficies A9 11 8 1 tangat in A in 9 in 11. in 2t in 8 in 41. & cæt. Ita quod singulorum bases sint primo LEFT, secunda EKY, tertia YVN, quarta VGC, & cæt.

Progress. 5. Quia itaque istæ omnes soliditates in figura sine confusione exprimi nequeunt, ideo seorsim ea omnia expressimus in rectãgulo 1 13 e, vt eorum ordo, & defectus meliùs capiantur, in quo 13 1. superficies nigra exprimit crassitudinem ET singularũ basiũ ETLP, &c. quæ semper crassitudo in omnibus est æqualis. At rectangulum e 72. exprimit primam portionem annularem solidam LEPT·2AP non descendentem: secundum n.41. 72 o, in quo partes decrescant à 72 o. vt descendit PIIKE, per vnũ gradũ à 2 in 9. à summa altitudine 72. vel AT, quod rectangulum solidum æquet duas æquealtas annularium soliditatũ portiones LEP2. & 23KL, quæ primo decremento arithmetico, eodem deficiunt; Tertium sit 41. 42 n. 40. in quo tamen partes ab eadem altitudine n 41. descendant, vt facit ipsa portio VYN annuli solidi, cui æquatur, quæ descendit à P in 21 per duos gradus 8. & 11. quod rectangulum solidum ęquetur tribus annularibus portionibus æqualibus inuicem locatis in basibus EQ, 8Q, & KN, & sic de alijs: Itaque 72 e exprimit, & æquat soliditatem in LEFT basi locatam 72 82 n o æquat eam gradatam, quę in 8YK, sic 41 92 40 n, quę in VYN, sed 42 30 40 61. quæ in VGC, at 13 31 42 82 eam quę in GVC sita est: rectangula 42 50 23 41 gradatam soliditatem, quę GMCM basi stat; rectangula 51 41 43 72. quę in HSMO fundatur; & tandem rectangulum gradatum 43 61 t gradationem, quæ in 8RZI locata est, quæ acerpta, vt æquealta ęquãt quoque annulares portiones æquealtas ijsdem basibus locatas.

Progress. 6. itaque singuli sectores solidi veluti in TKF, & LEI, & KIN, & cæt. basibus locati deficientes arithmeticè ab inuicem in singulis rectangulis prædictis habent suam partem correspõdentem, ita quod prima pars omnium rectangulorum V.g. prima, & vnica in 72. e, prima duarum in 72. n prima trium in 41. 40. & sic omnes primę partes in quolibet rectangulo solido æquentur partibus sectoris solidi in basi ETF locatis, & illæ omnes primę sint æquales portionibus annulorum quæ successiuę decrescunt in LFET, & LEQY basibus decrescentibus. Sic quoque concipies de secundis partibus in vno quoque rectangulo solido, ita quod secunda pars duarum in 72. n secunda pars trium in 41 40. secunda pars quatuor partium in 4 2 6 1, & cęt. portiones solidas sectoris EIL basi sitas adæquent, & sic dicas de tertijs in 41 40, 42 61; 13 42. & cęt quæ æquant portiones solidas NIK sectore locatas.

Progress. 8. Ad hoc vt ergo incipiamus ostendere, quam proportionem habeant hæ omnia soliditates simul acceptæ ad totum 13 e, idest, quam spira solida altitudine, basique deficiens habeat ad solidam spiram basi tantùm deficientem: Accipiamus in primis minimas singularum gradationũ altitudines, & consideremus, quod hæ singulæ minimæ

aimę altitudines, & vltimæ AT, & L 9. & X I I. & X 12. & C8, & cęt. in vnaquaque portioue annuli crescunt aritmeticè vsque ad 1; suntque in rectangulis portiones illis ãnulis æquales e 7 t, 82 o, 9 t n 30 40, 22 31, 23 42, 43 41. vsque ad nihil r, sciuntur Arithmeticę etiam quoad altitudinem; siquidem ex def. vt spira appropinquat ad ... m per partes æquales radij decrescendo, ita ab ... dine per partes ęquales altitudinis deficit. ... in annulo solido LEPT 2 A nulla est degradatio, ... altitudo TA, vel e t, at in annulo solido ... est primus descensus P 9 vnius gradus, vt ... rectangulis solidis n 82, & sic successiuè in alijs ... rectangulis solidis melius percipies, in quibus vt diximus progr. 6 omnes primæ partes pertinent ad sectorem solidum in TPI locatum, quorum minimæ, & vltimæ altitudines sunt, & 72 o, n 82, 40 92. 30 61, 22 42, 34 41, 43 72 vsque ad nihil r graduatim, & arithmeticę deficientes: Quod autem dicitur de partibus primi sectoris solidi considerati iuxta minimas altitudines; hoc item dicendum est de partibus sectoris solidi LIX locati iuxta minimas altitudines accepti: In singulis enim rectangulis solidis minimæ altitudines partibus omnibus rectãgulorum communes sunt, & designantur per lineas 72 r, 72 82, 82 92, 92 30, & cæt. Itaque istæ portiones solidorum sectorum, & rectangulorum solidorum illis æqualium duplici decremento arithmetico decrescunt quoad latitudinem, quidem simul cum basibus decrescentibus ex progr. 1. & 2, & etiam quoad minimas, & vltimas altitudines: ideoq; rectangulorũ ęqualitorum V. g. primorum in vnoquoque rectangulo solido in 72 e in 41 o, & cæt. erunt vtpote ęquecrassa, duo trientes vt ipsę bases planę ea contextu propos. 14. 15. 16, 17. Tract. 28. Et quia vt dictum est prog. 6. prima omnia in vnoquoq; rectãgulo æquant sectoris primi T 1 P portiones annulares solidas; Ideo illę portiones acceptæ, & consideratæ iuxta vltimas, & minimas altitudines erunt duo trientes sectoris IPTA a eiusdem æqualti, & grassi, quod deficit quoad singulas partes vnico decremento arithmetico, vt dictum est progr. 2. & 3. Si afferas de omnibus partibus secundis rectangulorum solidorum, quæ pertinent ad solidũ in basi 1 L 2 locatũ, & sic dicas de omnibus alijs. Ideoq; in singulis progressionibus arithmeticis horum sectorum vnico decremento arithmetico deficientium solũ longitudine habemus portiones solidas deficientes secundum minimas altitudines arithmeticè, quare in vnoquoque series deficientium partium solidarum duplici arithmetici decremento ad seriem earum solùm vnico defectu deficientium se habebunt, vt duo ad tria. Ideoque etiam omnes simul ex prop. 17. lib. 5. cum ad singulas taliter sint, erunt, vt duo ad tria, & ita omnia minimæ altitudinis rectangula V. g. 72 e, 82 o, 92 n, 30 40, 42 21, 23 42, 41 43 · vsq; ad t erunt totius rectanguli solidi 13 e, duo trientes eum in vnaquaq; serie V. g. primatum partium deficientium altitudine, & latitudine sint ęqualtaeum latitudine deficientium duo trientes, & sic in serie secundarum partium, & cęt.

Progress. 8. Nunc quid gradationes ipsæ auferant ab vnoquoque rectangulo solido, considerandum est. Ad quod aduertere oportet singulas partes singulorum rectangulorum vnicã in 72 t, duas in 41 72, tres in 42 82, & c. esse inuicem æquales, vtpote illę, quarum latitudines æquantur arcubus eodem decremento ab eodem maximo diminutis V. g. vnica in 72 e arcui FT duæ in 41 o arcubus L2, & LX eodem decremento primo ab arcu FT maximo deficientibus. Tres in 42 n tribus arcubus YQ, & QK, & 2N, qui duplici decremento arithmetico eodem deficiunt ab FT maximo eodem. Altitudines verò omnes æquales sunt 41 82, vel 42 92, vtpote pertinentes ad spiram solidã altitudine non deficientem. At quatenus terminantur in spirale corpus decrescens altitudine quoque, & eius spiram descendentem; in singulis à summa altitudine, vt dixi progr. 5. descendunt vsque ad minimam altitudinem arithmeticè.

Progress. 9. Cum itaque gradata solida rectangula in vnoquoque rectangulo accepto à summa vsque ad minimã altitudinem V. g. t 72; 72 82 41 92. 42 30. 13 22. 50 23. 51 43. 62 t in singulis rectangulis, quorum partes æquelatæ constituant progressiones arithmeticas vnico decremento arithmetico quoad altitudinem deficientes erunt singulorum rectangulorum 72 82, & cęt. dimidium ex prop. 12. Tract. 27. vtpote quod eadem ratio sit solidorum, quorum grassitudo eadem in omnibus, vt dixi prop. 5. ac basium, & rectangulorum planorum: Cum ergo singula deficientia sint ad sua integra, vt 1. ad 2. etiam omnia ex prop. 17. lib. 5. erunt ad omnia sua integra, vt 1. ad 2.

Prog. 10. Ponatur itaq; quod rectangulum 13 e totum toti soliditati spiralis, basis æquale tantũ, sit partium 6. quia ostendimus progr. 7. rectangula minimarum, & vltimarum altitudinum 72 e, 82 o, 92 n, 33 40. & cæt. esse totius 13 e soliditatis duo trientes se habebunt ad rectangulum totum, vt quatuor ad sex. Vnde residuum integræ soliditatis ablatis illis minimarũ altitudinum rectangulis remanebit duo. At quia huius residui, nẽpe rectãgulorum T 72. 72 82, 41 92, 42 30, & cæt. gradationes solidę sunt dimidium, & ideo, vt 1 ad sex ad totum ex prop. 39. Tr. 17. Ideo cũ quantitas minimarum altitudinum posita sit, vt quatuor, & hæc ponatur vt 1. ad sex respectu totius ex eadem propos. 39. Tract. 17. erunt omnes quantitates rectangulorum solidæ, quæ æquant sectorum solidas portiones deficientes ob spiram basi, altitudine que deficientem, cui circumscribũtur ad omnia rectangula solida, quæ æquant sectorum solidas portiones spirali corporis basi tantùm circumscriptas, vt quinque ad sex.

Hoc autem totum intelligitur ex prop. 17. tract. 27. si hæc rectangula subdiuidantur omni possibili subdiuisione subdupla, fient nempe ipsi annuli, seu portiones annulorum corpori spirali circumscriptæ, vel inscriptæ, quibus rectangula hęc æquatur omni possibili numero multiplicatæ similiter intelligi debent. Vnde etiam ipsum corpus spirale deficiens, quoad basim, & altitudinem istis rectangulis inscriptis, vel circumscriptis, quę omni possibili multiplicatione subdupla numerosa tandem ipsum æquant ad spirale corpus solùm penes basim deficiens annulis prædictis, & similiter multiplicatis inscriptum, vel circumscriptum erit, vt 5. ad 6. quod hæc rectangula inscripta, vel circumscripta illud tandem æquent, alioquin nouæ inscriptioni, vel circumscriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquatur, molem relinqueret.

COROLLARIVM I.

* Hinc enascitur, quod sit ad cylindrum RA super circulum RT eiusdem altitudinis, vt

vt 5. ad 18. siquidem spirale corpus deficiens, quoad altitudinem, & basim est ad spirale corpus deficieus tantum quoad basim, vt 5. ad 6. sed corpus spirale deficieus tantum quoad basim ad cylindrum RTA est ex preced. vt 1. ad 3. Idest, vt 6. ad 18. Ergo ex *æquo* erit spirale corpus vtrinque deficiens ad cylindrum RTA, vt 5. ad 18.

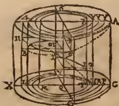
COROLLARIVM II.

*Hinc quoque fit, quod residuum huius spiralis corporis, quod scilicet decrescit altitudine, dùm spiralis basis crescit latitudine, estque corpus APP9 B12345678. quartum genus spirarum, erit ad corpus spirale non deficiens altitudine, vt 1. ad 6. quia compars spiræ, nempe corpus ATL9BCI est eiusdem corporis altitudine non deficientis 5. ex partibus eius 6. vnde residuum erit 1. & ad prędictam compartem se habebit, vt 1. ad 5.

THEOR. III. PROPOS. LX.

* *Secunda spiralia corpora, & basi, & altitudine spiraliter deficientia sunt ad spiralia corpora secunda basim spiralem tantùm habentia, vt 2 $\frac{1}{3}$ ad 3.*

PRæter primas solras assignauimus Tract. 30. prop. 57. & 58. & 59. spiras sequentes, & secundos, tertiosque ambitus post primum efficientes. Si ergo intelligantur super has bases corpora eleuari, alterum, quod spiraliter deficiat, etiam quoad altitudinem, vt est A 9 a 1 T super basim COLVT spiralem secundæ spirę: alterum super eandem basim collocatum COLVT, sed in similem, & parallelam basim terminet, quæ incipiant ab eodem puncto A, illud corpus deficiens spiraliter basi, & altitudine erit ad hoc basi tantùm deficiens, vt 2 $\frac{1}{3}$ ad 3. vel 7. ad 9.

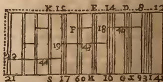


Progress. 1. Quod ostendetur eodem artificio, quo præcedens. Nam CT semiradius, si ponatur TQ altera pars, & radius ad primum circulum pertinens diuisus in quatuor partes æquales; etiam ipse in quatuor partes diuidetur ex 55. Tract. 30. vnde erunt octo, & ita arcus deficient singuli octaua parte, vnde annuli plani erunt æquealti, qui spiram baseos, vel ambiant, vel ipsa ambiantur, decrescuntque vt arcus sectorum arithmeticè ex progr. 1. propos. anteced. singuli octaua parte.

Progr. 2. Ideo ex progr. 2. in singulis sectoribus CQO, OQL circumscribentibus erit instituta series arcuum arithmetico decremento deficientium, & ideo portionum annulorum planarum ęquealtarum PCO, & cęt. vsq; ad in sectore QO, & pari ratione in alio sectore LQO, & sic in omnibus alijs, quę singulę series continuę incipiant primo arithmeticè deficiente, V. g. prima CQO ab arcu integro 8. partium, secunda LOQ ab arcu septem partium, & sic de alijs. Sed cum hac differentia à progressionibus pręced prop. nam illę deficiebant vsque ad centrum, vsque ad vltimum sui; hę verò deficiunt vsque ad circulum TM dimidium circuli XC, vtpote ex dimidio radio QT, vnde etiam arcus quatuor, in quibus diuisus est, vt est diuisus circulus XC ex prop. 39. lib. 6. dimidium erunt quatuor arcuū circuli XC V. g. arcus OC: quare arcus tantū pro dimidio sui deficient, & aliud dimidium ipsorum integrum remanebit in singulis progressionibus, in quibus sectores distributi sunt. Ex 3. verò progr. tales, & etiam erunt portiones annulorum planorum, quos prædicti arcus ambiunt, & idem dicendum de solidis portionibus annularibus æque-eleuatis ex eodem progr. & ex 23. prop. Tract 34. p. 2.

Progress. 3. Spirali autem corpori etiam quoad altitudinem deficienti intelligantur circumscripti annuli, vt prędicti super bases annulares planas CO, LAV, & cęt. quę sint COYA 3 non descendens, & PRL 11 y ab y primo gradu 9 3. descendens, & aHV 10. ab y per duos gradus 39. a 11. descendens: Sic yHTM 12. per tres gradus 3 9. a 11. 1 10. deficiens, & tandem 7 TMT vsque ad vltimum gradum in t2 T post omnes gradus alios perueniens, sed semper incipientes à summa altitudine Ayyy 7.

In istis verò annularibus solidis portionibus primò considerandę sunt minimę altitudines O 3. L 11. V 10. T 12. vt diximus progr. 7. quę deficiunt arithmeticè in vnaquaq; portione annulari V. g. minima altitudo O 3 solidæ portionis annuli in OC basi locatę O 3. & eius, quę in tota LP annulari basi est L 11. at eius, quę in RLV annulari basi situata est V 10. altitudo minima.



Progress. 5. Sed vt fecimus progr. 5. & 6. meliùs percipies in rectangulis 41. 8. 8 16. & cæt. quorū 8 41 æquare presupponatur primā portionē in OC locatam latitudine, vt arcus ipse, & basis ipsa non deficientem: sed nec altitudine cum sit primū omniū. At rectangula duo 8 16. quę prima diminutione deficiunt latitudine, portioni solidę æquale iudicentur sitę in PL. At 14. 17. tria rectāgula putentur portioni solidæ sitæ in RLV æqualia, quæ secunda diminutione deficiunt, & cęt. Vnde in singulis rectangulis primæ partes in sectore COQ sitæ intelligantur, scilicet 8 41. D 31. R 16. K 17. secundæ 14 C, & aliæ secundæ in

alijs

aliis rectangulis in LQO collocetæ, intelligendæ sunt; tertiæ vt 15 60 in OLQV. In singulis verò medietas alba rectanguli 8 41. integra latitudine, & & altitudine perseuerat, vt diximus pr.2. perseuerare integrã medietatẽ arcuum, quæ latitudinẽ eorum mensurant. At altera medietas 8 31.02 seu secũ ũ suas quatuor partes arithmeticè deficit in singulis diminutionibus vnã partem deperdendo: si tamen hæc rectangula cogitentur æqualia illis portionibus solidis, quæ spirale corpus altitudine non deficiens ambiunt spirali tantùm basi situm.

Progress. 6. At si velimus æquari solidis partibus ambientibus spirale corpus & altitudine, & latitudine: tunc singula rectangula deficient arithmeticè quoad altitudinem, vt diximus progr. 4 deficere portiones solidas corpus spirale ambientes, itaque 8 41. non deficiet: at 18 93. deficiet primo gradu: 19 16. secundo gradu: 20 17. tertio. & cęt. si plora sint, si sumatur secundùm minimas altitudines 8 93. 18 16. 19 17. 20 21. gradus, per quos perueniunt ad illas minimas altitudines non considerando, in illisque pars alba vnico decremento tantum deficiet. nempe quoad altitudinem, ad partes nigræ quoad altitudinem, & etiam, vt diximus quoad latitudinem. Vnde in vnoquoque rectangulo primæ partes 8 41. 45 2. 43 16. 44 17. instituent vnam progressionem arithmeticam rectangulorum quoad medietatem albam altitudine tantùm deficientium, quoad alteram etiam latitudine: Sic quoque secundę partes 18 0, 43 60. & cęt. aliam progressionem similem instituent, sed minoris numeri quoad terminos, nam primi sunt quatuor, secundi sunt tres, & sic dicas de tertijs, vt sunt in sectore COQ quatuor annulares partes, in LQO tres, & cęt.

Progr. 7. Cum ergo istæ singulę progressiones quoad medietatem albam rectangulorum, vt diximus progr. 5. quatenus æquealtę nimirum quatenus æquant solidas portiones corpori spiralis basis tantùm circumscriptas nullo modo deficiant; sed integrę perseuerent, statuantur 6. part. Verùm vt æquantis circumscriptas solidas portiones annulorum spirali corpori etiam altitudine deficienti quoad minimas altitudines, vt dixi progress. 6. deficient vnico decremento arithmetico. Vnde erunt ad non deficientes vllo modo vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tract. 27. Altera verò medietas 1 partium in rectangulis 8 41. 8 16. 14 17. & cæt. deficit primo quoad latitudinem, sumpta sc. vt æqualis ambientibus portionibus annulorum corpus spirale basi solùm deficiens. Ideoque æquealta erunt ad integras partes, vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tr. 27. sed vt deficientes etiam quoad minimas altitudides erunt, ex pr. 14 vt 2. ad 6. Cõponantur ergo simul 3. & 6. rectangulorum partes nempe illę, quæ nullo defectu, & illæ, quæ tantùm latitudinis, & erunt 9. Ponatur etiam simul illæ, quæ tantùm vnico altitudinis, & quę duplici altitudinis, & latitudinis, & erunt 5. Ideoque hę ad illas ex prop. 29. Tract. 17. erunt, vt 5. ad 9. Et quia hoc contingit in singulis primis partibus, quæ quatuor sunt, & idem in secundis, quæ sunt tres, & idem in tertijs, quæ duæ sunt, & cæt. vt diximus progr. 6. rectãgulorum 8 41. 16 8. 14 17. & cęt. quę singulę sunt quędam series Arithmeticè, sed semper numero terminorum minores; ideo ex 17. lib. 5. ita omnes progressiones erunt ad omnes, vt vna ex ipsis, ad vnam, & sic omnia rectangula deficientia secundùm minimas altitudines, & etiam latitudine pro sui dimidio, sc. 8 41. 18 93. 19 16. 20 17. erunt ad omnia latitudine tantùm deficientia 8 41. 16 8. 14 17. 15 21. vt quinque ad nouẽ. Vnde residuũ rectangula 8 18. 14 19 15 20. erunt, vt 4. ad suũ totum. Verùm illa ob gradationes à summa altitudine ad infimam descendentes pro medietate deficiunt, vt prop. 9. præc. prop. cum in singulis rectangulis V.g. in 18 8. duæ sint ęquelatę. & ęquealtæ in 14 19. tres, in 15 20. quatuor in quibus singulis gradata rectangula instituunt singulas progressiones arithmeticas vnico tantùm decremento in altitudine deficientes: Ideo gradata rectangula singulorum æquelatorum, & altorum erunt medietas, ex 12. Tract 27. Quamobrem ex 17. lib. 5. omnes quoque series gradatæ ad non gradatas nullo modo deficientes erunt duo ad quatuor, quæ simul cum rectangulis minimarum altitudinum ex 29. Tract 27. erunt, vt septem ad nouem, vel vt $2\frac{1}{3}$ ad 3. ad omnia rectangula 12 21. sc. ad totũ, & idem dicẽdum de annulis solidis corpori spirali altitudine, & basi in spiram se flectentis. quorũ graduatum defectum rectangula ex effectione imitãtur, vtpote, quod sint inuicem eiusdem latitudinis; similiterque, & per eosdem arithmeticos gradus deficiant respectu annulorum æquealtorum corporis spira baseos tantùm deficientis, vnde multiplicata quantùm multiplicari possunt sicut ipsum corpus spirale non excedent; alioquin nouæ inscriptioni, vel circumscriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquaretur, molem relinqueret; sic, & cũ semper sint inuicem in eadem ratione 7. ad 9. ipsum spirale corpus, nempe quoad altitudinem, & basim ad spirale corpus tantùm quoad basim erit vt $2\frac{1}{3}$ ad 3. vel vt 7. ad 9.

COROLLARIVM.

Hinc faciliter quis videbit, quam proportionem dicat hoc spirale corpus ad cylindrum ambientem, cum enim basis spiralis ad circulum ambientem sit 7. ad 12. si super hanc basim situm sit corpus æquealtum spirale quoad basim tantùm ex 23. Tract. 34 erit ad cylindrum comprehendentem, vt 7. ad 12. vel vt 63 ad 108. nempe vt ipsę bases; At ad hoc corpus spirale se habet corpus altitudine quoque spirale, vt 7. ad 9. Idest, vt 49. ad 63. ergo ex *æquo* erit corpus spirale ad cylindrum ambientem, vt 49. ad 108. scilicet vt 7. ad 15. $\frac{3}{7}$.

COROLLARIVM II.

Intelliges quoque, quid dicendum sit de tertijs spiralibus corporibus, nam circumscriptę solidę annulares portiones non deficient pro $\frac{2}{3}$, & pro $\frac{1}{3}$ deficiene latitudine, vt ambientes spirale corpus basi tantum, Ideoq; si non deficientes ponantur simul 12. istæ deficientes erunt 3. & ideo simul 15. Si verò intelligantur ambire corpus spirale altitudine quoque, quæ æquelatæ perseuerant, deficient tamen altitudine. Vnde illarum integrarum, quæ positæ sunt 12. istę deficientes altitudine erunt 6. at illarum, quę latitudine deficiunt, & positæ sunt 3. istę; quę quoque altitudine deficiunt, erunt $\frac{2}{3}$; ideoque cum illis, quæ sunt 6. deficientibus altitudine erunt 8. quare sub lectæ ab ijs relinquent 7. quarum gradationes medietatem occupant, nempe $3\frac{1}{2}$, ideoque cum reliquis erunt $11\frac{1}{2}$ ad 15. seu 23. ad 30. Sufficit indicasse, esset nimis prolixum de singulis velle agere.



TRACTATVS XXXV

De Corporum comparatione.



Estat vltimus hic labor de Corporum comparatione Tractatus, in quo, & corpora secare, pariterque, augere, minuere, traducere in figuras alias, & tandem mensurare docemus, estque quasi fructus antecedentium Tractatuum, qui de Corporum soliditate discurrunt, & complementum omnium, quæ de punctis, lineis, figuris, planitiebus, & soliditatibus dicta sunt.

EXPENSIO I.

De similitudine Corporum.

AVgmentum plurium corporum in vnum ex eo maxime dependet, quòd describatur corpus simile alteri, & licet id supra tetigerimus, cum de parallelepipedo egimus, ea tamen fuit notitia particularis, quæ solidi rectanguli non excederet cognitionem; Nos autem hic intendimus tradere notitiam generalem similium corporum describendi, vt nedum sciamus corpora similia cognoscere, sed etiam fabricare.

DEFIITNIO I.

* *Illa quæcumque superficies plana dicentur similes, in quibus describibilia ex ordine triangula ab assignato puncto erunt similia.*

Hæc Definitio imitatur definitionem sectionũ conicarũ similiũ, & videtur potiori iure verificari, si enim applicatæ sub eodem angulo ad portiones diametri proportione simili gaudentes ostendunt sectiones similes. quantò magis triangula, quæ secum vehunt laterum proportionem, & angulorum æqualitatem & multiplicata quantùm opus est, totam figuram æquare queunt, saltem quoad sensum, planitierum quorumcumq; similitudinem exhibebunt, & si Euclides circulum definit, in quo omnes ductæ à centro erunt æquales, similiter, & nos definimus similitudinem planitierum, in quibus omnes ductę ab assignato puncto sunt similes. Potest qui ll' esse, quod in planitiebus similibus triangula dissimilia describantur, si tamen omnia erunt similia ex ordine sumpta, semper quoque similes planities erunt, quod definitio intendit.

DEFINITIO II.

* *QVæcumque figura similiter posita iudicabitur, quæ axem consequatur, si per normalem, & basim, & axem ductum planũ triãgula efficiat similia.*

Similis autem etiã dicetur, si superficiebus similibus constet.

Cum solidæ figuræ globosæ superficies, vt plurimum angulos non consequantur, ideo non poterunt iudicari eodem modo positæ, nisi ab axe; si ergo in plano TPM ducto per normalem PM, & axem PI, & basim SX, ea istis tribus,



nempe sectione basis; MT normali MP ab axis vertice ductæ, & axe ipso SP fiat triangulum æquiangulum triangulo QOH ex iisdem constituto dicetur solidũ similiter constitutũ, vt R, quod, & verificabitur de parallelepipedis, siue axem in ipsis ducas, siue latus pro axe sumas. Similitudo verò superficierum, quibus vestiuntur, obtinebitur, si duplicatam, aut laterum, aut diametrorum, aut axium proportionem consequantur. Nam, & circuli, qui duplicatam diametrorum proportionem obtinent, similes sunt superficies.

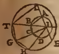
PROBL. I. PROPOS. I.

* *Similem quamcumque superficiem à dato puncto alteri describere.*

SIt data superficies AECD mixtilinea, vel rectilinea, vel curuilinea, quæcumque, & oporteat ei similem delineare. Eligatur quodcumq; punctũ in ea I, & ab I ad margines planitiei ducantur plurimæ lineę, & si habeat angulos pręcipuè ad illos illæ vergant, & producantur vsquedum oportet, aut placet, & inter illas aliqua perueniat ad datum punctum L, deinde fiat, vt IA ad IL, sic IE ad aliud ea prop.12. lib.6. & inuenietur IT; sic iterum fiat, vt IA ad IL, sic IC ad IG, & ID ad IH, & sic agatur in omnibus: Deinde per omnia illa puncta multiplicata quantùm sat est, ducatur, vel flexa, vel plurimæ flexæ, vel rectę, secundùm, quod figura exhibita imitanda rectis, vel flexis, vel an-

gulis

ga … vel tantùm curua constat, & erit factum id, quod desideratur. Nam figura descripta per omnia illa puncta LTGH, & alia plurima erit similis figuræ exhibitæ ABCD.



Probatur. Nam omnia triangula in fig. ABCD sunt similia triangulis in figura LTGH, cùm obtineant latera ambientia eundem angulum apud I proportionalia, cùm effecerimus, vt IA V. g. ad IL, sic IB, & IC, & cæt. Vnde subductis basibus AB & LT triangula ipsa erunt similia ex 5 l 6 & sic de alijs: cum ergo omnia triangula in planitie ABCD sint similia triangulis in planitie LTGHS de scriptibilibus ex def. ipsæ planitiea erunt similes.

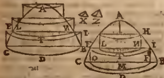
COROLLARIVM.

ELlicitur quod latera quæcumque illa sint, erunt proportionalia. Quoniam enim LT ad BI, vt LI ad AI, & TG ad CB, ex 4 lib. 6. vt GI ad CI, & GI ad CI, vt GH ad CD erit LT ad AB, vt TG ad BC, & GH ad DC, vnde ex pe. 17. l. 5. & omnia simul antecedentia LT, & TG, & GH ad omnia consequentia AB BC, & CD eadem proportione gaudebunt, vt vnum antecedens LT ad aliud consequens AB, quæ est eadem, quæ LI ad AI. Quare etiam latera quæcumque formentur ex illa basium multitudine, vt vt libet multiplicata semper erunt proportionalia, & erit vt LT ad BA, sic LTGH ad ABCD.

THEOR. I. PROPOS. II.

Ad superficiem cuiuscumque corporis globosi, cuius omnes sectiones parallelæ ad axem sint similes, eam obtinet proportionem planum per axes basium, & corporis ductum, quam axis basis, ad circumferentiam basis.

SIt superficies globosa corporis conoidalis alicuius BACD, & superficies plana ducta per axem CB basis, & AM corporis sit ABC. Dico, quod vt est APC planum ad ABDC superficiem globosam, sic axis BC ad ambitum BDC corporis ducti, seu recti, seu obliqui, cuius omnes sectiones basi parallelæ sint similes V. g. Ellipses similes.



Inscribantur portiones cylindraceorum corporum OFIT, & LNH, & cæt. æqualtorũ. Singulæ earum superficies ex propos. 4. tract. 31. quæ de quacumque orbita intelligitur, vt constat ex demonstratione, erunt æquales rectangulo ex circumferentis OMF, & altitudine FI, ideoque rectangulum OI per axes dicit ad superficiem cylindracei OFI eam proportionẽ, quam ad rectangulũ illud ex ambitu OMF ellipsis, & altitudine FI, idest axis CB ad ellipsim BDC; & ita dicas de superficie cylindracei LNH, cui HL rectãgulũ dicit eã proportionem, quam LN diameter ad ambitũ LTN. Omnes verò Ellipses BDC, LTN ex thesi similes sunt; Quare vt OI rectangulum ad OFIM superficiem cylindracei, sic OF axis ad OMF ambitum, vt autem OF axis ad OMF ambitũ, sic LN axis ad LTN ambitũ ob similitudinẽ ellipsiũ; vt autẽ LN ad LTN, sic ex 4. tr. 31. rectãgulũ LH ad LTNH superficiẽ cylindracei; Ergo ex 16. lib. 5. vt OI rectangulum ad OFIM superficiem cylindracei, sic LH rectangulum ad LTNH superficiem cylindracei; idest vt OF axis ad OMF ambitum, & ita discurras de alijs. Ergo ex 17. lib. 5. ita erunt omnia rectangula OI, & cæt. ad omnes superficies cylindraceas BOMFI, & cæt. vt vnum rectangulum OI ad vnam superficiem cylindraceam EOMFI. Quo posito. Assero quod etiam ABC planum ad ACDF superficiem est, vt BC ad BDC ambitum. Nam si non dicit, eandem proportionem sit maius planum per axem ABC, quàm quod requirat ratio BC ad BDC quantitate X; ita vt si quantitas X abesset ab ipso, tunc ABC planum per axem esset ad globosam superficiem ACDB, vt BC axis ad ambitum BDC, vel OF ad OMF ex thesi.

Inscribantur itaque tot cylindracea; donec superficies ipsorum rectangulorum à globosa superficie differat minùs quàm quantitas X. Ergo, quia rectangula inscripta minùs differunt à CAB plano quã X, & X est illa differẽtia quã totaliter ablata CAB planum ad globosam superficiem ACOB diceret eandẽ proportionem, vt CB ad CDB; etiam rectangula inscripta OFI; LNH, & cæt. dicent maiorem proportionem ad globosam superficiem quam CB axis ad CDB ambitum. Dicunt autem ad superficiem suam curuam eandem proportionem. Ergo enim eadem rectangulorum superficies ad conuexam CAFD corporis exhibiri maiorem proportionem dicat quàm ad cylindraceorum superficiem ex 10. lib. 5. erit maior cylindraceorum inscriptorum superficies, quàm ipsa globosa superficies ABDC: quod est absurdum, cum debeat esse maior, vt pote continens.

Quod si dicas, CAB Planum ad CDBA globosam superficiem dicere minorem proportionem, quam CB ad CDB. Deficiat illa quantitas X, cum quã eandem diceret proportionem, quã CA ad COB. Tũc autem circumscribantur tot rectangula; donec eorum superficies differat à plano CAB minori quantitate, quam X. Quia ergo tota quantitas X deberet addi; rectangula verò non superant CAB quantitate X, sed minùs; ideo etiam ipsa ad globosam superficiem CABO dicent minorem proportionem, quam CB diameter ad CDB circumferentiam, dicunt autem ad cylindraceorum circumscriptorum superficiem, illam proportionem, quam CB ad CDB; Ergo ad superficiem globosam dicunt minorem proportionem, quam ad superficiem cylindraceorum, quare ex 10. lib. 5. erit maior superficies corporis CABD, quam circumscriptorum cylindraceorum, quod est absurdum, cùm ergo non possit planum CAB ad superficiem globosam dicere maiorem, aut minorem proportionem, quam CB ad CDB; dicet eandem.

CO-

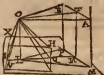
COROLLARIVM.

Hinc modus obtinetur, quò omnium Conorum etiam scalenorum superficies inueniātur. Nam cognito ellipsis ambitu, vel circuli peripheria, & axe, & triangulo per axem; etiam eorum globosa superficies obtinetur; cùm ita sit, vt axis ad ambitum ellipsis, vel si conus sit circularis, vt diameter ad peripheriam; sic triangulum per axem ad globosam eius superficiem, quæ cognitio deficit tractatui 31. expen.3. & hic aptiùs ponitur.

PROBL. III. PROPOS. III.

Normalem altitudinem corporum perscrutari, & superficierum intùs latentium, quorum latera in superficie appareant, nec non, & punctum, in quod à vertice cadit normalis inuenire.

AD corpora similia constituenda in primis est necessaria normalis corporum altitudo, quam hoc modo obtinebimus, non obstante eorum soliditate. Sit datum corpus HVO, cuius altitudo velit inueniri. Extendatur basis HV, & sit MX, vel supposito alio plano, vel alia ratione, eique plano aliud planum OGSA parallelum fiat, electoque puncto M ex 11. tract. 22. erigatur normalis AM, & erit altitudo, quæ requiritur.



Probatur. Nam ducto per MA plano AOML per intellectum. & per punctum O, cum plana sint peparallela, ex 14. Tract. 22. etiam sectiones erunt parallelæ AO, & ML, normalis quoque OL corporis dati HO OV, & MA eidē plano MX extenso normales sunt, ideoque parallelæ ex 7. Tract. 22. ideo MO erit parallelogrammum; quare ex prop. 33. lib. 1. MA, & LO erunt æquales.

Sit deinde QOI intus latentis superficiei reperienda normalis, quæ debeat cadere in latus L, extendatur latus QI in M, & per MQ. QO, ducatur planum, quod secet AOS, in TO in plano itaque TMOQ sectioni NQ ducatur normalis NT, & æquabitur normali LO: Patet ex eadem ratione. Nam TO, & ML sunt parallelæ ob plana parallela SOA, & XM.

Sunt quoque parallelæ LO, & TN ex prop. 28. lib. 1. quod in eodem plano TL sint lateri NL normales altera ex suppositione altera ex effectione, quare inuicem erunt æquales.

Si tandem debeat reperiri punctum, in quod cadit normalis ab O in basim HV, non obstante soliditate corporis HVO; Ductis vt priùs planis AHO, & MX parallelis, & plano ASMP per AM normalem; erit quoque, & ipsum planum ex 16. tract. 22. normale ipsis planis ASO, & MX.

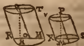
Sectionesque parallelæ AS, MP ex 14. tract. 22. coniungatur deinde SO, & AO, & sumpta æquali ipsi AS in MP sectione ab M, fiat triangulum MPL ex pr. 24. lib. 1. æquale triangulo ASO, & vertex erit punctum, in quod cadit normalis.

Probatur. Nam si duo plana concipiantur ducī; per SO, MP planum PO, & per AO, & AM planum MO erunt normalia plano MX ob normalem MA, & æquidistantem PS ob æquales AS, & MP, & ideo normalem ex 15. tract. 22. quare, & ex 16. eiusdem sectio ipsorum OL normalis erit; & ideo parallela ipsis SP, & AM normalibus. Vnde SO, & PL nec non, & ML, & AO erunt æquales ex prop. 33. lib. 1. cum etiam sint parallelæ ex 14. Tract. 22 Quare triangulū PLM æquabitur triangulo SOA, & ex 16. lib. 1. & erit triangulum iam factum super PM: sed triangulum ab istis sectionibus factum incidit in communem planorum sectionem normalem OL & ideo in L punctum plani, in quo est; ergo etiam triangulum effectum PML, quod est idem, & cuius omnia latera in eundem situm incidunt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Cylindrum super datam basim similem, & similiter positum, ac alius datus ædificare.

SIt cylindrus datus TR, qui sit imitandus cylindro super SX erecto; Ducatur axis QO, & ab extremo Q demittatur normalis HQ, perque normalem, & axem, quæ sunt in eodem plano ex prop. 2. tract. 22. ducatur planum TR, secans basim: deinde à centro I ducatur IP, quæ faciat eundem angulum cum sectione TX, ac OQ cum sectione OU, deinde fiat, vt OS ad OQ, sic IX ad aliud, & inuenietur IP longitudo, compleatur itaque parallelogrammum SV per axem, simileque erit parallelogrammo TR: Vnde si axe IP, & basi SX fiat cylindrus SV ducta per PV altera basi, erit similis cylindrus SV cylindro TR, & similiter positus, vt ipse est.



Probatur. Nam positus quidem est SV cylindrus, vt cylindrus TR ob axem IP concludentem cum IX angulum I æqualem angulo O ex def. 2. At parallelogrammum per axem SV est simile parallelogrammo per axem TR; vnde superfices cylindros ambientes erunt similes, siquidem ex 11. tr. 31. dicunt proportionem duplicatam peripheriarum, sed ex 11. & 40. l. 6. bases quoq; circuli dicunt duplicatam proportionem peripheriarum; Quare erit basis SX ad basim NS, vt curua cylindri SXMV superficies ad curuam NAMT cylindri superficiem, cum

ergo

ergo superficies sint similes ex def. 2. tract.33. etiam cylindri similes erunt.

PROBL. V. PROPOS. V.

* *Data sphæra sphæroide Parabolico, Hyperbolico, vel Elliptico recto ad axem simile aliud corpus componere.*

FAcilis est constitutio sphæræ, cum omnes sphæræ sint similes, tum positione, tum soliditate, cum sint in triplicata ratione diametrorum, duplicata maximorum circulorum, quibus semper eodem modo sunt collocatæ. Sed vt alia corpora describantur Super diametrum datæ basis circularis similis ellipsis ellipsi ductæ per axem sphæroidis imitandi, & similis positionis, vel Hyperbola, vel parabola fiat, quod efficietur ex prop. 52. Tr.24. si fiat loquendo de ellipsi, & hyperbola (nam omnes parabolæ ex 51. Tr.34. sunt similes) radius, & applicata AI ad AO axem, ita BC radius basis datæ ad aliud, & inueniatur BA axis, cui applicetur BC rectanguiè, vt est AI axi AO, deinde ductis pluri-mis alijs, fiat vt MO ad MN. sic PR ad PQ, & cæt. Si ergo hæc sectio intelligatur circum suum axem verti; describetur sphæroidea, si sit Ellipsis; Conoides Hyperbolicum si sit Hyperbola: Parabolicum si sit Parabola ex definit. tract.25. Dico itaque quod sphæroides CATY simile sit, & similiter positum, ac sphæroidea DI HX.



Probatur quod sit simile. Nam vt est XDIH planum Ellipticum ad superficiem sphæroidis EXDH, ex pr.38 tract.31. ita est diameter XI ad peripheriã XAI basis per centrũ, sed vt XI, diameter ad peripheriam XAI, sic YC diameter ad peripheriam YBC ex lib.6 pr.43. vt autem YC diameter ad peripheriam YBC, ita est Ellipsis YACT ex pr.38. tract.31. ad superficiem sphęroidis YACT. Ergo ex æquo vt est XDIH planũ ad Ellipsim YBCT, ita est superficies XDIH sphęroidis ad superficiẽ sphęroidis YACT; sed ellipsis XDIH est similis ex effectione superficiei YBCT; ergo etiam superficies XDIH sphæroidis superficiei sphęroidis YBCT: sed etiam XAI est basis similis YBC, quod sint ex effectione circuli, & ideo similes: Ergo ex def. 2. tract 33. solida erunt similia cũ circumuestiãtur similibus superficiebus. Positio verò eadem est ob eorum rectitudinem.

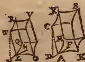
COROLLARIUM.

*HInc est conos similes rectos faciliter posse constitui, si fecerimus triangulum per axẽ describendi coni similem triangulo per axem coni imitandi. Nam ex præcedenti argumento deducto ex prop.38. tract 31. constabit illos conos similes esse; qui superficies circumuolutas habeant similes, vt sunt inuicem similia triangula per axẽ, & idem dicendum de conis ellipticis, dummodo bases ellipticæ similes sint.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

* *Cylindraceum corpus alteri simile constituere ad datam altitudinem.*

SIt Cylindraceum quoddam corpus AB, quod imitari oporteat. Demittatur à latere AC, quod sẽper rectilineũ est (illo nisi axis vtẽdo) normalis CD, & per AC, & CD ducatur planum ACD, quod secet basim productam, & sectio sit AD. Eligaturque in ea sectione quodlibet punctum F, & in altero plano ducta, vtcumque HN, & electa altitudine cylindracei describendi HT; fiat vt DC ad DA, sic HT ad HL, & per punctũ L ad T ducatur latus LT. Deinde fiat, vt AD ad FO, sic LH ad aliud, & reperiatur HN; super latus itaque LN describatur basis OQ similis basi KM Et ab ea eleuentur latera QR, & cæt. ęqualia inuicem, & parallela ipsi LT; multiplicando illa iuxta exigentiam, vel angulorum, vel curuorum laterum, per quæ superficies, vel planæ, vel curuæ ducantur, quæ secẽtur TV parallelo plano ipsi plano QO per T, & erit constitutum cylindraceum corpus simile, similiterque positum ac AB.



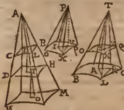
Quod sit similiter positum patet. Nam def. 2. triangulum LTH, & ACD sunt triangula similia ex effectione. Quod verò sit etiam similibus superficiebus circundatum; patet eo quod basim OQ similem basi KM effecerimus, vnde basis VT superficiebus æquedistantibus ex definitione corporis cylindracei circundata, & ideo æqualis, & similis basi OQ similis basi MK, & CB, vt autem in basibus similibus quibuscumq; ex prop.1.h. Cor. AF ad LN sic quodcumque latus AX ad LO, est autem AF ad LN, vt AC ad LT; Ergo vt latus AK ad latus LO, sic est AC ad LT, & sic dicas de alijs æqualibus; vnde etiam superficies DT, & aliæ similes erunt superficiebus XC, & alijs, itaque cylindraceum corpus LV erit simile cylindraceo corpori AB.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

* *Pyramidem Conum, seu corpus pyramidem, vel conum referens alteri simile, & similiter positum ponere ad datam altitudinem.*

COrpus pyramidale mixtilineum appellamus illud, quod superficies rectilineas in acumen tendentes habeant, quę non sint planæ, sed curuæ, & à basi, cuius latera curua sint eleuatæ. Sit itaq; conus, vel pyramis, vel etiam pyramidale aliquod corpus TCLA, quod oporteat imitari. Inueniatur ex prop.3.h. punctum R, in quod cadit normalis. Deinde ducta aliqua RC, quæ cadat in latus basis CL à puncto R fiat vt RT ad RC sic VP data altitudo ad

ad VQ. & similiter ducta alija RL, & cæt. fiat, vt RC ad RL, sic VQ ad VX, & sic fiat de reliquis, eritq; ex *æqua* TR ad RL, vt PV ad VX, quare bases erunt similes ex prop. t.h. & sic concludes de omnibus alijs t simulque triangula omnia CTR, T RL erunt similia quodlibet suo correspondenti; triangulis QVP, & PVX: Siquidem angulo recto gaudent, vt pote à normali VP, vel TR effecto ex def. 2. Tr 22.



& latera circa æquales angulos proportionalia sūt: Erit itaq; TC ad CR, vt QP ad QV, at CR est ad RL, vt QV ad VX ex effectione, & RL ad LT ob similitudinem triangulorum TRL, & VPX, vt VX ad XP. Ergo ex *æquo*, vt TC ad LT, sic QP ad XP, Est autem TC ad CR ob similitudinem triangulorum ostensam, vt QP ad QV, & ob similitudinem basium supra ostensam CR ad CL latus rectum, vel si sit curuum subtensam CL, vt QV basis ad QX latus rectum, seu si sit curuū ad suam subtensam, quare ex *æquo* CT erit ad CL latus rectum, siue subtensam, vt QP ad QX. Ideo triangula omnia CTL triangulis QPX erunt similia, & alia omnibus alijs. Quare superficies omnes pyramidis, vel coni, vel corporis pyramidi similis erunt similes cum omnes planæ superficies inscriptibiles, vel circumscriptibiles illis corporibus similes sint: Bases autem sunt similes ex effectione, & ideo est idem numerus in basibus laterum quapropter, & superficierum circūambientium. Ergo duo corpora CLRT, PQXO similia sunt.

COROLLARIVM.

Elicitur autem hinc; quod si corpus aliquod ex prædictis plano parallelo basi seceiur V. g. ANM corpus plano DH, quod conus reliquus, vel pyramidale corpus DAH erit simile toti corpori DAH. Ratio est omnino eadem, quæ propositione posita est, quia triangulum RCT est simile triangulo TVQ sectione eius, VQ plani OQ cum normali VT, & latere TQ effecto in fig. ATC, quia ea sectio VQ parallela sectioni RC est ex 14. tract. 22. & XQ parallela LC, & cæteræ cæteris, vnde ea propos. 4. lib. 6. omnia triangula erunt similia, siue in basibus, siue in superficiebus ad apicem tendentibus effecta. Ideoque ipsa corpora similia.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omne corpus regulare in sphæra descriptum est alteri simile, si sit eiusdem generis.

ID faciliter ostenditur. Quia obtinet omnes superficies similes sunt enim; aut triangula æquilatera, & æquiangula inuicem, quæ sunt in dato corpore, & ideo similia illis, quæ sunt in alio corpore, nedū inuicem æqualia, sed & æquiang triangulis primi corporis, aut quadrata, aut pentagoni, quæ sunt quoque figuræ similes.

Imo etiam corpora omnia in sphæra inscriptibilia, sed figuris in se diuersis constantia eiusdem generis, sunt quoque figuræ similes: quod sint aut triangula æquilatera, & quadrata; aut pentagoni, & triangula æquilatera, & cæt. ideo enim eiusdem generis sunt, quia similibus superficiebus licet duarum specierum tum vnum, tum alterum corpus constet.

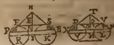
COROLLARIVM.

HInc patet quomodo corpus regulare simile alteri describas; in data sphæra, aut ad datam altitudinem; Sufficit enim pyramidem super datam basim, aut ad datam altitudinem alteri similem extollere, quæ reperitur in corpore imitando, & illi construere tot pyramides æquales, quæ numerum pyramidum in corpore prototypo existentium exæquent: Nam illæ circa eundem verticem positæ conficient corpus exoptatum: quod patet ex tract. 33. de inscriptione corporum regularium in sphæra, Nam omnia constant pyramidibus basim habentibus in superficiem sphæræ & verticē in centro. In data autē sphæra describemus iuxta ea, quæ diximus Tr. eo sē describendo corpus eiusdem generis, ac propositum, quod imitandum proponitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Omnes annuli rotundi, vel figurarum regularium sunt similes.

SIt Annulus rotundus MX, & alius quicumque SP, quorum sectiones MVN, & SRT sint circuli. Dico eos esse similes. Nam ducto per centra sectionum circularium plano LX, & XB. ducatur ei per similes arcus, plana æquidistantia RX, & SP, eiusque circuli ob annuli figuram, erectisque normalibus ab eorum centris O, & A ab M ducatur MT intercipiens arcum similem arcui AS, quem intercipit S H, eritq; triangulū MOT simile triangulo SAH cum sit rectāgulū & angulū, M obtineat æquale angulo S ad circūferentiā. & sic dicas de triangulis VTQ, & SEH: Vnde si circūducerentur efformabunt conos similes Cor. pr. h. ideoque superficies coni MTA erit ad VTD coni superficiē, vt superficies sur coni ad superficiem coni SHE. & ideo *diuidendo* MTX superficies coni erit ad residuum



dunm annulum MVOX, vt SH, coni superficies ad residuum annulum BSFP; Cum ergo idem argumentum de omnibus superficiebus in annulo inscriptis fieri possit etiam rotundæ superficies, quę semper similibus planis sunt inscriptibiles similes erunt, ideoque ipsa corpora vnica superficie contenta. Similia erunt.

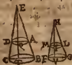
COROLLARIVM.

OMnes quoque annulos cuiuscumque figuræ circulo inscriptibilis esse similes; dummodo ipsæ figurę inscriptæ similes sint, patet ex præced. cùm quamcumque superficiem circulo inscriptibilem eundem numerum graduum subtendentem similem alteri similem arcum subtendenti demonstrauerimus: Vnde; si sint plures similes superficies, sed semper æquali numero, quæ similes arcus subtendant in hoc annulo, vt aliæ in alio similes etiam erunt figurę inscriptę. Quod, & concludetur de annulis, quorum sectiones similes quidem sint; sed tamen circulo non inscriptibiles; quia illæ figuræ, sectionesque per centrum poterunt diuidi in triangula: quæ semper in circulis inscriptibilia sunt ex prop. 2. lib. 4. elem. quorum latera eundem numerum graduum subtendunt cum ponantur figuræ similes; & idem triangula in quæ dispartiri queunt, ab vno angulorum ad aliquem alium ductis lineis, similia.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Frusta conorum, vel pyramidum planis parallelis excisorum quarumcumque similia efficere super datam basim similem basi coni dati.

SIt datum frustum conicum ABCD compleatur, & sit EBC, sit deinde data basis GF similis basi BC; & super eam erigatur conus, vel pyramis, vel corpus referens conum, vel pyramidem, prout basis data reposcit, simile cono EBC. Deinde fiat altitudo VS ad altitudinem TQ; sic VH ad VI, & per I agatur planum basi parallelum, eritque GLMF frustum simile frusto BADC.



Probatur: EBC superficies corporis imitandi est ad superficiem imitantis corporis GHF, vt AED superficies ad superficiē LMH ex pr. 7 h. Cor. Si ergo auferantur AED, & LHM diuidendo erit EBC superficies ad reliquam superficiem BADC, vt GHF ad reliquam superficiem GLMF, sed EBC, & GHF sunt similes, ergo etiam BADC, & GLMF superficies similes erunt; sunt autem, & bases similes BC, & GF ex effectione, & AD, & LM, quod AED, & LHM sint coni similes, ergo frusta conorum BADC, & GLMF erunt similia.

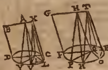
PROBL. IX. PROPOS. XI.

Prisma, vel Prismaticum conum, vel corpus cuiuscumq; basis ea corpora referens simile dato exhibere.

COrpus referens prisma, vel prismaticum conum est corpus à quacumque basi in lineam rectam terminans parallelam basi eleuatum.

Sit itaque constituendum aliquod ex dictis corporibus V. g. XECD simile, & similiter positum, ac corpus prisma referens EPTG.

Inueniatur punctum Q in quod ab aliquo puncto T cadit normalis. Deinde p lineā terminantē TG ab eius T extremo ducto plano SG, quod faciat sectionem in basi SP, & ductis plurimis lineis QO, & cæt. (si sit necesse, quod basis non sit circulus, aut figura regularis, vel saltem rectilinea.) Fiat vt normalis TQ ad QP, & quālibet ex ipsis OQ, vel QS, sic IX normaliter erecta super planum CD ad libitum assumpta ad ID, & quālibet aliam IL, & IC, eosdē āgulos claudētes & p extrema C, L, D linea ducatur. Hīc fiat, vt QT normalis ad TG, sic IX ad AB, & vt QT ad TH, sic EX ad XA; Ducantur itaque superficies à basi CLD, quæ terminēt in lineā XB, & erit corpus prismaticū CXBD simile corpori dato PGTE.



Prob. Et primo ostendemus, quòd bases sint similes: Siquidem omnes ductæ à puncto Q, & I proportionales sunt. Nam fecimus TQ ad QP, vt IX ad ID: Ideoque *conuertendo*, QP ad TQ, vt ID ad IX: sed etiam ex effectione TQ ad QO, vt IX ad IL. Quare ex *æquo* QP ad QO, vt ID ad IL, & sic dicas de alijs.

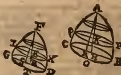
Probatur quoque quod superficies circumambientes sint similes ex eo quod in eis tot planæ superficies similes inscribi possint, siquidem poterit vtrumque corpus in similes pyramides partiri. Nam ducta SO, & TO, sic CL, & LS. Iam erit pyramis SOQT similis pyramidi CLXI, est enim ex effectione QT ad SQ, vt XI ad CI, & anguli ad Q, & I recti semper; vnde triangula SQT, & CIX erunt similia, & ita argue de triangulo OQT; quod sit similis triangulo LIX. Vnde ex 7. h. pyramis SQTO erit similis pyramidi CLXI; erit enim consequenter SO ad ST vel OT, vt CL ad CX, vel LX: Sic dices, quod OQNT similis sit pyramidi LXVI; Pyramis autem TQNH assimilabitur pyramidi XVIA ob eandem rationem, quod triangula TQN, & TQH sint similia triangulis XIV, & XAI; cùm TH æquetur EQ, & XA ipsi CS ob parallelismum linearum QH, & ET, necnon, & XC, & AI. Quo ostenso, etiam QHNP cōstabit similis pyramidi IVAY, & sic de alijs. Omnes itaque pyramides in ETGP erunt similes pyramidibus in CXBD. Vnde, & habebunt superficies similes, quæ sunt in ETGP, superficiebus pyramidum in CXBD, quarum extimæ sunt inscriptæ, vt sunt SOT, & ONT, & THN, vel in alio

corpore CLX, & LVX: & cæt. & sic omnes superficies inscriptæ in EVFT corpore erunt similes superficiebus inscriptis in CXAD corpore numero æqualibus. Quamobrem ipsa corpora ex def. erunt similia. Non putamus autem necesse ostendere pyramides in istis corporibus descriptibiles esse, ut casum quo normalis extra cadit replicato argumento ostẽdere, neq; ostensionẽ subtiliùs proponere de singulis lateribus cuiuscũq; pyramidis proportiones similes, & angulos æquales demonstrãdo. Esset enim discursus prolixus, qui alioquin patet ex discursu anteced. vel quilibet ex se, & casum fingere, & argumentum texere potest.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Dato quocumque corpore Conoidali, seu sit conoides obliquum, seu rectum, seu portio eorum, seu quodcumque aliud corpus: dummodo ad proportionales axis partes planis similibus secari possit, simili corpore imitari, & simili positione.

SIt corpus aliquod BAC, cuius planum per axem ductum, & per normalem basi; seu sit conoides obliquum, seu rectum, aut sphæroides, seu quodcumque aliud corpus ex segmentis circulorum, vel etiam ambituum constans, & oporteat ei simile corpus ponere, fiat ex prop. 2. h. DFG simile planum BAC plano per axem HA, & per normalẽ AB, in quo plano DFG sit normalis SF, & axis NF, quæ cum DG simile faciat triangulũ ipsi BHA, quam normalem docuimus reperire prop. 3. h perque DG normaliter altitudini SF, ducatur planum DTO, sicut altitudini RA ductum est planum POC: secenturque corpus imitandum in partes planis PQ, & aliis, quæ erunt similia basi AOC ex thesi. Deinde ad partes NA axis similes partibus axis HK ducantur parallela plana XL, & cæt. similia planis PQ, & cæt. Circa verò plana similia superficies curuæ circumscribantur: si enim plana sint plurima superficies ductæ circa PQ, & alia plana erunt omninò similes superficiebus corporis imitandi BAC, & sic ex def. ipsa corpora erunt similia.



Probatur. Nam cum ex prop. 2. huius. Sit BAC superficies plana ad globosam superficiem PADO corporis exhibiti, vt BC diameter ad BOC ambitum: Sit verò ex effectione BC ad BOC, vt DO diameter ad OTG ambitum. At DO ad DTG, sit, vt DFO plana superficies ex prop. 2. h. ad OFGT globosam superficiem corporis constituti ex æquo erit BAC planum ad DFG planum, vt BOCA globosa superficies ad DFGT globosam superficiem. Sed BAC, & DFO sunt ex effectione similia plana. Ergo etiam globosæ superficies similes erunt. Itaque ex tract. 34. def. 8. corpora erunt similia cum superficiebus similibus vestiantur. Positio verò similis eo, quod triangulum NSF, ex axe, & normali, & sectione basis sit simile triangulo HBA ex axe normali, & sectione basis similiter effecto, vt requirit def. 8. h.

EXPENSIO II.

De Transformatione Corporum.

DE Transformatione Corporum doctrina ex dictis facilè eruitur, cum enim Corporum etiam diuersæ speciei æqualitatem inuenerimus, & proportiones assignauerimus, ex ilia acelini argumentatione etiam corporum transformatio deriuat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Dato Parallelepipedo, datæ altitudinis æquale parallelepipedum construere.

SIt datum aliquod Parallelepipedum AF, cuius basis AE, & altitudo NF, dataque sit linea quædam OT erecta perpendiculariter super aliquod planum, & oporteat circa eam parallelepipedum dato AF æquale constituere.

Fiat itaque, vt altitudo TO ad altitudinem NF, ita basis AE ad aliud scilicet ad rectangulum ex M.



Quod obtinebimus ex 22 lib. 6. Coroll. faciendo scilicet, vt TO ad NF, ita EK ad Y deinde inueniendo inter NE, & Y mediam proportionalem M, & constituendo super eam ex prop. 25. lib. 6. rectangulum simile, similiterque positum, vt rectangulum SA, diuidaturque in quatuor rectangula æqualia, quorum vni ab T fiat æquale rectangulum TC, dupliceturque singula latera ac compleatur rectangulum CH, & erigantur CV, HL paralleiæ TO, & efficiatur parallelepipedum CL. Dico factum esse, quod exposcebatur, & parallelepipedum CL esse æquale parallelepipedo AF.

Probatur ex prop. 10. Tr. 34. p. 1. Nam illa sunt parallelepipeda æqualia, quæ habent bases altitudinibus reciprocè proportionales; sed ex effectione TO altitudo est ad NF altitudinẽ, vt basis AE ad basim CH. Ergo parallelepipeda erunt æqualia.

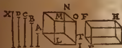
PROBL. II. PROP. XIV.

Dato Parallelepipedo cubum æqualem construere.

SIt parallelepipedum SH, quod consequatur basim SS quadratum (quòd si talem non consequatur, fiat basis quadrata æqualis ipsi SE, & super eam erigatur parallelepipedum æqualtum SH, quod erit æquale dato parallelepipedo ex prop. 6.

Tract.

Tract. 34. Huic igitur constituendus sit cubus aequalis: Inter TF, hoc est A latus basis dati parallelepipedi, & altitudinem FH, scilicet D duae mediae proportionales reperiantur B, & C ex prop. 3. tract. 15. & ex B fiat quadratum, super quod erigatur cubus LN, & erit cubus aequalis ipsi parallelepipedo BH.



Prob. ex propos. 13. p. 1. Tr 34. quoniam cubus erectus ex media proximiori BI, quae sostituit basim parallelepipedi, vt est B aequatur parallelepipedo ipsi BH basi quadrata A, & altitudine D.

Quod si forte eueniat exhibitum parallelepipedum obtinere tres dimentiones continue proportionales, erit cubus ex media constitutus aequalis ipsi parallelepipedo ex prop. 11. tract. 34.

PROBL. III. PROP. XVI.

Dato cubo aequale parallelepipedum construere in datam altitudinem, vel super datam basim.

Sit in praeced. figura datos cubus LN, & data altitudo HF, & oporteat elevare solidum, quaesitum in altitudine FH. Duabus HF, & 10 inueniatur tertia proportionalis ET, & 10 fiat aequale latus TF, & ET tertia constituat aliud latus basis FF, aleuturque in altitudinem datam HF, & asserο hoc parallelepipedum cubo LN esse aequale, quod patet ex propos. 11. Tract. 34.

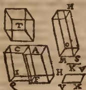
Quod si quis velit parallelepipedum aequale dato cubo super datam basim fabricari: sit basis exhibita FA; quae, si non est parallelogrammum reuocetur ad aequale parallelogrammum: Deinde fiat vt basis FA ad basim LO, ita latus 10 ad FH, & constituatur super FA parallelepipedum aequalis altitudinis ipsi FH, & hoc erit aequale cubo dato. Patet quoniam sunt bases effectae altitudinibus reciprocè proportionales, Vnde ex prop. 10. tract. 34. erunt aequalia haec duo solida. Inueniatur autem basis FA ad basim LO, vt latus 10 ad FM: si duabus TB, & ET tertia proportionalis inueniatur, deinde fiat, vt TA ad tertiam proportionalem repertam: sic 10 ad FH: tunc enim quia est FA ad basim 10, vt TA ad tertiam proportionalem repertam ex Cor. prop. 22. lib. 6. & TA ad tertiam proportionalem, ita est vt 10 ad FM, erit etiam ex 16. lib. 5. FA ad basim LO, vt 10 ad FM altitudo ad altitudinem.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

Dato parallelepipedo simile parallelepipedum efficere, sed aequale alteri dato.

Sit parallelepipedum A, cui simile oportent facere parallelepipedum aliquod, sed aequale cubo T, fiat quodcumque parallelepipedum C aequale cubo T, sed altitudinis aequalis parallelepipedo A; habebuntque parallelepipeda eandem proportionem; quam bases ex 8. tract. 34.

Redigatur itaque ex 6. prop. tract. 29. basis FI ad eandem altitudinem XV plani YV, ac basis HF, habebuntq; bases planae eandem proportionem, ac bases ipsarum lineae XY ad HF. Ideoq; ex 7. l. 5. quarit ad FH, vt XY ad FM. Inter duas itaq; XY, & FH Inueniantur duae mediae proportionales K, & MS, & fiat super MS ex propos. 3. tract. 34. part. 2. parallelepipedum MN simile, similiterque positum, ac parallelepipedum A, eritq; hoc parallelepipedum aequale etiam cubo T.



Probatur. Nam Parallelepipedum MN ad Parallelepipedum A sibi simile habet proportionem triplicatã laterum SM ad HF homologorum ex 9. tract. 34. Ideoque erit vt XY ad HF, cuius proportio est triplicata lineae SM ad HF; siquidem est XY ad K vt K ad SM, & K ad SM, vt SM ad HF. sed vt XY ad HF, ita est basis eiusdem altitudinis YV ad FH, & vt VY ad FH, ita est FI ad FM, cum sint aequales VY, & FI ex construct. sed vt FI ad FH bases, ita parallelepipedum C eiusdem altitudinis ad parallelepipedum A. Ergo vt XY ad HF, ita parallelepipedum C ad parallelepipedum A. Ergo C ad A erit in triplicata proportione SM ad HF, idest vt MN parallelepipedum simile ad A: Cum itaque eid m parallelepipedo A eandem dicat proportionem parallelepipedũ C, & NM parallelepipedum. Ergo ex 9. lib. 5. erunt aequalia, & tamen M N simile ipsi A factum est, & ideo cubus T ipsi C, & ideo N M inuento aequabitur.

COROLLARIVM.

Hinc poterit quis efformare non dum parallelepipedum, sed etiam prisma, & pyramidem imò, & conum, & cylindrum, & ea omnia corpora, quae ad eandem eleuationem ex diacudia extolli possunt, & quorum bases, in bases aequalis altitudinis rectilineas conuerti.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Prismati Parallelepipedum aequale construere, vel è contra Prisma aequale parallelepipedo. Sic pyramidem parallelepipedo aequalem, & vicissim parallelepipedum pyramidi aequale statuere.

Hoc facillime efficietur ex pr. 1. Tr. 29 Fiat parallelogrammũ eiusdem altitudinis, sed super dimidiam lineam basim trianguli, quod prismati basim planam substernit, hoc aequale erit triangulo basi. Quadera, si parallelepipedo aequalis prismati altitudinis hoc parallelogrammũ pro basi substernatur, parallelepipedum erit aequale ipsi prismati Quod si fiat triangulũ aequale parallelogrammo operando è côtra, prisma super illud triangulũ erectũ aequabitur parallelepipedo. Fiat deinde Pyramis super basim parallelepipedi sextuplo maiorem ex prop. 17. Tract. 29. & erigatur ad eandem eleuationem, & erit pyramis aequalis parallelepipedo.

E contra veru Pyramidis basis sexta pars assumatur, & super illam erigatua parallelepipedum ad eandem eleuationem, & erit æquale Pyramidi.

Prob. pars 1. Nam prisma est dimidium parallelepipedi æqualis altitudinis collocati super eandem basim ex prop. 2. Tr. 34 p. 1. quare si fiet parallelepipedum aliud super dimidiam basim, cum parallelepipeda æqualtra sint, vt bases inuicem erit dimidium parallelepipedi integræ basis. Quare cùm ad prisma super æqualem basim, & ad parallelepipedum super dimidiam basim, parallelepipedum super eandem basim integram se habeat, vt 2 ad 1. erunt prisma, & parallelepipedum aliud dimidiæ basis æqualia ex prop. 9. lib. 5.

Patet quoque secunda pars eodem argumento.

Tertia, & quarta pars patet, quia Pyramis triangularis basis est tertia pars prismatis ex prop. 12. Tr. 34. p. 1. & ideo sexta parallelepipedi duplũ prismatis super eandem basim erecti ad eandem eleuationem, & ideo si fiat parallelepipedum æqualtum super partem sextam basis prædictæ hoc parallelepipedum ad illud erit, vt basis ad basem nempe, vt 6. ad 1. Vnde ad pyramidem æquealtam super eam basim, & ad parallelepipedum super sextam partem basis æquealtam eandem habebit proportionem.

Quare æquabuntur ex pr 9. lib. 5. Pyramis eiusdem basis, & parallelepipedum super sextam partem erectum ad eandem eleuationem.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Prismati cuicumque æqualem cylindrum constituere, & vicissim cylindro æquale prisma ponere; Sicuti, & pyramidem cono, & conum pyramidi erigere.

Fiat basi prismatis æqualis circulus, ex prop. 13. tract. 30. & super hunc circulum erigatur æqualis eleuationis cylindrus, & hæc erunt æqualia.

Ita quoque fiet ad inueniendum prisma æquale cylindro. Efficietur enim triangulum circulo æquale ex pr. 14. Tr. 30. & 1. Tr. 29 & super hoc Prisma æqualis altitudinis extollatur.

Sic quoque Conus Pyramidi æqualis fabricabitur, & Pyramis cono constituendo super æquales bases æqualis altitudinis Pyramidem cono, vel conum Pyramidi.

Hæc autem omnia ostenduntur Coroll. prop. 3. p. 8. Tract 34. si autem requiratur, quod Prisma, vel Pyramis sit basis similis alteri datæ basi: hæc fient ex prop 27 l. 6. redigendo triangulum æquale circulo in figuram datæ figuræ similem.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Dato Cylindro æqualem conum constituere, & vicissim æqualem cono cylindrum exhibere. Sicut, & dato Prismati æqualem Pyramidem extruere, & è contrà datæ Pyramidi Prisma æquale erigere.

Cylindri basis triplicetur ex 19. tract. 30. & super eam constituatur conus eiusdem altitudinis, & erit conus cylindro æqualis.

E contrà basis dati coni in tres partes diuidatur ex prop. 19. tract. 30. & tertiæ parti fiat circulus æqualis; & exinde super eam ad eandem altitudinem eleuetur cylindrus, & erit cylindrus dato cono æqualis.

Probatur ex pr. 7. Tr 34. p. 8. Nam Cylindrus se habet ad conum super eandem basim erectum, vt 3 ad 1. sed etiam Conus ad eandem altitudinem super triplicatam basim erectus est ad illũ conum in basi cylindri situm, vt 3. ad 1. ergo ex prop. 9. lib. 5. sunt æqualia cylindrus, & conus; cùm eidem cono sito in subtripla basi coni, eadē quæ cylindro deseruit, eandem dicat proportionem, quam 3. a 1.

Si verò agatur de prismate pyramidi æquando idem ages: Nam triplicata basis Prismatis dabit pyramidem, quæ in eandem altitudinem erecta erit æqualis prismati; Sicut & basis pyramidis tertia parte situm prisma altum, vt est pyramis, ipsam pyramidem exæquabit soliditate.

Ratio est eadem, quòd Pyramis sit tertia pars prismatis in eadem basi sita ex prop. 12. Tract. 34. p. 1. Vnde valebit idem argumentum.

PROBL. VIII. PROPOS. XX.

In Cylindrum datam pyramidem, & in pyramidem cylindrum transfundere. Ita Conum exhibitum in prisma, & prisma in conum deducere.

Fiat Pyramidi datæ æqualis conus ex pr. 28. h. & cono inuento cylindrus æqualis constituatur ex anteced. Vel è contrà fiat cylindrus æqualis conu, huicque cono inuento æqualis pyramis. Nam erit etiam æqualis cylindro, vt patet. Sic cono dato æqualis pyramis fiat ex prop. 28. h. & pyramidi inuentæ prisma æquale construatur ex prop. anteced.

E contrà autem fiat Prismati dato æqualis pyramis, & pyramidi inuentæ æqualis conus, & conus Prismati æqualis erit.

PROB. IX. PROPOS. XXI.

Conum transmutare in parallelepipedum, & vicissim parallelepipedum in conum. Item Cylindrum in parallelepipedum, & è contrariò parallelepipedũ in cylindrum permutare.

Conus in Pyramidem transmigret ex propos. 28. huius, & pyramis erecta in parallelepipedum transeat ex prop. 27. h. Ita Parallelepipedum in Pyramidem transformetur ex prop. 27 h. & Pyramis ex propos. 28. h. in conum transfundatur, erit effectum id, quod pars 1. propos. postulat.

Altera verò pars eodem modo in opus demandabitur. Si namque cylindro dato fiat æquale prisma ex pr. h. 28. & huic prismati æquale parallelepipedum ex prop. 27. h. Aut parallelepipedo æquale prisma ex p. h. 27. & prismati æqualis cylindrus ex h. 28. pr. intentum consequemur.

PROBL.

PROBL. X. PROPOS. XXII.

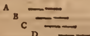
Corpus regulare quodcumque in Pyramidem æqualem traducere, & vicissim Pyramidem in corpus aliquod regulare transmutare.

OMnibus 12. basibus corporis V. g. dodecaedri pentagonis fiat quadratum æquale transformando prius in rectangulum aliquam ex ipsis ex . prop. Tr.29. & 18. ex eis vniendo, & hoc rectangulum ex 12. pentagonis conflatum reducendo ad quadratum ex 9. eiusdem, & deinde super hac basim extruatur pyramis altitudinis eiusdem, ac normalis à centro super quamlibet dodecaedri planam basim deductæ: sc. altitudinis vnius pyramidis, in quas diuiditur planis à centro deductis corpus dodecaedri. Eritque hec pyramis æqualis omnibus pyramidibus corporis dodecaedri in centrum vertice suo terminantibus.

Probatur Ita Pyramis quadrilatera modo erecta ad vnam Pyramidem in centro terminantem dodecaedri est, vt basis quadrata huius ad basim illius, cum sint eiusdem altitudinis ex effectione, idest vt duodecim pentagoni dodecaedri, quibus æqualis est basis quadrata ad vnum pentagonum ipsius.

Et cum omnes Pyramides dodecaedri ad vnam ipsarum; ita sint, vtpotè eiusdem altitudinis, vt omnes bases duodecim ad vnam ipsarum; sequitur vt Pyramis quadrilatera, & Pyramides omnes dodecaedri ad vnam pyramidem dicant eandem proportionem, quam 12. ad 1 scilicet, quam omnes bases ad vnam; Vnde ex 9. lib. 5. erunt æquales omnes pyramides dodecaedri, & pyramis quadrilatera modo erecta.

E contrà verò data pyramide ita fabricabitur corpus regulare aliquod ei æquale.



Sit data pyramis, & eius latus A. cui sit construendum æquale dodecaedrum. Fiat quodcumque dodecaedrum, cuius alicuius basis pentagonæ latus sit B, & fiat huic dodecaedro ex B, ex parte prima prop. h. æqualis pyramis, & huic alia æqualis quidem, sed similis pyramidi A, ex Coroll. prop 16. huius, cuius latus C: Fiat autem, vt C ad A latera pyramidum, sic B latus dodecaedri ad aliud D, & dodecaedrum ex latere D fabricetur, eritque dodecaedrum fabricatum super basim D æquale pyramidi A.

Probatur, ita est pyramis ex latere C ad Pyramidem ex latere A, vt dodecaedrū ex latere B ad dodecaedrum ex latere D ex prop. 14. Tr.34 Coc. sed pyramis ex latere C est æqualis dodecaedro B. Ergo etiam Pyramis A erit æqualis dodecaedro D ex prop. 12. lib. 5. si verò quis cupiat datum corpus aliquod ex quinque regularibus æquale, aut cubo, aut parallelepipedo, aut cuicumque alteri figuræ is pyramidem quadrilateram in æqualem, aut cubum, aut parallelepipedum transfundere poterit,

At si quis exoptet cubo constituere, vel parallelepipedo æquale corpus regulare V. g. Tetaedrū, cuius latus X. Primò ex 1. part. prop. præc. faciat cubū æqualē, vel parallelepipedum æquale alteri dato corpori regulari eius speciei, quæ desideratur, nempe Tetraedro ex B, cuius latus sit A; Deinde constituat cubum, vel faciat parallelepipedū ex C latere simile illi parallelepipedo A, vt ostens. pr. 6. h. Postea faciat, vt A ad C, ita B ad aliud D, & construat Tetraedrum ex illa linea inuenta D, tanquam latere faciendo ex illa quatuor triangula æqualia, & æquilatera, & simul vniendo, & erit æquale cubo, vel parallelepipedo dato C.

PROBL. XI. PROPOS. XXIII.

Sphæræ cubum æqualem ponere.

CYlindrus, cuius altitudo diameter sphęrę, cuius basis circulus maximus in sphęra sit, habet proportionē ad sphęram ex pr. 37. Cor. 1. & 3. Tr. 24. quā 3. ad 2. Iden si quis hūc cylindrū in tres partes secet planis ad axem rectis & ex tribus huius partibus duas accipiat; erunt hę duę partes ęquales sphęrę soliditati; Quia eidem cylindro suimet parti, quę est 2. & sphęrę habet eandem proportionem, quam 3. ad 2. Sic quia sphęra quadrupla est coni eiusdem altitudinis, ac radij sphęrę, & eiusdem basis ac circulus maximus in sphęra, vt pr. 43. Coc. Tr. 24. p. 2. si ex diametro sphęrę tanquam radio erigatur conus eiusdem altitudinis, ac radius sphęrę erit æqualis sphęrę soliditati.

Si verò huic cylindro, vel cono, aut cubus constituatur ęqualis, vel Parallelepipedum, aut pyramis, aut aliquod corpus ex regularibus, Iam illud quodcumque corpus sphęrę ęquabitur.

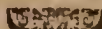
PROBL. XII. PROPOS. XXIV.

* *Annulo solido æquale prisma quadratæ basis inuenire.*

QVoniam ex prop. 19. Tr. 34 p. 2. annulus solidus quadratus ęquat parallelepipedum, cuius altitudo ęquetur annuli solidi altitudini, & basis annulo plano, cui inest: Fiat ex prop. 18. tr. 30. annulo plano, qui pro basi annulo solido substernitur circulus ęqualis, & huic circulo ęquale quadratum, vel rectangulum ex pr. 13. tract 30 super quod erigatur parallelepipedum ęqualis altitudinis & erit factum id, quod exposcitur.

Patet autem hęc operatio ex prop. 19. tract. 34. quoniam hoc parallelepipedum, vt ibi ostenditur est ęquale annulo solido quadrato.

Si verò sit annulus rotundus, fiat cylindrus, cuius altitudo sit peripheria per centrum soliditatis annuli transiens, & basis sit circulus eius sectio, & cylindrus iste ęquabitur annulo solido rotūdo, vt constat ex 20. prop. Tract. 34. Quod si annuli sectio non sit rotunda, sed polygona, fiet prisma, cui subdat basim illa polygona annuli sectio; sed peripheria prędicta sit altitudo, & istud prisma polygono ęquabitur.

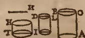


PROBL.

PROBL. XIII. PROPOS. XXV.

* *Cylindrum conum, vel pyramidem, & prisma in basibus datis collocare.*

SIt V. g. Cylindrus LI, cui facienda sit basis æqualis basi OB, ita tamen vt soliditate, & mole idē perseueret, fiat, vt OB basis, LD basim ad sic altitudo DI ad aliud, reperiendo scilicet duabus OB, & LD tertiam proportionalem N, eritque ex 21. l. 6. vt OB ad LD bases sic OB ad N. Postea fiat, vt OB ad



N, sic DI ad aliud, & reperietur altitudo TH. Fiat itaque Cylindrus super basim OB altitudinis HT, & æquabitur cylindro IL: cùm bases effecerimus altitudinibus reciprocè proportionales, & sit OB, idest TI ad LO ex effect. vt DI ad HT, vnde ex pr. 12. præc. tract. æquabuntur IL, & BH cylindri. Eadem ages de cono Pyramide, & prismate, & parallelepipedo quoque.

PROBL. XIV. PROPOS. XXVI.

* *Pyramidem, vel Conum, Cylindrum, & Prisma in altitudinem datam euehere.*

SIt Conus CAB, & oporteat IO altitudinē ID illū extollere, ita quòd sit conus EOG æqualis cono CAB. Fiat vt altitudo IO data ad altitudinem OA dati coni CAB, sic basis AC ad basim EG. Id autem exequetur si fiat ID ad OA, sic AC ad aliud T, & inter CB, & T media proportionalis inuenietur EG, ex qua fiat circulus, qui basis est coni. Nam ex 21 Cor. l. 6. erit CB circulus ad EG circulum, vt CB diameter ad tertiam proportionalem T, idest ID ad OA ex effect. & ideo ex pr. 15. Tr. 34. p. 1. erunt æquales coni CAB, & OEG, cum obtineant bases altitudinibus reciprocè proportionales, & idem dicas de pyramide, cylindro, & prismate.

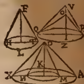


PROBL. XV. PROPOS. XXVII.

* *Conum æqualem soliditati coni intus euacuati construere.*

CAsus 1. Sit Conus ADX; qui vacuus sit totus cauitate coni eiusdem altitudinis, sed minoris basis spacii MON; oporteatque constituere conum æqualem soliditati AOXMN.

Fiat circulus THL æqualis annulo AXXMN ex pr. 18. tract 30. & super illum erigatur conus æqualis altitudinis; ac conus ADX; Et assero hunc conū TFH soliditati concauatæ coni ADX esse æqualē. Prob. Ita est conus AOX ad conum MON, si adesset; vt basis XXA ad basim MN si extaret: Ergo *diuidendo* ita est conus AOX ad residuum ADXMN dempto cono MDN, vt basis AKX ad residuum annulum MNXKA dempta basi MN: sed vt AAX basis ad AMKAN annulum ita est eadem basis AKX ad TLH basim ex 7. lib. 5. vtpote ad æqualia: At vt AKX basis ad basim TLH; ita est conus AOX ob eandem altitudinem ex pr. 5. tract. 34. p. 2. ex effect. ad conum TFH: Ergo Conus ADX ad soliditatem residuam euacuatam AOXMN, & ad conum TFHL dicit eandem proportionem basis AAX ad TLH, siue ad annulum AKXNM. Ergo erunt æqualia conus HFIL, & soliditas caua XDANM.



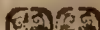
Casus 2. Quod si conus sit vacuus spatio, quod impletur à cono eiusdem basis, & minoris altitudinis fiat, vt altitudo BV ad altitudinem OV, ita basis QP ad aliud, & inueniatur basis TLH operando eodem modo, ac prop 25. h. super quam rectus conus HLFT constituatur eiusdem altitudinis IV, & erit æqualis soliditati coni PVQ ablato cono POQ.

Probatur. Nam vt altitudo VI ad OI, sic conus PVQ ad conū POQ ex pr. 11. Tr. 34. p. 2. Ideoq; *conuertendo*, vt VI tota ad compartem OV, sic PVQ totus conus ad compartem POVQ residuam ablato cono POQ. Sed vt IV ad OV, sic PZQ basis ad TLH basim & ita conus PVQ ad conū TFH: Ergo PVQ ad conum TFH ad, & residuum POVQ dicet eandem proportionem. Quare erunt æquales soliditas POVQ, & conus TFHL.

Casus 3. Si verò detur aliquis conus cuius vacuum, cono in quo est, sit etiam dissimile, simulq; minoris basis, & minoris altitudinis illud vacuū tamquam si esset conus redigatur ad eandem basim, vel altitudinem, vt docuimus prop. 26. & 27. h. & postea perficiatur opus, vt 1. vel 2. Casu.

COROLLARIVM.

HInc colligitur idem esse dicendum de Pyramide, si aut vacuum pyramidis pyramide basis minoris, sed eiusdem altitudinis capax existat, aut minoris altitudinis, & eiusdem basis. Et idem dicendū est etiam de parallelepipedo, vel cylindro si vacuo basis minoris. & eiusdem altitudinis capax dignoscatur. Si verò vacuum non impleat totum cylindrum, vel parallelepipedum in duo partiemur in vacuatum, & in plenum, & postquam reperimus cylindrum, vel parallelepipedum vacuato æquale ad eandem basim redigemus, & coniungemus cum cylindro, vel parallelepipedo non excauato.

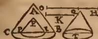


PROBL.

PROBL. XIII. PROPOS. XXVIII.

Dato cono vacuo capace similis coni, conum æqualem inuenire.

Sit conus ABC, cuius vacuum sit capax coni æqualis cono IPE, qui est similis cono exhibito ABC. Et oporteat æqualem conum eius soliditati inuenire. Reperiantur duabus PI, CB duæ proportionales in continua proportione tertia, & quarta, & hæc quarta sit OH; essetque conus IPE, si esset solidus ad conum CAB, si esset solidus totus, vt PI ad OH, scilicet in triplicata ratione diametrorum, eo quod vacuum, & solidum ponantur coni similes, vt ex propos. 9. Tract.34. constat. Auferatur IP ab OH linea, & sit residuum QH, & erit *diuidendo* IPE ad CAB sublato ipso PEI, cono, scilicet CAB PEI soliditatem, vt PI ad OH sublata ipsa PI, scilicet QH. Inter igitur IP, & QH duæ mediæ proportionales interponantur, ita vt PI, T, e, & QH sint quatuor continuè proportionales ex 3. Tract.15. fiatque conus ex diametro T immediatè post PI similis cono CAB.



Igitur ex propos. 9. tract.24. IPE conus erit ad conum T, vt PI ad HQ: sed vt IP ad HQ, sic est IPE conus vacuus ad CAB PEI soliditatem residuam, vt ostendi. Ergo huic residuo CAB PEI, & cono T, idem conus PEI dicit eandem proportionem PI ad QH, scilicet triplicatam PI ad T diametrorum, ergo erunt ex propos.9. lib.5. æqualia CAB IPE soliditas, & conus T.

COROLLARIVM.

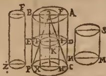
IDem dicendum est de pyramide excauata, si vacuum eius similis pyramidis sit capax, & eodem modo eius soliditati pyramis æqualis inuenietur.

PROBL. XIV. PROPOS. XXIX.

Cylindrum vacuatum cono, cui cylindro æqualis sit, reperire.

CAsus primus. Si conus PCO sit eiusdem basis, & æqualis altitudinis cylindri PA. Fiat circulus ex propos.19. Tract.30 qui sit PZ duæ tertiæ partes circuli PC; qui basis est coni, vel cylindri, & super hanc erigatur cylindrus ZP, & erit æqualis soliditati cylindri ablato prædicto cono. Patet. Nam est conus COP tertia pars cylindri, vnde reliquum erit ⅔ cylindri; Quare si erigatur super basim, quæ ⅔ sit basis CP, cylindrus ZP æqualis altitudinis altitudini CA erit, vt CP basis ad basis duo trientes ZP, ita cylindrus AP ad cylindrum ZP super eam erectum. Vnde erit ⅔ cylindri AP, & ideo æqualis soliditati AP vacuatæ cono COP.

Casus 2. At si sit coni vacuum TIO eiusdem altitudinis, & basis minoris in cylindro BAED, fiat basis æqualis annulo DEBT vna cum duobus tertijs circuli IT, & sit MN, & super eam erigatur cylindrus MS eiusdem altitudinis, ac SP, & dico SN cylindrum æqualem esse soliditati cylindri BA ablato cono IOT.



Probatur. Iam si fiat cylindrus ex basi æquali duabus tertijs IT, basis, & eleuetur ad altitudinem IP erit æqualis soliditati coni FT ablato cono IOT; Item si fiat basis æqualis annulo DBEIT & super eam eleuetur cylindrus æqualis altitudinis, ac DA æquabitur ipsi cylindro BA ablato cylindro TP ex Coroll. propos.27. huius. Ergo ex propos.39. Tract.17. Si componantur isti duo cylindri erit totum BA ad duos cylindros æquantes suum solidum dempto cono IOT, vt ad SN cylindrum, qui ambos simul amplectitur, quare cylindrus SN prædicto solido æquabitur.

Pro casu 3. Consideretur fig. prop.25. par.1. Tract.34. In qua probauimus frustum pyramidis BA æquari parallelepipedo ex basi YS ad eleuationem MT, & trienti parallelepipedi ex basi BM ad eleuationem eandem euecto, ideoque ad adæquandum parallelepipedum ex basi BC tota in eandem altitudinem eleuatum deficient duo parallelepipeda ex basibus NY, & YO, & duo ex PO, & Y basibus, & duo trientes ex SM basi parallelepipedi ad eandem eleuationem extructi. Basis verò PO, Y, & SM æquales sunt, sicut & complementa NY, & YO æqualia. Quare si esset frustum triangulare deductum ex prismate normalium laterum super BC dimidiam basim à diagonali bipartitum erecto ad eandem eleuationem. esset residuum eius dimidium vnicum parallelepipedum ex NY, vel YO, & vnicum parallelepipedum BM, & triens eiusdem nempe dimidium supradicti residui. Est autem ex prop.13. Tract.34. p.2. tale frustum coni TIPC æquale pyramidis frusto, cuius basis inferior æquet peripheriam, & semidiametrũ inferioris basis coni suis lateribus, quibus sepitur, & basis eiusdem superior circuli superioris frusti coni æquet itẽ suis lateribus peripheriam, & semidiametrum. At cylindrus BDKPC æquabit ex Cor. prop.13. Tract 34. par.2. prisma æque eleuatum, cuius basis triangularis à peripheriæ, semidiametroq; lateribus æqualibus stipetur ex Cor.pr.3. Tr.34.p.2.

Siquidem ex propos.3.tract.30. hæc basis triangularis ex latere æquante peripheriam, & alio æquante semidiametrum circulo eorũdem peripheriæ, & diametri æquatur: Ergo residuum IDC TBP æquabit parallelepipedum, cuius basis ex ID semidifferentiæ diametrorum æquali latere, & alio æquali peripheriæ ex TI constet, & parallelepipedo ex basi semidifferentia ID diametrorum, & semidifferentia peripheriarum constituto; & trienti huius ipsius parallelepipedi, quæ omnia parallelepipeda ad eandem eleuationem extollantur. Basis

enim Ny in fig. prop. 15. Tract. 34. part. 1. ex latere minori, & semidifferentia alterius minoris à maiori homologo constituitur, & NM ex semidifferentijs homologorum laterum: Ideoque si minori peripherię æqualis ponatur pro latere, aliud erit latus semidifferentia inter diametros minorem & maiorem: at si semidiameter minor ponatur pro latere, aliud erit latus semidifferentia peripheriarum, cùm hæc duo rectangula ęquentur. Etenim, cum sit peripheria ad peripheriam; vt diameter ad diametrum, & vt radius ad radiũ ex 42. lib. 6. erit *dividendo* peripheria minor ad differentiã suã à maiori, vt diameter minor ad differẽtiã suam à maiori, & ideo ad earum dimidium, quare rectangulum ex medijs æquabitur rectangulo ex extremis ex prop. 18. lib. 6. Si ergo fiat rectangulum, cuius vnum latus æquet peripheriam minorem ex TI aliud semidifferentiam diametrorum, vel ex dimidia diametro minori TI, & semidifferẽtia peripheriarum, & huic addatur ex pr. 28. Tract. 29. rectangulum ex semidifferẽtijs diametrorum, & peripheriarum, & huic iterum addatur triens huius ipsius rectanguli, & super hoc rectangulum parallelepipedum erigatur; erit æquale soliditati IDC TEP cylindri EDPC, cont frustum TIPC ambientis, cui parallelepipedo cylindrus æqualis (vt potest fieri ex prop. 28. h.) æquabitur soliditati prædictæ IDC TEP.

PROBL. XV. PROPOS. XXX.

Soliditati frusti coni cylindro vacuatæ conum æqualem ponere.

Sit frustum coni in præc. fig. TIPC, quod intelligatur vacuatum cono TIXH, & sit reperiendus conus æqualis soliditati PXT THC. Quoniam propos. 13. Tract. 34. p. 2. (vt in illa fig. intueri licet) frustum coni RATQ æquat frustum pyramidis BLK NCM, & hoc frustum ex Cor. prop 25. p. 1. est dimidium frusti pyramidis basis quadratę, quod ex contextu eius propos. æquatur parallelepipedo

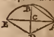


à basi eleuato ex minoribus basis superioris lateribus, & duobus parallelepipedis, ex minori latere, & semidifferentia alterius minoris ab homologo sibi latere maiori, & insuper parallelepipedo ex semidifferentijs homologorum laterum basis supremæ, & infimæ, & eius trienti omnia æqualis eleuationis HI. Ideo frustum pyramidis in hac fig. quod æquat frustum conicum TIPC æquabitur horum dimidio nempe prismati à basi ex TXI peripheria, & to radio, quod æquat ex Cor. prop. 3. Tract. 34. par. 1. æqualem cylindrum ob hasim TBI ex 3. Tract. 30. æqualem, parallelepipedoq; vnico ex radio, & semidifferentia peripheriarum minoris à maiori, & parallelepipedo dimidio ex semidifferentijs diametrorum, &, peripheriarũ minorum à maioribus, & insuper dimidio trienti eiusdem, quæ duo faciunt quatuor sextantes dicti parallelepipedi ex semidifferentijs. Subducto itaque prismate æquante cylindrum XT ex peripheria TXI, & radio OI basi infixo remanebunt prædicta parallelepipeda, nempe ex radio OI, & semidifferentia peripheriarum basi eleuata, & quatuor sextantum parallelepipedi ex basi ex semidifferentijs diametrorum, & peripheriarum consurgentis. Igitur si basis constituatur ex OI radio, & semidifferentia peripheriarum, & ei addantur quatuor sextantes basis ex semidifferentijs prædictis diametrorum TI, & PC, & peripheriæ ex TI ab PC, & super ipsam in altitud ne HI eleuetur parallelepipedum: hoc erit ęquale soliditati PTX HIC frusti coni TIPC vacuati cylindro TIXH. Hoc verò parallelepipedum conus fiat, ex pr. 20. h. & verificabitur assumptum.

PROBL. XVI PROPOS. XXXI

Sectorem, & portionem sphæræ in conum æqualem commutare.

Quoniam sector sphæræ ABXD solidus æquat conum, cuius altitudo sit radius AD, & obtineat pro basis radio subtensam AB ex Cor. 1. pr. 44. Tr. 34. si fiat circulus radio AB, & super illum extollatur conus habens pro altitudine radiũ sphęrę DB: hic conus æquabit soliditatẽ sphęrę sectoris BBAD. Si verò



fiat conus, cuius basis CA radio ducatur, & altitudo sit CD residua eadij DB sphæræ ablata sagitta portionis sphæræ BC, qui sit XAD, & hic conus DAX auferatur ab illo, qui æquat sectorem sphęrę, reliqua erit soliditas, quæ redacta in conum ęquabit soliditatem portionis sphęrę XBAC.

PROBL. XVII. PROPOS. XXII.

Sphæroidi conum æqualem exhibere.

Hoc facilitet fit faciendo conum, qui habeat pro radio axem alterum, alterum pro altitudine. Vel cùm ex pr. 26. Tr. 34. ostenderimus sphæroidem esse duplum coni inscripti, cuius basis circulus ducitur ex semiaxe tamquam radio, & alium semiaxem habeat pro altitudine; sic conficiamus conum duplum faciendo eius duplam basim (quod fit, si inter totum axem, & dimidium media proportionalis inueniatur, & adhibeatur pro radio ex prop. 19. tract. 29.) & eandem altitudinem alterius semiaxis conseruando, erit duplum huius, & ideo æquabit hemisphæroidem, si verò duos conos similes in Rhombũ solidũ cõponamus, vt est ACHD in illa pr. 26. Tr. præc. p. 2. Huic Rhombo erit æqualis ille conus, qui habeat eandem conorum cõpositorum eleuationem, & basim eandem ex eadem prop. vt est ibi GAN: Quare conus habens totũ alterum axem pro radio tum huius, tum alterius conorum compositorum æquantium duo hemisphæroides, & basim prędictã erit æqualis Rhombo ex duobus ijsdẽ conis conflato, & ideo toti sphęroidi.

PROBL. XVIII. PROPOS XXXIII.

Frusto sphæroidis, vel sphæræ æqualem conum exhibere.

Frustum sphęroidis, vel sphęrę, quod datur in se concludit centrum, vel terminat in centrum, vel est totum extra centrum, & vt de singulis doceamus modum ea reducendi in conos æquales. Sit primo datum segmentum ABC, quod omninò sit extra centrum. Quoniam ex propos. 38. frustum sphæroidis ABC æquat cylindrum INHC deducto frusto coni HTLO, si fiat ex pr. 29. huius

...iusto cylindri ...NLGP, vt in fig. pr.38. Tr.34. ..2. remanentis prisma equale habebimus intentũ. ...it deinde data sectio sphæroidis, vel sphæræ, ...ius portio terminet in centrum, vt ACDQ, quis ...x prop.38. Tract.34. æquatur cylindro NDPQ ...a portione coni, seu cono ...LP, fiat huic ...ro ex par.1. prop.29. h. Conus æqualis, sub... ...xcauatæ deducto cono LT..., & obtinebimus ...um.

...o si sit segmentum, quod centrũ compre... ...t VI ...AIZ vtere eo tamquam si duo essent, ...rnarent in centrum, nimirum ADCQ. & ..., & ... duos conos transformentur, quæ de... ...n vnum poterunt conglobari, ex doc. prop.15. Tract.34. p.2. vel ex dicendis.

PROBL. XIX. PROPOS. XXXIV.

...erbolicum conoidem in conum æqualem ...ran formare data diametro, & transuersa.

QVoniam ex prop.30. tract.34. Hyperbolicum conoides ad conum inscriptum eam consequitur proportionem, quam diameter cum diametr... transuersa, & huius dimidio, nempe in illa fig. AE diameter cum AO transuersa, & AO transuersæ dimidio, quod est OE ad diametrũ, & transuersam OC. Ideo si duæ mediæ proportionales iaciantur inter EP diametrum transuersam, & eius dimidium, vt vnam lineam SP, & inter OE diametrum. Conus similis cono BAC ex minori, & viciniori ipsi OE erectus erit ad conũ CAS, vt EP ad OE, quia sicuti PE ad ES habet proportionẽ triplicatã eius, quę est inuentę lineę proximiori ipsi OE ad ipsã OE; Sic quoque conus simile, similiterque positus vt BAC super illam erectus proximiorem ipsi OE dicit proportionem triplicatam ex Cor. prop. 14. Tract 34 Vnde eidem cono EAC dicet eandem proportionem, quam EP ad OE, nempe quam Hyperbolicum conoides ad conum inscriptum, vnde erunt æqualia ex 9. lib.5.

Idem quoque obtinebimus, si fiat prisma equans annulum solidum, quod enascitur ablato cylindro eiusdem altitudinis, ac conoides hyperbolicum, à cono asymptotico ipsiue conoidis, vt prop.33. Tr. 34. collegimus.

PROBL. XX. PROPOS. XXXV.

Conoidi Parabolico conum æqualem exhibere.

SIt conus in fig. prop.34. Tract.34. p.2. BAC, basisque circulus AC ex prop.19. Tract.30. fiat maior addita ei sui ipsius medietate; ita vt circulus inuentus se habeat ad basim coni BAC, vt 3. ad 2. & super hunc circulum erigatur conus eiusdem altitudinis, ac EAC parabolico conoidi inscriptus, eritque æqualis iste conus conoidi.

Probatur. Quia conus inuentus ad conum inscriptum obtinet eam proportionem, quam basis illi substrata ad basim coni BAC inscripti: sed hec est sesquialtera ea scilicet proportione gaudet, quã habet conoides parabolicum cono sibi inscripto: Ergo eidem cono inscripto eandem proportionem dicunt conus inuentus, & conoides parabolicum. ex 9. lib.5. Quedere erunt æqualia.

* Hoc quoq; operi demadabitur faciendo conum prismaticum eiusdem basis, & altitudinis hunc enim conum parabolico corpori æquari ostendimus prop.35. tract.34.

COROLLARIVM.

POstea verò quod hæc corpora in conum translata sunt, poterunt in quolibet aliud transfundi, si iuxta præhabita corpus ipse cui æquatur, transmutetur in aliam quamcumque solidam figuram.

PROBL. XXI. PROPOS. XXXVI.

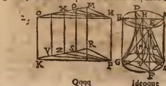
**Sphæram quadriformem, & corpora quæ ex ea nascuntur in corpora æqualia transfundere.*

SPhæræ quadriformi corpus æquale erit duplũ AHPS parallelepipedum circumscriptum ipsius Hemisphærio OPCDS: sed cui demptum fuerit triens ipsius, nẽpe gemina Pyramis ELAHI, quæ vt ibi ostenditur est triens BHPS parallelepipedi, & ideo geminata erit triens ipsius dupli: Hoc autem parallelepipedum debet habere eandem quadratam basim, & eandem altitudinem totius sphæræ quadriformis, vt sit duplum BHPS parallelepipedi ex prop.2... Tract.34 Quare si fiat basis, quę obtineat duo trientes basis sphæræ quadriformis exhibitæ, & super hanc eleuetur parallelepipedum duplæ altitudinis IO: hoc erit ad parallelepipedum PS basi situm in duplam altitudinem IO vt 2. ad 3. Sed etiam duplum parallelepipedum ESPH vacuum tamen dupla pyramide BAHLI est æquale sphęroidi quadriformi est ad idem duplum integrum, vt 2. ad 3. Ergo æquantur ex 9. lib.5. & ideo sphæra quadriformis æquans parallelepipedũ duplum SHPS vacuum dupla pyramide ASLHI parallelepipedo, cuius basis ipsius ASBL duo trientes & eadem eleuatio sit, æquabitur.

Inuolucro verò sphæræ quadriformis inuenientur pyramis æqualis.

Si fiat super ABHL pyramis duplæ altitudinis, quam sit OI. Nam sicut ... ABLHI pyramis æquat semi inuolucrum sphæræ; si sit pyramis duplę altitudinis, & eiusdem basis, sc. dupla pyramidis ACLHI æquabit totum inuolucrum ex pr.51. Tr.34.

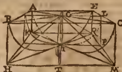
Vngulæ cylindricæ æqualis pyramis inuenietur, si fiat pyramis super basim eius quater maiorem, quam sit triangulum, in quo inexistit Vngula, & eiusdem altitudinis, ac eius semidiameter, vt constat ex prop.49. Tract.34. dimidiũ enim basis sphæræ quadriformis, cuius est octaua pars, est quater maius, quàm triangulum, cui inexistit vngule, quod est octaua pars basis eiusdem sphæræ:



Ideoque dato cylindro BRACI; si ex basi ABGI eius sectione erigatur pyramis ABEGI erit æqualis vngulę DBGE: siquidem basis ABGI est quadrupla trianguli UHG, cui insistit vngula, & altitudo est EH diametri ED vngulę dimidium.

Lunulę verò pyramis æqualis inuenietur: Si fiat prisma UMOP, cuius basis NMO æquet circulum ADBE; ex ea prop.3. Tract.30 NM latus basis triangularis sit EH semidiameter, & MO æquet peripheriam ADBE: Altitudo verò NP sit eadem, ac GE cylindri: In hoc verò prismate sit MO diametri duo trientes, ex quo fiat parallelogrammum MQRS æquale duobus trientibus plani secti per axem AUCT cylindri, & super ipsum erigatur prisma NMQRSP, quod erit æquale pyramidi ABEGI æquanti vngulam. Namque erit eiusdem altitudinis EH: vnde se habebit ad prisma ABEGFT, vt 2. ad 3. scilicet vt basis rectangulum MQRS ad basim ABGI ex propos.15. Tract.34. p.1. sed etiam pyramis ABEGI est ad idem prisma ABEGFT, vt 2. ad 3. cum sit super basim quadrangulam ex prop.22. Ergo ęquabuntur ex 9 lib.5.: Fiat rursus prisma XQNPSZ eiusdem basis ZQ, vt est MS, & eiusdem altitudinis ęquabit duas pyramides ABEGI, & ideo duas vngulas DEAT, & EDBG. Quare residuum erit duabus Lunulis ęquale UESOTS. Diuidatur itaque parallelogrammũ XR medium, & fiat prisma TOKP, & erit æquale vnicę lunulę AEBDGF.

3



Inuolucro vngulę pyramis ęqualis erit. Si fiat pyramis supra quartam partem PITM basis sphęrę quadriformis in altitudinem GT, vt constat ex prop.51. Cor.1. Tract.34. p.2. quę quarta pars est semirectangulũ AHVT per axẽ sectũ ABIO cylindri.

At verò, si quis cupiat prisma ęquale inuolucro Lunulę, is transformet fig.2. NPYO prismatis ęqualis lunulę basim YPU obliquam in rectangulum, cuius latus sit radius UP, & YK aliud latus, & super hoc eleuet prisma ad altitudinem PN: Quod ex 15. tract 34 part 1. ęquabitur prismati YOPN lunulę ęquali; describatque hoc prisma in prismate

4



lunulam continẽte MLHITA (poterit enim describi: siquidem basis habet latus PL, idem quod latus IH radio ęquale, & YK minori latere, quam HA, & altitudo eadem PQ, quæ prismatis PL;) Sit verò prisma inscriptum lunulę ęquale AYTOLM remanebit reliquum prisma HFIOLM ęquale Inuolucro lunulę. Quod patet, abstulimus enim corpus ęquale lunulę: ipsumque totum prisma ęquat lunulam & inuolucrum. Ergo ablato corpore FOTALM ęquali lunulę solùm ipsi inuolucro remanet corpus, & prisma ęquale HFIOLM.

Hinc quoque, & fornicis cruciformis quantitatem consequemur de quo prop. 3. 1. Tract.34. Constat hoc corpus ex tuor prędictis lunulam lucentibus eu & 2. prop. 52. pont. Et vt b demus exem

5

erit inuolucrũ lunulę, & quarta pars sphęrę quadriformis, cui iam docuimus inuenire ęquale prisma. Quare, si quatuor prismata ęqualia obtinuerimus totũ fornicẽ TFVMUC, & ita di pyramide ílexa constante, vel meta concaua.

COROLLARIVM I.

Hinc patet Vngulam cylindri, in quo est ponatur ipsius cylindri tota soliditas esse 4 partes, & $\frac{4}{6}$ totius soliditatis, & duas vngulas esse 9. partes, & $\frac{4}{6}$, & ideo Lunulas esse, vt & $\frac{4}{6}$ vtpote residua eu Vngulis, & singulas esse 5. $\frac{1}{6}$ totius cylindri. Ratio est; quia, sit fig. 2. latus MO ponatur 22. vt est peripheria respectu diametri ex pr.3. Tract.18. latus MQ erit totius MO 4 vtpote $\frac{4}{7}$ diametri, qui est 7. part. At vt MO ad MQ latera sic rectangula æqualia MR ad MS, quæ sunt bases, & vt bases ita æqualia prismata MOUNPR ad MQRSNP: ergo etiam prisma MOKRNP, ad MQRSNP erit, vt 22. ad 4 $\frac{4}{6}$. Ergo ex pr.19. Tract.17. prisma MOKRNP ad duo æqualia NMUZPR erit, vt 22 ad duplicatos numeros 9 $\frac{4}{6}$. Quare *conuertendo* NMOKRP totum ad reliquũ XOKZPN, erit, vt 22 ad reliquum 12. & $\frac{4}{6}$: quare ad dimidiũ YUONP erit, vt 22. ad dimidiũ prędicti numeri sc. 5. & $\frac{1}{6}$ proximè.

COROLLARIVM II.

Colligitur quoq; inuolucrum Vngulæ esse ex 28. partibus cylindrũ ambientis parallelepipedi 4 $\frac{4}{6}$, & inuolucrum lunulæ ex ijs 28. solum æquare $\frac{4}{6}$. Fiat prisma SACGEY in fig 4. cuius basis SACY triãgularis æquet basim cylindrũ ambientis parallelepipedi V.g. sit dupla basis THAS, quæ semicirculum basis cylindri ambit, eritque ex pr. 5. tract. 29 YS latus æquale quatuor lateribus AH: Quare prisma CABOEY erectum in eandem altitudinem parallelepipedi cylindrum ambientis ipsi æquabitur. Igitur ponatur AC quatuor diametros æquans 28. partiõ tribuendo singulis partes septẽ, & esse inscriptum prisma BADKAG fig. 2. eiusdem altitudinis AB situm super basim EADK rectangulam; Item eiusdem altitudinis AA, quæ est cylindri, quæ longitudine lateris AD habeat partes 22. sc. lineam ęquantem peripheriam, idest diametros tres cum septima parte, remanebit prisma CDEKYG cuius basis DY habebit DC partium 6., & quia ADUEG æquat cylindrum, reliquum DECYKG ęquabit inuolucrum cylindri.

Inuolucrum autem vngulę est ęquale ex pr.51. Cor.1. pyramidi EHVGE fig 2. (siquidem rectangulum HEVG est quarta pars totius basis sphęrę quadriformis, quę vngulis octo constat, & ideo cum quodlibet rectangulũ duas vngulas ferat SGDB, & BSNOD debebit quadruplicari; vt octo vngulas pręstet) sed iam dictum est; quod pyramis ABGE æquat prisma NMQRLS, cuius basis habet latus MQ 4 $\frac{4}{7}$; ergo EHVO dimidium pyramidis ABEG habebit latus 2 $\frac{2}{7}$ manente in basi eadem altitudine, sicut & in prismate: Quare duo inuolucra

ęqua-

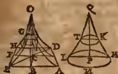
ęqualia erunt prismati DXZVna fig. 4. cuius latus DX basis æquealtę, ac pyramidis, fit $4\frac{4}{6}$. Remanebit ergo pro inuolucris duobus lunulę prisma XCVYGA, cuius basis erit XCVY, quę erit partis vnius, & $\frac{4}{7}$, quare singula inuolucra erunt $\frac{4}{7}$.

Igitur soliditas inuolucri vngulæ ęquans dimi- m r smatis XCVYZG erit ad totam soliditatem p matis AACEGY, vt $\frac{4}{7}$ ad 28. quia enim dimi- d m ectāgulum VXCY est ad rectangulum AAVC, midium XC ad AC, vtpote quod sint eiusdem linia, erit etiam prismatis dimidium XCAYVG ma AACGFY, vtpote eiusdem altitudinis, vt m ad CA, scilicet, vt $\frac{4}{7}$ ad 28. vel 4. ad 196. el vt 1. ad 42.

PROBL. XIV. PROPOS. XXXVII.

* *Pyramidem æquale pyramidi flexis superficiebus constanti, & conum æqualem eiusdem generis cono construere.*

Sit fig. prop. 43. & detur pyramis flexis constans HOA, cui æqualis rectis superficiebus secta facienda sit. Fiat rectangulum ex prop. 30. Tract. 29. quod se habeat ad rectangulum HA, vt 24. ad 42. vel 4. ad 7. & super illud erigatur pyramis, quę appelletur X ęquè eleuata, & hęc pyramis X æquabitur pyramidi flexis constanti HOA.



Probatur. Nam sit pyramis quadrata HOA flexis constans, hæc ex 53. tract. 34. quatuor inuolucris lunulæ æquabitur. Estq; parallelepipedum, ex quo ablatis lunulis, & vngulis duabus, & harum inuolucris duobus formatur conclusum lateribus AB altitudine cylindri, ZI, & dupla CO diametris eiusdem cylindri ab eo comprehensi ex Coroll. prop. 53. Tract. 34. & ECBO erit dimidiatæ lunulæ inuolucrum, cuius vertex Z, & ZFCO aliud dimidium, ex Cor. 1 prop. 52. ideoque si basis aliqua parallelepipedi V. g. quæ continetur lateribus ZE, & AB in 42. partes diuidatur, parallelepipedum super $\frac{4}{6}\frac{6}{6}$ eleuatum in altitudinem duplæ CO, ex Cor. 2. præced. æquabit lunulæ inuolucrum totum FCEAN; & quadruplum $\frac{4}{6}\frac{6}{6}$ totam pyramidem flexis constantem, vtpote quatuor inuolucris lunularum confectam. Sed hoc parallelepipedum fiat Pyramis eiusdem eleuationis duplę CO, & occupabit triplum maioris basis ex prop. 17. Tract. h. $\frac{1}{6}\frac{6}{6}$ rursus diminuatur vsque ad dimidium eleuationis, quæ est CO, & erit ex prop. 25. Tr. 34. $\frac{6}{6}\frac{3}{6}$, vel $\frac{4}{7}$, nempe fiet duplæ basis, ideoque pyramis X æquata pyramidem flexis constantem erit situata super $\frac{4}{7}$ basis, & eleuata vsque ad eleuationem eandem CO.

Si verò quis cupiat extruere conum æqualem cono superficie curua constanti LQMN fiat circulus ex 19. Tr. 30. qui se habeat ad circulum LNM, vt 4. ad 7. qui dicatur Z, & super illum erigatur conus Z eleuatus eadē altitudine PQ, & ille conus Z æquabitur cono LQMN.

Probatur. Nam Pyramis HOA est ad conum LQMN, quæ flexis constant superficiebus ex prop. 53. Tract. 34. vt basis AH rectangulum ad basim LMN circulum, vel ellipsim. Sed vt rectangulum HA ad LNM circulum, vel ellipsim, ita est rectanguli $\frac{4}{7}$ ad circuli, vel ellipsis $\frac{4}{7}$, & ita est pyramis super $\frac{4}{7}$ basis HA erecta ad conum super $\frac{4}{7}$ circuli LNM erectum ad eandem eleuationem. Ergo ex 16. l. 5. vt pyramis HOA ad conum LQMN, flexis constantis, sic pyramis super $\frac{4}{7}$ basis HA ad pyramidē super $\frac{4}{7}$ circuli LNM: sed pyramides ex basi HOA flexis constans, & pyramis ex eius $\frac{4}{7}$ æquantur. Ergo etiam conus LQMN flexis constans, & conus ex $\frac{4}{7}$ circuli LNM ęquabuntur.

PROBL. XV. PROPOS. XXVIII.

* *Metæ quadriformi æqualem ponere pyramidem, & etiam metæ circulari æqualem conum.*

SVper quadruplum rectangulum basis metæ ædificetur pyramis eiusdem altitudinis; ac metæ semiaxis QB. Et hanc pyramidem dico esse æqualem metæ quadriformi. Si verò quis cupiat metam circularem, super circulum basim metæ quadruplum ex pr. 19. Tract. 30. p. 2. erigatur ad prędictā eleuationem conus, & erit, quod expetitur operi demandatum.

Prob. Nam ex prop. 54. Tract. 34. p. 2. ita est sphęra quadriformis ad metam, vt basis sphærę quadratum ad basim metæ quadratum, & ita basis quadruplo, quam sphęræ basis maior ad basim quadruplo maiorem, quàm basis metæ; & ita ex pr. 28. Tr. 34. p. 2. pyramis ad eleuationem QB super basim quadruplum, quam sphærę ad pyramidem super basim quadruplam, quam basis metæ ad eandem eleuationem ZQ. Ideo ex 16. lib. 5. vt est sphæra ad metam, ita pyramis super basim quadruplam basis sphæræ ad pyramidem super basim quadruplam basis metæ in eandem altitudinem euectas: Sed illa soper basim quadruplam sphęrę æquat sphęram ex pr. 48. Cor. Tr. 34. Ergo etiam ex prop. 12. lib. 5. pyramis hęc quadruplæ basis ad eleuationem QB æquabit metam.



Eodem argumento idem ostendes de cono, quod æquetur metæ circulari.

Idem concludes: si sphæra quadriformis, & meta habeant bases similes. Nam ob parallelismum omnia plana secantia erunt similia. Vnde ex prop. 28. Tr. 34 p. 2. idem concludes de meta, & sphæra quadriformi. Et ita etiam si sint ellipticæ bases; sed similes, quæ scilicet possint circumscribi rectangulis similibus: nam cum omnia rectangula parallela basi sint similia; etiam omnes ellipses ex propos. 27. Tract. 30. similes erunt, & ideo ex 28. Tract. 34. ipsa corpora erunt in proportione basis ad basim.

PROBL. XVI. PROPOS. XXXIX.

* *Corporibus spiralibus cylindros æquales exhibere, & superficiebus ipsorum normalibus superficies æquales.*

NAm sit corpus spirale primi generis de quo prop. 57. locuti sumus à circulo in altitudinem spiraliter ductum. Cylindri, in quo est medietas ipsum æquabit, sicut, & cuiuscumque eius partis soliditatem sectoris cylindrici solidi medietas

adęquabit. Patet ex eadē pr.57.Tr.34.p.2. cum ibi ostendatur corpus tale spirale esse dimidium cylindri comprehendentis . .

Si verò sit corpus spirale secundi generis à basi spirali erectum æquealtum. Diuidetur altitudo cylindri cōprehēdentis in tres partes, & tertia pars æquabitur corpori spirali super spiralē basem in æqualē eleuationē producti, vt pr.58. ostendimus.

Si verò sint corpora spiralia secundę spiræ, cum sint, vt bases spirales ad circulos includentes, & illę sint, vt 7. ad 12. si diuidatur altitudo cylindri in 12. partes ex illis assumantur 7. ille cylindrus æquabit corpus spirale. Et ita dicas de alijs tertijs, & quartis spiris, diuisus enim cylindrus secundùm eam proportionem, quam habet basis ad circulum, cylindrum æqualem spirali corpori exhibebit.

Hinc superficies globosa super basim spiralem normaliter erecta corporis spiralis super spiram inixi, & æqualis eleuationis patebit. Siquidem superficies sectorum solidorum circumscriptæ deficiente latitudine tantùm: quæ ad sectorum æqualium superficies inuicem æquales se habebūt, vt 6. ad 12. ex pr.12.Tr.27. Quare, & vsitato argumento talis proportionis ipsa spiralis superficies globosa ostendi poterit ad superficiem cylindri, nempe, quod sit, vt 6. ad 18.

Si vero sit corpus spirale tertij generis à basi spirali in spiralem eleuationem euecti; Diuidatur altitudo cylindri comprehendentis in 18. partes, & quinque partes æquabuntur prædicto corpori. Nam tale corpus basis, & eleuationis spiralis est ad corpus spiralis basis, sed æqualis eleuationis, vt 5. ad 6. ex prop.59. Tract.34. at verò spirale corpus ad cylindum ambientem est, vt 6. ad 18. vel vt 1. ad 3. Ergo ex 23. lib.5. spirale corpus quoad basim, & altitudinem erit ad cylindrum comprehendentem, vt 5. ad 18. sed etiam quinque partes ex 18. cylindri eiusdem est ad ipsum, vt 5. ad 18. Ergo æquantur spirale corpus altitudine, & basi, & quinque partes cylindri comprehendentis ex prop. 9. lib.5. Euclidis.

Si verò sit corpus quarti generis basi spirali, decrescendo eleuatum: tunc diuidetur cylindrus comprehendens in partes 18. & vna pars erit ęqualis tali corpori.

Probatur. Quia corpus spirale decrescens altitudine, sed crescens basi est ad corpus spiralis basis tantùm, vt 1. ad 6. sed hoc corpus est ad cylindrū comprehendentē, vt 6. ad 18. ergo etiam corpus spirale decrescens altitudine dum basi crescit, erit ad cylindrum comprehendentē vt 1 ad 18. Vnde $\frac{1}{18}$ cylindri ipsius illi corpori æquabitur.

Si verò sint secunda spiralia corpora basi, & altitudine decrescentia iam ostendimus se habere ad corpus spiralis basis, sed eiusdem altitudinis 17 ad 42. vel 119. ad 294. sed corpus spiralis basis, & eiusdē altitudinis se habet ex 57. Tract.30. vt 7. ad 12. idest, vt 294. ad 504. ideoque ex *æquo* spirale corpus deficiens etiam altitudine se habebit ad cylindrum comprehendentem; vt 119. ad 504. ideo si diuidas cylindrum comprehendentē in partes 504. & ex eis assumas 119. ille cylindrus partiū 119. ęquabitur corpori in spira siti altitudine deficiētis.

Hinc est superficiem flexam corporis spiralis facilè posse inueniri. Nam illi imaginentur circumscriptæ superficies latæ, vt ipsi arcus deficientes, quę deficiant altitudine arithmeticè, istę erunt ad eiusdem latitudinis superficies corporis basi; sed nō altitudine deficientis, vt 4. ad 6. ex pr.14. Tract.27. par.3. contextu; ideoque toties replica-

.to argumento poterit argui, quod superfi[illegible] spiralis flexa deficiens altitudine se ha[illegible] spiralem altitudine non deficientem [illegible] sint basi spirali innixæ, vt 4. ad 6. At [illegible] spiralis superficies non deficiens est ad [illegible] superficiem, vt 6. ad 18. nempe vt ipsa spira[illegible] culum; Ergo ex *æquo* ad superficiem cyl[illegible] spiralis superficies altitudine deficiens, & [illegible] basis erit, vt 4. ad 12.

EXPENSIO III.

De corporum proportionali diuisione

VIsa transformatione corporum in alia c[illegible] ra diuersæ speciei, modo de eorum di[illegible] ne proportionali agendum est non obseruata [illegible] figura, sed tantū per plana parallela vni lateri [illegible] fra autem agemus de eodem augmento, seu [illegible] nutione: sed ea in eadem figura conseruando

PROBL. I. PROPOS. XL.

Datum cubum, vel parallelepipedum secundùm proportionem datam secare.

DIuidatur latus YL in P secundùm proportionem datam, & basea NH, & OR, vtpote eiusdem altitudinis ex 1. 16. obtinebunt proportionē laterum sectorum secundùm datam rationem, sed, & hanc habent parallelepipeda ęqualia altitudinis HL, & PR, vtpote quod eā obtineant proportionem, quæ basium ex prop. 8. Tract.34 p.1. Ergo, & ipsa parallelepipeda secta sunt secundum datam rationem.

COROLLARIVM.

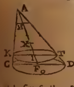
EAdem dicas de prismate, & de cylindro, si altitudo eorum in datas rationes secetur, & per sectionem agatur planum basibus in prismate triangulis in cylindro circulis parallelum. Nam eadem ratione secabuntur, tum prisma, tum cylindrus in datam rationem.

PROBL. II. PROPOS. XLI.

Cono, vel Pyramidi abscindere partem datam.

*SIt ADOC Pyramis, vel conus à quo oporteat abscindere partem versùs acumen, ad quam se habeat residuum, vt 3. ad 1. Diuidatur altitudo coni AP in H tali modo, vt AP sit ad AH, vt 4. ad 1. eritque *diuidendo* HV ad HA, vt 3. ad 1. Interq; AH & AP duæ medię proportionales AX, & AI ex 3. Tr. 15. inueniantur, quarum maior sit AI, & per punctum I planum parallelum basi coni abscindet conum TAK simile cono ODACI Erit itaque conus DACO ad conum TAK cum ex pr.7.h. sint similes, vt FA prima ad HA quartam proportionalem nempe ex effect. vt 4. ad 1 Cum ergo sit conus ODCA ad conum TAK, vt 4. ad 1. erit etiam *diuidendo* TD. hc residuum ablato cono TAK ad ipsum conum TAK, vt 4. ad 1. ablato 1. scilicet 3. ad ipsum 1. quæ erat proportio requisita secundùm quam conus debebat diuidi.

Et



Et ita diuldetur etiam ſi pyramis, vel conus ſit obliquus, & ſuper Ellipſim. Nam ſemper conus, & pyramis quæcumque parallelo plano baſi abſciſa ſimilis erit toti. Omnes enim baſes, quæ ducantur baſi [pa]ralelæ ſint ſimiles. Ex 2. Tract. 24. quia ſunt [cir]culi. & ex 1. & 4. Tract. 35. ſi ſint ellipſes. [Tri]angula etiam quæcumq; per axem ſimilia ſunt vt ex [pr]op. 2. & 4. lib. 6. cum ſint anguli ob pa[rallelism]at in cono AFAT, & CADO æquales, & latera [pr]oportionalia. Vnde etiam ſuperficies conicæ ab[sci]ſſi AK, & totius AOC ſimiles erunt cum eoſdem angulos vbique, & circumquaque cum baſi efficiant, vt ex 7. h. Cor. colligere licet: cum ergo con[us] abſciſus TAK, & totus ADC contineantur ſuperfi[c]iebus ſimilibus, ſimiles erunt. Quod & ex[te]n[d]es ad corpora conoiformia rectis in centrum tendentibus ad modum coni conſtantia, vt cit. Cor. patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLII.

** Priſma triangulare parallelo ductu baſi quadratæ in partes datas ſecare.*

SIt priſma ABQOD per ductum parallelum baſi quadratæ ſecandum, ideo pars erit in acutum D deſinens R TO, habebunt verò æqualem altitudinem I R totũ ABQOO, & pars RTD, baſimq; ſimilem AOD, & RHO ob parallelum planum RHTI, & parallelam ſectionem RH, quare ex 2. lib. 6. erit AD ad RD, vt OD ad HO, & anguli æquales ex 2. lib. 6. DRH, DAO, & DHR, DOA. Vnde ex def. erũt ſimiles. Ideoque obtinebunt proportionem laterum duplicatam, eritque ADO ad OHR in proportione duplicata DO ad OH. Et quia Priſmata ſuper eas erecta obtineant eandem baſium proportionem, erit itaq; priſma ABDO ad priſma RTD in duplicata ratione lateris DO ad OH. Sit ergo data proportio, ſecundũm quam Priſma abſcindendum eſt 4. ad 1. diuidaturque DO in quatuor partes, Intraque prima parte DC, & totã quatuor partiũ inueniatur media proportionalis DH; agaturque per OH planum RHT, & erit factũ, quod Imperatum fuerat.

Probatur. Nam DO ad DC habet proportionem duplicatam DO, & OH; Ideoque ex 21. lib. 6. Cor. baſis DOA ad baſim DHR habebit proportionem, quam DO ad DC: ſed Priſma QIDAO habet eandem proportionem, quam baſis ad baſim ad priſma partiale TIHRO: Ergo priſma ABOQO erit ad priſma TIHRO vt DO ad DC.

THEOR. I. PROPOS. XLIII.

** Conum priſmaticum iuxta datam proportionem per parallelum planum baſi reſecare.*

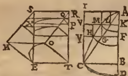
DEbeat reſecari conus priſmaticus AFED in partes iuxta datam proportionem RA ad GR; ita vt ſit totus ad ſuam partem, nempe, vt 3. ad 1. Inueniatur media proportionalis inter RA, & GR, & ſit TR in RA normali ad baſim ED, perque T agatur planum HS, parallelum baſi coni DA. Nam totus conus ABFD ſe habebit ad conum HSAF, vt AR ad RG, nempe, vt 3. ad 1. vnde compara ABEO ſe habebit ad compartem, vt 2. ad 1.

Probatur. Nam omnia priſmata in cono FBEO Inſcriptibilia erunt ex præc, tali modo truncata, vt totum ſingulorum ſit ad ſuam partem, vt 3. ad 1. cumque hęc omni poſſibili multiplicatione aucta, & multiplicata æquent ipſum conum. Etiam ipſe conus priſmaticus ABFO erit ad ſuam partem HSAF, vt 3. ad 1.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

** Conoidem parabolicum circulare, vel quadriforme in partes deſtinatas parallelo ductu baſi ſecare.*

CVm conoides parabolicum quadriforme æquetur priſmati eiuſdem baſis, quod priſma ſit eleuatum ad eandem altitudinem ac conoides, conoides quoque parabolicum circulare ex prop. 35. Tract. 34. par. 2. ſit æquale cono priſmatico, cuius baſis circularis ſit æqualis circulari baſi conoidis, & altitudo altitudini, ſingulę quoque partes priſmatis ſingulis partibus conoidis quadriformis parallelo baſi plano detruncatis, & ſic partes parallelo ductu baſi pariter detruncatę conoidis circularis, & coni priſmatici æquentur. Hinc eſt, quod dato V. g. conoide circulari CMABO, ſi fiat conus priſmaticus OETSR eiuſdem baſis, & altitudinis, & diuidatur iuxta præcedentẽ plano XQP, & ad eandẽ eleuationem fiat diuiſio MK in conoide parabolico AMCBD parallela baſi CBO, quod conoides AMCBD erit diuiſum iuxta proportionem datam.



Probatur RBPQX portio coni priſmati eſt ad RSOST totum in proportione data, ſed ex dictis MAK portio conoidis æquat portionem coni priſmatici RSPQX, & conoides totum AMCBD totum priſma RSOET, ergo etiam MAK portio conoidis erit ad totum AMCBO in proportione data.

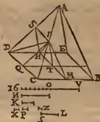
PROBL. V. PROP. XLV.

** Pyramidem diuidere quadrangulam proximè plano ſuperficiei laterali parallelo ſecundùm datam rationem.*

HÆc diuiſio difficultatem ſpecialem obtinet, eo quia diuiſio non fiat in partes ſimiles toti: Sit ergo Pyramis ABCOS diuidenda per ductum HE parallelum ſuperficiei BSA. Iam euidens eſt partem OSHMC, non eſſe ſimilem pyramidi: Nam conſtabit ex SMTCQ pyramide ſimili toti, & ex priſ-

mate

mate DQTSHI eiusdem altitudinis ac pyramis MQI, quod diuisum plano SHD constituet pyramidem HQTOI eiusdem altitudinis, quę pyramides inuicem se habebunt ex prop.24.Tr.34.p.5.vt bases MQ ad HQ; bases autem se babent inuicem ex prop. 1. lib 6. cùm sint eiusdem altitudinis CM vt latera CQ ad QD idest CM ad MB ob basium similitudinem, vt colligitur ex prop.25.l.6. Ideoque si addatur ei pyramidi DSIM quantitas illa NSHI, qua excedit prisma IO ipsam pyramidem DHIQT. quæ est (cum sit pyramis quadrata dupla triangularis) $\frac{2}{3}$ ex prop.24.Tract.34. ideoque MQI pyramis habebit proportionem ad prisma STID, quam CQ ad QD, vel CM ad MB, & ad $\frac{1}{3}$ ampliùs ex propos 29. Tract.17. V.g. si sit pyramis ad pyramidem, vt 2. ad 3. erit pyramidis proportio ad prisma, vt 2. ad 4. $\frac{1}{2}$; si sit, vt 5. ad 2. erit ad prisma, vt 2. ad 3. & cęt.



Sit ergo data ratio, iuxta quam oporteat piramidem BACDE diuidere plano alicui planitiei lateralium parallelo, V.g. planitiei ipsi BEA plano parallelo SIHM, ita vt pars maior ABE SIHM sit 11. minor sit 5. Addantur 5. & 11. & fiunt 16. nempe ratio 16. ad 5. totius pyramidis ad partem abscindendam. Accipiatur deinde linea V 16. ęqualis lineę BC, quæ ponatur 16. & L sit 5. Eligatur deinde fortuitò linea minor, quam L, quæcumque P, interque P, & 16. duę mediæ proportionales inueniantur N, & S, ex prop.3. Tract. 15. Sitque N immediata, & secunda proportionalis post 16. V. Fiat deinde ex prop.15.lib.6., N ad excessum OV lineę V 16. Sic P ad aliud, & inueniatur X, cui deinde addantur dimidium Z ipsius X, & videatur, si omnes simul P, X, Z tamquam vna æquent lineam L 5. si æquant benè res se habet, si non æquãt; sed superent linea P accipienda erit minor adhuc, & iteranda operatio, donec tres P, X, Z ęquent L 5. saltem proximè, & tunc dico, quod si longitudo M transferatur in BC, & fit MC; & per punctum M agatur planum MS IH parallelum plano BEA, hoc planum abscindere portionem MSIH; nempe pyramidem, & prisma tale, quod se habeat ad pyramidem totam BACDE, vt 5. ad 16. & compartem, 5. ad 11.

* Probatur. Pyramis tota BACDE est ad suam partem pyramidem similem MIQTC in proportione homulogorum laterum triplicata BC ad MC ex pr. 23.Tract.34.pręced. sed proportio triplicata BC ad MC est lineæ 16. V æqualis ex hypothesi ipsi BC ad P siquidem est in triplicata 16. V ad N ex effectione. Ergo pyramis maior BACDE ad partem suam pyramidem sibi similem est, vt 16. V, vel BC ad P. Est autem P ad X, vt N ad OV, sc. MC ad MB ex effectione, vel CQ ad QD ex propos 25. lib. 6. Idest ex dictis, vt MIQ pyramis ad pyramidem TID

quæ est $\frac{2}{3}$ prismatis, & ideo ad prisma, vt P & ad Z dimidium ipsius sicut pyram SMIQ pyramidem TID, & ad residuum ex prismate æquat dimidium pyramidis. Itaque OAB tota mis est ad pyramidem QIN partem, vt V 56 Pyramis verò QIM pars est ad compartem QC ad QD, ideoque, vt CM ad MB, & ut P a ex *æquo* DAB tota pyramis erit ad pyrami tem QHI, vt 16. V ad X, ideoque n V, vt QIH pyramis compars ad totam pyra BOA, itaque QHI ad DSA est, vt X ad 16. V, & pyramis est ad pyramidem eandem DSA, vt V. Ergo ex 25. propos. l.5. prima quasi cum quinta QMI pyramides partiales erit cundam OAB pyramidem totam, vt tertia sexta P ad quartam 16. V. Rursus pyramis ad QHI, est vt P ad X, ergo *componendo* QHI ad QHI, vt P cum X ad X, & QT ad OHI a ad Z, quare ex *æquo* pyramides QMI, & QHI ad pyramidem erunt P, & X ad Z.

Sunt autem duæ pyramides DIM ad totam vt X, P ad 16.V, ideo *conuertendo* OAB erit ad DIM vt 16. V ad X, & P, at OIM duæ pyramides sunt pyramidem NSIH, vt X, P ad Z, ergo ex *æquo* tota OAB ad NISH pyramidem partialem erit, vt 16. V ad Z, ideo *inuertendo* pyramis NISH ad totũ OA, vt Z ad 16. V At DIM duæ pyramides sunt ad totam DAB, vt X, P ad V 16. ergo ex 25. l.6 NSIH cum OIM prima cum quinta erunt ad secundam DAB totam pyramidem, vt P, X tertia cum Z sexta ad quartam 16. V, sed hæ tres P, X, Z æquant 5 L, ergo tres pyramides NHSI, QHI, & QMI, idest tota quantitas OMSI erit ad totam pyramidem, vt 5 L ad 16. V, idest, vt 5. ad 16. quare *diuidendo* erit pars DSIM ad compartem SIMHSBA, vt 5. ad 11. vel *conuertendo* 5. ad 11. vt SIMHSBA ad DSIM.

COROLLARIVM I.

* Hinc colligas quomodo cubum vacuatum pyramide proximé, & tentando diuidas per planum basi parallelum, cui incidit vertex pyramidis in partes desideratas.

V.g. sit cubus ABLHDC, cui deficit pyramis AALHI. Iam vides constare quatuor pyramidibus æqualibus, vt LHSCI, vel AHDIS & cæt. quæ per planum TM parallelum lateri plano SIC diuidendæ sunt, singulę verò plano MOPQ alijs partialibus æquale. Cum ergo sit eadem proportio partium quæ multiplicium ex propos. 18. lib. 5. si aliqua ex illis diuidatur E. g. LHISC iuxta pręcedentem doctrinam diuidendo latus LC in M, & per punctum M agendo planum TM omnes quatuor æquales, similesque pyramides sub eadem proportione erunt diuisæ.

COROLLARIVM II.

* Item colligitur quomodo diuidatur cylindrus BCDELM vacuatus cono AIMC per planũ HT: Cũ enim talis cylindrus BCDLE possit diuidi per planities ductas ad centrum I in pyramides ęquales, & similes inuicem omni possibili numerositate multiplicatas, vt est MCLEI quadrangularium basium LEMC, sequitur, vt qualibet modo prædicto plano HT diuidi

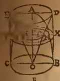
Possit

possit secundum rationem exoptatam: Quare, & tunc erunt similiter diuisæ per MT, cum pars in qu liber æqualis alteri pyramidis parti debeat habere eandem rationem ad totum æquale alteri ex 7.lib.5. Elem. Quare etiam totus cylindrus SCDLB vacuus cono AIC similiter erit diuisus.

PROBL. VI. PROPOS. XLVI.

Sphæram, sphæroidemque etiam si quadriforme proximè saltem in partes destinatas secare.

Sit semisphæra, vel semisphæroidea SAFC, & illi circumscriptus sit cylindrus OAPFC, cui fuerit solutus conus ODS. Iam certum est ex prop. 59. & 34. part. 8. totum semisphæroidem, vel hem. sectium æquari cylindro OE AC, cui ablatus fuerit conus SOD, singulasq; partes hæmisphætij MAT, vel hemisphæroidis plano XT



detruncatas V.g. IAN æquari singulis eiusdē cylindri segmentis vacuatis segmentis ijsdem coni, icilicet portionibus MTRYXD. Si ergo à cylindro DSCA auferatur pars DT secundum proportionem datam agendo planū XF per T punctum parallelū basi CFS ex prop. 45. præc. obtinebimus partes æquales istis cylindricis partibus hæmisphæræ, vel hemisphætoidis. Quare dicent ad inuicem eandem proportionem, & ad totum, eritque MTEYXD cylindri concaui portio ad SDBC cylindrum, vel ad compartem BXFOMTC; quam æqualis portio hemisphæræ, vel hæmisphætoidis MAT ad totum hemisphærium, vel hemisphæroidem CAS æqualem toti cylindro SPCFSO, vel ad compartem IHSC æqualem comparti cylindri excauati THCOYXS.

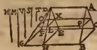
Eadem erit ostensio de hemisphæra, vt hemisphæroide quadriformi, cum idem de ea ostensum sit prop. 56. Tract. anteced.

THEOR. II. PROP. XLVII.

Prisma simul, & Pyramidem idem corpus efficientia in partes datas tentando abscindere parallelo ductu ipsi basi.

Sit ACADHA prisma, & pyramis DHAFO æqualta, ipsiusque proteosis superficiebus AG, AF, BF operta, quę duo corpora, vtpote vnum conficientia parallelo ductu OQ hasi in partes datas sint secanda: Hoc quidem potest fieri; sed tentando ob diuersam proportionem, quam toti dicunt pyramidis frustum, & frustum prismatis; hoc enim dicit ad suum totum laterum proportionem duplicatam; Pyramis verò partialis ad totam triplicatam. Sit ergo data proportio M ad N, iuxta quam itacorpus totum ADBF sit ad suam partem ADOQ, vt M ad N constituendum.

Assumatur aliqua minor, quàm N, & sit T, interq; T, & M duæ mediæ interponantur V, & S, & videatur an S cum linea T; faciat quantitatem æqualem datæ quantitati N; si facit inuentum erit, quod quęritur ad sectionem efficiendam; at si non æqualis, accipiatur adhuc alia; vel minor, vel maior, prout deficere ab N, vel excrescere super N inuenta fuerit, donec sit S, & T, saltem proximè ipsi N æqualis. Fiat deinde ex prop. 15. l. 6. vt M ad V, sic AB ad AQ; vel DH æqualis ad LD, & per Q ducatur planum basi æquidistans, & detruncabitur ADQO corpus, cui erit in proportione totum ADBF, vt M ad N.



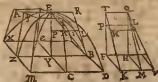
Modo ostendo corpus AF esse sectum iuxta proportionem datam. Nam prisma ADBCHE proportione duplicata lateris AB ad latus AQ respicit prisma AQOLX; sed M ad S est proportio duplicata M ad V, & M ad V est eadem ex effectione proportionis lateris AB ad AQ. Ergo prisma ADBHC, habet eam proportionem ad prisma ADQLX, quam M ad S.

Deinde pyramis DHGFE obtinet proportionem triplicatam lateris HD ad latus LD ad pyramidem DLXD; sed M ad T obtinet proportionem triplicatam DH ad DL eandem, quæ AB ad AQ: Ergo pyramis DHOFE ad pyramidem LODX obtinet proportionem M lineæ ad T. Quadere si coniunguntur simul ex 19. prop. Tract. 17. prisma totum, & pyramis totalis DHF, & fiat totū ADSF, habebūt ad alterā ex partibus factiaV.g. prisma partiale ALXDQ eandem proportionem, & conuertendo ALXDQ ad ABDS prisma, & DEO pyramidem eandem proportionem, quam dicebat priùs ad illas separatas quantitates: Quare cum iam ADFBCG sit quid totum ad illud DQALX prisma, & OLO pyramidem partiales quātitates vnitas dicent eandem proportionem ex prop. 19. Tract. 17. quam priùs disiunctę dicebant se. eam, quam M ad S ad T; icilicet eam, quæ M ad N, quę æquat quantitates S, & T simul sumptas.

THEOR. III. PROPOS. XLVIII.

A conoide Hyperbolico partem abscindere experiendo iuxta proportionem datam.

Adhibeatur fig. prop. 56. præc. Tract. Dictum enim est, prisma KQ, & pyramidem PHQ æquari quartę parti quadriformis conoidis hyperbolici, & singulas partes prismatis, & pyramidis equesitas singulis partibus æquali S conoidis hyperbolici per plani basi parallelo ductu abscissas. Si ergo ad eandem altitudinem EP, & TP abscinda-



tur

tur portio FFB à conoide hyperbolico æquabitur parti prismatis,& pyramidis æqualis. Æqualium verò est eadem proportio. Quadere ita erit QTFV constans pyramide, prismateq; constans ad partem suam NTL prismate minori pariter constans,atque pyramide, idest in proportione duplicata quoad prisma,triplicataque quoad pyramidem lateris FT, vel YS æqualia altitudo ad TF, vel BP æqualia segmenta altitudinum, ac conoides hyperbolicum BSY ad sui partem FIB. Quare diuisa altitudine YS iuxta præc. in P dabit eodem modo partem in data proportione. Cumq; eadem proportio existat vniuspartis ad vnam,quam quatuor ad quatuor patet,& totum conoidem,extenso plano eodem pacto secari, cuius quarta pars tali modo secatur.

COROLLARIVM.

*IDem antè asserea de Conoide hyperbolico circulari ex propos. enim 33.Tract.34. æquatur frusto coni, cui demptus fuerit cylindrus æqualtus, & singulæ eius conoidis partes singulis partibus huius frusti per planum basi parallelũ in æquali eleuatione abscissis: Frustum verò tale conicum æquatur frusto pyramidum, prismatumque ex contex. prop.13.Tract.34.p.t. æqualem basim, & æqualem eleuationem obtinentium, ac frustum cont cylindro vacui,& singulæ illius partes æqueales singulis partibus illius similiter bases parallelas basi habentes, vt faciliter ab ea propositione deduci potest, cum probauerimus in ea omnes bases basi parallelas in frusto pyramidis circulo coni ad eandem eleuationem secanti æquari: Quadere eadem praxi vtemur, cum etiam in conoide hyperbolico circulari partes æquentur partibus frusti pyramidum, prismatumque, ac in quadriformi: sufficit inuisse.

PROBL. VII. PROPOS. XLIX.

A Conoide hyperbolico, seu parabolico, seu sphæroide imperatam partem auferre à dato puncto alteri in eodem corpore æqualem.

*SIt DGFE frustum conoidis parabolici,vel hyperbolici, seu etiam sphæroidis FOOXC. Sitque detruncandum à dato puncto B, aliud frustum huic æquale.

Secetur conoides, seu sphæroides plano BD, quod datum punctum x connectat cum extremo diametri ellipsis secantis DGF,& ducatur planũ per centrum L ellipsis DGF; quod sit SGHA parallelũ ipsi plano DS. Agaturque aliud planum CF huic pariter parallelum per aliud diametri extremum F, eruntque tria plana æquali interuallo dissita, cùm sint æqualia DL,& LF,vtpote semiaxes. Deinde ducatur per punctum S, & per axem OY planum FDOBC, quod exprimet sectionem ex generatione, & huic plano per punctum S, & C, vbi se secat cum plano DS, & FC in punctis B, & C in superficie conoidis ducatur planum BHC plano FDOBC normale. Nam hoc erit Ellipsis ex prop.10. 14.18. Tract.25. in quocumque corpore ex sectionibus conicis deducto, & exhibebit BHCA æquale segmento DGFE.

Probatur Progr. 1. Quoniam in segmento CABB, si quæcumque ducantur plana parallela basi similes ellipses sunt, ac ipsa basis ex 11. 15. & Cor. prop. 18. Tract. 25. Secundò segmenta hæc FGXD, & CHAB bases consequuntur altitudinibus reciprocè proportionales. Ergo hic [illegible] prop.29. part.2. Tract. præced. 34. & [illegible] hæc segmenta erunt æqualia. Quod autem in istis segmentis altitudinibus reciprocè proportionales, sic ostenditur.

Triangulum BAC, & DEF, quæ inscribuntur in segmentis sunt æqualia. Ergo, bases obtinebunt altitudinibus reciprocè proportionales, vt postea ostendam. Altitudo autem AT ad altitudinem VA (normales sc. super FO, ac bases ab A,& E cadentes,)est vt basis LD ad basim IA; sed basis LD ad basim IA planorum triangulorum OFE,& BAC est, vt basis DOF segmentorum solidorum ad basim ABC, vt dicam; Ergo hæc segmenta obtinent bases DHF ad BHC, vt altitudo AT ad altitudinem BV reciprocè. Quare segmenta DEFG, & BACH solida habentia omnes bases axi parallelas similes erunt æqualia ex præc. prop.39. Tract 34.

Prog. 2. Duo itaque remanent ostendenda triangula æqualia obtinere bases altitudinibus reciprocè proportionales, & quod sit basis LD linea ad lineam AI, vt basis plana DOF ad basim planam BHC.

Probatur illud quod est primo propositum de triangulis.

Sint triangula in figura seorsim exhibita MON, & ORY æqualis altitudinis, vtpote inter parallelas TN, & YM, & basis OY, & OM, ideo inuicem æqualia ex pr.40.l.1.Cor. Ducantur parallelæ TY,& OP vni laterum OR, & alteri MK. Parallelogramma TRYO, & PONM sunt dupla triangulorum suorum super quorum bases sunt YOR, & OMN, & ideo inuicem æqualia: Productis deinde OR in X, & MN in a, & ductis normalibus TX,YF, necnon, & alio triangulo Pa, & Oa erunt rectangulũ TYSF æquale parallelogrammo YTRO,& PXOa parallelogrammo PNOM ex prop.40.lib.1. cùm sint inter easdem parallelas TY, & XO, vel PO, MK, & super eandem basim TY, & PO. Quia ergo hæc rectangula TXYF, & POLB obtinent angulos rectos, & ideo æquates,& sunt inuicè æqualia,cum sint æqualia æqualibus parallelogrammis ex 10. lib.6. propter hoc habebunt latera reciprocè proportionalia. Ideoque TY erit ad PO, vt OX ad FY, sed hæc latera PO,& TI æquant RO,& NM ex prop 33.l.1.bases,& altitudines triangulorum RYO, & NOM sunt YS,& OS, ergo reciprocabuntur, & erit TY, vel RO basis ad PO,vel NM basim,vt altitudo OX huius ad altitudinem YF alterius.

Progress. 3. Remanet deinde ostendendum, bases nempe Ellipses OOV, & BHC dicere eandem proportionem, quam DL lineæ basis trianguli ad basim

basim ss alterius; Ex pr.21.32 43.Tr.30. ostensę sunt æquales AI, & LE, & ex pr.10.14.18.tr.25. planum SGHA trãsiens per axẽ BA ostensum est ellipsis: Quare ex 6. tr.24. erit rectangulum AI, & IS ad rectangulum AL, & LS; vt quadratum HI ad quadratũ LG, quia sc. in ellipsi AHGS reperiuntur, quę transit per axem BA, & facit in ellipsibus normalibus sibi sectiones LG, & HI ad superficiem conoidis, cuius sectio est; & ideo ad eius ambitum pertingentes.

Cum itaque rectangulum AI, & IS æquetur rectangulo AL, & LS ob æqualia latera AI ipsi LE, & AL ipsi IS. Etiam quadrata ex IH, & LG restabunt ęqualia. Quamobrem etiam latera HI, & LG erunt æqualia. Cum ergo sit ex prop.26.tract.30. ellipsis DGF ad ellipsim BHC, vt rectangulum ex BI, IH; ad rectangulũ LD, LG: rectangula verò ista sint eiusdem altitudinis IH, & LG ex ostẽsis, & ideo sint inuicem, vt DL linea ad AI lineam sequitur, vt etiam ellipsis DGF sit ad ellipsim BHC, vt linea DL ad lineã BI, quæ est eadem ob triangula BAI, & DEL æqualia reciprocè altitudinis TA ad altitudinem EV.

Ideoque segmenta conicorum corporum habentia bases altitudinibus reciprocè proportionales erunt æqualia.

EXPENSIO IV.

De corporum proportionali tranformatione.

MOdo de transformatione iuncta, cum augmento, vel diminutione corporum agendam est, & docere modũ quo aliquid dato corpori detrahatur, aut addatur, & tamen eadem figura maneat; sicut, & residuum quamcumq; figuram induat.

PROBL. I. PROPOS. L.

Ex maiori cubo detrahere minorem, residuumque cubum æqualem exhibere.

SVper basim NT maioris cubi VT extruatur parallelepipedum IT ex prop.14.h. cubo X minori æquale. Et ex latere cubi maioris abscindatur portio NH æqualis altitudini NI parallelepipedi constructi: perque punctum H ducatur planum HP, & erit residuum VP parallelepipedum, quod in cubum transformabitur ex prop.14.h.

Probatur operatio. Nam cum parallelepipedum NP, sit æquale parallelepipedo IT ob æqualem basim, & altitudinem; ex prop.40. h.Tract. A cubo TV detractus erit cubus exhibitus X mediante ablatione parallelepipedi NP. Vnde residuum redactum in cubum intentum pręstabit.

COROLLARIVM.

IDem valet de quacumque alia figura, si redigatur in parallelepipedum, & ei detrahatur parallelepipedum dato corpori æquale, vel quæ pars magis placuerit. Nam residuum iterum per ea, quę diximus in Expens. ant. in figuram propositam redactum, & in priorem formam restitutum exhibebit quamlibet figuram propositã diminutã.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Addere cubo alium cubum, ita quod cubus remaneat.

NOn aliter, hęc propos. operi consignabitur, ac antecedens. Extruatur itaque super basim NT cubi TV parallelepipedũ ęquale dato cubo X, & cubus erit adauctus quantitate cubi X, & redactus in parallelepipedum LV. Fiat itaque huic parallelepipedo cubus æqualis ex pr.14. h. & iam consequemur cubum duobus cubis æqualem cubo VT, & cubo X. Patet prop. ex pręc. ostensione.

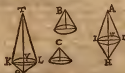
COROLLARIVM.

DEducitur quoque ex hac prop. quod si quodcumque corpus datum in cubum transformetur ex præcedenti expensione, & huic cubo quæcumque data quantitas addatur, & deinde iterum in pristinam figuram reformetur, corpus restitutum figura quidem priori potietur, at magnitudine auctiùs erit, & maiori mole constabit.

PROBL. III. PROP. LII.

Duos, aut plures conos rectos in vnicum conum reuocare. Vnicumque conum in plures conos distribuere.

SInt plures coni ADI, B, & C; qui debeant in vnicum componi. Redigatur ex 26.h. B ad eandẽ basim coni DAI, & sit DVI; componanturq; coni in Rhombum conicũ ADIH: deinde fiat conus LTK obtinens basim LYK compositorum DI, & altitudinem YT ipsorũ HA, & iste æquabitur ex 15. Tr.34. Rhombo DAIH. Deinde redigatur conus C ad eadem basim DVI, vel KYL, & vt iam fecimus, iterũ fiat Rhombus solidus LTKO. Postea conus æqualis altitudinis, & basis Rhombo LTKO extolletur, isteque conus tribus conis iam erit æqualis. Nam ex prop.15. æquat Rhombum LTKO; ille verò æquat parte quidem LOK conum C, parte verò LTK Rhombum DAIH; nempe DAI, & B.



Contrario verò modo fiet si de ablatione agatur. Nam conus V. g. LTK in duos conos reuocabitur, faciendo conum B, qui auferendus est æqualis basis basi LK coni LTK, & altitudo quę V.g. erit VH auferatur ab altitudine YT, & relinquetur VA, fiat itaque conus DAI altitudinis VA, & basis LK, idest æqualis DI, & erit conus DAI residuus à cono LTK ablato cono B.

COROLLARIVM.

EAdem verò, quæ fiunt de conis possunt fieri de pyramidibus rectis, & quia licet prop.15. Tract.34. non loquatur de pyramidibus; ratio tamen potest ad illas extendi, eadem enim prorsùs est, & efficaciter eodem pacto conuincit. Si verò

verò

rò dentur pyramides, vel coni non recti ad rectos redigentur æquales, ſi fiant eiuſdem altitudinis ex prop. 4. Tract. 34. p. 2.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Cylindro, vel parallelepipedo, vel priſmati cylindros parallelepipeda, vel priſmata minora addere, vel auferre.

AD iſtam propoſ. operi demandandam ſufficit redigere parallelepipedum X, vel cylindrū, qui auferendus eſt, vel addendus ad eandem baſim NT ex prop. 25. b. & deinde, vel alteri PV, cui facienda eſt additio coniungere IN, vel auferre NH æqualem altitudinem inuenti cylindri altitudini ab eo cylindro, vel parallelepipedo, cui auferendum eſt, vel addendum, & VOIL erit totum ex additione reſultans ſi facta eſt additio, quod ſi facta fuerit ſubductio, HVOP eſt reſiduū parallelepipedum ex VNTO deducto parallelepipedo HT æquali dato X.

PROBL. V. PROPOS. LIV.

Plures ſphæras in vnam ſphæram colligere, vel vnicam in plures diuidere. Idem quoque præſtare de ſphæroide, deque conoide elliptico, ſeu parabolico.

CVm oſtenderimus ſuprà, quibus conis iſta corpora æquentur: de ſphæra quidem pr. 43. de ſphæroide pr. 36. de conoide parabolico pr. 34. Tract 34. Si exhibitum quodlibet ex iſtis corporibus ſphæricis, vel conoidalibus in conos æquales redigamus, ſicut, & corpora ſphærica, vel conoidalia, quę auferēda ſunt, vel addenda, & ex pr. 52. h. eunico corpori, cui facienda eſt additio, addamus alios conos æquales illis corporibus, quæ addenda ſunt, & deinde conum ſic adauctum in ſphæram, vel ſphęroidem, vel conoidem, prout petiùs reſtituamus; habebimus intentum. Et idem de ablatione præſtandum erit.

COROLLARIVM.

HInc facilè addiſces etiā alia adaugere, etiam ſi, & intus excauata ſint; dummodo aliqua regularitate potiantur, vt ea de quibus ſupra egimus. Nam aut ad conos, aut ad pyramides, ſeu priſmata redigere poterimus, & ex prop. 5 a. b. ita augere, vel minuere, & poſtea in primum ſtatum reſtituere.

THEOR. I. PROPOS. LV.

Omnia corpora ſimilia triplicatam habent laterum, ſeu diametrorum proportionem ſi-nt duplicatam baſium.

PRobatur. Nam omia corpora ſimilia cylindris ſimilibus, vel pyramidibus, vel priſmatibus inſcribi poſſunt, quæ triplicatam laterum proportionem dicunt ex propoſitionibus paſſim ris, vt pr. 9 tr. 34 p. 1. & 17. & 23 & ex prop. 9. h. & etiam ex 1. Expenſ. vbi corpora multa ſi deſcripſimus, ſimiles baſes deſcribend ſu quas cylindracea ſimilia erigi poſſint. Ergo ipſa corpora quæcomque ex deſcriptis tri obtinebunt laterum, vel diametrorum, vel vel ambituum proportionem. & eodem probabitur, quod duplicatam baſium con tur proportionem.

COROLLARIVM

* EX præc. colligitur ſphæroidem, e demque hyperbolicum, & parabo tàm baſis circularia, quàm ellipticæ, tum quadratæ, ſeu rectangulæ dūmodo ſint ſimi pora eſſe in triplicata ratione diametrorū, ne ob rationem vniuerſalem in propoſ. tactam etiam, quia omnia iſta genera corporum on ſcriptis, quæ eorum baſibus inixi erant, & eun dem diametrum pro diametro ſuæ baſis ob bant, & eandē altitudinē, eis oſtenſa ſunt æqu vt prop. 43. 34. 36. Tract. 34. Illa verò tripli diametrorum, ſeu altitudinum, cum ſint ſimi proportionem obtinent. Quare etiam corpora conoidalia, quæ eis ſunt æqualia. Idem debemus fateri de conis priſmaticis ſimilibus, quia coni eiuſdem altitudinis, & baſis ſeſquialter oſtenſus eſt: ſic de conis ellipticam baſim obtinentibus ſimilibus, cum ſint ęquales conis eandem altitudinem, & æqualem baſim obtinentibus. Vnde erunt in triplicata proportione altitudinum, vt coni ipſis æquales; & ita doctrinā, vel generalem, vel ſpecialem applicabis cuicumque corpori ſimili; quod ſit ad aliud ſimile in triplicata ratione laterum, aut ſaltem in duplicata baſium.

PROBL. VI. PROPOS. LVI.

* *Datum corpus eorum, quæ triplicatam laterum, vel axium, aut diametrorum, vel altitudinum proportionem obtinent iuxta datam proportionem linearum in aliud ſimile corpus augere.*

A——C——
B——D——

SIt datum aliquod corpus, cuius diameter, vel axis, vel latus, vel altitudo A, & debeat aliud corpus conſtitui, & detur linea B, & vt A ad B, ita ſit faciēdū corpus aliquod ſimile corpori ex A: Inter A, & B duæ mediæ proportionales proiciantur C, & D, vt ſint in continua proportione A ad C, & C ad D, & D ad B ex prop. 3. Tract. 15. & ex linea C fiat ex dictis ex Expenſione 1. corpus ſimile alteri dato &, ſimiliter poſitū vtendo illa eodem munere, quo fungitur linea A, & erit corpus ex linea C deſcriptum, vt A ad B.

Probatur. Nam A ad B triplicatam obtinet proportionem eius, quam conſequitur A ad C, ſed corpus erectum ſuper C ex præced. conſequitur proportionem triplicatam eius, qua reſpicit A lineam C. Ergo, vt A ad B, ſic corpus ex A deſcriptum ad corpus ſimile, & ſimiliter poſitum ex C deſcriptum.

PROBL.

PROBL. VII. PROPOS. LVII.

* *Datum corpus eorum, quæ duplicatam proportionem basium consequuntur, iuxta datam proportione basis ad basim adaugere*

Sit data basis A, & corpue super illam erectum, & superficies B: Sitque faciendum corpus aliud, q. sc habeat ad A corpus, vt A ad B. Ex pr. 33. tract. 29. Inter beses A, & a besis repetiatur media proportionelis C, & supet illem erigatur corpus simile, similiterque positum, ac corpus datum, & erit operi demandatam, qood pręcipitur.

Probatur. Quia corpora similia duplleetam habent basium proportionem ex prop. 55. h. sed basis A ad B est duplieare proportio elus, quæ est A ad C. Ergo vt basis A ad basim B, sic est corpus ex A ad corpus ex C ædificatum.

PROBL. VIII. PROPOS. LVIII.

* *Duobus datis corporibus tertium proportionale inuenire.*

Dentur duo corpora, quæ si non sint similia in similem figuram redigentur V. g. peralleleplpeda, vt docuimus: quorum diametri, vel aces, vel letera, vel altitudines sint A, & B, & duebus A, & B tertia propottionalis reperiatur C, & ille eodem munere fungetur, & constituat aliquod corpus pędictis simile, dico, quod duobus A, & B est tertium corpus proportionele C, quod si boc C alterins figuræ deffideretur per ee, quę diximus Expens. a. h. ad aliam figuram reuoceri poterit.

Probetur. Nem corpore similia sunt in triplicata ratione laterum suorum: Quare eum sit A ad B, vt B ad C ex effectione. Etiam erit triplicata proportio lateris A ad triplicatam rationem leteris B, vt triplicata ratio leteris B ad triplicetā rationem lateris C: Triplicatæ verò rationes, quæ continnè procedunt ex prop. 55. sunt corporum ex A, B, & C constructorum similium.

PROBL. IX. PROPOS. LIX.

* *Duobus datis corporibus corpus medium proportionale inuenire.*

Sit detum corpus ex A, & corpus ex B, quorum latera, vel exes, vel diametri, vel altitudines sint A, & B, & inter ese media inueniatat D, & ex ea eodem munere fungeote fiat corpus, simila exhibitis duobus similibus; quod dico esse medium proportionale inter corpore exhibita.

Si verò corpore nou essent similia oportet ea redigere ed eendem similitudinem cōuertendo ambo data in parallelepipeds, sut aliam similē figurā.

Probetur eadem ratione. Nam corporum est tripliceta proportio laterum, eut axium, eut diametrorum, eut altitudinum, cumque sir A ad C vt C ad D, etiam triplicsta retio A ad C erit eadem, quæ triplicata ratio C ed D, quæ est ille artio, quem inuicem corpora consequuntur.

PROBL. X. PROPOS. LX.

* *Tribus corporibus datis quartum corpus proportionale reperire.*

Sit datum corpus A, & corpus B, & C, & oportest reperire corpus D, ita vt sit A ad B, vt C ad D. Reperiatur leteribus corporie A, & B, & C, vel exibus, aut altitudinibus, vel diametris; quarta proportionelis D, & super eam pro eodem officio deseruiente axis, aut lateris, & cęt. ædificetur corpus simile corpori C, & obtinebimus intentum.

Ratio est eadem præced. propos. & requiritur tantùm, vt diximus de superficiebus, quòd duo corpora A, & B sint inuicem similia licet dissimilla cum tertio C, quod tamen assimilabitur, tum lateribus, tum positione quarto reperiendo D.

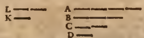
PROBL. XV. PROPOS. LXI.

* *Seriem continuam proportionalium corporum similium, & dissimilium inuenire iuxta datam proportionem.*

Sit dete proportio A ad D, & oporteat reperire continuam seriem corporum in ea proportione, quæ est A ad D. Inter A, & D duæ mediæ proportionelee interserantur B, & C, ita quod A, B, C, D sint continnè proportionales, & fiat continua progressio linearum A ed B iuxta dicta pr. 2. Tr. 15. superque illas lineas vtendo illis prout corpora cōstituēde reposcent, vel diametris, vel axibus, vel altitudinibus, vel lateribus corpore similie edificētur, & similiter posite, & assero illam seriem corporum obtinere proportionem continuam, quæ est A ad D.

Probatur. Corpus A ad corpus B proportionem obtinet triplicatā eius, quæ est A ad B: sed A ed D proportio est triplicata ipsius A ad B. Ergo, vt A ad D, sic est corpus A ad corpue B, sed corpus B ed corpue C obtinet proportionem triplicatem lateris B ad letus C; Letus verò B ad C est, vt A ed B: latus autem A ed D est triplicete eius proportionis, quam babet A ed D. Ergo etiam corpus B ad corpus C proportionem obtinet, quam A ad D, & sic de alijs.

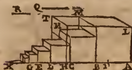
Quod, si libeat seriem à dato corpore incipere, cuius exis, seu latus, seu altitudo, vel diameter notus sit, repertis inter A, & D duabus proportionalibue B, & C fiat A ed B, sic latus V. g. L deti corporis, ad aliud, & reperiatur K: fiatque seriee continua linearum L ed K, super quas corpora similie construantur vtendo illis pro lateribus, pro vt ponitur linea primo corpori deseruiēe. Quod si requirantur corpora non similia quęcumque elegeris in alia corpore æqualle quidem; sed dissimilie poteris permutare, & sic obtinebis seriem proportionalium corporum continuam; sed dissimilem.



PROBL. XII. PROP. LXII.

Seriei corporum continua proportione procedentium corpus æquale inuenire, datis duobus lateribus corporum duorum primorum.

DEntur Latera, seu etiam axes, aut diametri, aut altitudines duorum *corporum primorum in serie illa, cui reperiendum sit corpus æquale, sintq; hæc latera AB, & BC. Reperiaturq; eis quarta proportionalis LB continua, vel ei æqualis BT, fiatque vt AI differentia ad AB; sic AS ad aliud, & reperietur HA. Extruatur igitur super AH parallelepipedum æqualis altitudinis primi termini, si primus terminus sit parallelepipedum, vel tale corpus, quod se habeat ad primum terminum, vt latus AH ipsius ad AB: hocque corpus erit seriei infinitorum terminorum æquale.



Probatur. Nam linea HA est æqualis, ex prop. 16. tract. 16. toti seriei basium Imparium procedentium in triplicata proportione AB ad BC; scilicet seriei procedentis in ea proportione, quæ est AB ad LB: & ideo singuli termini illius seriei procedentis in proportione AB ad BI, sunt vt solidum AM ad solidum BN; Quare series tota AX solidorum similium ad AM primum corpus est, vt series in ratione AB ad LB ad primum terminum AB cum singuli termini sint in eadem proportione, quare ex Coroll. 2. propos. 19. lib. 5. omnia vnius seriei erunt ad suum primum, vt omnia alterius ad suum primum; corpus verò AT ad corpus AM ex effectione est, vt latus AH ad latus AB; Latus verò AH ad latus AB est, vt series infinita linearum ad lineam AB, cum toti seriei in ratione AB ad LB sit æqualis linea ex effect. Ideoque erit in eadem proportione corpus AT ad corpus AM; qua infinita series corporum similium AX in ratione AB ad LB ad corpus AM; cum ergo AT corpus corpori AM, & infinita series corporum eidem corpori AM eãdem dicant proportionem AH lateris ad AB erunt inuicem æqualia ex prop. 9. l. 5. quod erat probandum.

PROBL. XIII. PROPOS. LXIII.

* *Datum corpus in infinitam seriem corporum distribuere, quod à dato corpore incipiat.*

SIt datum aliquod corpus, quod redigatur facilitatis gratia in cubum AM; & datum corpus, quod debet distribui maius illo, redigatur in parallelepipedum eiusdem altitudinis AT, eiusque basis sit etiam eiusdem altitudinis, ac basis CM ex propos. 35. h.

Deinde fiat, vt AH ad AB; sic AB ad aliud, & inueniatur AI; assumatur itaque differentia IB, [illegible] inter BI differentiã, & AB duę mediæ proportionales interponantur, quæ sint Q, R; & deinde [illegible] tuatur series continua proportionalium in [illegible] ne AB ad Q, quæ sit AX, & ex illis [illegible] centur corpora similia, & similiter posita, vt AM cubus & erit series cuborum æqualis parallelepipedo [illegible]

Probatur. Fecimus AH ad AB, vt AB [illegible] A Igitur differentia IB lineæ AB, ab AI erit secu[illegible] terminus alicuius seriei, cui sit æqualis AH [illegible] dem tunc est [illegible] AI differenti[illegible] cundi termini à primo AB, (si IB, vt secund[illegible] minus sumatur) ad primum terminum AB [illegible] ad AH: Quare ex 16. Tract 16. HA æqualis [illegible] lineas procedentes in proportione AB [illegible] in ratione AB ad BI, sic procedunt corpora [illegible] BN; quia scilicet corpus BN ædificatum ex Q [illegible] abet triplicatam proportionem lineæ Q ad AB, & [illegible] quam lineę IB ad AB. Quare omnes termin[illegible] rum ad primum suum terminum erunt, vt omnes termini corporum ad primum corpus ex Cor. 2. prop 19. lib. 5.

Quapropter etiam AH æqualis toti seriei linearum in ratione AB ad BI procedentiom erit [illegible] vt tota series corporum AM; BN ex Q, & cæt. ad corpus AM, vt autem AH ad AB; sic est AT corpus ex effectione ad AM, ergo erit corpus AT ad corpus AM, vt series corporum super AB, & Q, scilicet AM, BN, & cæt. ad idem corpus AM: Erunt ergo corpora æqualia AT, & infinita series corporum ædificatorum super AB, & Q, scilicet AM, & BN, & cæt. vsque ad X terminum.

EXPENSIO VLTIMA.

De corporum calculatione.

BReuiter nos ab hac tractatione expediemus, siquidem est potius Coroll. prædictorum, quam quod hic sit aliquid ostendendum: Calculare itaque aliquod corpus est corpore quodam notæ mensuræ illud comparare, & videre, quam proportionem numeris exprimibilem illi obtineat. Verùm, quia non omnia corpora corporibus se accommodant, vt mensura mensurato se accommodare debet; nisi solùm cubus, vel parallelepipedum cubo, vel parallelepipedo; aliæ verò soliditates etiam eiusdem rationis omnis spatia solidorum maiorum implere nequeunt, hinc est quod parallelepipedum, vel cubus ille sit, quibus corpora mensurari possunt. Vnde labor exortus omnis corpora in parallelepipeda, vel cubos conuertendi, vt mensuris subijciantur: Hincque est quod corpora omnia non in propria forma; sed in cubis, vel parallelepipedis, quibus æquiualent dimetiantur, & ijs rectangulis, vt facilior mensura sit.



PROBL.

PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Cubum, vel parallelepipedum numeris mensurare.

DVo latera basis cubi mensurentur, & sint V. g. alterum 25. vnciarum, alterum 33. & [illegible]nde mensuretur altitudo, & sit 40. Vnciarum. [illegible] itaque rectangula eam obtinent proportio[illegible] [illegible]uæ ea proportione laterum componitur ex [illegible]p. 22. lib 6. quadratum vnius vnciæ ad rectan[illegible]um habens latera alterum 25. alterum 33. vn[illegible]um erit composita ex proportione 1. ad 25. & 1 ad 33. Itaque adhibenda esset regula, quam [illegible]di[illegible]imus propos. 9. Tract. 9. part. 1. & mul[illegible] candum esset 1. per 1. & deinde 33. per 25. vt exiret proportio composita rectangu[illegible] [illegible]us vnciæ ad rectangulum [illegible]rum 25. & 33. vnciarum, [illegible]eu quia 1. facit 1. ideo remanet [illegible]a multiplicatio laterum 25. & 33. inuicem, quæ faciunt 825. vncias; ideoque proportio vnius quadrati vnius vnciæ est ad rectangulum datorum laterum 25. & 33. vt 1. ad 825. sed quia parallelepipeda sub eadem altitudine constituta sunt inuicem, vt bases ex 8. prop. Tract. 34. ideo cubus cuius altitudo est vncia, & basis vncia erit ad parallelepipedum, cuius item altitudo vncia est, sed basis 825. vt basis 1. reperta ad basim 825. super quam constitutum est, ideoque habebimus parallelepipedum constans 825. vnciarum. Verùm, quia parallelepipeda eiusdem basis sunt inuicem vt altitudines ex 20. propos. Tract. 34. ideo solidum vnius vnciæ altitudinis, sed basis rectangulæ 825. vnciarum est ad solidum eiusdem basis 825. vnciarum; sed 40. altitudinis, vt altitudo 1. ad 40. Igitur regula proportionum poterit quæri: si altitudo vnius vnciæ dat vncias 825. soliditatis, idest solidum constans vnciis 825, quid dabit altitudo 40. quærere oportebit multiplicare 825. per 40. vt prodeat solidum, cuius altitudo est vnciarum 40. & facta multiplicatione erit solidum vnciarum 33000. nec hic opus est primum diuidere: quia vnitas diuidens reddit eundem numerum.

1 1
25 33

PROBL. II. PROP. LXV.

Parallelepipeda obliqua quæcumque mensurare.

QVia parallelepipeda quæcumque basis quadrangulæ sunt ad inuicem, vt bases, si sint æqualis altitudinis, siue ea sint æqualium angulorum, siue inæqualium, siue bases sint similes, siue dissimiles, dummodo sint æquales capacitate r Capacitate verò illę bases ęquales sunt ex 36. lib 1. quæ habent latus æquale alteri, etiam si Rhombi, siue Rhomboidea, & altitudo eadem, hinc est, quod debeant latus mensurari, & normalis altitudo eadem super latus mensuratum. Multiplicata enim longitudo lateris eius, super quod cadit normalis illa, cum ipsa faciet ex præcedenti basim rectangulam æqualem basi datæ, etiamsi non rectangulæ, quia scilicet est eiusdem basis, & altitudinis, & quia quæcumque parallelepipeda æqualis basis, & altitudinis sunt æqualia ex prop. 4. 5. & 6. tract. 34. p. 1. ideo etiamsi parallelepipedum esset super basim obliquè constitutum erit æqualè alteri eiusdem basis, & altitudinis rectè cōstituto. & ideo huic rectangulo parallelepipedo. Detur itaque parallelepipedum, cuius basis sit Rhombus, & mensuretur vnum latus, & sit 13. vnciarum, deinde altitudo basis, nempe normalis, quæ super latus mensuratum cadit, & erit 22. vnciarum, & simul multiplicentur, & basis ei erit 285. Postea altitudo ipsius parallelepipedi obliqui scilicet linea, quæ super Rhombum basis normaliter cadat, & sit 12. & simul cum basi multiplicetur eodem modo hac esset parallelepipedum rectum dabit 3452. eritque parallelepipedum æquale parallelepipedo obliquo.

PROBL. III. PROPOS. LXVI.

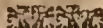
Prisma triangularis basis mensuris numericis subijcere.

PRisma triangularis basis, seu rectum, seu obliquum, est dimidium parallelepipedi ex prop. 2. Tract. 34. p. 1. eiusdem altitudinis, ideoque mensurata altitudine trianguli basis 11. vnciarum, & latere, super quod normalis cadit 14. vnciarum fiet rectangulum ex 18. & 19. tract. 19 duplum trianguli basis vnciarum 154. quod multiplicatum in altitudinē 7. vnciarum faciet parallelepipedum rectum vnciarum 1078. duplum prismatis, sicut ipsa basis est eius dupla, quod erit æquale cuicumque obliquo prismati æqualis altitudinis, & basis, & ideo duplo cuiuscumque prismatis eiusdem basis item, & altitudinis. Vnde dimidium 539. vnciarum solidum erit æquale exhibito prismati, potest etiam assumi basis 77. nempe non basis dupla: sed æqualis basi prismatis, nam multiplicata per altitudinem id præstabit.

PROBL. IV. PROPOS. LXVII.

Prisma polygonæ basis numeris dimetiri.

CVm prisma polygonæ basis sit ad prisma triangularis, vt basis ad basim ex prop. 19. Tract. 34. quod intelligitur si sit eiusdem altitudinis. Ideo, si diuidatur basis polygona in sua triangula, vt propos. 20. & 21. Tract. 19. docuimus, & numerus basis triangularis ducatur per altitudinem prismatis consequemur prisma triangulare ex propos. 66. h. vt ergo basis triangularis ad polygonam basim, sic erit prisma triangulare ad prisma polygonum ex propos. 19. Tract. 34. part. 1. Si ergo basis triangularis sit 15. & altitudo sit 4. prisma triangulare erit 60. Sit verò nota ex propos. 20. cit. basis polygona 45. partium, & adhibeatur regula aurea dicendo; si 15. dant 45. quid 60. & dabit 180. prisma polygonum: Quod, & obtinebimus multiplicando totam basim in vnum collectam per altitudinem.



PROBL.

PROBL. V. PROPOS. LXVIII.

Pyramidem, vel polygona, vel triangularis basis calculo subigere.

QVoniam omnis pyramis æqualis altitudinis scalena, & obliquè sita est æqualis rectę æqualis basis, & altitudinis ex 21. propos. Tract.34. part.1. & ex 22. omnis triangularis pyramis est tertia pars prismatis, quod est dimidium parallelepipedi rectanguli cuiuscumq; quę omnia cum pyramide sint eiusdem basis, & altitudinis; Ideo omnis pyramis, seu recta, seu scalena triangularis erit sexta pars parallelepipedi. Mensuretur itaque latus vnum pyramidis, & sit 15. vnciarum, & altitudo ipsius basis & sit 7. & fiat rectangulum numericum, vt prop.19. Tr. 29. multiplicando inuicem, vt fiant 105. pro basi rectangula; mensuretur postea normalis eleuatio ipsius, & sit 22. vnciarum, qui numerus multiplicetur cum basi, & fiat parallelepipedum 2310. cuius numeri sexta pars 385. est soliditas pyramidis. At si pyramis sit polygona, cum componatur ex Coroll. propos. 25. ex pyramidibus triangularibus in sua triangula dispertita basis, & mensurata, vt supra, dabit soliditatem singularum pyramidum, quæ simul aggregatæ pyramidem totalem constituent.

PROB. VI. PROPOS. LXVI.

Frusto pyramidis numericas mensuras adhibere, si tamen constet basibus parallelis.

QVoniam frustum pyramidis cuius basis quadrata ex propos.25. part.1. Tract.34. ęquatur parallelepipedo, cuius latera sint superioris frusti basis latera, & semidifferentia homologorum laterũ, cum triente parallelepipedi ex semidifferẽtijs, & omnia eiusdem altitudinis. Hoc autem est (quodcumque illud sit) ęquale parallelepipedo rectangulo eiusdem basis, & altitudinis: Hinc est, quod debeat mensurari latus 16. vnciarum supremæ basis, & altitudo 18. eius; sicut latus infimum homologum 28. & altitudo eiusdẽ basis 26. subducatur postea altitudo 18. ab altitudine 26 & restabunt 8. cuius medietas 4. deinde latus 16. à latere 28. & restabunt 12. cuius medietas 6. & altitudo ipsa frusti pyramidis sit 33.

Coniungatur differentia altitudinum 4. ipsarum basium cum minori altitudine, & sit 22. & differentis laterum 6. cum minori latere 16. & sit item 22. qui multiplicentur inuicem, & fiant 484. pro basi parallelepipedi, qui numerus multiplicatus in altitudinẽ 33. dabit 15972. Deinde semidifferentiæ 4. & 6. inuicem multiplicentur, & fiunt 24. deinde per altitudinem 33. & fient 792. solidum rectangulum semidifferentiarum; cuius triens est 264. quod triens coniunctum cum numero 15972. dat 16236. Parallelepipedum ex lateribus minoribus cum semidifferentijs, & triens parallelepipedi semidifferentiarũ, qu[illegible] æquant frustum pyramidis. Quod si sit [illegible] tetragulare accipies ex Coroll. propos. 25. [illegible] dicti numeri dimidium. Quod si sit mult[illegible] diuides bases in frusta sua triangularia & [illegible] culabis, vt supra.

PROBL. VII. PROPOS. LXV[illegible]

Cylindrum, & Conum acutum, vel p[illegible] maticum, rectum, seu obliquum [illegible] super basim circularem, seu E[illegible] seu Parabolicam, seu super quamc[illegible] eorum partem, aut quamcumque [illegible] surabilem figuram mensurare.

EX Coroll. propos.3. constat cylindru[illegible] se ęqualem prismati eiusdem basis, & [illegible] tudinis, itaque circulum basis in rectangu[illegible] rediges ex 5. vel 7. vel ex 9 propos. tract 30. [illegible] super illud rectangulum parallelepipedum eiu[illegible] dem basis; & altitudinis constitues V. g. sit notus diameter circuli 15. vnciarum, quoniam ex prop. 41. lib.6. Euclid. omnes circuli sunt in eadem proportione, ac radij, ideo dicatur si 7. dant 22. circumferentiæ in aliquo circulo ex 5. Tract.18. quid 15. in hoc circulo, & exiet numerus 47. & $\frac{1}{7}$ Multiplicabimus itaque hos numeros simul, & ex prop.5. Tract.30. efficietur rectangulum quadruplum areæ circuli 707. $\frac{2}{7}$ eius igitur quarta pars erit 176. $\frac{2}{7}\frac{2}{8}$ areę circuli æquale rectangulum, quod ductum in altitudinem cylindri 29. V. g. vnciarum expromet numerum soliditatis cylindri 5126. $\frac{2}{7}\frac{2}{8}$ hoc autem intelligitur, seu rectus sit cylindrus, seu scalenus, quia sunt æquales dummodo sit eadem basis, & altitudo ex prop.4. tr.34.

At quia conus omnis, seu rectus, seu scalenus in punctum desinens est tertia pars cylindri ex propos. 7. Tract.34. ideo si detur conus, qui pro diametro obtineat 15. vncias. & pro altitudine 29. cylindri eius tripli soliditas erit 5126. $\frac{2}{7}\frac{2}{8}$ assignata vnciarum cubarum, cuius tertia pars conum præstabit 1708. $\frac{7}{8}\frac{8}{9}$.

At quia conus prismaticus ex prop.27. part.2. Tract. 34. est $\frac{1}{2}$ coni acuti, ideo si detur talis conus, cuius diameter sit 15. vnciarum, & altitudo 29. eius soliditas erit maior numero 854. $\frac{1}{7}\frac{2}{4}$ eiusdem 1708. $\frac{7}{8}\frac{8}{9}$ numeri medietate, nempe 2563. $\frac{1}{2}\frac{3}{4}$.

At si cylindrus sit ellipticus, & maior diameter illius ellipsis, quæ basim substernit cylindro, sit 15. minor 12. tunc ellipsis ad rectangulum redigetur, & quia ex prop. 24. Tract.30. est circulus maiori axe descriptus ad planum ellipticum, vt axis maior ad minorem dices regula aurea; si 15. axis dat 12. axem, quid Area circuli 176 $\frac{2}{7}\frac{1}{2}$, & offert 141. $\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{8}{9}$, idest $\frac{1}{7}$, sed quia omne corpus cylindraceum, vt est cylindrus ellipticus est ad aliud, vt altitudo ad altitudinem si habeant bases æquales, licet non similes. Ergo cylindrus, cuius basis erit 141. $\frac{1}{7}$. ellipsis ad cylindrum eiusdem basis, & altitudinis vnciarum 29. erit æqualis.

Quare si multiplicemus in altitudinem 29. vnciarum prędictum numerum 141 $\frac{1}{7}$, & dabit soliditatem

soliditatem cylindri elliptici 4110. $\frac{1}{7}$. Quod si ... tur coous ellipticus, iste ex prop.27. Tract.34. ... t.2. æquabitur circulari eiusdem basis, & altitu... iois, at circularis eiusdem basis, & altitodinis æq... tur tertiæ parti cylindri eiusdem basis,& ele... onia. Quare erit tertia pars soliditatis inueo... dricæ coous ellipticus, nempe 1367. $\frac{2}{7}$.

... m, & æquo pacto concludit de cylindris ... corporibus quamcumque basim habentibus, quo... um multiplicata planities basis cognitæ in al... d item normalem soliditaté præstabit: Quade... si aliquis cylindrus, qui obtineat basim para... bolam cuius area prop.33. tract.30. ad triangu... , & ideo ad rectangulum reducatur, vel quæcū... eius cognitæ partes ex eadem prop. 36. sicut ... ctionca ellipsium, quæ cognosci possunt ex 38. aut etiam circulorum, quæ iodagantur ex 4. tract.30. quæ si substarnaot pro basibus alicuius corporis cylindracei ex Corol. propos.4. & 24. ... ct.34 eodem modo mensurabitur, & eius ... tas nota euadet.

PROBL. VIII. PROPOS. LXIX.

Frusta Conorum quorumcunque numeris subigere.

PRimo mensurabitur eodem modo, qoo frustum pyramidis, vt coni circularis frosti soliditas iouenietur ex 13. Tract 34. part.2. Verùm pro iste-tibus duobus maioribus adhibetur radius, & peripheria basis maioris inferioris, & pro minoribus basis superioris, & minoris radius, item, & peripheria, quibus vnita semidifferentia diametrorum, & peripheriarū maioris basis à minori cōstituit duo latera prismatis æqualei frusto conico æquali cum triente prismatis, cui semidifferentiæ eędem constituunt latera basis triangularis.

Secundò vniuersaliter. Duo coni ad calculum redigentur, vt præ.prop. quorum conus sit situs super basim frusti maiorē alius situs super basim frusti minorem, & inoenta eorum soliditate minor à maiore eximetur, & restabit cognitum frustom, quodcumque: qui modus poterit adhiberi, eum bases non suot parallelæ.

Tertio, quia ex prop 7.b.coni basibus parallelis diuidnntur in conos similes, qui ex pr.55.h. sunt in triplicata mutuā ratione, seu diametrorū, seu altitudinum: hinc est, quod si coni, cuius segmentum quæritur, constet diametro basis maioris, & minoris poterit triplicari eorum proportio, & ex nota soliditate minoris per regulam aurcam cognoscere soliditatem maioris. Sit ergo pręcedens conus, cuius basis diameter est 15 & coous prolongatus intelligatur, ita quod basis illius ita prolongati sit 30. triplicetur hæc proportio 15. ad 30. dabit soliditatem maioris coni. Triplicetur itaque dicendo si 15. dant 30. quid 30. & dabunt 60. iterumque dicca si 30. dant 60. quid 60. & dabunt 120. & erit 15 ad 120. triplicata propor. tio 15. ad 30 Quà acquisita dices si 15 dant 120, quid dabit soliditas minoris cooi 1708 $\frac{7}{8}\frac{2}{6}$, & exhibebit soliditatem maioris 13671. $\frac{1}{7}\frac{0}{2}\frac{0}{6}\frac{0}{0}$ idest $\frac{3}{5}\frac{4}{7}$, à qua soliditate deducta minor soliditas minoris coni versùs acumen 1708 $\frac{4}{8}\frac{4}{7}$ dabit frustum conicum 11962 $\frac{4}{2}\frac{0}{7}$.

Hic verò secundus, & tertius modus poterit adhiberi etiam quacumque pyramide, secundo quidem sit secta planis non parallelis, tertiò si planis parallelis sit secta.

PROBL. IX. PROPOS. LXXII.

Rhombum conicum mensura numerica depromere, & residuum frusti coni, vel Rhombi ablato cono inuerso.

QVoniam soliditas Rhombi conici æquatur cono illi, qui habeat altitudinem coooum compositorum altitudini æqualem, & basem basi compositorum eorundem ex 15. tract. 34. sufficiet hunc conum computare, vt supra.

Quod si à coni aliquo frosto intelligatur ablatus couus inuentus adhuc hoc residuum calculabimus ex prop.17. tract.34. Sit V. g. conus, cuius trianguli per axem latus sit 25. vnciarum; basis verò supremæ radius 12. alter infimæ, & maioris 20. latus frusti conici sit 15. primo reperienda est cooi superficies ex 32. tract.31. sic

Addantur simul 12.& 20. & fiant 32. deinde inter 32. & 15. reperiatur oumerus medios proportionalis ex 21. tract 13. part.2. & erit proxime 22. & hic erit radius: hoc itaque numero 22. tamquam diametro exquiratur peripheria circuli ex 5. tract. 30. diceodo si diametri 7. dant 22. peripheriæ in aliqoo circolo, quid 44. diametri, & inuenietur peripheria 134. $\frac{6}{7}$, deinde multiplicabimus 44. & 134. $\frac{6}{7}$ simul, & postea producti accipiemus quartam partem, aut dimidiam peripheriā 74. $\frac{1}{7}$, & radiom 22. inuicem multiplicabimus, & erit area 1631. $\frac{3}{7}$ frusti conici ex 32. tract.31. Mensurata autem normali à centro maioris basis cadeote in superficiem coni iuxta dicta pr.13.b. & vt exposcit pr.32. cir. sit 9 $\frac{2}{7}$.

Itaque calculetur conus, cuius altitudo sit 9 $\frac{2}{7}$, & basis 1631 $\frac{3}{7}$, & erit ea soliditas frusti coni ablato cono inuerso, idest super basem eius minorem constituto.

Eodem modo exquiretur soliditas frusti Rhombi ablato Rhombo, quod corpus figura expressimus 18. tract.34 part.2. Quæ constat ex frusto coni, & ex cono super maiorem basim constituto, deducto cooo super minorem basim. Nam inuenietur superficiei frusti conici circulus æqualis, & coous eiusdem basis, ac altitudinis normalis à vertice coni in superficiem oppositam productam cadente.



PROBL.

PROBL. X. PROPOS. LXXIII.

Annuli plani soliditatem numeris exprimere.

SIt quidam annulus quadrata mola in gyrum se flectente constans, quem exibuimus prop. 19. tract. 24. part. 2. & circuli maioris diameter notus sit 15. vnciarum, minoris vero 5. Ita quod eius annuli plani latitudo sit 10. vnciarum, & circumferentia ferè 31. $\frac{3}{7}$ ex prop. itaque 18. tr, 30. multiplicatis istis numeris 10. & 31. $\frac{3}{7}$ simul productū erit rectāgulū æquale plano annulo 315. Exhibeatur verò altitudo normalis Annuli, quę sit V. g. 11. vnc, qui multiplicatus in 315. exhibebit soliditatē annuli 3465. Quod si sit rotūdus, vel cuiuscūqz datæ figuræ; sed eius sectio exhibeat circulum, aut aliquod polygonum regulare; reperto circulo medio inter maiorem, & minorem circulum secundùm quos curuatur, prædicto modo, qui sit vnc. 63. deinde sectionis illius reperietur superficies, cuius diameter notus est 10. partium, & ideo peripheria 31. vnciarum, & $\frac{3}{7}$, & hic ipse circuli discus vnciarum 78. $\frac{4}{7}$. Si ergo per prædicti circuli 63. ambitum multiplicetur hæc superficies ex prop. illa 20. Tract. 34. part. 2. constabit soliditas annuli rotundi Vnciis cubis 4952.

Quod autem dicitur de circulo ex ea 20. Tract. 34 part 2. valet de quocumque annulo lygono dummodo eius sectionis area conste 5. vel 20. prop. Tract. 29. perscrutari potest: figuræ regularis.

THEOR. I. PROPOS. LXXIV

Omnia corpora, quæ conos, vel pyrami vel parallelepipeda æqualia, vel cy dros obtinent, calculationi subiicere

QVia supra diuersis propositionibus 34. multa corpora cubauimus sed ea, aut ad cylindros, aut parallelepipeda, ramides, aut conos, vel omnino solidos vel quo alio corpore vacuatos ex prædictis, ideo ciet hic monuisse ea corpora mensurare, & numeris supponere calculando corpora illis æqua Consideretur itaque quænam corpora illis sint æqualia, & ea numeris tractentur, & simul corpo quibus æquantur, mensurata erunt.

Gratias, Gratias Deo, & B. V. & cæt. infinitas, immensas: hic quies.

AMICE LECTOR,

Errores aliqui, qui in characteribus figurarum indicibus occurerunt ex imprimentium fatalitate hic notantur, quos benigniùs corriges.

TRACTATV III.

Mendum	*correctio.*
DEf. 10. BCA.	CBA

TRACT. IV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 5. l. pen.	BC
Pr 14. l. 10. DFA.	BAF
P. 29. l. 19. AD.	AB
P. 28. l. 29. DH.	GH

TRACT. VI.

Mendum	*correctio.*
P. 12. l. 3. AOB.	AD
P. 28. l. 39. BAD.	ABD

TRACT. IX. *Pars. 2.*

Mendum	*correctio.*
P. 4. l. 53. N	K
P. 16. l. 51. L.	G
Cor. 2. p. 21. l. 6. AB	AC

TRACT. X.

Mendum	*correctio.*
Pr. 4. C. l. 2. AF.	AP
P. 5. l. 3. DE	DH
P. 10. l. 7. DO.	DB
P. 19. l. 5. C	B
P. 31. l. 35. AB.	YB

TRACT. XII.

Mendum	*correctio.*
Pr. 2. l. 8 E	C
14 l. 10. A	AB
25. l. 33. EL.	BL
33. l. 68. IH.	IK

TRACT. XV.

Mendum	*correctio.*
P. 4. vbiq; PT ad OP.	OP ad TP
l. 34. IP ad NO.	NO ad IP
25. l. 51. OCI.	EFI

TRACT. XVI. *Pars. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 5. l. 8. HE	HF
7. l. 4. D ad H.	H ad D
7. l. 5. E ad I.	I ad E
Pars. 2.	
Pr. 2. l. 40. OE.	OR
l. 45. BH.	vt BH
Pr. 5. l. 5. EF.	BF
l. 13. TZ.	TQ
l. 16. ED.	EB
Pr. 7. l. 32. EH.	FH
l. 25. CA.	CE

TRACT. XVIII.

Mendum	*correctio.*
P. 15. l. pen. AER.	R
27. l. 18. TS	TI
19. l. 53. PL.	FL
C. 2. l. 17. XI.	XY

TRACT. XIX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 33. l. vlt. BL.	BF

TRACT. XX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 7. l. 15. AF	AB
13. l. 2. ABIG.	ABI
9 l. 16. & 17. AF.	AE

TR. XXII.

Mendum	*correctio.*
Pr. l. 5. EF.	BF
13. l. 8. PL.	PR
17. l. 7. LM.	M

TR. XXIII. *Pars. 2.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 15. l. 2. BE.	BX
ZI.	ZX
Pr. 24. l. 26. DF.	DE
Pr. 25. l. 12. YL.	XY
& 63. BN.	BE
& C l. 4. AZ.	VZ
Pr. 29. l. 19. VBE.	BVE
& l. 30 in arcu.	in D arcua
Pars: 3.	
Pr. 32. l. 7. F	E
Pr. 36. l. penul. DC.	BC

TR. XXIV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 8. l. 40. CX.	HX
Pr. 10 l. vlt. PF.	BF
P. 13. l. 18. NM.	NT
Pr. 23. l. 42. CFH.	GFH
Pr. 54. l. 5. CD.	CA

TR. XXV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 2. l. 22. XQZ.	XTZ
Pr. 10. l. vlt. DIS.	OIS
P. 16. l. 19. A.	EA
Pr. 19. l. 20. V.	VF

TR. XXVI. *P. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 12. l. 61. DB.	DE
Pars 2.	
P. 7 l. 2. AG.	dele
P. 8. l. 31. VC.	CL

TR. XXVII. *P. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 21. l. 4. OP.	RP
OM.	MR
Pr. 15. l. 9. G 53.	G 153
Pars. 2.	
Pr. 16. l. 17. IV.	IO
Pr. 22. l. 4. AE.	AB
Pr. 50. l. 6. QR.	GO
l. 51. E.	F
Pr. 80. l. 30. H.	K

TRACT. XXVIII.

Mendum	*correctio.*
Pr. 8. l. 11. LA.	LV
Pr 13. l. 41. DG.	BG
l. 57. T.	t

TR. XXIX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 12. l. 7. in L.	in I
Pr. 19. l. 1. AD.	VD
Pr. 24. l. 13. CV	DV
Pr. 24. l. 19. KL.	KM
P. 25. l. 31. P.	B
P. 28. l. 12. D.	B
Pr. 29. l. 6. K.	KI
l. 11. D	O
Pr 35. l. 24. & 26.	dele P
Pr. 49. l. 9. CE ad EF.	EF ad EI
P. 47. l. 31. CD.	GE

TR. XXX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 24. l. 30. CE.	PE
l. 36. CE.	PE
Pr. 26. l. 8. FD.	FB
Pr. 30. l. 6. BA.	BF
Pr. 60. l. 3. ALC.	adde I

TR. XXXI.

Mendum	*correctio.*
Pr. 14. l. 12. AIM.	AIN
Pr. 19 C. 3. l. 4. ITEX.	ItAX
Pr. 21. l. 20. XC.	NC
l. 21. MQS.	NQS

TR. XXXIII.

Mendum	*correctio.*
Pr. 2. l. 17. BAE.	BE

TR. XXXIV. *P. 1.*

Mendum	*correctio.*
Pr. 22. l. 12. GC.	GD
Pr. 23. l. 8. FDH.	FGH
Pr. 25. l. 8. NK.	MK
Pars. 2.	
Pr. 12. l. 22. DC.	DCB
Pr. 18. l. 9. RLt.	RST
l. 22. RLT.	RLT
Pr. 19. l. 2. NR.	TR
Pr. 21. l. 29. It.	IT
Pr. 52. C. 2. l. 9. DA.	CA
l. 10. CIH.	CH
P. 56. l. 22. KG.	IG
HT.	KT

TR. XXXV.

Mendum	*correctio.*
Pr. 27. l. 30. OV.	IV
& OI.	VI

VSVS TABVLÆ SEQVENTIS
SINVVM, TANGENTIVM, ET LOGARITHMORVM.



V M iam logarithmicas tabulas excerptas à Canone magno triangulorum seu tabula artificialium Henrici Brigij vulgauerit Cauallerius, placuit nobis ipsos Neperianos logarithmos varietatis gratia exhibere, qui ab ipso Nepero inuentore eorum conditi fuere cuius tabulæ vsus talis est.

Arcus, & angulus si quærendus sit, vel non excedet gradum 45. vel superabit; si non excedat quærendus est in prima columna sinistra reperiendo gradum in fronte, minuta descendendo per ipsam columnam. Si verò superent dati gradus & minuta Gr. 45. quærendi sunt gradus in calce nonæ columnæ & minuta ascendendo. Excipientur autem sinus correspondentes procedendo directè per eandem tesseram à sinistra ad dextram in secunda columna sinistra, si gradus minores quam 45. inueni fuerint, at si maiores in octaua columna procedendo per eandem tesseram à dextra in sinistram versùs medium areæ Logarithmi verò sinuum in tertia columna, & septima, Tangentes in quarta, & sexta, & logarithmi tangentium in media quintaque columna inuenientur, qui deseruient pro tangentibus graduum non excedentium gr. 45. descendendo, et verò ascendendo pro tangentibus graduum maiorum quam gradus 45. diuersimodè tamen. Nam descendendo si prout deseruiunt tangentibus sinistris, il[illegible]mur secundùm regulam V. g. si sit adhibēda subtractio, subtrahemus, si additio, addemus. At si deseruiant tangentibus dextris, & ascendendo reperta fuerint, cum subtrahendum est, tunc addemus, cum addendum est, subducemus, vt dixi exp. 6. tract. 38.

Sinus si cognoscamus, & velimus cognoscere angulum, vel arcum reperiemus eos in secunda, vel octaua columna & è regione in eadem tessera inueniemus arcum vel angulum correspondem; Logarithmos verò sinuum in tertia & septima; Tangentes in quarta, & sexta; Logarithmos verò tangentium in media.

Qui prout illis vtemur deseruient Gradibus minoribus gr. 45 & eorum tangentibus iuxta regulam adhibiti, contrà verò regulam diseruient tangentibus maioribus quam gr. 45. & gradibus correspondentibus.

Si verò quis cupiat Graduum minutorum, & etiam secundorum sinus, qui in tabulis non ponuntur per regulam auream intentum cōsequetur Nam reperto sinu arcus, & minutorum adhærentium, is subducatur à sinu proximè maiori, & obtinebitur differentia; Dices ergo regula trium: si secunda 60. dant v. g. secunda 20. quid differentia reperta? & inuenies differentiam secundis datis congruentem, quæ addetur sinui minori reperto, & fiet sinus arcus dati notus nedum quo ad gradus, & minuta, sed etiam quo ad secunda. v.g. detur arcus G 8. 32 S. 20 sinus erit G. 8 M. 32. P. 1483848 at proximè maior G 8. minut. 33. sinus 1486724. differentia est 2876. Dices itaque si 60. dant 20 quid 2876. differentia? & prodibit proportionalis congruens 958. quæ addita sinui minoris arcus 1483848. constituet sinum 1484806. G. 8 M 32. S 20. Eodemque modo logarithmi sinuum, tangentes, logarithmosq; ipsarum vsque ad secunda Graduum obtineri poterunt.

Si verò detur sinus, qui non reperiatur in tabulis, & quis cupiat cognoscere quot Gradus minuta & secunda illi respondeant per eandem regulam auream id consequi poterimus. Nam reperto sinu proximè minori & à maiore dato subducto restabit differentia; Iterumque eodem subducto à maiori proximè sinu reperto in tabulis restabit alia differentia maior; Dices itaque si hæc differentia maior dat illam minorem, quid dabunt secunda 60 & obtinebis secunda tuæ differentiæ competentia sinus dati à proximè minori v. g. detur sinus 1484810.

Qui non reperitur in tabula sinuum, sed proximè minor est 1483848. qui subductus à maiori dato 1484910. relinquit differentiam 962. subductus verò iterum ipse repertus sinus 1483848. à maiori proximè reperto in tabulis 1486724 relinquit differentiam maiorem 2876 dico itaque si differentia 2876. dat differentiam 962. quid dabunt secunda 60. & restituent sec. 20. & sic agendum est in tangentibus vel logarithmis in tabula non repertis; si quis scrupulosum computum exoptet. Verùm tutò semper poterit accipi pro dato sinu proximè minor, si non adeò exacta requiratur supputatio.

Sinus versus reperitur arcus infra Gr 90. si accipiatur dati arcus complementi sinus, & subducatur à sinu toto. Nam residium erit sinus versus illius arcus, at si superet G. 90. cape excessum sup. Gr. 90 illiusque quære sinum, additus enim sinus sinui toti constituet sinum versum illius arcus.

Si verò quis cupiat alicuius dati sinus versi arcum inuenire demat à sinu toto, si ipso minor sit vel vice versa si sit maior & residui inueniatur arcus, qui demptus à quadrante in priori casu reliquit illius sinus versi arcum, & in posteriori casu additus quadranti idem præstat.

Tandem si quæratur complementum alicuius arcus quærendus est in altera è regione graduum, & minutorum columna. v. g. si sit quærendum complementum G. 8. M. 30. columnæ primæ sinistræ complementum erit in extrema dextra G. 81. M 30. & vice versa Et idem asseras de sinubus, tangentibus: atque logarithmis ipsorum, quorum complementa sunt in columna correspondente: sub correspondentibus arcuum complementis.

Ita sinus complementi arcus G. 10. M. 15. erit sinus arcus, qui illum cōplet G. 79. M. 45. qui est 9840407 sicuti sinus complementi arcus. G 79 M. 45 est sinus arcus G. 10. M. 15. nimirum sinus 1779435.

Denique si quis desideret logarithmos secantium is poterit exhibere logarithmos sinuum; sed semper vtendo ipsis contra regulam, vt dixi tract. 22 propos. 25. Curauimus autem has tabulas omnino ab erroribus absolutas tibi exhibere, quibus tuto vti possis, vt exactissimè præstitimus.

TABVLA

TABVLA
SINVVM ATQVE TANGENTIVM
LOGARITHMIS NEPERIANIS.
EXORNATA
DILIGENTER EMENDATA,

QVAE OMNI, TVM GEOMETRICAE, TVM ARITHMETICÆ SVPPVTATIONI APPRIME DESERVIT.

G.0 — Iuxta Regulam adhibendi

M.	Sinus	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithm. Sinuum.	Sinus	M.
0	0	Infinitum	0000	Infinitum	Infinita	0	1[illegible]	[illegible]
1	2909	81425681	2909	81425680	34376070815	1	1[illegible]	[illegible]
2	5818	74494213	5818	74494211	17188033688	2	9[illegible]	[illegible]
3	8727	75419556	8727	70419560	11458686834	4	999[illegible]	[illegible]
4	11636	67562746	11636	67502739	8594012547	7	9[illegible]	[illegible]
5	14544	65331315	17544	65331304	6875680006	1[illegible]	99999[illegible]	[illegible]
6	17453	63508099	17452	63508083	5729633839	16	99999[illegible]	[illegible]
7	20362	61966595	20361	61966573	4911098124	[illegible]	999[illegible]	[illegible]
8	23271	60631284	23270	60631256	4297181900	2[illegible]	99999[illegible]	[illegible]
9	26180	59453453	26179	59453418	3819696333	35	9999[illegible]	[illegible]
10	29088	58399557	29088	58399814	3437829002	43	99999[illegible]	[illegible]
11	31997	57446759	31996	57446707	3125276745	52	[illegible]	[illegible]
12	34906	56576646	34905	56576584	2864819229	62	99[illegible]	[illegible]
13	37815	55776222	37814	55776149	2644433955	73	999992[illegible]	[illegible]
14	40724	55035148	40723	55035064	2455533838	84	9999[illegible]	[illegible]
15	43632	54345225	43632	54345129	2291873854	96	9[illegible]	[illegible]
16	46541	53699843	46541	53699734	2148619711	109	[illegible]	[illegible]
17	49450	53093600	49450	5309[illegible]	2022219818	123	9999[illegible]	[illegible]
18	52359	52522019	52359	52521881	1909864971	138	999[illegible]	[illegible]
19	55268	51981356	55268	51981202	1809337410	154	9[illegible]	[illegible]
20	58177	5146843[illegible]	58177	5146836[illegible]	1718863124	170	9999[illegible]	[illegible]
21	61086	5 980537	61086	50980450	1637005697	187	9999[illegible]	[illegible]
22	63995	50515342	63995	50515137	1562590046	205	999979[illegible]	[illegible]
23	66904	50070827	66904	50070603	1494645462	224	9999[illegible]	[illegible]
24	69813	49645239	69813	49644995	1432363027	244	999975[illegible]	6
25	72721	49237[illegible]	72722	49236[illegible]	137[illegible]082163	265	999973[illegible]	5
26	75630	48844826	75631	48844589	1322188681	287	999971[illegible]	34
27	78539	48467431	78540	48467122	1273213435	309	999969[illegible]	33
28	81448	48103763	81450	48103433	1227736470	332	9999668	32
29	84357	47752759	84359	47752501	1185395877	356	9999644	31
30	87265	47413852	87268	47413471	1145801136	381	9999619	30
31	90174	47085554	90177	47085554	1108932084	40[illegible]	9999593	29
32	93083	46768049	93086	46768049	1074263599	43[illegible]	9999566	28
33	95991	46460773	95995	46460312	1041705454	461	9999482	27
34	98901	46162254	98904	4616176[illegible]	1010062679	489	9999511	26
35	101809	45872392	101814	45871874	982180553	518	9999482	25
36	104718	45590688	1047[illegible]	4559014[illegible]	954893332	548	9999452	24
37	107627	45316714	107632	45316135	929081086	579	9999421	23
38	110536	45050041	110541	4504943[illegible]	904627361	611	9999389	22
39	113445	44790296	11345[illegible]	447896[illegible]	881427652	644	9999357	21
40	116353	44537132	1163[illegible]	4453045[illegible]	859395374	677	999932[illegible]	20
41	119262	44290216	11926[illegible]	4428950[illegible]	838430438	711	9999289	19
42	122171	44049255	12217[illegible]	44048509	818463792	746	9999254	18
43	125079	43813959	125088	4381317[illegible]	799432199	782	999921[illegible]	17
44	127988	43584078	127997	43583259	781259259	819	9999281	16
45	130896	43359360	130906	43358503	763899813	857	9999143	15
46	133805	43139582	133816	43138686	747289264	896	9999105	14
47	136714	42924534	136725	42923599	731385593	935	9999065	13
48	139622	42714014	139635	42713039	716149676	975	9999025	12
49	142531	42507833	142544	42506817	701531474	1016	9998984	11
50	145439	42305826	145454	42304768	687500739	1058	9998942	10
51	148348	42107812	148363	42106711	674016435	1101	9998900	9
52	151257	41913644	151273	41912499	661050728	1145	9998856	8
53	154164	41723175	154182	41721986	648578536	1189	9998811	7
54	157075	41536271	159092	41535037	636564040	1234	9998766	6
55	159982	41352795	160001	41351515	624990311	1280	9998720	5
56	162891	41172626	162911	41171299	613825994	1327	9998673	4
57	165799	41006643	165820	41005268	603057015	1375	9998625	3
58	168708	40821746	168730	40820322	592655713	14[illegible]	9998577	2
59	171616	40650816	171640	40649343	582610426	1473	9998527	1
60	174524	40482764	174550	40481241	572899830	1523	9998477	0
								M.

Contra regulam adhibendi — G.89

G.1	[Iuxta Regulam adhibendi.]							
M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	174524	40482764	174550	40481241	572899830	1523	9998477	60
1	177433	40317483	177459	40315900	563504309	1574	9998426	59
2	180341	40154899	180369	40153273	554414914	1626	9998374	58
3	183250	39994918	183279	39993239	545610968	1679	9998321	57
4	186158	39837447	186189	39835715	537085003	1733	9998267	56
5	189066	39682421	189100	39680633	528821258	1788	9998212	55
6	191975	39529765	192010	39527922	520805157	1843	9998157	54
7	194883	39379407	194920	39377598	513030946	1899	9998101	53
8	197792	39231274	197830	39229318	505482730	1956	9998044	52
9	200700	39085307	200740	39083293	498155754	2014	9997986	51
10	203608	38941441	203650	38936368	491038024	2073	9997927	50
11	206517	38799612	206561	38797479	484118353	2133	9997867	49
12	209425	38659767	209471	38657573	477393195	2194	9997806	48
13	212333	38521858	212381	38519603	470852152	2255	9997745	47
14	215241	38385824	215291	38383507	464487853	2317	9997683	46
15	218149	38251613	218201	38249233	458293185	2380	9997620	45
16	221057	38119183	221111	38116739	452261453	2444	9997556	44
17	223965	37988481	224022	37985972	446386310	2509	9997491	43
18	226873	37859471	226932	37856896	440661780	2575	9997425	42
19	229781	37732105	229842	37729464	435082056	2641	9997359	41
20	232689	37606339	232752	37603631	429641796	2708	9997292	40
21	235597	37482135	235663	37479359	424335793	2776	9997224	39
22	238505	37359458	238574	37356613	419159137	2845	9997155	38
23	241413	37238269	241485	37235354	414111295	2915	9997085	37
24	244321	37118532	244395	37115546	409175388	2986	9997014	36
25	247229	37000208	247306	36997150	404359642	3058	9996943	35
26	250137	36883272	250217	36889142	399655828	3130	9996871	34
27	253045	36767690	253128	36764487	395060088	3202	9996798	33
28	255953	36653428	256038	36650151	390568737	3277	9996724	32
29	258861	36540448	258949	36537096	386178258	3352	9996649	31
30	261769	36428748	261859	36425320	381885288	3428	9996573	30
31	264677	36318272	264770	36314768	377686614	3504	9996496	29
32	267585	36209009	267681	36205427	373579199	3582	9996419	28
33	270493	36100924	270592	36097264	369560062	3660	9996341	27
34	273401	35994000	273503	35990261	365626388	3739	9996262	26
35	276308	35888207	276414	35884388	361776788	3819	9996182	25
36	279216	35783520	279325	35779620	358006024	3900	9996101	24
37	282124	35679917	282237	35755935	354312962	3982	9996019	23
38	285032	35577380	285148	35575316	350695255	4064	9995937	22
39	287940	35475892	288059	35471745	347150587	4147	9995854	21
40	290847	35375415	290970	35371184	343677949	4231	9995770	20
41	293755	35275935	293882	35271619	340272744	4316	9995685	19
42	296663	35177444	296794	35173042	336934467	4402	9995599	18
43	299570	35079909	299705	35075420	333661982	4489	9995512	17
44	302478	34983320	302617	34978743	330451272	4577	9995424	16
45	305385	34887652	305528	34882987	327302782	4665	9995336	15
46	308293	34792895	308439	34788141	324212583	4754	9995247	14
47	311200	34699029	311351	34794185	321181137	4844	9995157	13
48	314108	34606036	314202	34601101	318204757	4935	9995066	12
49	317015	34413899	317174	34508872	315283945	5027	9994974	11
50	319922	34422606	320085	34417486	312416191	5120	9994881	10
51	322830	34332140	322997	34326926	309599077	5214	9994787	9
52	325737	34242484	325909	34237176	306833212	5308	9994693	8
53	328645	34153629	328821	34148226	304115322	5403	9994598	7
54	331552	34076549	331733	34071050	301445987	5499	9994502	6
55	334459	33978346	334645	33972650	298823024	5596	9994405	5
56	337367	33891701	337558	33886007	296244357	5694	9994307	4
57	340274	33805893	340470	33800100	263710598	5793	9994208	3
58	343181	33720820	343382	33714927	291219764	5893	9994109	2
59	346088	33636464	346295	33630476	288770746	5993	9994009	1
60	348994	33552817	349207	33540723	286362498	6094	9993908	0
								M.
	[Contra regulam adhibendi]							G. 88

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	M
0	348995	3355[illegible]817	349207	33546723	286362498	6094	999[illegible]	[illegible]
1	351902	33469860	352120	33463664	283994009	6196	9993806	[illegible]
2	354809	33387588	355033	33381289	281664304	6299	999[illegible]	[illegible]
3	357716	33305993	357945	33299590	279372435	6403	999[illegible]	[illegible]
4	360623	33225056	360858	33218549	277117516	6507	9[illegible]	[illegible]
5	363530	33144770	365770	33138158	274898633	6612	[illegible]	[illegible]
6	366437	33065128	366683	33058410	272714927	6718	[illegible]	[illegible]
7	369344	32986107	369596	32979282	270565570	6825	[illegible]	[illegible]
8	372251	32907712	372508	32900779	268449755	6933	[illegible]	[illegible]
9	375158	32829923	375421	32422881	266366704	7042	[illegible]	[illegible]
10	378065	32752740	378334	32745588	264316358	7152	[illegible]	[illegible]
11	380971	32676149	381247	32668887	262296605	7262	[illegible]	[illegible]
12	383878	32600139	384160	32592866	260307416	7373	99[illegible]	[illegible]
13	386785	32524706	387073	32517221	258348109	7485	99[illegible]	[illegible]
14	389692	32449837	389987	32442239	256417991	7598	99[illegible]40	46
15	392598	32375526	392900	32367814	254517088	7712	9[illegible]	45
16	395505	32301761	395814	32293954	252643455	7827	99[illegible]	44
17	398412	32228539	398727	32220596	250797165	7943	99[illegible]	[illegible]
18	401318	32155852	401641	32147793	248978216	8059	999[illegible]	[illegible]
19	404225	32083692	404554	32075516	247184785	8176	99918[illegible]	[illegible]
20	407131	32012045	407468	32500751	245417543	8294	9991[illegible]	40
21	41003[illegible]	31940909	410382	31932496	2436747[illegible]	8413	9991590	[illegible]
22	41294[illegible]	31870276	413295	31861743	241957021	8533	99914[illegible]	[illegible]
23	4158[illegible]	31800141	416209	31791887	140262714	8654	999[illegible]	[illegible]
24	41875[illegible]	31730492	419123	31721716	238592501	8776	999[illegible]	[illegible]
25	42166	31661332	422037	31652434	236945285	8898	9991106	[illegible]
26	42457[illegible]	31592644	424951	31583623	235320041	9021	9990983	34
27	427476	31524424	427866	31515279	233717425	9145	9990859	3[illegible]
28	43038[illegible]	31456672	430780	31447402	232146427	9270	9990[illegible]34	3[illegible]
29	43328[illegible]	31389371	433694	31379975	230576614	9396	9990608	3[illegible]
30	436194	31322524	436609	31313001	229037584	9523	9990482	3[illegible]
31	439100	31256121	439523	31246471	227518902	9650	9990355	2[illegible]
32	442006	31190158	442438	31180380	226020[illegible]67	9778	9990227	28
33	444912	31124626	445353	31114719	224540987	9907	9990098	27
34	44781[illegible]	31059521	448267	31049484	223080983	10037	9989968	26
35	450724	30994841	451182	30984673	221639784	10168	9989837	25
36	453630	30930577	45409[illegible]	30920277	220217049	10300	9989706	42
37	456536	30866722	457012	30856290	218812405	10432	9989574	23
38	459442	30803277	459927	30792712	217425507	10565	9989441	22
39	462348	30740210	462842	30729531	216056022	10699	99893[illegible]	21
40	465253	30677578	46575[illegible]	30666744	214704085	10834	99891[illegible]2	20
41	468159	30615317	468672	30604347	213368514	10970	9989036	19
42	471065	30553442	471588	30542335	212049271	11107	9988899	18
43	473970	30491949	474503	30480704	210746693	11245	9988761	17
44	476876	30430834	477419	30419451	209459545	11383	9988623	16
45	479781	30370090	480335	30358968	208188402	11522	9988484	15
46	482687	30309715	483251	30298053	206932111	11662	9988344	14
47	485592	30249702	486166	30237899	205691260	11803	9988203	13
48	488498	30190049	489082	30178104	204464726	11945	9988601	12
49	491403	30130749	491997	30118661	203253093	12088	9987918	11
50	494308	30071797	494913	30059565	202055705	12232	9987775	10
51	497214	3001119[illegible]	497829	30000817	200871878	12376	9987631	9
52	500119	29954933	500745	29942412	199702191	12521	9987486	8
53	503024	29897014	503662	29884347	198545993	12667	9987340	7
54	505929	29839424	506578	29826610	197403054	12814	9987193	6
55	508835	29782165	50949[illegible]	29769203	196273146	12962	9987045	5
56	511740	29725236	512411	29712125	195155685	13111	9986897	4
57	514645	29668628	515328	29655367	194051200	13261	9986748	3
58	517550	29612331	518244	39598920	192959095	13411	9986598	2
59	520455	29556458	521161	29542796	191879163	13562	9986447	1
60	524360	29500706	524078	29486992	160811200	13714	9986295	0

Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
	52[illegible]60	29500706	524078	29486992	190811200	13714	9986295	60
	526265	29445354	526995	29431487	189755028	13867	9986143	59
	529170	29390307	529911	29376286	188710414	14021	9985989	58
	532075	29335565	532828	29321389	187677207	14176	9985835	57
	534980	29281122	535745	29266791	186655202	14331	9985680	56
	537884	29226973	538663	29212486	185644562	14487	9985524	55
	540789	29173115	541580	29158471	184644417	14644	9985367	54
	543694	29119548	544498	29104746	183654941	14802	9985209	53
	546598	29066270	547415	29051309	182676299	14961	9985050	52
	549503	29013273	550333	28998152	181707670	15121	9984891	51
	552407	28960557	553251	28945276	180749537	15281	9984731	50
	55[illegible]2	28908117	556169	28892675	179801085	15442	9984570	49
	[illegible]16	28855951	559087	28850347	178862806	15604	9984408	48
	561120	28804057	562005	28788290	177934219	15767	9984245	47
	56402[illegible]	28752430	564923	28736499	177015180	15931	9984081	46
	566928	28701071	567841	28684975	176105555	16096	9983917	45
	569832	28649975	570759	28633714	175205183	16261	9983752	44
	572736	28599142	573678	28582715	174313925	16427	9983586	43
	575640	28548570	576596	28531976	173431641	16594	9983419	42
	578544	28498247	579514	28481485	172558198	16762	9983251	41
	581448	28448177	582433	28431246	171693461	16931	9983082	40
	584352	28398354	585352	28381253	170837304	17101	9982912	39
	587250	28348782	588270	28331510	169989613	17272	9982742	38
	590160	28298459	591189	28282015	169150247	17444	9982571	37
	593064	28250377	594108	28232761	168319085	17616	9982399	36
25	595967	28201535	597028	28183746	167496287	17789	9982226	35
26	598871	28152930	599947	28134967	166681172	17963	9982052	34
27	601775	28104561	602866	28086423	165873906	18138	9981877	33
28	604678	28056428	605786	28038114	165074651	18314	9981701	32
29	607582	28008424	608705	27990033	164282764	18491	9981525	31
30	610485	27960848	611625	27942178	163498660	18670	9981348	30
31	613389	27913400	614544	27894552	162721698	18848	998117[illegible]	29
32	616292	27866180	617464	27847158	161952305	19027	9980991	28
33	619196	27819184	620384	27799977	161189849	19207	9980811	27
34	622099	27772408	623304	27753020	160434770	19388	9980631	26
35	625052	27725848	626225	27706278	159686753	19570	998045[illegible]	25
36	627905	27679504	629145	27659752	158945509	19752	9980268	24
37	630808	27633374	612066	27613439	158211136	19935	998008[illegible]	23
38	633711	27587457	634986	27567338	157483474	20119	9979901	22
39	636614	27541753	637907	27521449	156762433	20304	9979716	21
40	639517	27496257	640828	27475767	156047923	20490	9979530	20
41	642420	27450968	643749	27430291	155339855	20677	997934[illegible]	19
42	645323	27405885	646671	27385020	154638158	20865	9979156	18
43	648226	27361003	649592	27339950	153942729	21053	9978968	17
44	651129	27316323	652514	27295081	153253487	21242	9978779	16
45	654031	27271843	655435	27250411	152570581	21432	9978589	15
46	656934	27227563	658357	27205940	151893462	21623	9978398	14
47	659837	27183476	661278	27161661	151222301	21815	9978207	13
48	662739	27139581	664100	27117573	150557233	22008	9978015	12
49	665642	27095878	667121	27073676	149897753	22202	9977822	11
50	668544	27052373	670043	27029976	149244148	22397	9977628	10
51	671447	27009057	672965	26986465	148595987	22592	9977433	9
52	674349	26965926	675888	26943138	147953611	22788	9977237	8
53	677251	26922980	678810	26899995	147316726	22985	9977040	7
54	680153	26880218	681733	26857035	146685275	23183	9976843	6
55	683055	26837639	684656	26812757	146059175	23382	9976645	5
56	685957	26795243	687578	26771661	145438358	23582	9976445	4
57	688859	26753027	690501	26729244	144822775	2378[illegible]	997624[illegible]	3
58	691761	26710988	693423	26687003	144212307	23985	9976044	2
59	69466[illegible]	26669126	696346	26644939	143606943	24187	9975842	1
60	697565	26627442	699269	26603052	143006601	24390	9975640	0
								M.

Contra regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	697565	26627442	699269	26603052	143006601	2439[illegible]	99[illegible]	60
1	700467	26585929	702193	26561335	142411234	24594	997541	59
2	703369	26544587	705116	26519788	141820765	24799	997523	[illegible]
3	706270	26503416	708039	26478411	141235335	25005	99[illegible]	[illegible]
4	709172	26462418	710962	26437207	140654481	252[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	712073	26421589	713886	26396171	140078545	25418	99[illegible]461	[illegible]
6	714975	26380927	716809	26355301	139507087	25626	997440	[illegible]
7	717876	26340428	719733	26314593	138940429	25835	997[illegible]00	[illegible]
8	720777	26300094	722657	26284050	138378319	26044	99[illegible]	[illegible]
9	723678	26259923	725580	26233669	137820702	26254	9973781	51
10	726579	26219913	728504	26193448	137267523	26465	9973[illegible]70	[illegible]
11	729480	26180067	731428	26153390	136718731	26677	997[illegible]8	49
12	732381	26140377	734353	26113487	136174272	26890	9973[illegible]45	[illegible]
13	735282	26100842	737277	26073738	135634096	27104	9972931	47
14	738183	26061465	740202	26034146	135098153	27319	9972717	46
15	741084	26022244	743127	25994709	134566419	27535	99[illegible]	45
16	743985	25983176	746052	25955424	134038804	27752	99[illegible]286	44
17	746886	25944260	748978	25916290	133515636	27970	9972069	43
18	749787	25905496	751903	25877308	132995769	28188	9971851	42
19	752688	25866884	754829	25838477	132480297	28407	9971633	41
20	755588	25828423	757754	25799796	131968930	28627	9971414	40
21	758589	25790110	760680	25751262	131461286	28848	9971194	[illegible]
22	761389	25751942	763606	25722872	130957670	29070	9970973	[illegible]
23	764290	25713920	766532	25684727	130457692	29293	9970751	[illegible]
24	767190	25676043	769459	25646527	129991652	29516	9970528	36
25	770090	25638310	772385	25608570	129469305	29740	9970304	35
26	772991	25600722	775311	25570757	128980531	29965	9970079	34
27	77589[illegible]	25563273	778238	25533082	128495548	30191	9969854	[illegible]
28	778791	25525966	781164	25495548	128014165	30418	9969628	[illegible]
29	781691	25488798	784091	25458152	127536541	30646	9969401	31
30	784591	25451769	787017	25420894	127062036	30875	9969173	30
31	787491	25414876	789944	25383772	126591211	31104	9968944	29
32	790391	25378119	792871	25346785	126123842	31334	9968715	28
33	793291	25341498	795799	25309933	125659878	31565	9968485	27
34	796191	25305013	798726	25273216	125199280	31797	9968254	26
35	799090	25268662	801653	25236632	124742169	32030	9968022	25
36	801990	25232442	804581	25200178	124288195	32264	9967789	24
37	804889	25196355	807509	25163857	123837634	32498	9967555	23
38	807789	25160399	810437	85127666	123390142	32733	9967320	22
39	810688	25124571	813365	25091602	122946003	32969	9967085	21
40	813587	25088870	816293	25055664	122505017	33206	9966849	20
41	816486	25053298	819221	25019854	122067151	33444	9966612	19
42	819385	25017853	822150	24984170	121632370	33683	9966374	18
43	822284	24982533	825079	24948610	121200643	33923	9966135	17
44	82518[illegible]	24947340	828008	24913177	120771937	34163	9965895	16
45	828082	24912272	830937	24877866	120346233	34404	9965655	15
46	830981	24877326	833866	24842680	119923488	34646	9965414	14
47	833880	24842502	836795	24807613	119503669	34889	9965172	13
48	836778	24807799	839724	24772666	119086890	35133	9964929	12
49	839677	24773219	842653	24737841	118672834	35378	9964685	11
50	842575	24738761	845583	24703138	118261757	35623	9964440	10
51	845474	24704420	848513	24668551	117853346	35869	9964194	9
52	848372	24670196	851443	24634080	117447864	36116	9963948	8
53	851271	24636090	854374	24599726	117044995	36164	9963701	7
54	854169	24602100	857304	24565487	116644989	36613	9963453	6
55	857067	24568228	860234	24531365	116247668	36863	9963204	5
56	859965	24534473	863164	24497359	115853017	37114	9962954	4
57	862863	24500829	866095	24463463	115461005	37366	9962703	3
58	865761	24467298	869025	24429679	115071619	37619	9962452	2
59	868659	24433880	871956	24396008	114684819	37872	9962200	1
	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947	0
								M.

G. 5 — Iuxta Regulam adhibendi.

M.	*Sinus*	*Logarithmi Sinuum.*	*Tangentes.*	*Differentiæ & Logarit. Tangent.*	*Tangentes*	*Logarithmi Sinuum.*	*Sinus.*	
0	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947	60
1	874455	24367384	877817	24329003	113918875	38381	9961693	59
2	877353	24334302	880748	24295665	113539681	38637	9961438	58
3	880250	24301329	883680	24262435	113163656	38894	9961183	57
4	883148	24268467	886611	24229316	112788878	39151	9960927	56
5	886045	24235712	889543	24196303	112417202	39409	9960670	55
6	888943	24203064	892475	24163396	112047814	39668	9960412	54
7	891840	24170523	895407	24130595	111680940	39928	9960153	53
8	894737	24138089	898339	24097900	111316432	40189	9959893	52
9	897634	24105760	901271	24065309	110954164	40451	9959632	51
10	900531	24073540	904204	24032827	110594415	40713	9959370	50
11	903428	24041422	907137	24000446	110236764	40976	9959107	49
12	906325	24009408	910070	23968168	109881598	41240	9958844	48
13	909222	34977495	913003	23935990	109528589	41505	9958580	47
14	912119	23945985	915936	23903914	109177805	41771	9958315	46
15	915016	23913978	918870	23871940	108829233	42038	9958049	45
16	917913	23882373	921804	23840067	108482852	42306	9957782	44
17	920809	23850867	924738	23808292	108138767	42575	9957515	43
18	923706	23819460	927761	23776615	107796712	42845	9957247	42
19	926602	23788153	930605	23745038	107456902	43115	9956978	41
20	929498	23756943	933539	23713557	107119198	43386	9956708	40
21	932395	23725832	936473	23682174	106783466	43658	9956437	39
22	935291	23694818	939407	23650887	106449917	43931	9956165	38
23	938187	23663900	942343	23619695	106118428	44205	9955893	37
24	941083	23633080	945277	23588601	105788969	44479	9955620	36
25	943979	23602355	948212	23557601	105461519	44754	9955346	35
26	946875	23571725	951147	23526695	105136063	45030	9955071	34
27	949771	23541190	954083	23495883	104812581	45307	9954795	33
28	952667	23510748	957019	23465163	104491055	45585	9954518	32
29	955563	23480290	959954	23434535	104171468	45864	9954240	31
30	958458	23450143	962890	23403999	103853919	46144	9953962	30
31	961354	23419980	965826	23373556	103538166	46424	9953683	29
32	964249	23389908	968763	23343203	103224405	46705	9953403	28
33	967144	23359927	971699	23312940	102912514	46987	9953122	27
34	970039	23330036	974636	23282766	102602473	47270	9952840	26
35	972934	23300235	977573	23252681	102294266	47554	9952557	25
36	975829	23270525	980509	23222686	101987889	47839	9952274	24
37	978724	23240903	983446	23192778	101683314	48125	9951990	23
38	981619	23211368	986383	23162956	101380525	48412	9951705	22
39	984514	23181920	989320	23133220	101079507	48700	9951419	21
40	987408	23152560	992257	23103572	100780346	48988	9951132	20
41	990303	23123287	995195	23074010	100482822	49277	9950844	19
42	993198	23094100	998133	23044533	100187022	49567	9950555	18
43	996092	23064999	1001072	23015141	99893042	49858	9950266	17
44	998987	23035985	1004010	22985836	99600655	50149	9949976	16
45	1001881	23007056	1006949	22956615	99310047	50441	9949685	15
46	1004775	22978212	1009887	22927478	99021104	50734	9949393	14
47	1007669	22949449	1012826	22898421	98733810	51028	9949100	13
48	1010563	22920769	1015763	22869446	98448162	51323	9948807	12
49	1013457	22892172	1018702	22840553	98164135	51619	9948513	11
50	1016351	22863658	1021641	22811742	97881716	51916	9948218	10
51	1019245	22835227	1024580	22783013	97600790	52214	9947922	9
52	1022139	22806878	1027519	22754366	97321746	52512	9947625	8
53	1025032	22778609	1030459	22725798	97044063	52811	9947327	7
54	1027926	22750420	1033399	22697309	96767939	53111	9947028	6
55	1030819	22722311	1036339	22668899	96493467	53412	9946729	5
56	1033713	22694283	1039279	22640569	96220411	53714	9946429	4
57	1036606	22666133	1042219	22612316	95948971	54017	9946128	3
58	1039499	22638461	1045160	22584140	95679034	54321	9945825	2
59	1042392	22610667	1048101	22556041	95410585	54626	9945523	1
60	1045285	22582951	1051042	22528019	95143611	54932	9945219	0
								M.

Contra regulam adhibendi — G. 84

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1045285	22582951	1051042	22528019	9 143[illegible]	54932	[illegible]	[illegible]
1	1048178	22555313	1053983	22500075	94878103	55238	[illegible]	[illegible]
2	1051070	22527752	1056924	22472207	94614055	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	1053963	22500267	1059866	22444414	94351448	558[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	1056857	22472859	1062808	22416697	94090170	5[illegible]162	[illegible]	[illegible]
5	1059749	22445527	1065750	22389055	93830595	564[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	1062642	22418272	1068692	2236149[illegible]	93572238	56[illegible]82	[illegible]	[illegible]
7	1065534	22391091	1071634	22333995	93[illegible]153[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	1068426	22363984	1074576	22306579	9[illegible]59875	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	1071318	22336951	1077518	22279233	91805759	[illegible]71[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	1074210	22309991	1080461	22251959	91553016	[illegible]8032	[illegible]	[illegible]
11	1077102	22283104	1083404	22224757	91301618	58347	[illegible]	[illegible]
12	1079994	22256290	1086347	2219762[illegible]	92051546	58663	[illegible]	[illegible]
13	1082886	22229549	1089291	22170570	91802810	589[illegible]9	[illegible]	[illegible]
14	1085778	22202881	1092234	22143585	91555401	59[illegible]96	[illegible]	[illegible]
15	1088669	22176285	1095178	22116671	91309309	5961[illegible]	[illegible]	[illegible]
16	1091561	22149762	1098122	22089819	91064526	59933	[illegible]	[illegible]
17	1094452	22123308	1101066	22063055	908[illegible]1043	60253	[illegible]	[illegible]
18	1097344	22096925	1104010	22036351	90578848	6057[illegible]	[illegible]	[illegible]
19	1100235	22070612	1106954	22009717	90337917	60895	[illegible]	[illegible]
20	110312[illegible]	22044368	1109899	21983151	90098268	6121[illegible]	[illegible]	[illegible]
21	1106017	22018195	1112844	21956655	89859858	61540	[illegible]	[illegible]
22	1108908	21992090	1115789	21930126	89622688	61864	[illegible]	[illegible]
23	1111799	21966054	1118734	21903865	89386745	62189	[illegible]	[illegible]
24	111469[illegible]	21940086	1121680	21877571	89152021	6251[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	1117580	21914186	1124625	21851344	88918508	62842	[illegible]	[illegible]
26	1120471	21888355	1127571	21825185	88686196	6317[illegible]	[illegible]	[illegible]
27	112336[illegible]	21862590	1130517	21799091	88455079	63499	9936[illegible]	[illegible]
28	1126252	21836892	1133463	21773064	88225146	63828	993[illegible]	[illegible]
29	1129142	21811261	1136409	21747103	87996394	6415[illegible]	993604[illegible]	[illegible]
30	1132032	21785698	1139355	21721209	87[illegible]68816	64489	993571[illegible]	[illegible]
31	1134922	21760199	1142302	21695378	87542404	64821	9935[illegible]8	[illegible]
32	1137812	21734767	1145249	21669613	87317150	65154	9935058	28
33	1140702	21709400	1148196	21643912	87093043	65488	9934727	27
34	1143592	21684100	1151144	21618178	86870072	65822	9934393	26
35	1146482	21658865	1154092	21592708	86648225	66157	9934062	25
36	1149372	21633695	1157040	21567202	86427493	66493	9933728	24
37	1152261	21608586	1159988	21541756	86207866	66830	9933393	23
38	1155151	21583540	1162936	21516372	85989335	67168	9933057	22
39	1158040	21558557	1165884	21491050	85771891	67507	9932720	21
40	1160929	21533639	1168832	21405793	85555525	67846	9932383	20
41	1163818	21508781	1171781	21440595	85340229	68186	9932046	19
42	1166707	21483986	1174730	21415459	85125995	68527	9931707	18
43	1169596	21459254	1177679	21390385	84912817	68869	9931367	17
44	1172485	21434585	1180628	21365573	84700687	69212	9931025	16
45	1175374	21409979	1183577	21340425	84489598	69556	9930685	15
46	1178263	21385434	1186527	21315533	84279571	69901	9930342	14
47	1181151	21360949	1189478	21290702	84070565	70247	9930000	13
48	1184040	21336524	1192427	21265931	83862572	70593	9929655	12
49	1186928	21312160	1195377	21241220	83655585	70940	9929310	11
50	1189816	21287855	1198328	21216567	83449598	71288	9928964	10
51	1192704	21263609	1201279	21191972	83244610	71637	9928617	9
52	1195592	21239423	1204230	21167436	83040614	71987	9928270	8
53	1198480	21215297	1207181	21142959	82837603	72338	9927922	7
54	1201368	21191230	1210132	21118540	82635570	72690	9927573	6
55	1204255	21167222	1213084	21094179	82434508	73043	9927223	5
56	1207143	21143273	1216036	21069877	82234410	73396	9926872	4
57	1210031	21119381	1218988	21045631	82035268	73750	9926521	3
58	1212918	21095546	1221940	21021441	81837074	74105	9926169	2
59	1215806	21071769	1224892	20997308	81640811	74461	9925816	1
60	1218693	21048049	1227845	20973231	81443502	74818	9925462	0
								M.

G. | Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1218693	21048049	1227840	20973231	81443502	74818	9925461	60
1	1221580	21024385	1230798	20949209	81248110	75176	9925106	59
2	1224467	21000779	1233751	20925245	81053639	75534	9924750	58
3	1227354	20977230	1236704	20901337	80860083	75893	9924393	57
4	1230241	20953738	1239658	20877485	80667435	76253	9924036	56
5	1233128	20930302	1242612	20853688	80475688	76614	9923678	55
6	1236015	20906922	1245566	20829946	80284835	76976	9923319	54
7	1238901	20883595	1248520	20806256	80094869	77339	9922959	53
8	1241788	20860323	1251474	20782620	79905783	77703	9922598	52
9	1244674	20837106	1254428	20759038	79717572	78068	9922236	51
10	1247560	20813945	1257383	20735512	79530231	78433	9921874	50
11	1250446	20790838	1260338	20712039	79343754	78799	9921511	49
12	1253332	20767785	1263293	20688619	79158136	79166	9921147	48
13	1256218	20744785	1266249	20665251	78973371	79534	9920782	47
14	1259104	20721838	1269205	20641935	78789454	79903	9920416	46
15	1261990	20698946	1272161	20618946	78606379	8 272	9920049	45
16	1264876	20676107	1275117	20595465	78724142	80642	9919682	44
17	1267761	20653321	1278073	20572308	78242737	81013	9919314	43
18	1270647	20630588	1281029	20549203	78062159	81385	9918945	42
19	1273532	20607906	1283986	20526148	77882402	81758	9918575	41
20	1276417	20585278	1286943	20503146	77703459	82132	9918204	40
21	1279302	20562701	1289900	20480194	77525324	82507	9917832	39
22	1282187	20540176	1292857	20457293	77347991	82883	9917459	38
23	1285072	20517703	1295815	20434444	77171455	83259	9917086	37
24	1287957	20495281	1298773	20411645	76995710	83636	9916712	36
25	1290841	20472909	1301731	20388895	76820751	84014	9916337	35
26	1293726	20450587	1304689	20366194	76646573	84393	9915961	34
27	1296610	20428316	1307648	20343543	76473170	84773	9915584	33
28	1299494	20406096	1310607	20320942	76300536	85154	9915206	32
29	1302378	20383925	1313566	20298389	76128666	85536	9914828	31
30	1305262	20361806	1316525	20275887	75957554	85919	9914449	30
31	1308146	20339737	1319485	20253435	75787195	86302	9914069	29
32	1311030	20317717	1322445	20231031	75617584	86086	9913688	28
33	1313914	20295746	1325405	20208675	75448716	87071	9913306	27
34	1316798	20273822	1328365	20186365	75280586	87457	9912923	26
35	1319681	20251947	1331325	20164103	75113189	87844	9912540	25
36	1322564	20230120	1334285	20141888	74946521	88232	9912150	24
37	1325447	20208341	1337246	20119720	74780577	88621	9911771	23
38	1328330	20186611	1340207	20097600	74615354	89011	9911385	22
39	1331213	20164931	1342168	20075530	74450847	89401	9910998	21
40	1334096	20143301	1346129	20053509	74287052	89792	9910610	20
41	1336979	20121717	1349891	20031533	74123964	90184	9910221	19
42	1339862	20100180	1352453	20009603	73961579	90577	9909832	18
43	1342744	20078689	1355015	19987718	73799892	90971	9909442	17
44	1345627	20057245	1357977	19965880	73638898	91365	9999051	16
45	1348509	20035846	1360940	19944086	73478593	91760	9908659	15
46	1351392	20014494	1363903	19922338	73318972	92156	9908266	14
47	1354274	19993189	1366866	19900036	73160051	92553	9907873	13
48	1357156	19971931	1369830	19878980	73001766	92951	9907479	12
49	1360038	29950718	1372793	19857368	72844173	93350	9907084	11
50	1362920	19929552	1375757	19829852	72687247	93750	9906688	10
51	1365802	19908432	1378721	19814281	72530983	94151	9906291	9
52	1368683	19887357	1381686	19792805	72375376	94552	9905893	8
53	1371564	19866327	1384650	19771373	72220422	94954	9905494	7
54	1374446	19845341	1387615	19749984	72066117	95357	9905095	6
55	1377327	19824400	1390580	19728639	71912459	95761	9904695	5
56	1380208	19803504	1393545	19707338	71759440	96166	9904294	4
57	1382089	19782652	1396510	19686080	71607058	96572	9903892	3
58	1385970	19761844	1399476	19664865	71455313	96979	9903489	2
59	1388851	19741081	1402442	19643694	71304198	97387	9903084	1
60	1391731	19720563	1405408	19622566	71153707	97796	9902681	0
								M.

Contra regulam adhibendi | G. 82

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1391731	19720362	1405408	19622566	71153706	[illegible]	[illegible]	
1	1394612	19699687	1408374	19601482	71003833	9820	[illegible]	
2	1397492	19679054	1411341	19580439	70854576	9861	[illegible]	
3	1400373	19658464	1414308	19459438	70705932	[illegible]	[illegible]	
4	1403253	19637917	1417275	19538479	70557898	9943	[illegible]	
5	1406133	19617413	1420242	19517562	70410470	9985	[illegible]	
6	1409013	19596952	1423210	19496687	70263645	100265	[illegible]	
7	1411893	19576535	1426178	19475756	70117419	100679	[illegible]	
8	1414772	19556160	1429146	19455066	69971789	101094	[illegible]	
9	1417652	19535827	1432115	19434317	69826751	101510	[illegible]	
10	1420531	19515538	1435084	19413611	69682302	101927	[illegible]	
11	1423410	19495290	1438053	19392945	69538439	[illegible]	[illegible]	
12	1426289	19475084	1441022	19372320	69395158	[illegible]	[illegible]	
13	1429168	19454918	1442992	19351734	69252455	103184	[illegible]	
14	1432047	19434794	1446961	19331190	69110326	103604	[illegible]	
15	1434926	19414711	[illegible]	19310686	68968768	[illegible]	[illegible]	
16	1437805	19334669	1452901	19290222	68827777	104447	[illegible]	
17	1440684	19374668	1455871	19269798	68687250	104870	[illegible]	
18	1443562	19354708	1458842	19249414	68547438	105394	[illegible]	
19	1446441	19334787	1461813	19229068	68408173	105719	[illegible]	
20	1449319	19314908	1464784	19208765	68269416	106145	[illegible]	
21	1452197	19295052	1467755	19188501	68131209	106071	[illegible]	
22	1455075	19275275	1470727	19168277	67993549	106998	[illegible]	
23	[illegible]	19255517	1473699	19148091	67856423	107426	[illegible]	
24	1460831	19235798	1476671	19127943	67719855	107855	[illegible]	[illegible]
25	1463708	19216118	1479644	19107833	67583815	108285	9892298	[illegible]
26	1466786	19196477	1482617	19087761	67448309	108716	9891872	34
27	1469463	19176875	1485590	19067727	67313334	109148	9891445	[illegible]
28	1472340	19157313	1488563	19047732	67178887	109581	9891017	32
29	1475217	19137792	1491536	19027777	67044965	110015	9890588	[illegible]
30	1478094	19118310	1494510	19007861	66911564	110449	9890159	30
31	1480971	19098865	1497484	18987981	66778681	110884	9889729	29
32	1483848	19079459	1500458	18968139	66646313	111320	9889298	28
33	1486724	19060091	1503433	18908334	66514457	111757	9888866	27
34	1489601	19040761	1506408	18928566	66383110	112195	9888433	26
35	1492477	19021469	1509383	18908835	66252268	112634	9887999	25
36	1495353	19002215	1512358	18889141	66121928	113074	9887564	24
37	1498229	19982999	1515334	18869485	65992087	113514	9887128	23
38	1501105	18963822	1518310	18849867	65862743	113955	9886692	22
39	1503981	18944682	1521286	18830285	65733894	114397	[illegible]	21
40	1506857	18925581	1524262	18810741	65605537	114840	[illegible]	20
41	1509733	18906517	1527239	18791233	65477669	115284	9885378	19
42	1512608	18887489	1530216	18771760	65350287	115729	9884938	18
41	1515484	18868498	1533193	18752323	65223388	116175	9884498	17
44	1518359	18849543	1536170	18732921	65096969	116622	9884057	16
45	1521234	18830625	1539148	18713556	64971028	117069	9883615	15
46	1524109	18811744	1542126	18694227	64845563	117517	9883172	14
47	1526984	18792899	1545104	18674933	64720571	117966	9882728	13
48	1529859	18774090	1548082	18655674	64596049	118416	9882283	12
49	1532734	18755318	1551061	18636451	64471994	118867	9881838	11
50	1535608	18736581	1554040	18617262	64348404	119319	9881392	10
51	1538482	18717882	1557019	18598111	64225276	119771	9880945	9
52	1541356	18699218	1559999	18578994	64102607	120224	9880497	8
53	1544230	18680589	1562979	18559911	63980394	120678	9880048	7
54	1547104	18661995	1565959	18540862	63858635	121133	9879598	6
55	1549978	18643437	1568939	18521848	63737327	121589	9879148	5
56	1552755	18624915	1571920	18502869	63616468	122046	9878697	4
57	1555725	18606428	1574901	18483924	63496056	122504	9878245	3
58	1558599	[illegible]	1577882	18465013	63376089	122962	9877792	2
59	1561472	18569557	1580863	18446136	63256564	123421	9877338	1
60	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	1586826	18408484	63018829	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	1589808	18389707	62900615	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	1592791	18370964	62782833	125267	9875514	57
4	157583[illegible]	1847[illegible]984	1595774	18352253	62665481	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	1598757	18333576	62548556	126196	9874597	55
6	1581681	18441594	1601740	18314933	62432056	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	1604723	18296324	62315979	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	1607707	18277747	62200323	127594	9873216	52
9	1590197	18387205	1610691	18259203	62085085	128062	9872754	51
10	1593069	18309223	1613675	18240692	61970263	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	1616660	18222213	61855854	129001	9871827	49
12	159[illegible]812	18333237	1619645	18203765	61741856	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	1622630	18185351	61628267	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	1625615	18166969	61515085	130415	9870431	46
15	1607426	182[illegible]9507	1628601	18148619	61402307	130888	9869964	45
16	161[illegible]297	18261663	1631587	18130301	61289930	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	1634573	18112014	61177952	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	1637560	18093758	61066370	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	1640547	18075533	60955184	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	1643534	18057338	60844392	133268	9867616	40
21	1624629	18172624	1646522	18039177	60733992	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	1649510	18021047	60623981	134226	9866671	38
23	1630389	18137655	1652499	18002948	60514358	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	1655488	17984385	60405121	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	1658477	17966842	60296268	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	1661466	17948835	60187796	136152	9864770	34
27	1641868	1806749[illegible]	1664456	17930859	60079703	136636	9864293	33
28	1644738	180500[illegible]	1667446	17912913	59971987	137121	9863815	32
29	1647607	1803260[illegible]	1670436	17894997	59864646	137607	9863336	31
30	1650476	1801520	1673426	17877114	59757678	138093	9862856	30
31	1653345	17997835	1676417	17859259	59651081	138580	9862376	29
32	1656214	1798050[illegible]	1679408	17841433	59544852	139068	9861895	28
33	1659082	17963198	1682399	17823641	59438989	139557	9861413	27
34	1661951	17945922	1685390	17805875	59333490	140047	9860930	26
35	1664819	17928677	1688382	17788139	59228353	140538	9860446	25
36	1667687	17911463	1691374	17770433	59123576	141030	9859961	24
37	1670555	17894281	1694366	17752759	59019157	141522	9859475	23
38	1673423	17877128	1697358	17735113	58915095	142015	9858989	22
39	1676291	17860006	1700351	17717497	58811388	142509	9858502	21
40	1679159	17842915	1703344	17699911	58708035	143004	9858014	20
41	1682027	17825852	1706337	17682352	58605034	143500	9857525	19
42	1684894	17808820	1709331	17664823	58502385	143997	9857035	18
43	1687761	17791817	1712325	17647322	58400087	144495	9856544	17
44	1690628	17774843	1715319	17629849	58298138	144994	9856053	16
45	1693495	17757899	1718313	17612406	58196536	145493	9355561	15
46	1696362	17740985	1721308	17594992	58095279	145993	9855068	14
47	1699229	17724100	1724304	17577606	57994366	146494	9854574	13
48	1702095	17707244	1727300	17560248	57893795	146996	9854079	12
49	1704962	17690418	1730296	17542919	57793564	147499	9853583	11
50	1707828	17673622	1733292	17525619	57693670	148003	9853087	10
51	1710694	17656856	1736287	17508349	57594111	148507	9852590	9
52	1713560	17640118	1739284	17491106	57494885	149012	9852092	8
53	1716426	17623408	1742281	17473890	57395990	149518	9851593	7
54	1719292	17606726	1745278	17456701	57297425	150025	9851093	6
55	1722157	17590073	1748275	17439540	57199188	150533	9850593	5
56	1725022	17573448	1751273	17422406	57101277	151042	9850092	4
57	1727887	17556851	1754271	17405299	57003690	151552	9849590	3
58	1730752	17540283	1757270	17388220	56906425	152063	9849087	2
59	1733617	17523744	1760269	17371169	56809480	152575	9848583	1
60	1736482	17507234	1763268	17354146	56712854	153088	9848078	0
								M.

M	Sinus.	Logarithm. Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1730482	17507234	1763268	17354146	56712854	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	1739347	17490751	1766268	17337150	56616545	1536[illegible]	9847[illegible]	[illegible]
2	1742211	17474296	1769268	17320181	56520550	154[illegible]	9847066	[illegible]
3	1745075	17457869	1772268	17303239	56424868	1546[illegible]	9846559	[illegible]
4	1747939	17441470	1775269	17286324	56239498	155146	98[illegible]	[illegible]
5	1750803	17425098	1778270	17269435	56234439	155603	9845[illegible]	[illegible]
6	1753667	17408754	1781271	17252573	56139689	156181	9845[illegible]	[illegible]
7	1756531	17392438	1784272	17235738	56045247	156700	9844[illegible]	[illegible]
8	1759394	17376149	1787274	17218929	55951112	157220	98440[illegible]	[illegible]
9	1762258	17359887	1790276	17202147	55857283	157740	9843498	[illegible]
10	1765121	17343652	1793278	17185391	55763759	158261	9842985	[illegible]
11	1767984	17327444	1796281	17168661	55670539	158783	984[illegible]71	49
12	1770847	17311263	1799284	17151957	55577622	159[illegible]	98419[illegible]6	48
13	1773710	17295109	1802287	17135279	55485007	159830	9841440	47
14	1776573	17278982	1805291	17118627	55392692	160355	9840924	46
15	1779435	17262882	1808295	17182001	55300676	160881	98404[illegible]7	4[illegible]
16	1782298	17246809	1811299	17085401	55208958	161408	9[illegible]39889	[illegible]
17	1785160	17230762	1814303	17068827	55117535	161935	9839[illegible]0	4[illegible]
18	1788022	17214742	1817308	17052279	55029406	162463	98388[illegible]	42
19	1790884	17198749	1820313	17035757	54935569	162992	98[illegible]8329	4[illegible]
20	1793746	17182783	1823318	17019261	54845022	163522	98[illegible]8[illegible]	[illegible]
21	1796608	1716684[illegible]	1826324	17002790	54754764	164053	9837286	[illegible]
22	1799469	17150929	1829329	16986344	54664793	164585	98[illegible]676[illegible]	[illegible]
23	1802331	1713504[illegible]	1832335	16969924	54575107	165117	9836210	[illegible]
24	1805192	17119179	1835342	10953529	54485705	165650	9[illegible]357[illegible]4	[illegible]
25	1808053	17103342	1838349	16937158	54396586	166184	9835189	[illegible]
26	1810914	17087531	1841357	16920812	54307748	166719	9834663	[illegible]
27	1813774	17071746	1844365	16904491	54219190	167255	9834136	[illegible]
28	1816634	17055987	1847373	16888195	54130911	167792	983360[illegible]	32
29	1819495	17040154	1850382	16871924	54042909	168330	9833079	31
30	1822355	17024547	1853391	16855678	53955183	168869	9832549	30
31	1825215	17008866	1856400	16839458	53867731	169408	9832019	29
32	1828075	16993210	1859409	16823262	53780552	169948	9831488	28
33	1830935	16977579	1862419	16807090	53693644	170489	9830956	27
34	1833795	16961973	1865429	16790942	53607006	171031	9830423	26
35	1836654	16946392	1868439	16774818	53520637	171574	9829889	25
36	1839513	16930836	1871449	16758718	53434536	172118	9829354	24
37	1842372	16915305	1874460	16742642	53348702	172663	9828818	23
38	1845231	16899799	1877471	16726590	53263134	173209	9828282	22
39	1848090	16884317	1880482	16710561	53177831	173756	9827744	21
40	1850949	16868860	1883494	16694557	53092792	174303	9827200	20
41	1853808	16853428	1886506	16678577	53008016	174851	9826667	19
42	1856666	16838021	1889518	16662621	52923503	175400	9826128	18
43	1859524	16822638	1892531	16646688	52839251	175950	9825587	17
44	1862382	16807280	1895544	16630779	52755259	176501	9825046	16
45	1865240	16791946	1898558	16614893	52671525	177053	9824504	15
46	1868098	16776636	1901572	16599030	52588048	177606	9823961	14
47	1870956	16761351	1904586	16583191	52504826	178160	9823417	13
48	1873813	16746090	1907601	16567375	52421857	178715	9822872	12
49	1876670	16730853	1910616	16551583	52339140	179270	9822227	11
50	1879527	16715640	1913632	16535814	52256673	179826	9821781	10
51	1882384	16700451	1916648	16520058	52174455	180383	9821234	9
52	1885241	16685286	1919664	16504345	52092485	180941	9820686	8
53	1888098	16670145	1922680	16488645	52010762	181500	9820137	7
54	1890954	16655028	1925697	16472968	51929285	182060	9819587	6
55	1893810	16639934	1928714	16457313	51848053	182621	9819037	5
56	1896666	16624864	1931731	16441681	51767065	183183	9818486	4
57	1899522	16609817	2934749	16426072	51686321	183745	9817934	3
58	1902378	16594794	1937767	16410486	51605820	184308	9817381	2
59	1905234	16579794	1940785	16394922	51525561	184872	9816827	1
60	1908090	16564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	190809	16564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272	60
1	191094	16549865	1946822	16363862	51365765	186003	9815716	59
2	1913802	16534915	1949841	16348365	51286225	186570	9815160	58
3	191[illegible]55	16520028	1952861	16332890	51206922	187138	9814603	57
4	19195[illegible]0	16505544	1955881	16317438	51127855	187706	9814045	56
5	1922365	16490283	1658901	16302008	51049023	[illegible]77175	9813486	55
6	1925220	16475445	1961922	16286600	50970425	188845	9812926	54
7	1928074	16460630	1964943	16271214	50892060	189416	9812366	53
8	19[illegible]0928	1644583[illegible]	1967964	16255849	50813927	189988	9811850	52
9	1933782	16431067	1970985	16240506	50736025	190561	9811243	51
10	1936636	16416320	1974007	16225185	50658353	191135	9810680	50
11	1[illegible]9490	16401596	1977029	16209886	50580910	191710	9810116	49
12	1942344	163[illegible]6[illegible]95	1980052	16194610	50503695	192285	9809551	48
13	1945197	16372216	1983075	16179355	50426707	192861	9808986	47
14	1948050	16357559	1986098	16164121	50349935	193438	9808420	46
15	1950903	16342924	1989122	16148908	50273407	194016	9807853	45
16	1953756	16[illegible]28311	1992146	16133716	50197092	194595	9807285	44
17	1956609	16313720	1995171	16118545	50120999	195175	9806716	43
18	1959462	16299151	1998196	16103395	50045127	195756	9806147	42
19	1962314	16284604	2001221	16088266	49969475	196338	9805577	41
20	1965166	16270079	2004247	16073159	49894042	196920	9805006	40
21	1968018	16255576	2007273	16058073	49818827	197503	9804434	39
22	1970870	16241095	2010299	16043008	49743829	198087	9803861	38
23	1973722	16226636	2013326	16027964	49669047	198672	9803287	37
24	1976574	16212198	2016353	16012940	49594481	199258	9802712	36
25	1979425	16197782	2019380	15997937	49520130	199845	9802137	35
26	1982276	16183388	2022408	15982955	4944599[illegible]	200433	9801561	34
27	1985127	16169016	2025436	15967994	49372069	201022	9800984	33
28	1987978	16154665	2028464	15953053	49298357	201612	9800406	32
29	1990829	16140336	2031493	15938133	49224856	202203	9799827	31
30	1993679	16126028	2034522	15923233	4915156[illegible]	202795	9799247	30
31	1996530	16111742	2037552	15908355	49078482	203387	9798667	29
32	1999380	16097477	2040582	15893497	49005610	203980	9798086	28
33	2002230	16083232	2043612	15878658	48932945	204574	9797504	27
34	2005080	16069008	2046643	15863839	48860488	205169	9796921	26
35	2007930	16054805	2049674	15849040	48788238	205765	9796337	25
36	2010780	16040623	2052705	15834261	48716193	206362	9795753	24
37	2013629	16026462	2055737	15819502	48644352	206960	9795168	23
38	2016478	16012322	2058769	15804764	48572714	207558	9794582	22
39	2019327	15998203	2061801	15790046	48501278	208157	9793995	21
40	2022176	15984105	2064834	15775348	48430043	208757	9793407	20
41	2025025	15970028	2067867	15760670	48359008	209358	9792818	19
42	2027874	15955972	2070900	15746012	48288171	209960	9792228	18
43	2030722	15941916	2073934	15731373	48217531	210163	9791638	17
44	2033570	15927921	2076968	15716754	48147088	211167	9791047	16
45	2036418	15913926	2080002	15702154	48076841	211772	9790455	15
46	2039266	15899951	2083037	15687573	48006790	212378	9789862	14
47	2042114	15885996	2086073	15673012	47936934	212984	9789268	13
48	2044962	15872062	2089109	15658461	47867274	213591	9788674	12
49	2047809	15858148	2092145	15643949	47797809	214199	9788079	11
50	2050656	15844254	2095182	15629446	47728538	214808	9787483	10
51	2053503	15830371	2098219	15614953	47659460	215418	9786886	9
52	2056350	15816518	2101256	15600489	47590575	216029	9786288	8
53	2059197	15802685	2104293	15586044	47521882	216641	9785689	7
54	2062043	15788871	2107331	15571617	47453380	217254	9785090	6
55	2064889	15775077	2110369	15557210	47385067	217867	9784490	5
56	2067735	15761303	2113407	15542822	47316942	218481	9783889	4
57	2070581	15747559	2116446	15528463	47249003	219096	9783287	3
58	2073427	15733824	2119485	15514112	47181249	219712	9782684	2
59	2076272	15720109	2122525	1540978[illegible]	47113680	220329	9782080	1
60	2079117	15706414	2125565	15485467	47046295	220947	9781476	
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2079137	15706414	2125565	15485407	47046295	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	2081962	15692738	2128605	15471172	46979093	[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	2084307	15679082	2141646	15456896	46912075	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	2087652	15665445	2134687	15442639	46845240	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	2090497	15651828	2137729	15428401	46778587	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	2093342	25638230	2140771	15414181	46712115	224049	[illegible]	[illegible]
6	2096180	15624651	2143814	15399979	46645823	224672	[illegible]	[illegible]
7	2099030	15611092	2146857	15385796	4657971[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	2101874	15597552	2149900	15371632	[illegible]	[illegible]	9770[illegible]	[illegible]
9	2104718	15584031	2152944	15357484	46448023	226547	9776[illegible]	[illegible]
10	2107562	15570530	2155988	15343356	46382445	227174	[illegible]	[illegible]
11	2110405	15557048	2159032	15329246	46317043	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	2113248	15543585	2162077	15315155	46251817	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	2116091	15530141	2165122	15301062	46186767	229052	[illegible]	[illegible]
14	2118934	15516719	2168167	15287026	46121892	229689	9772928	[illegible]
15	2121777	15503308	2171212	15272988	460571[illegible]	230320	[illegible]	[illegible]
16	2124620	15489920	2174259	15258908	45992666	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	2127462	15476551	2177306	15244966	45928314	231585	[illegible]	[illegible]
18	2130304	15463200	2180352	15230981	45864135	232219	[illegible]	[illegible]
19	2133146	15449868	2183400	15217014	45800128	232854	[illegible]	[illegible]
20	2135988	15436554	2186448	15203064	45736298	233490	[illegible]	[illegible]
21	2138830	15423259	2189496	15189133	45672623	234126	[illegible]	[illegible]
22	2141671	15409982	2192544	15175219	45609123	234763	[illegible]	[illegible]
23	2144512	15396724	2195593	15161323	45545790	235401	[illegible]	[illegible]
24	2147353	15383484	2198642	15147444	45482623	236040	[illegible]	[illegible]
25	2150194	15370262	2201692	15133582	45419621	236680	[illegible]	[illegible]
26	2153035	15357059	2204742	15119738	45356785	237321	9765472	34
27	2155876	15343874	2207792	25105911	45294114	237963	976484	33
28	2158716	15330708	2210843	15092102	45231607	238600	9764[illegible]	32
29	2161556	15317560	2213894	15078310	45169263	239250	9763589	31
30	2164396	15304430	2216946	15064535	45107083	239895	9762960	30
31	2167216	15291319	2219998	15050779	45045065	249540	[illegible]	2[illegible]
32	21700[illegible]0	15278226	2223051	15037040	44983211	241186	9761699	28
33	2172916	15265150	2226104	15023317	44921521	241833	9761057	27
34	2175755	15252092	2229157	15009611	44859993	242481	9760435	26
35	2178594	15239052	2232211	14995922	44798626	243130	9759803	25
36	2181433	15226030	2235265	14982250	44737419	243780	9759168	24
37	2184272	15213025	2238319	14968594	44676371	244431	9758533	23
38	2187111	15200038	2241374	14954955	44615481	245083	9757897	22
39	2189949	15187068	2244429	14941333	44554749	245735	[illegible]	21
40	2192787	15174110	2247485	14927728	44494174	246388	[illegible]	20
41	2195625	15161182	2250541	14914140	44433756	247042	9755985	19
42	2198463	15148266	2253597	14900569	44373494	249697	9755346	18
43	2201300	15135367	2256654	14887014	44313387	248353	9754706	17
44	2204137	15122485	2259711	14873475	44253435	249010	9754065	16
45	2206974	15109621	2262769	14859953	44193637	249668	9753423	15
46	2209811	15096774	2265827	14846447	44133992	250327	9752781	14
47	2212648	15083944	2268885	14832957	44074501	250987	8752139	13
48	2215485	15071132	2271944	14819485	44015263	251647	9751494	12
49	2218322	15058337	2275003	14806029	43955977	252308	9750849	11
50	2221158	15045559	2278063	14792589	43896942	252970	9750203	10
51	2223994	15032799	2281122	14779166	43838057	253633	9749557	9
52	2226830	15020056	2284183	14765759	43779321	254297	9748910	8
53	2229666	15007330	2287244	14752368	43720733	254962	9748262	7
54	2232502	14994620	2290305	14738992	43662293	255628	9747613	6
55	2235337	14981927	2293367	14725632	43604000	256295	9746963	5
56	2238172	14969251	2296429	14712288	43545855	256963	9746312	4
57	2241007	14956592	2299492	14698960	43487857	257632	9745660	3
58	2243842	14943950	2302555	14685649	43430006	258301	9745008	2
59	2246677	14931325	2305618	14672354	43372301	258971	9744355	1
60	2249511	14918717	2308682	14659075	43314742	259942	9743700	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2249511	14918717	2308682	14059075	43314749	259642	9743001	60
1	2252345	14906126	2311746	14645812	43257328	260314	9743045	59
2	2255179	14893551	2314810	14632564	43200060	260987	9742389	58
3	2258013	14580993	2317875	14619332	43142947	261661	9741733	57
4	2260847	14868452	2320940	14606116	43085958	262336	9741076	56
5	2203680	14855927	2324006	14592916	43029122	263011	9740418	55
6	2266513	14843419	2327072	14579732	42972429	263687	9739759	54
7	2269146	14830928	2330139	14566564	42915878	264364	9739099	53
8	2272179	14818453	2333206	14553411	42859468	265042	9738439	52
9	2275012	14805995	2336273	14540274	42803199	265721	9737778	51
10	2277844	14793553	2339341	14527152	42747070	266401	9737116	50
11	2280676	14781128	2342419	14514046	42691080	267082	9736453	49
12	2283508	14768719	2345478	14500955	42635228	267764	9735789	48
13	2286340	14756325	2348547	14487878	42579514	268447	9735124	47
14	2289172	14743947	2351616	14474817	42523937	269130	9734459	46
15	2292004	14741585	2354686	14461771	42468497	269814	9733793	45
16	2294835	14719239	2357757	14448740	42413193	270499	9733126	44
17	2297666	14706909	2360828	14435724	42358025	271185	9782458	43
18	2300497	14694595	2363899	14422723	42302993	271872	9731789	42
19	2303328	14682297	2366971	14409737	42248096	272560	9731120	41
20	2306159	14670015	2370043	14396766	42193334	273249	9730450	40
21	2308989	14657749	2373116	14383810	42138706	273939	9729779	39
22	2311819	14645498	2376189	14370868	42084211	274630	9729107	38
[illegible]	2314649	14633263	2379263	14357941	42029849	275322	9728434	37
24	2317479	14621044	2382337	14345029	41975617	276015	9727760	36
25	2320309	14608841	2385411	14332132	41921518	276709	9727085	35
26	2323131	14596654	2388486	14319250	41867350	277404	9726409	34
27	232596	14584483	2391561	14306384	41813712	278099	9725733	33
28	232879	14572328	2394636	14293533	41760003	278795	9725056	32
29	2331625	14560189	2397712	14280697	41706424	279492	9724378	31
30	2334454	14548066	2400788	14267876	41652974	280190	9723699	30
31	2337282	14535958	2403865	14255069	41599651	280889	9722020	29
32	2340110	14523866	2400942	14242277	41546464	281589	9722340	28
33	2342938	14511789	2410020	14229500	41493407	282289	9721659	27
34	2345766	14499727	2413098	14216737	41440480	282990	9720977	26
35	2348594	14487680	2416176	14203988	41387683	283692	9780294	25
36	2351421	14475648	2419255	14191253	41335015	284395	9719610	24
37	2354248	14463632	2422334	14178533	41282475	285099	9718926	23
38	2357073	14451621	2425414	14165827	41230062	285804	9718241	22
39	2159002	14439645	2428494	14153135	41177775	286510	9717555	21
40	2162729	14427674	2431574	14140457	41125614	287217	9716868	20
41	2365555	14415718	2434655	14127793	41073577	287925	9716180	19
42	2368381	14403777	2437736	14115143	41021663	288934	9715491	18
43	2371207	14391851	2440818	14102507	40969871	289344	9714802	17
44	2374033	14379941	2443900	14089887	40918201	290054	9714112	16
45	2376859	14368046	2446983	14077281	40866652	290765	9713421	15
46	2379684	14356166	2450066	14064689	40815224	291477	9712729	14
47	2382509	14344301	2453150	14052111	40763917	292190	9712036	13
48	2385334	14332451	2456234	14039547	40712731	292904	9711343	12
49	2388159	14320616	2459319	14026997	40661665	293619	9710649	11
50	2390983	14308796	2462404	14014461	40610718	294335	9709954	10
51	2393808	14296991	2465490	14001939	40559890	295052	9709258	9
52	2396632	14285200	2468576	13989430	40509183	295770	9708561	8
53	2399456	14273424	2471662	13976935	40458596	296489	9707865	7
54	2402280	14261662	2474749	13964451	40408129	297209	9707165	6
53	2405104	14249915	2477836	13951986	40357781	297929	9706466	5
56	2407927	14238182	2480924	13939532	40307552	298650	9705766	4
57	2410750	14226464	2484012	13927092	40257440	299372	9705065	3
58	2413574	14214761	2487101	13914666	40207446	300095	9704363	2
59	2416396	14203072	2490191	13902253	40157569	300819	9703660	1
[illegible]	2419219	14191398	2494280	13889854	40107808	301544	9702957	0
								M.

G.14 | Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarithm. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	S[illegible]	
0	2419219	14191398	2493280	13889854	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	2422041	14179734	2496370	13877468	40058165	302270	[illegible]	[illegible]
2	2423863	14168092	2499411	13865095	40008633	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3	2427685	14156461	2502552	13852737	39959218	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	2430507	14144844	2505643	13840392	39909917	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	2433329	14133242	2508735	13828061	39860729	305181	[illegible]	[illegible]
6	2436150	14121654	2511827	13815743	39811654	305911	[illegible]	[illegible]
7	2438971	14110081	2514920	13803439	39762695	[illegible]	[illegible]	[illegible]
8	2441792	14098522	2518013	13791148	39713852	[illegible]	[illegible]	[illegible]
9	2444613	14086977	2521106	13778870	39665124	308107	[illegible]	[illegible]
10	2447434	14075447	2524200	13766606	39616509	308841	[illegible]	[illegible]
11	2450254	14063931	2527294	13754355	39568006	[illegible]	[illegible]	[illegible]
12	2453074	14052429	2530389	13742117	39519614	[illegible]	[illegible]	[illegible]
13	2455894	14040940	2533484	13729891	39471331	311049	[illegible]	[illegible]
14	2458714	14029465	2536580	13717679	39423158	311786	[illegible]	[illegible]
15	2461533	14018004	2539676	13705480	39375094	312524	[illegible]	[illegible]
16	2464352	14006557	2542773	13693294	39327139	[illegible]	[illegible]	[illegible]
17	2467171	13995124	2545870	13681121	39279294	314003	[illegible]	[illegible]
18	2469990	13983705	2548968	13668961	39231557	314744	[illegible]	[illegible]
19	2472809	15972300	2552066	13656814	39183929	315480	[illegible]	[illegible]
20	2475628	13960909	2555165	13644680	39136409	316229	[illegible]	[illegible]
21	2478446	13949532	2558264	13632559	39088998	316973	[illegible]	[illegible]
22	2481264	13938168	2561364	13620450	39041695	317718	[illegible]	[illegible]
23	2484082	13926818	2564404	13608354	38994501	318464	[illegible]	[illegible]
24	2486900	[illegible]	2567564	13596272	38947416	[illegible]	[illegible]	[illegible]
25	2489717	13904159	2570665	13584202	38900438	319957	[illegible]	[illegible]
26	2492534	13892850	2573766	13572145	38853567	320705	[illegible]	[illegible]
27	2495351	13881554	2576868	13560100	38806801	321454	[illegible]	[illegible]
28	2498168	13870272	2579970	13548068	38760139	322204	[illegible]	[illegible]
29	2500984	13859004	2583073	13536049	38713580	322955	[illegible]	[illegible]
30	2503800	13847749	2586176	13524042	38667125	[illegible]	[illegible]	[illegible]
31	2506616	13836508	2589280	13512048	38620772	324460	[illegible]	[illegible]
32	2509431	13825280	2592384	13500066	38574525	325214	9680017	[illegible]
33	2512248	13814066	2595489	13488097	38528384	325909	9679287	27
34	2515064	13802865	2598594	13476141	38482347	326724	9678556	26
35	2517879	13791678	2601700	13464198	38436414	327480	9677824	25
36	2520694	13780504	2604806	13452267	38390584	328237	9677091	24
37	2523509	13769343	2607912	13440348	38344857	328995	9676357	23
38	2526324	13758195	2611019	13428441	38299232	329754	9675623	22
39	2529138	13747061	2614126	13416547	38253708	330514	9674888	21
40	2531952	13735940	2617234	13404665	38208285	331275	[illegible]	20
41	2534766	13724833	2620342	13392796	38162963	332037	9673415	19
42	2537580	13713739	2623451	13380939	38117740	332800	9672677	18
43	[illegible]	13702658	2626560	13369094	38072616	333564	9671938	17
44	2543206	13691590	2629670	13357262	38027592	334328	9671199	16
45	2546019	13680535	2632780	13345442	37982666	335093	9670459	15
46	2548831	13669493	2635891	13333634	37937838	335859	9669718	14
47	2551645	13658464	2639002	[illegible]	37893109	336626	9668976	13
48	2554458	13647448	2642114	13310054	37848479	337394	9668233	12
49	2557270	13636445	2645226	13298282	37803948	338163	9667490	11
50	2560082	83625454	2648339	13286521	37759515	338933	9666746	10
51	2562894	13614476	2651452	13274772	37715180	339704	9666001	9
52	2565706	13603511	2654566	13263035	37670943	340476	9665255	8
53	2568517	13592559	2657680	13251510	37626803	341249	9664508	7
54	2571328	13581620	2660795	13239597	37582760	342023	9663761	6
55	2574139	13570694	2663910	13227896	37538814	342798	9663013	5
56	2576950	13559781	2667026	13216208	37494964	343573	9662264	4
57	2579760	13548880	2670142	13204531	37451210	344349	9661514	3
58	2582570	13537992	2673258	13192866	37407551	345126	9660763	2
59	2585380	13527117	2676375	13181213	37363987	345904	9660011	1
60	2588190	13516255	2679492	13165572	37320517	346683	9659258	0
								M.

Contra regulam adhibendi. | G.75

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2588190	13516255	2679492	13103374	37320517	346683	9659258	60
1	2591000	13505406	2682610	13157943	37277141	347463	9658505	59
2	2593810	13494570	2685728	13146326	37233859	348244	9657751	58
3	2596618	13483745	2688847	13134720	37190670	349026	9656996	57
4	2599427	13472934	2691966	13125126	37147574	349808	9656240	56
5	2602236	13402435	2695086	13111544	37104570	350591	9655484	55
6	2605045	13451348	2698206	13099973	37061659	351375	9654727	54
7	2607852	13440573	2701327	13088413	37018840	352160	9653969	53
8	2610661	13429810	2704448	13076864	36976114	352940	9653210	52
9	2613469	13419060	2707570	13065327	36933479	353733	9652450	51
10	2616277	13408322	2710693	13053801	36890936	354521	9651689	50
11	2619084	13397596	2713816	13042286	36848483	355310	9650927	49
12	2621891	13380183	2716940	13030783	36806121	356100	9950165	48
13	2624698	13376182	2720064	13019291	36763849	356891	9649402	47
14	2627505	13365493	2723189	13007810	36721666	357683	9648638	46
15	2630312	13354817	2726314	12996341	36679574	358476	9647873	45
16	2633118	13344153	2729439	12984883	36637572	359270	9647108	44
17	2635924	13333502	2732565	12973438	36595659	360064	9646342	43
18	2638730	13322863	2735691	12962004	36553836	360859	9645575	42
19	2641536	13312237	2738818	12950582	36512103	361655	9644807	41
20	2644342	13301623	2741945	12939171	36470455	362452	9644038	40
21	2647147	13291022	2745073	12927772	36428905	363250	9643268	39
22	2649952	13280432	2748201	12916383	36387437	364049	9642498	38
23	2652757	13269854	2751330	12905005	36346060	364849	9641727	37
24	2655562	13259288	2754459	12893638	36304771	365650	9640955	36
25	2658366	13248734	2757589	12882282	36263570	366452	9640182	35
26	2661170	13238191	2760729	12870936	36222456	367255	9639408	34
27	2663974	13227660	2763850	12859601	36181427	368059	9638633	33
28	2666774	13217141	2766981	12848278	36140483	36886	9637858	32
29	2669580	13206633	2770113	12836965	36099623	369668	9637082	31
30	2672383	13196137	2773245	12825663	36058848	370474	9636305	30
31	2675186	13185653	2776378	12814372	36018156	371281	9635527	29
32	2677989	13175181	2779511	12803092	35977550	372089	9634748	28
33	2680792	13164721	2782645	12791823	35937029	372898	9633969	27
34	2683595	13154273	2785779	12780565	35896593	373708	9633189	26
35	2686397	13143837	2788914	12769318	35856241	374516	9632408	25
36	2689199	13133413	2792030	12758082	35815973	375331	9631626	24
37	2692001	13123000	2795186	12746856	35775789	376144	9630843	23
38	2694802	13112599	2798323	12735641	35735689	376958	9630059	22
39	2697603	13102210	2801460	12724436	35695692	379772	9629275	21
40	2700404	13091833	2804597	12713246	35655739	378587	9628490	20
41	2703205	13081468	2807735	12702065	35615888	379403	9627704	19
42	2706005	13071114	2810873	12690894	35576121	380220	9626917	18
43	2708805	13060771	2814012	12679733	35536438	381038	9626129	17
44	2711605	13050440	2817151	12668583	35496838	381857	9625341	16
45	2714405	13040120	2820291	12657443	35457320	382677	9624552	15
46	2717204	13029812	2823432	12646314	35417883	383498	9623762	14
47	2720003	13019515	2826573	12635195	35378528	384320	9622971	13
48	2722802	13005229	2829714	12624086	35339253	385143	9622179	12
49	2725601	12998955	2832856	12612988	35300059	385967	9621387	11
50	2728400	12988692	2835999	12601901	35260945	386791	9620594	10
51	2731198	12978441	2839142	12590825	35221911	387616	9619800	9
52	2733996	12968291	2842286	12579759	35182956	388442	9619005	8
53	2736794	12957972	2845430	12568793	35144080	389269	9618209	7
54	2639592	12947755	2848575	12557658	35105283	390097	9617413	6
55	2742389	12937549	2851720	12546623	35066565	390926	9616616	5
56	2745186	12927354	2854866	12535598	35027925	391756	9615818	4
57	2747983	12917171	2858012	12524584	34989364	392587	9615019	3
58	2750789	12906999	2861159	12513580	34950881	393419	9614219	2
59	2753577	12896838	2864306	12502586	34912477	394252	9613418	1
60	2756373	12886689	2867454	12491603	34874151	395086	5012617	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2756373	12886689	2867453	12491603	34874151	395[illegible]86	9612[illegible]	[illegible]
1	2759169	12876551	2870601	12480630	34835903	395921	96118[illegible]	[illegible]
2	2761965	12866423	2873749	12459667	34797733	396756	9611[illegible]	[illegible]
3	2764761	12856306	2876898	12458714	34759640	39759[illegible]	96[illegible]	[illegible]
4	2767556	12846200	2880048	12447771	34721625	398429	960[illegible]40[illegible]	[illegible]
5	2770351	12836105	2883198	12436838	34683686	399267	9608598	[illegible]
6	2773146	12826021	2886349	12425915	34645824	400[illegible]06	960[illegible]9	[illegible]
7	2775941	12815948	2889501	12415002	34608038	400946	9606[illegible]8	[illegible]
8	2778735	12805886	2892653	12404099	345[illegible]0327	40[illegible]787	96[illegible]7	[illegible]
9	2781529	12795835	2895806	12393206	34532692	402629	96[illegible]68	[illegible]
10	2784323	12785795	2898960	12382323	34495132	403472	9604[illegible]9	[illegible]
11	2787117	12775766	2902114	12371450	34457647	404316	96[illegible]49	[illegible]
12	2789911	12765748	2905268	12360587	34420237	405161	9[illegible]9[illegible]	48
13	2792704	12755741	2908423	12349734	34382903	406007	96[illegible]21[illegible]	47
14	2795497	12745745	2911578	12338891	34345644	406884	960[illegible]	46
15	2798290	12735760	2914734	12328059	34308459	40770[illegible]	9[illegible]49[illegible]	4[illegible]
16	2801082	12725785	2917890	12317236	34271348	408549	95996[illegible]	4[illegible]
17	2803874	12715821	2921047	12306423	34234310	409398	95988[illegible]	4[illegible]
18	2806666	12705868	2924204	12295620	34197345	410248	9[illegible]98[illegible]	4[illegible]
19	2809458	12695926	2927362	12284827	34160453	411099	95972[illegible]	4[illegible]
20	2812250	12685995	2930520	12274044	34123634	411951	9[illegible]964[illegible]	[illegible]
21	2815041	12676075	2933679	12263271	34086888	412804	9[illegible]956[illegible]	[illegible]
22	2817832	12666166	2936839	12252508	34050215	413658	95947[illegible]	[illegible]
23	2820623	12656267	2939999	12241754	34013615	414513	959[illegible]	[illegible]
24	2823414	12646379	2943160	12231010	33977088	415369	9[illegible]9[illegible]	[illegible]
25	2826205	12636501	2946321	12220275	33940634	416226	959[illegible]	[illegible]
26	2828994	12626633	2949483	12209550	33904252	417083	959149[illegible]	[illegible]
27	2831784	12616776	2952645	12197835	33867942	417941	95906[illegible]	[illegible]
28	2834574	12606029	2955808	12188129	33831708	418800	95[illegible]9848	[illegible]
29	2837364	12597093	2958971	12177433	33795535	419660	9589023	[illegible]
30	2840153	12587267	2962135	12166746	33759438	420521	9[illegible]88197	[illegible]
31	2842942	12577452	2965299	12156069	33723410	421383	958737[illegible]	29
32	2845731	12567647	2968464	12145401	33687453	422240	9586544	28
33	2848520	12557853	2971629	12134743	33651566	423110	9585716	27
34	2851308	12548069	2974795	12124094	33615750	423975	9584887	26
35	2854096	12538296	2977962	12113455	33580005	424841	9584057	25
36	2856884	12528533	2981129	12102825	33544330	425708	9583226	24
37	2859672	12518780	2984297	12092204	33508725	426576	9582395	23
38	2862459	12509038	2987465	12081593	33473188	427445	9581563	22
39	2865246	12499306	2990634	12070992	33437720	428314	9580730	21
40	2868034	12489585	2993804	12060401	33402321	429184	9579896	20
41	2870819	12479874	2996973	12049819	33366990	430055	9579061	19
42	2873605	12470174	3000142	12039247	33331728	430927	9578225	18
43	2876391	12460484	3003314	12028684	33296534	431800	9577389	17
44	2879177	12450804	3006486	12018130	33261408	432674	9576552	16
45	2881963	12441134	3009658	12007585	33226351	433549	9575714	15
46	2884748	12431474	3012831	11997949	33191362	434425	9574875	14
47	2887533	12421824	3016004	11986522	33156441	435302	9574036	13
48	2890318	12412184	3019178	11976004	33121588	436180	9573196	12
49	2893103	12402554	3022353	11965495	33086802	437059	9572355	11
50	2895888	12392934	3025528	11954996	33052082	437938	9571513	10
51	2898672	12383324	3028701	11944506	33017427	438818	9570670	9
52	2901456	12373724	3031879	11934025	32982839	439699	9569826	8
53	2904240	12364134	3035055	11923553	32948317	440581	9568982	7
54	2907023	12354554	3038232	11913090	32913862	441464	9568137	6
55	2909806	12344984	3041410	11902636	32879487	442348	9567291	[illegible]
56	2912589	12335425	3044588	11892192	32845153	443233	9566444	4
57	2915371	12325876	3047767	11881757	32810898	444119	9565596	3
58	2918153	12316337	3050946	11871330	32776709	445007	9564747	2
59	2920935	12306809	3054126	11860912	32742586	445896	9563898	1
60	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	9563048	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	6563048	60
1	2926499	12287780	3060487	11840104	32674536	447676	9562197	59
2	2929280	12278280	3063669	11829713	32640597	448567	9561345	58
3	2932061	1[illegible]68790	3066851	11819331	32606731	449459	9560492	57
4	2934842	12259310	3070034	11808958	32572937	450352	9559639	56
5	2937623	12249840	3073218	11798594	32539196	451246	9558785	55
6	2940403	12240379	3076402	11788239	32505517	452140	9557930	54
7	2943183	12230928	3079587	11777893	32471901	453035	9557074	53
8	294[illegible]	12221487	3082772	11767556	32438348	453931	9556217	52
9	2948743	12212056	3085958	11757228	32404858	454828	9555360	51
10	2951523	12202634	3089144	11746908	32371430	455726	9554502	50
11	2954[illegible]02	12193222	3092331	11736597	32338074	456625	9553643	49
12	295[illegible]1	12183820	3095518	11726295	32304762	457525	9552783	48
13	2959860	12174427	3098706	11716001	32271534	458426	9551922	47
14	2962630	12165044	3101895	11705716	32238349	459328	9551061	46
15	2065416	12155671	3105084	11695440	32205237	460231	9550199	45
16	2968194	12146308	3108274	11685173	32172187	461135	9549336	44
17	2977209	12136954	3111464	11674914	32139200	462040	9548472	43
18	297[illegible]750	12127610	3114655	11664695	32106275	462945	9547607	42
19	[illegible]976527	12118276	3117846	11654425	32073413	463851	9546742	41
20	2979304	12108952	3121038	11644194	32040613	464758	9545876	40
21	2982080	12099637	3124230	11633971	32007875	465666	9545009	39
22	2984857	12090332	3127423	11623757	31975197	466575	9544141	38
23	2987633	12081036	3130617	11613551	31942580	467485	9543272	37
24	2990409	12071749	3133811	11603353	31910024	468396	9542403	36
25	2993185	12062472	3137006	11593164	31877528	469308	9541533	35
26	2995960	12053204	3140201	11582983	31845093	470221	9540662	34
27	2998735	1204[illegible]945	3143397	11572810	31813717	471135	9539790	33
28	3001510	12034690	3146594	11562646	3178040[illegible]	472050	9538917	32
29	3004284	12025456	3149791	11552490	31748144	472966	9538043	31
30	3007058	1201622[illegible]	3152989	11542341	31715946	473884	9537169	30
31	3009832	12007004	3156187	11532202	31683807	474802	9536294	29
32	3012606	11997792	3159386	11522071	31651727	475721	9535418	28
33	3015380	11988589	3162585	11511948	31619705	476641	9534541	27
34	3018153	11979396	3165785	11501835	31587742	477561	9533664	26
35	3020926	11970212	3168986	11491730	31555838	478482	9532786	25
36	3023699	11961037	3172187	11481633	31523992	479404	9531907	24
37	3026472	11951872	3175389	11471545	31492205	480327	9531027	23
38	3029244	11942716	3178591	11461465	31460476	481251	9530146	22
39	3032016	1193356[illegible]	3181794	11451393	31428805	482176	9529264	21
40	3034788	11924431	3184998	11441329	31397191	483102	9528382	20
41	3037559	11915303	3188202	11431274	31365636	484029	9527499	19
42	3040339	11906184	3191407	11421227	31334138	484957	9526615	18
43	3043101	11897074	3194613	11411188	31302698	485886	9525730	17
44	3045872	11887973	3197819	11401157	31271315	486816	9524844	16
45	3048643	11878881	3201026	11391134	31239989	487747	9523958	15
46	3051413	11869798	3204233	11381119	31208720	488679	9523071	14
47	3054183	11860724	3207441	11371113	31177508	489611	9522183	13
48	3056953	11851659	3210649	11361115	31146352	490544	9521294	12
49	3059723	11842603	3213858	11351125	31115252	491478	9520404	11
50	3062492	11833557	3217067	11341144	31084208	492413	9519514	10
51	3065261	11824520	3220277	11331171	31053221	493349	951862[illegible]	9
52	3068030	11815492	3223488	11321206	31022289	494286	9517731	8
53	3070798	11806473	3226699	11311249	30991413	495224	9516838	7
54	3073566	11797463	3229911	11301300	30960593	496163	9515944	6
55	3076334	11788461	3233124	11292358	30929828	497103	9515050	5
56	3079102	11779468	3236337	11281424	30899119	498044	9514155	4
57	3081869	11770484	3239551	11271498	30868465	498986	9513259	3
58	3084636	11761509	3242766	11261580	30837866	499929	9512362	2
59	3087402	11752543	3245981	11251670	30807323	509873	9511464	1
60	3090170	11743586	3249197	11241768	30776834	501818	9510565	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae Logarith. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	M
0	3090170	11743580	3249197	11241768	307768[illegible]	5[illegible]16	9[illegible]	[illegible]
1	3092936	11734638	3252413	11231874	30746400	5[illegible]2764	9509[illegible]	[illegible]
2	3095702	11725699	3255630	11221988	30716020	503[illegible]1	9508[illegible]	[illegible]
3	3098468	11716768	3258848	11212109	30685695	5[illegible]4659	95[illegible]	[illegible]
4	3101234	11707640	3262066	11202239	30655423	5056[illegible]	9[illegible]	[illegible]
5	3103999	11698933	3265285	1119237[illegible]	30625205	596556	95[illegible]	[illegible]
6	3106764	11690029	3268504	11182523	30595041	507506	95[illegible]	[illegible]
7	3109529	11681133	3271724	11172676	305649[illegible]0	508457	9[illegible]	[illegible]
8	3112294	11672246	3274944	11162837	30534872	509409	95[illegible]49	[illegible]
9	3115058	11663368	3278165	11153006	30504867	510362	95[illegible]2443	[illegible]
10	3117822	11654499	3281387	11143184	30474915	511316	9501[illegible]36	[illegible]
11	3120586	11645638	3284609	11133367	30445015	512271	9500[illegible]9	[illegible]
12	3123349	11636786	3287832	11123559	30415169	51322[illegible]	9499721	[illegible]
13	3126112	11627943	3291055	11113759	30385375	514184	9498812	47
14	3128875	11619199	3294280	1110396[illegible]	30355635	515142	949[illegible]2	46
15	3131639	11610283	3297505	1109418[illegible]	30325947	516101	949699[illegible]	[illegible]
16	3134400	11601466	3300731	11084405	30296312	517061	949[illegible]60	44
17	3137162	11592658	3303957	11074637	30266730	5180[illegible]1	949[illegible]108	[illegible]
18	3139924	11583858	3307184	11064876	30237200	518982	94942[illegible]5	42
19	3142686	11575067	3310411	11055123	30207723	519944	949[illegible]4	[illegible]
20	3145448	11566285	3313639	11045378	30178299	520907	94924[illegible]	40
21	3148209	11557511	3316868	11035640	30148927	521871	9491[illegible]	[illegible]
22	3150970	11548746	3320097	11025910	30119605	522836	9490[illegible]9	[illegible]
23	3153731	11539989	3323327	11016178	30090334	523802	94890[illegible]	[illegible]
24	3156491	11531240	3326558	11006471	30061113	524769	9488[illegible]	[illegible]
25	3159251	11522500	3329789	10996763	30031943	525737	94878[illegible]	[illegible]
26	3162011	11513768	3333020	10987062	30002823	526706	948692	[illegible]
27	3164770	11595045	3336252	10977369	29973753	52767[illegible]	948[illegible]	[illegible]
28	3167529	11496330	3339485	1096768[illegible]	29944734	52864[illegible]	948508	[illegible]
29	3170288	11487624	3342719	10958004	29915765	52962[illegible]	948416[illegible]	[illegible]
30	3173047	11478926	3345953	10948332	29886847	530594	9483[illegible]	[illegible]
31	3175805	11470237	3349188	10938669	29857978	531568	948231	29
32	3178563	11461556	3352423	10929013	29829160	53254[illegible]	9481390	[illegible]
33	3181321	11452883	3355659	10919364	29800392	533519	948046[illegible]	[illegible]
34	3184079	11444219	3358896	10909723	29771674	534496	9479539	[illegible]
35	3186837	11435563	3362133	10900090	29743006	536473	9478612	25
36	3189594	11426915	3365371	10890464	29714388	536451	947768[illegible]	24
37	3192351	11418275	3368610	10880845	29685822	537430	9476757	[illegible]
38	3195107	81409644	3371850	10871234	29657301	538410	9475821	22
39	3197864	11401021	3375090	10861630	29628831	539391	947489[illegible]	21
40	3200620	11392406	3378331	10852033	29600411	540373	9473967	20
41	3203374	11383800	3381572	10842444	29572041	541356	9473035	19
42	3206130	11375202	3384814	10832862	29543719	542340	947210[illegible]	18
43	3208885	11366612	3388057	1082[illegible]287	29515446	543325	9471170	17
44	3211640	11358030	3391300	10813819	29487221	544311	9470236	16
45	3214395	11349456	3394544	10804158	29459043	545298	9469301	15
46	3217150	11340891	3397788	10795605	29430913	546286	9468366	14
47	3219904	11332334	3401033	10785059	29402831	547275	9467430	13
48	3222658	11323785	3404279	10775520	29374807	548265	9466493	12
49	3225410	11315244	3407524	10765988	29346811	549156	9465555	11
50	3228164	11306711	3410771	10756462	29318873	550249	9464616	10
51	3230917	11298186	3414029	10746944	29290982	551242	9463677	9
52	3233671	11289670	3417267	107374[illegible]4	29263139	552236	9462737	8
53	3236412	11281162	3420516	107279[illegible]1	29235343	553231	9461796	7
54	3239174	11272662	3423766	10718436	29207595	554226	9460854	6
55	3241926	11264170	3427016	10708948	29179895	555222	9459911	5
56	3244678	11255686	3430266	10699467	29152243	556219	9458968	4
57	32474[illegible]9	11247210	3433518	10689993	29124638	557217	9458024	3
58	3250180	11238742	3436770	10680526	29097080	558216	9457079	2
59	3252932	11230282	3440023	10671066	29069569	559216	9456133	1
60	3255682	11221830	3443276	10661623	29042105	560217	9455186	0

M

§. 19 | Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3255682	11221810	3443276	10661613	29042109	560217	9455186	60
1	3258432	11213386	3446510	10652167	29014688	561219	9454239	59
2	3261182	11204950	3449785	10642728	28987318	562222	9453291	58
3	3263931	11196[illegible]	3453040	10633296	28959988	563226	9452342	57
4	3266681	11188102	3456296	10623871	28932707	564231	9451392	56
5	3269430	11179690	3459553	10614453	28905472	565237	9450441	55
6	3272179	11171286	3462810	10605042	28878283	566244	9449490	54
7	3274927	11162889	3466068	10595637	28851139	567252	9448538	53
8	3277675	111545[illegible]	3469326	10586239	28824040	568291	9447585	52
9	3280423	11146119	3472585	10576849	28796987	569270	9446631	51
10	3283171	111[illegible]746	3475845	10567466	28769979	570280	9445676	50
11	3285918	111[illegible]9381	3479105	10558090	28743015	571291	9444720	49
12	3288665	11121[illegible]24	3482366	10548721	28716090	572303	9443764	48
13	3291412	11112675	3485628	10539359	28689222	573316	9442807	47
14	3294159	11104334	3488891	10530004	28662393	574330	9441849	46
15	3296906	11096000	3492154	10520655	28635608	575345	9440890	45
16	3299652	11087674	3495418	10511313	28608868	575361	9439931	44
17	3302398	11079356	3498683	10501997	28582172	577370	9438971	43
18	3305144	110[illegible]1046	3501949	10492648	28555520	578398	9438010	42
19	3307889	11062744	3505215	10483326	28528913	579418	9437048	41
20	3310634	11054449	3508482	10474010	28502350	580439	9436085	40
21	3313379	11046162	3511749	10464702	28475832	581460	9435122	39
22	3316123	11037883	3515017	10455401	28449357	582482	9434158	38
23	3318867	11029612	3518286	10446107	28422926	583505	9433193	37
24	3321611	11021348	3521555	10436819	28396539	584529	9432227	36
25	3324355	11013092	3524825	10427538	28370195	585554	9431260	35
26	3327098	11004843	3528096	10518263	28343895	386580	9430291	34
27	3329841	10996602	3531368	10408995	28317638	587607	9429325	33
28	3332585	10988368	3534640	10399733	28291424	588635	9428356	32
29	3335327	10980142	3537913	10390479	28265253	589663	9427386	31
30	3338069	10971923	3541186	10381231	28239125	590692	9426415	30
31	3340811	10963712	3544460	10371990	28213040	591722	9425444	29
32	3343553	10955509	3547735	10362756	28186998	592753	9424472	28
33	3346294	10947313	3551010	10353528	28160999	593785	9423499	27
34	3349035	10939125	3554286	10344307	28135043	594818	9422525	26
35	3351776	10930944	3557563	10335092	28109129	595852	9421550	25
36	3354516	10922771	3560840	10325884	28083258	596887	9420575	24
37	3357256	10914606	3564118	10316682	28057429	597924	9419599	23
38	3359996	10906448	3567397	10307486	28031642	598962	9418622	22
39	3362736	10898298	3570676	10298397	28005898	600001	9417644	21
40	3365475	10890156	3573956	10289115	27980196	601041	9416665	20
41	3368214	10882021	3577237	10279940	27954536	602081	9415685	19
42	3370953	10873894	3580519	10270772	27928917	603122	9414705	18
43	3373691	10865774	3583801	10261610	27903339	604264	9413724	17
44	3376429	10857661	3587084	10252454	27877803	605207	9412742	16
45	3379167	10849555	3590367	10243304	27852308	606251	9411760	15
46	3381905	10841457	3593651	10234161	27826855	607296	9410777	14
47	3384642	10833366	3596936	10225024	27801443	608342	9409793	13
48	3387379	10825282	3600221	10215893	27776072	609389	9408808	12
49	3390116	10817206	3603507	10206770	27750742	610436	9407822	11
50	3392852	10809137	3606794	10197653	27725453	611484	9406836	10
51	3395588	10801075	3610082	10188542	27700204	612533	9405849	9
52	3398324	10793021	3613370	10179438	27674995	613583	9404861	8
53	3401060	10784974	3616659	10170340	27649827	614634	9403872	7
54	3403795	10776934	3619949	10161248	27624699	615686	9402882	6
55	3406530	10768902	3623239	10152162	27599612	616740	9401891	5
56	3409265	10760877	3626530	10143082	27574565	617795	9400900	4
57	3411999	10752860	3629822	10134009	27549559	618851	9399908	3
58	3414733	10744850	3633115	10124942	27524592	619908	9398915	2
59	3417467	10736847	3636408	10115881	27499665	620966	9397921	1
60	3420201	10728852	3639702	10106827	27474777	622025	9396926	0
								M.

Contra regulam adhibendi. §. 70

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3420201	10728852	3639702	10100827	27474777	[illegible]	9[illegible]	[illegible]
1	3422934	10720865	3642997	10097781	27449929	6230[illegible]4	[illegible]	[illegible]
2	3425667	10712885	3646293	10088741	27425120	624144	93949[illegible]	[illegible]
3	3428400	10704912	3649589	10079707	27400350	625205	[illegible]	[illegible]
4	3431133	10696945	3652886	10070678	27375620	626267	939[illegible]9	[illegible]
5	3433865	10688984	3656183	10061654	27350929	627330	939194	[illegible]
6	3436597	10681030	3659481	10052630	27326278	628394	939094	[illegible]
7	3439329	10673085	3662780	10043626	27301667	629459	938994	[illegible]
8	3442060	10665147	3666079	10034822	27277095	630525	9388941	[illegible]
9	3444791	10657216	3669379	10025624	27252563	631592	938[illegible]9[illegible]	[illegible]
10	3447522	10649292	3672680	10016632	27228070	632660	93869[illegible]	[illegible]
11	3450253	10641375	3675982	10007646	27203616	633729	938593[illegible]	[illegible]
12	3452983	10633465	3679284	9998666	27179200	634799	938493[illegible]	[illegible]
13	3455713	10625562	3682587	9989692	27154823	635870	93839[illegible]	[illegible]
14	3458442	10617667	3685891	998072[illegible]	27130484	636942	9382919	[illegible]
15	3461171	10609779	3689195	9971764	27106184	638015	[illegible]	[illegible]
16	3463900	10601898	3692500	9962810	27081922	639088	[illegible]	[illegible]
17	3466629	10594024	3695806	9953862	27057698	640162	9379[illegible]98	[illegible]
18	3469357	10586157	3699113	9944920	27033511	641237	93[illegible]88[illegible]9	[illegible]
19	347208[illegible]	10578297	3702420	9935984	27009362	642313	[illegible]	[illegible]
20	347481[illegible]	10570444	3705728	9927054	26985251	643390	[illegible]	[illegible]
21	347[illegible]	10562598	3709037	9918130	26961177	644468	[illegible]	[illegible]
22	348026[illegible]	10554760	3712347	9909213	26937141	645547	[illegible]	[illegible]
23	348299[illegible]	10546929	3715657	9900302	26913143	6466[illegible]7	[illegible]	[illegible]
24	3485721	10539104	3718968	9891396	26889183	647708	[illegible]	[illegible]
25	348844[illegible]	10531286	3722279	9882496	26865260	648790	93[illegible]18	[illegible]
26	349117[illegible]	10523474	3725591	9873601	26841383	64987	[illegible]	[illegible]
27	349[illegible]	10515669	3728904	986471[illegible]	26817535	65095[illegible]	[illegible]	[illegible]
28	349662[illegible]	10507871	3732218	985582[illegible]	26793726	652044	9368[illegible]	[illegible]
29	3499345	10500080	3735533	9846949	26769942	653131	936774[illegible]	[illegible]
30	3502074	10492295	3738848	9838076	26746206	654219	936672[illegible]	3[illegible]
31	3504795	10484516	3742164	9829209	26722507	655307	93657[illegible]	29
32	3507523	10476745	3745480	982034[illegible]	26698845	656396	936468[illegible]	28
33	3510247	10468981	3748797	981149[illegible]	26675220	657486	9363662	27
34	3512971	10461225	3752115	980264[illegible]	26651631	658577	9362640	26
35	3515694	10453476	375[illegible]424	9793807	26628079	659669	9361618	25
36	3518417	10445734	3758753	9784972	26604563	660762	9360595	24
37	3521140	10437999	3762073	977614	26581084	661856	9359571	23
38	3523862	10430271	3765394	976732[illegible]	26557641	662951	9358546	22
39	3526584	10422550	3768716	975850[illegible]	26534234	664047	9357521	21
40	3529306	10414836	3772038	974969[illegible]	26510863	665143	9356495	20
41	3532027	10407129	3775361	974088[illegible]	26487528	666240	9355468	19
42	3534748	10399429	377868[illegible]	973209[illegible]	26464229	667338	9354440	18
43	3537469	10391735	3782010	972329[illegible]	26440966	668437	9353411	17
44	3540190	10384047	3785335	971451[illegible]	26417738	669537	9352382	16
45	3542910	10376366	3788661	970572[illegible]	26394546	670638	9351352	15
46	3545630	10368692	3791988	969695[illegible]	26371390	671741	9350321	14
47	3548350	10361024	3795315	968817[illegible]	26348270	672845	9349289	13
48	3551070	10353362	3798643	967941[illegible]	26325185	673950	9348257	12
49	3553789	10345706	3801972	967065[illegible]	26302135	675056	9347224	11
50	3556508	10338057	3805302	9661894	26279120	676163	9346190	10
51	3559227	10330415	3808632	9653144	26256141	677271	9345155	9
52	3561945	10322780	3811963	9644400	26233196	678380	9344119	8
53	3564663	10315152	3815295	9635662	26210286	679490	9343082	7
54	3567380	10307531	3818628	9626930	26187411	680601	9342045	6
55	3570097	10299916	3821961	9618204	26164571	681712	9341007	5
56	3572814	10292308	3825295	9609484	26141766	682824	9339968	4
57	357553[illegible]	10284707	3828630	960077[illegible]	26118996	683937	9338028	3
58	357824[illegible]	10277113	3831966	9592062	26096260	685053	93[illegible]7887	2
59	358096	10269526	3835303	9583360	26073559	686166	9378847	1
0	3583675	10261946	3838640	9574064	26050893	687282	9335804	0

G. 21	Iuxta Regulam adhibendi.							
M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3583679	10261946	3838640	9574664	26050893	687282	9335804	60
1	3586395	10254172	3841978	6565973	26028264	688399	9334761	59
2	3589110	10246804	3845316	9557287	26005663	689517	9333717	58
3	3591825	10239243	3848655	9548607	25983099	690636	9332672	57
4	3594540	10231688	3851995	9539932	25960569	691756	9331628	56
5	3597254	10224140	3855336	9531263	25938073	692877	9330582	55
6	3599968	10216598	3858678	9522599	25915610	693999	9329535	54
7	3602682	10209063	3862020	9513941	25893181	695122	9328488	53
8	3605395	10201534	3865363	9505288	25870786	696246	9327440	52
9	3608108	10194012	3868707	9496642	25848424	697370	9326391	51
10	3610821	10186496	3872052	9488001	25826096	698495	9325341	50
11	3613533	10178987	3875397	9479366	25803801	699621	9324290	49
12	3616245	10171484	3878743	9470736	25781540	700748	9323238	48
13	3618957	10163988	3882090	9462111	25759312	701877	9322186	47
14	3621669	10156498	3885438	9453491	25737118	703007	9321133	46
15	3624380	10149015	3888787	9444877	25714957	704138	9320079	45
16	3627091	10141538	3892136	9436268	25692830	705270	9319024	44
17	3629802	10134067	3895486	9427664	25670736	706403	9317969	43
18	3632512	10126603	3898837	9419066	25648675	707537	9316913	42
19	3635222	10119145	3902188	9410473	25626647	708672	9315856	41
20	3637932	10111694	3905540	9401886	25604051	709808	9314798	40
21	3640642	10104249	3908893	9393305	25582688	710944	9313739	39
22	3643351	10096811	3912247	9384730	25560758	712081	9312680	38
23	3646060	10089379	3915601	9376160	25538860	713219	9311620	37
24	3648768	10081953	3918956	9367595	25516995	714358	9310559	36
25	3651476	10074533	3922312	9359035	25495162	715498	9309497	35
26	3654184	10067120	3925669	9350481	25473362	716639	9308434	34
27	3656892	10059713	3929027	9341931	25451594	717782	9307371	33
28	3659599	10052312	3932385	6333386	25429858	718926	9306307	32
29	3662306	10044918	3935744	9324847	25408154	720071	9305242	31
30	3665012	10037530	3939104	9316313	25386482	721217	9304176	30
31	3667718	10030148	3942465	9307784	25364841	722364	9303109	29
32	3670424	10022773	3945826	9299261	25343232	723512	9302042	28
33	3673130	80015404	3949188	9290744	25321655	724660	9300974	27
34	3675835	10008041	3952551	9282232	25300110	725809	9299905	26
35	3678541	10000685	3955915	9273726	25278597	726959	9298836	25
36	3681246	9993335	3959280	9265215	25257116	728110	9297766	24
37	3683951	9985991	3962646	9256729	25235666	729262	9296695	23
38	3686655	9978653	3966012	9248238	25214248	730415	9295623	22
39	3689359	9971322	3969379	6239753	25192861	731569	9294550	21
40	3692062	9963997	3972746	9231273	25171506	732724	9293476	20
41	3694765	9956678	3976114	9222798	25150183	733880	9292401	19
42	3697468	9949366	3979483	9214326	25128891	735037	9291326	18
43	3700170	9942060	3982853	9205865	25107629	736195	9290250	17
44	3702872	9934760	3986224	9197406	25086398	737354	9289173	16
45	3705574	9927466	3989596	9188952	25065198	738514	9288096	15
46	3708276	9920178	3992969	9180503	25044029	739675	9287018	14
47	3710977	9912896	3996342	9172059	25022890	740837	9285939	13
48	3713678	9905620	3999716	9163620	25001782	742000	9284859	12
49	3716379	6898350	4003090	9155186	24980705	743164	9283778	11
50	3719080	9891086	4006465	9146757	24959659	744329	9282697	10
51	3721780	9883828	4009841	9138333	24938644	745495	9281615	9
52	3724480	9876577	4013217	9129915	24917659	746662	9280532	8
53	3727179	9869332	4016594	9121502	24896704	747830	9279448	7
54	3729878	9862093	4019972	9113094	24875780	748999	9278363	6
55	3732577	9854860	4023351	9104691	24854887	750169	9277278	5
56	3735275	9847633	4026731	9096293	24834024	751340	9276192	4
57	3737973	9840412	4030112	9087900	24813191	752512	9275105	3
58	3740671	9833192	4033494	9079512	24792387	753685	9274017	2
59	3743369	9825988	4036877	9671129	24771613	754859	9272928	1
60	3746066	9818785	4040262	9062752	24750869	756033	9271839	0
								M.

Contra regulam adhibendi. G. 68

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3746066	9818785	4040262	9062752	24750869	[illegible]	[illegible]	60
1	3748763	9811589	4043647	9054381	24730154	757208	9270749	59
2	3751460	9804399	4047031	9046015	24709469	758384	[illegible]	58
3	3754156	9797215	4050416	9037654	24688814	[illegible]	[illegible]	57
4	3756852	9790036	4053802	9029296	24668189	[illegible]	[illegible]	56
5	2759548	9782863	4057189	9020943	24647594	761920	9266381	55
6	3762243	9775696	4060577	9012595	24627028	763101	[illegible]	54
7	2764938	9768535	4063966	9004252	24606492	764283	[illegible]	53
8	3767633	9761380	4067356	8995914	24585986	765466	[illegible]	52
9	3770327	9754231	4070747	8987581	24565509	766650	[illegible]	51
10	3773021	9747088	4074139	8979253	24545061	767835	9260903	50
11	3775715	9739950	4077531	8970929	24524642	769021	[illegible]	49
12	3778408	9732818	4080924	8962610	24504252	[illegible]	[illegible]	48
13	3781101	9725693	4084318	8954297	24483891	771396	9257606	47
14	3783794	9718574	4087713	8945989	24463559	772585	9256506	46
15	3786486	9711461	4091109	8937686	24443256	773775	[illegible]	45
16	3789178	9704354	4094506	8929388	24422981	774966	[illegible]	44
17	3791870	9697353	4097903	8921196	24402735	776157	9253200	43
18	3794562	9690158	4101301	8912809	24382518	777349	9252097	42
19	3797253	9683069	4104699	8904527	24362329	778542	[illegible]	41
20	3799944	9675986	4108097	8896259	24342169	779736	9249888	40
21	3802635	9668908	4111497	8887977	24322037	780931	9248782	39
22	3805325	9661836	4114898	8879709	24301937	782127	9247676	38
23	3808015	9654770	4118300	8871646	24281860	783324	9246560	37
24	3810704	9647709	4121703	8863187	24261815	784522	[illegible]	36
25	3813393	9640654	4125107	8854933	24241798	785721	9244352	35
26	3816082	9633605	4128511	8846683	24221809	786922	9243242	34
27	3818771	9626562	4131916	8838438	24201849	788124	[illegible]	33
28	3821459	9619525	4135322	8830198	24181917	789327	9241020	32
29	3824147	9612494	4138728	8821963	24162013	790551	9239908	31
30	3826834	9605468	4142135	8813732	24142137	791736	9238795	30
31	3829521	9598448	4145544	8805506	24122289	792942	9237682	29
32	3832208	9591434	4148953	8797285	24102468	794149	9236568	28
33	3834895	9584426	4152363	8789069	24082675	795357	9235453	27
34	3837581	9577424	4155773	8780859	24062910	796565	9234337	26
35	3840267	9570427	4159184	8772653	24043172	797774	9233220	25
36	3842953	9563436	4162596	8764452	24023462	798984	9232103	24
37	3845638	9556451	4166009	8756256	24003779	800195	9230985	23
38	3848323	9549472	4169423	8748065	23984124	801407	9229866	22
39	3851008	9542498	4172838	8739878	23964496	802620	9228746	21
40	3853692	9535530	4176255	8731696	23944895	803834	9227625	20
41	3856376	9528567	4179672	8723518	23925320	805049	9226504	19
42	3859060	9521610	4183090	8715345	23905773	806265	9225382	18
43	3861743	9514659	4186509	8707177	23886254	807482	9224259	17
44	3864426	9507713	4189928	8699013	23866762	808700	9223135	16
45	3867109	9500373	4193348	8690854	23847297	809919	9222010	15
46	3869791	9493839	4196769	8682700	23827859	811139	9220884	14
47	3872473	9486911	4200191	8674551	23808448	812360	9219758	13
48	3875155	9479988	4203613	8666405	23789064	813583	9218631	12
49	3877837	9473071	4207036	8658264	23769706	814807	9217504	11
50	3880518	9466160	4210460	8650128	23750375	816032	9216376	10
51	3883199	9459254	4213885	8641996	23731071	817258	9215247	9
52	3885880	9452354	4217311	8633870	23711793	818484	9214117	8
53	3888560	9445460	4220738	8625749	23692542	819711	9212986	7
54	3891240	9438571	4224165	8617632	23673318	820939	9211855	6
55	3893919	9431688	4227593	8609520	23654121	822168	9210723	5
56	3896598	9424810	4231022	8601412	23934950	823398	9209590	4
57	3899277	9417938	4234452	8593509	23615805	824629	9208456	3
58	3901955	9411071	4237882	8585210	23596687	825861	9207323	2
59	3904633	9404210	4241315	8577116	23577595	827094	9206185	1
60	3907311	9397354	4244748	8569026	23558529	828328	9205049	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3907311	9397354	4244748	8569026	23558529	82831	9205045	60
1	3909989	9390504	4248182	8560941	23539489	829563	9203912	59
2	3912666	9383660	4251617	8552861	23520475	830799	9202774	58
3	3915343	9376821	4255052	8544785	23501486	832036	920162[illegible]	57
4	3918020	9369988	4258488	8536714	23482523	833274	9200496	56
5	3920696	9363160	4261925	8528647	23463586	834513	9199,56	55
6	3923372	9356337	4265363	8520584	23444674	835753	9198215	54
7	3926048	9349580	4268801	8512525	23425788	836995	9197073	53
8	3928723	9342708	4272240	8504470	23406927	838238	9195931	52
9	3931398	9335902	4275680	8496420	23388092	839482	9194788	51
10	3934072	9329101	4279121	8488374	23369282	840727	9191644	50
11	3936746	9322306	4282563	8480333	23350498	841973	9192499	49
12	3939420	9315516	4286006	8472296	23331740	843220	9191353	48
13	3942093	9308731	4289450	8464263	23313012	844468	9190207	47
14	3944766	9301952	4292895	8456236	23294302	845716	9189060	46
15	3947439	9295178	4296340	8448213	23275621	846965	9187912	45
16	3950112	9288410	4299786	8440195	23256965	848215	9186763	44
17	3952784	9281647	4303233	8432181	23238335	849466	9185614	43
18	3955456	9274890	4306681	8424172	23219730	850718	9184464	42
19	3958128	9268138	4310130	8416167	23201151	851971	9183313	41
20	3960799	9261392	4313580	8408167	23182597	853225	9182161	40
21	3963470	9254651	4317031	8400171	23164068	854480	9181009	39
22	3966140	9247915	4320482	8392179	23145565	855736	9179856	38
23	3968810	9241185	4323934	8384192	23127086	856993	9178702	37
24	1971480	9234460	4327387	8376209	23108632	858251	9177547	36
25	3974149	9227741	4330841	8368231	23090203	859510	9176391	35
26	3976818	9221027	4334296	8360257	23071798	860770	9175235	34
27	3979487	9214319	4337752	8352288	23053418	862031	9174078	33
28	3982155	9207616	4341209	8344322	23035062	863294	9172920	32
29	3984823	9200918	4344666	8339360	23016731	864558	9171761	31
30	3987498	9194226	4348124	8328403	22998424	865823	9170601	30
31	3990159	9187539	4351583	8320450	22980141	867089	9169440	29
32	3992826	9180857	4355043	8312501	22961883	868356	9168279	28
33	3995493	9174181	4358504	8304558	22943650	869623	9167117	27
34	3998159	9167510	4361966	8296616	22925441	870891	9165955	26
35	4000825	9160844	4365429	8288684	22907256	872160	9164792	25
36	4003491	9154183	4368891	8280753	22889096	873430	9163628	24
37	4006156	9147528	4372357	8272827	22870960	874701	9162463	23
38	4008821	9140878	4375822	8264905	22852848	875973	9161297	22
39	4011486	9134233	4379288	8256987	22834760	877246	9160131	21
40	4014150	9127593	4382755	8249073	22816696	878520	9158964	20
41	4016814	9120959	438622[illegible]	8241164	22798656	879795	9157796	19
42	4019478	9114330	4389692	8233259	22780639	881071	9156627	18
43	4022141	9107706	4393162	8225358	22762646	882348	9155457	17
44	4024804	9101087	439663[illegible]	8217461	22744676	883626	9154286	16
45	4027467	9094473	4400105	8209568	22726730	884905	9153115	15
46	4030130	9087865	4403578	8201679	22708808	886186	9151943	14
47	4032792	9081262	4407051	8193794	22690909	887468	9150770	13
48	4035454	9074664	4410525	8185913	22673034	888751	9149597	12
49	4038115	9068071	4414000	8178036	22655183	890035	9148423	11
50	4040776	9061483	4417476	8170163	22637355	891320	9147248	10
51	4043437	9054901	4420953	8162295	22619551	892606	9146072	9
52	4046097	9048324	4424431	8154431	22601771	893893	9144895	8
53	4048757	9041752	4427910	8146571	22584014	895181	9143718	7
54	4051416	9035185	4431390	8138715	22566281	896470	9142540	6
55	4054075	9028625	4434871	8130863	22548571	897760	9141361	5
56	4056734	9022066	4438352	8123015	22530885	899051	914018[illegible]	4
57	4059392	9015514	4441834	8115172	22513222	900342	9139001	3
58	4062050	9008968	4445317	8107334	22495582	901634	9137820	2
59	4064708	9002427	4448801	8099500	22477965	902927	9136628	1
60	4067366	8995891	4452286	8091670	22460371	904221	9135455	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4067366	8995891	4452280	8091670	22460371	9042[illegible]	913545[illegible]	60
1	4070025	8989360	4455772	8083844	22442800	905516	9134271	59
2	4072680	8982834	4459259	8076022	22425252	906812	913308[illegible]	58
3	4075337	8976313	4462747	8068204	22407726	908109	9131902	57
4	4077993	8969797	4466236	8060389	22390223	909408	9130[illegible]16	56
5	4080649	8963286	4469726	8052578	22372742	910708	9129529	55
6	4083305	8956780	4473216	8044771	22355284	912009	9128342	54
7	4085960	8950280	4476707	8036969	22337848	913311	9127154	53
8	4088615	8943785	4480199	8029171	22320435	914614	91[illegible]5965	52
9	4091269	8937295	4483692	8021377	22303044	915918	9124775	51
10	4093923	8930810	4487186	8013587	22285675	917223	9123584	50
11	4096577	8924330	4490681	8005801	22268328	918529	91[illegible]2493	49
12	4099231	8917855	4494177	7998019	22251004	919836	9121200	48
13	4101884	8911385	4497674	7990241	22233703	921144	91200[illegible]	47
14	4104537	8904920	4501172	7982467	22216424	922453	9118814	46
15	4107189	8898460	4504671	7974697	22199168	923763	91176[illegible]	45
16	4109841	8892005	4508171	7966931	22181935	925074	911642[illegible]	44
17	4112493	8885555	4511672	7959169	22164725	926386	9115229	43
18	4115144	8879110	4515173	7951411	22147537	927699	9114032	42
19	4117795	8872670	4518675	7943657	22130372	929013	91128[illegible]5	41
20	4120446	8866235	4522178	7935908	22113229	930327	911[illegible]6[illegible]	40
21	4123096	8859804	4525682	7928161	22096109	931643	91104[illegible]	39
22	4125746	8853579	4529187	7920419	22079011	932960	91092[illegible]	38
23	4128395	8846959	4532693	7912681	22061934	834278	9108[illegible]8	37
24	4131044	8840544	4536200	7904947	22044879	935597	910683[illegible]	36
25	4133693	8834134	4539708	7897217	22027846	936917	9105635	35
26	4136341	8827729	4543217	7889491	22010834	938238	9104432	34
27	4138989	8821329	4546727	7881769	21993843	939560	9103228	33
28	4141637	8814934	4550238	7874051	21976874	940883	9102024	32
29	4144285	8808544	4553750	7866337	21959926	942207	9100819	31
30	4146932	8802159	4557264	7858627	21943000	943532	9099613	30
31	4149579	8795779	4560778	7850921	21926094	944858	9098406	29
32	4152226	8789404	4564293	7843219	21909210	946185	9097198	28
33	4154872	8783033	4567809	7835520	21892348	947513	9095990	27
34	4157518	8776667	4571326	7827825	21875508	948842	9094781	26
35	416016[illegible]	8770306	4574843	7820134	21858689	950172	9093572	25
36	4162808	8763959	4578361	7812456	21841892	951503	9092362	24
37	4165453	8757599	4581880	7804764	21825116	952835	9091151	23
38	4168097	8751253	4585400	7797085	21808362	954168	9089939	22
39	4170741	8744912	4588921	7789409	21791629	955503	9088726	21
40	4173385	8738575	4592443	7781736	21774918	956839	9087512	20
41	4176028	8732243	4595966	7774067	21758228	958176	9086297	19
42	4178671	8725916	4599490	7766402	21741559	959514	9085082	18
43	4181313	8719594	4603015	7758741	21724911	960853	9083866	17
44	4183955	8713277	4606541	7751084	21708283	962193	9082649	16
45	4186597	8706965	4610068	7743431	21691676	963534	9081432	15
46	4189239	8700657	4613596	7735782	21675090	964875	9080214	14
47	4191880	8694354	4617125	7728137	21658525	966217	9078995	13
48	4194521	8688056	4620654	7720496	21641981	967560	9077775	12
49	4197162	8681763	4624184	7712859	21625458	968904	9076555	11
50	4199802	8675475	4627715	7705226	21608956	970249	9075334	10
51	4202442	8669192	4631247	7697597	21592475	971595	9074112	9
52	4205081	8662913	4634780	7689970	21576015	972943	9072889	8
53	4207720	8656639	4638314	7682347	21559575	974292	9071665	7
54	4210359	8650370	4641849	7674281	21543155	975642	9070441	6
55	4212997	8644106	4645385	7667113	21526756	976993	9069215	5
56	4215635	8637846	4648922	7659501	21510377	978345	9067989	4
57	4218273	8631591	4652460	7651893	21494019	979698	9066763	3
58	4220910	8625341	4655999	7644289	21477681	981052	9065535	2
59	4223547	8619096	4659540	7636689	21461164	982407	9064307	1
60	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangente	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	60
1	4228819	8606620	4666623	7621500	21428790	985120	9061848	59
2	4231455	8600389	4670166	7613611	21412534	986478	9060618	58
3	4234090	8594163	4673710	7606126	21396298	987837	9059387	57
4	4236725	8587942	4677255	7598745	21380003	989194	9058155	56
5	4239360	8581725	4680801	7591167	21363888	990558	9056922	55
6	4241994	8575513	4684348	7583593	21347713	991920	9055688	54
7	4244628	8569306	4687896	7576023	21331558	992283	9054454	53
8	4247202	8563103	4691444	7568456	21315423	994647	9053219	52
9	4249895	8556951	4694993	7560893	21299308	996012	9051983	51
10	4252528	8550712	4698543	7553333	21283213	997379	9050746	50
11	4255161	8544523	4702094	7545776	21269138	998747	9049508	49
12	4257793	8538339	4705646	7538223	21251083	1000116	9048270	48
13	4260425	8532160	4709199	7530674	21235048	1001486	9047031	47
14	4263056	8525985	4712753	7523129	21219032	1002856	9045791	46
15	4265687	8519815	4716308	7515588	21203036	1004227	9044551	45
16	4268318	8513650	4719864	7508051	21187059	1005599	9043310	44
17	4270949	8507489	4723422	7500517	21171102	1006972	9042068	43
18	4273579	8501333	4726981	7492987	21155164	1008346	9040825	42
19	4276209	8495181	4730541	7485460	21139246	1009721	9039582	41
20	4278838	8489034	4734102	7477937	21123347	1011097	9038338	40
21	4281467	8482892	4737664	7470418	21107468	1012474	9037093	39
22	4284096	8476754	4741227	7462902	21091609	1013852	9035847	38
23	4286724	8470621	4744790	7455389	21075760	1015232	9034600	37
24	4289352	8464493	4748354	7447880	21059949	1016613	9033353	36
25	4291979	8458369	4751919	7440374	21044148	1017995	9032105	35
26	4294606	8452250	4755485	7432872	21028367	1019378	9030856	34
27	4297233	8446135	4759052	7425373	21012605	1020762	9029606	33
28	4299859	8440025	4762620	7417878	20996863	1022147	9028356	32
29	4302485	8433919	4766189	7420386	20981140	1023533	9027105	31
30	4305111	8427818	4769759	7402898	20965436	1024920	9025853	30
31	4307736	8421722	4773330	7395414	20949752	1026308	9024600	29
32	4310361	8415630	4776902	7387933	20934086	1027697	9023347	28
33	4312986	8409543	4780475	7380456	20918439	1029087	9022093	27
34	4315610	8403560	4784049	7372982	20902811	1030478	9020838	26
35	4318234	8397382	4787624	7365512	20887202	1031870	9019582	25
36	4320858	8391308	4791200	7358045	20871612	1033263	9018326	24
37	4323481	8385239	4794777	7350582	20856040	1034657	9017069	23
38	4326104	8379174	4798355	7343122	20840487	1036052	9015811	22
39	4328726	8373114	4801934	7335665	20824953	1037449	9014552	21
40	4331348	8367059	4805515	7328212	20809438	1038847	9013292	20
41	4333970	8361008	4809096	7320762	20793941	1040246	9012031	19
42	4336591	8354962	4812678	7313316	20778463	1041646	9010770	18
43	4339212	8348920	4816261	7305873	20763004	1043047	9009508	17
44	4341833	8342883	4819845	7298434	20747564	1044449	9008245	16
45	4344453	8336850	4823430	7290998	20732142	1045852	9006982	15
46	4347073	8330822	4827016	7283566	20716739	1047256	9005718	14
47	4349693	8324798	4830603	7276138	20701355	1048660	9004453	13
48	4352312	8318778	4834191	7268713	20685989	1050065	9003187	22
49	4354931	8312763	4837780	7261292	20670642	1051471	9001921	11
50	4357549	8306752	4841371	7253874	20655313	1052878	9000654	10
51	4360167	8300746	4844962	7246459	20640003	1054287	8999386	9
52	4362785	8294744	4848554	7239047	20624711	1055697	8998117	8
53	4365402	8288747	4852147	7231639	20609437	1057108	8996848	7
54	4368019	8282754	4855741	7224234	20594182	1058520	8995578	6
55	4370635	8276765	4859336	7216832	20578945	1059933	8994307	5
56	4373251	8270781	4862932	7209434	20563726	1061347	8993035	4
57	4375867	8264801	4866529	7202039	20548526	1062762	8991762	3
58	4378482	8298826	4870127	7194648	20533344	1064178	8990489	2
59	4381097	8252855	4873726	7187260	20518180	1065595	8989215	1
60	4383712	8246889	4877328	7179875	20503034	1067014	8987940	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4383712	8246889	4877328	7179875	20503034	1067014	8987940	60
1	4386326	8240927	4880930	7172493	20487906	1068434	8986664	59
2	4388940	823497[illegible]	4884533	7165119	20472797	1069855	8985388	58
3	4391554	822901[illegible]	4888137	7157740	20457706	1071277	8984111	57
4	4394167	8223068	4891742	7150368	20442033	1072700	8982833	56
5	4396780	8217124	4895347	7143001	20427577	1074123	8981555	55
6	4399392	8211184	4898953	7135637	20412539	1075547	8980276	54
7	4402004	8205249	4902560	7128277	20397519	1076972	8978996	53
8	4404616	8199318	4906168	7120920	20382516	1078398	897[illegible]15	52
9	4407227	8193391	4909777	7113566	20367531	1079825	8976433	51
10	4409838	8187469	4913387	7106216	20352563	1081253	8975151	50
11	4412449	8181551	491699[illegible]	7098868	20337613	1082683	8973868	49
12	4415059	8175638	4920610	7091524	20322681	1084114	8972584	48
13	4417669	8169729	4924223	7084183	20307767	1085546	8971299	47
14	4420278	8163824	4927838	7076845	20292870	1086979	8970013	46
15	4422887	8157923	4931454	7069510	20277991	1088413	8968727	45
16	4425496	8152027	4935071	7062179	20263130	1089848	8967440	44
17	4428104	8146135	4938689	7054851	20248286	1091284	8966152	43
18	4430712	8140247	4942308	7047526	20233460	1092721	8964864	42
19	4433326	8134364	4945928	7040205	20218651	1094159	8963575	41
20	4435927	8128485	4949549	7032887	20203860	1095598	8962285	40
21	4438534	8122610	4953171	7025572	20189086	1097038	8960994	39
22	4441140	8116739	4956794	7018260	20174329	1098479	8959702	38
23	4443746	8110873	4960418	7010952	20159590	1099921	895841[illegible]	37
24	4446352	8105011	4964043	7003647	20144868	1101364	89571[illegible]	36
25	4448957	8099153	4967669	6996345	20130163	1102808	8955824	35
26	4451562	8093299	4971296	6989045	20115475	1104254	8954530	34
27	4454167	8087450	4974924	6981749	20100805	1105801	895323[illegible]	33
28	4456771	8081605	4978553	6974456	20086152	1107149	8951939	32
29	4459375	8075764	4982184	6967166	20071316	1108598	8950648	31
30	4461978	8069927	4985816	6959879	20056898	1110048	8949344	30
31	4464581	8064095	4989448	6952596	20042297	1111499	8948045	29
32	4967184	8058267	4993081	6945316	20027709	1112951	8946746	28
33	4469786	8032443	4996716	6938039	20013142	1114404	8945446	27
34	4472388	8046623	5000352	6930765	19998591	1115858	8944146	26
35	4474990	8040808	5003989	6923495	19984057	1117313	8942845	25
36	4477591	8034997	5007627	6916228	19969540	1118769	8941543	24
37	4480192	8029190	5011266	6908964	19955039	1120226	8940240	23
38	4482792	8023387	5014906	6901703	19940555	1121684	8938936	22
39	4485392	8017589	5018547	6894546	19926088	1123143	8937632	21
40	4487992	8011795	3022189	6887191	19911637	1124604	8936327	20
41	4490591	8006005	5025832	6879939	19897203	1126066	8935021	19
42	4493190	8000219	5029476	6872690	19883786	1127529	8933717	18
43	4495788	7994437	5033121	6865444	19868386	1128993	8932406	17
44	4498386	7988660	5036767	6858202	19854002	1130458	8931098	16
45	4500984	7982887	5040414	6850963	19839635	1131924	8929789	15
46	4503582	7977118	3044062	6843727	19825285	1133391	8928479	14
47	4506179	7971353	5047712	6836494	19810951	1134859	8927169	13
48	4508776	7965592	5051363	6829265	19796634	1136327	8925858	12
49	4511372	7959833	5055015	6822039	19782333	1137796	8924546	11
50	4513968	7954083	5058668	6814817	19768048	1139266	8923234	10
51	4516563	7948335	5062322	6807597	19753780	1140738	8921921	9
52	4519158	7942591	5065977	6800380	19739528	1142211	8920607	8
53	4521753	7936851	5069633	6703166	19725293	1143685	8919292	7
54	4524347	7931115	5073290	6785955	19711074	1145160	8917976	6
55	4526941	7925383	5076948	6778747	19696872	1146636	8916659	5
56	4529535	7919655	5080607	6771542	19682686	1148113	8915341	4
57	4532128	7913932	5084267	6764340	19668516	1149592	8914023	3
58	4534721	7908213	5087928	6757141	19654362	1151072	8912704	2
59	4537313	7902498	5091590	6749945	19640225	1152553	8911385	1
60	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154033	8910065	0
								M.

G.27 Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154035	8910065	60
1	4542497	7891080	5098919	6735562	19611999	1155518	8908744	59
2	4545088	7885377	5102585	6728375	19597910	1157002	8907422	58
3	4547679	7879678	5106252	6721191	19583837	1158487	8906090	57
4	4540270	7873983	5109920	6714010	19569780	1159973	8904776	56
5	4552860	7898292	5113589	6706832	19555639	1161460	8903452	55
6	4555450	7862605	5117259	6699657	19541714	1162948	8902127	54
7	4558039	7856923	5120930	6692486	19527704	1164437	8900802	53
8	4560628	7851245	5124602	6685318	19513710	1165927	8899476	52
9	4563216	7845571	5128275	6678153	19499732	1167418	8898149	51
10	4565804	7839901	5131949	6670991	19485770	1168910	8896821	50
11	4568392	7834235	5135625	6663832	19471824	1170403	8895492	49
12	4570979	7828573	5139302	6656676	19457894	1171897	8894163	48
13	4573566	7822915	5142980	6649523	19443980	1173392	8892833	47
14	4576153	7817261	5146659	6642373	19430081	1174888	8891502	46
15	4578739	7811611	5150339	6635225	19416198	1176386	8890171	45
16	4581325	7805965	5154020	6628080	19402331	1177885	8888839	44
17	4583911	7800323	5157702	6620938	19388480	1179385	8887506	43
18	4586496	7794685	5161385	6613799	19374644	1180886	8886172	42
19	4589081	7789051	5165069	6606663	19360824	1182388	8884838	41
20	4591665	7783422	5168755	6599531	19347019	1183891	8883503	40
21	4594249	7777797	5172442	6592402	19333230	1185395	8882167	39
22	4596833	7772176	5176130	6585276	19319456	1186900	8880830	38
23	4599416	7766558	5179819	6578152	19305698	1188406	8879492	37
24	4601999	7760944	5183509	6571031	19291955	1189913	8878154	36
25	4604581	7755334	5187200	6563913	19278228	1191421	8876815	35
26	4607163	7749728	5190892	6556797	19264516	1192931	8875475	34
27	4609744	7744126	5194585	6549684	19250819	1194442	8874134	33
28	4612325	7738528	5198279	6542574	19237138	1195954	8872793	32
29	4614906	7732934	5201974	6597467	19223472	1197467	8871451	31
30	4617486	7727344	5205670	6528363	19209821	1198981	8804108	30
31	4620066	7721757	5209368	6521261	19196185	1200496	8868765	29
32	4622646	7716174	5213067	6514162	19182565	1202012	8867421	28
33	4625225	7710596	5216767	6507067	19168960	1203529	8866076	27
34	4627804	7705022	5220468	6499975	19155370	1205047	8864730	26
35	4630382	7799452	5224170	6492886	19141795	1206566	8863383	25
36	4632960	7693886	5227873	6485800	19128235	1208086	8862035	24
37	4635538	7688324	5231577	6478717	19114691	1209607	8860687	23
38	4638115	7682766	5235283	6471637	19101162	1211129	8859338	22
39	4640692	7677212	5238990	6464560	19087648	1212652	8857989	21
40	4643268	7671662	5242698	6457485	19074149	1214177	8856639	20
41	4645844	7666116	5246407	6450413	19060665	1215703	8855288	19
42	4648420	7660574	5250117	6443344	19047196	1217230	8853936	18
43	4650995	7655035	5253828	6436277	19033741	1218758	8852583	17
44	4653570	7649500	5257540	6429213	19020301	1220287	8851230	16
45	4656145	7643969	5261254	6422152	19006876	1221817	8849876	15
46	4658719	7638442	5264969	6415094	18993466	1223348	8848521	14
47	4661293	7632919	5268685	6408039	18980070	1224880	8847165	13
48	4663866	7627400	5272402	6400987	18966689	1226413	8845809	12
49	4666439	7621885	5276120	6393938	18953323	1227947	8844452	11
50	4669012	7616374	5279839	6386893	18939972	1229481	8843095	10
51	4671584	7610867	5283559	6379850	18926636	1231017	8841737	9
52	4674156	7605363	5287280	6372809	18913314	1232554	8840378	8
53	4676727	7599863	5291003	6365771	18900007	1234092	8839018	7
54	4679298	7592367	5294727	6358735	18886715	1235632	8837657	6
55	4681869	7588875	5298452	6351702	18873437	1237173	8836295	5
56	4684439	7583387	5302178	6344672	18860174	1238715	8834932	4
57	4687009	7577903	5305905	6337645	18846925	1240258	8833569	3
58	4689578	7572422	5309634	6330620	18833691	1241802	8832205	2
59	4692147	7566945	5313363	6323598	18820471	1243347	8830841	1
60	4694716	7561472	5317094	6316578	18807265	1233894	8829476	0
								M

Contra regulam adhibendi. G. 62

6.28 — Iuxta Regulam adhibendi

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4694716	7561472	5317094	6316578	[illegible]	1244894	[illegible]	60
1	4697284	7556003	5320826	6309561	[illegible]	1246442	[illegible]	59
2	4699852	7550538	5324559	6302547	[illegible]	1247991	[illegible]	58
3	4702419	7545076	5328293	629553	[illegible]	1249541	[illegible]	[illegible]
4	4704986	7539618	5332028	6288526	[illegible]	1251092	[illegible]	56
5	4707553	7534164	5335765	6281520	[illegible]	1252644	[illegible]	[illegible]
6	4710119	7528714	5339503	6274517	[illegible]	1254197	[illegible]	54
7	4712685	7523268	5343242	6267517	[illegible]	1255751	8819898	[illegible]
8	4715250	7517826	5346982	6260521	[illegible]	[illegible]	[illegible]	52
9	4717815	7512388	5350723	6253528	[illegible]	1258800	[illegible]	51
10	4720380	7506954	5354465	6246528	[illegible]	1260416	[illegible]	50
11	4722944	7501524	5358209	6239550	[illegible]	[illegible]	8814409	49
12	4725508	7496097	5361954	6232564	18649920	[illegible]	[illegible]	48
13	4728071	7490674	5365700	6225581	[illegible]	[illegible]	8811659	47
14	4730634	7485255	5369447	6218601	[illegible]	[illegible]	[illegible]	46
15	4733197	7479840	5373195	6211624	[illegible]	[illegible]	[illegible]	45
16	4735759	7474428	5376944	6204649	18597925	[illegible]	[illegible]	44
17	4738321	7469020	5380694	6197676	18584962	[illegible]	[illegible]	43
18	4740882	7463616	5384445	6190706	18572013	[illegible]	[illegible]	42
19	4743443	7458216	5388198	6183739	18559078	1274477	[illegible]	41
20	4746004	7452819	5391952	6176774	18546157	[illegible]	[illegible]	40
21	4748564	7447426	5395707	6169812	18533250	1277614	[illegible]	39
22	4751124	7442037	5399463	6162853	18520357	1279184	[illegible]	[illegible]
23	4753683	7436651	5403221	6155896	18507478	1280755	[illegible]	[illegible]
24	4756242	7431269	5406980	6148942	18494612	1282327	[illegible]	[illegible]
25	4758801	7425891	5410740	6141991	18481760	1283900	[illegible]	35
26	4761359	7420517	5414501	6135063	18468922	1285474	[illegible]	34
27	4763917	7415146	5418263	6128096	18456094	1287050	[illegible]	33
28	4766474	7409779	5422026	6121152	18443287	1288627	8790946	32
29	4769031	7404416	5425791	6114211	18430490	1290205	8789559	31
30	4771588	7399057	5429557	6107273	18417707	1291784	8788171	30
31	4774144	7393701	5433324	6100337	18404938	1293364	8786782	29
32	4776700	7388349	5437092	6093404	18392182	1294945	8785393	28
33	4779255	7383001	5440861	6086474	18379440	1296527	8784003	27
34	4781810	7377657	5444632	6079547	18366712	1298110	8782613	26
35	4784365	7372316	5448404	6072622	18353997	1299694	8781222	25
36	4786919	7366979	5452177	6065700	18341296	1301279	8779830	24
37	4789473	7361646	5455951	6058781	18328608	1302865	8778437	23
38	4792026	7356316	5459726	6051863	18315934	1304453	8777044	22
39	4794579	7350990	5463503	6044948	18303273	1306042	8775650	21
40	4797132	7345668	5467281	6038036	18290626	1307632	8774255	20
41	4799684	7340349	5471060	6031126	18277992	1309223	8772859	19
42	4802236	7335034	5474840	6024219	18265372	1310815	8771462	18
43	4804787	7320723	5478621	6017315	18252765	1312408	8770065	17
44	4807338	7324415	5482404	6010413	18240171	1314002	8768667	16
45	4809888	7319111	5486188	6003514	18227591	1315597	8767267	15
46	4812438	7313811	5489973	5996618	18215024	1317193	8765868	14
47	4814988	7308514	5493759	5989723	18202470	1318791	8764468	13
48	4817537	7303221	5497546	5982831	18189930	1320390	8763068	12
49	4820086	7297931	5501335	5975941	18177403	1321990	8761665	11
50	4822633	7292645	5505125	5969054	18164889	1323591	8760263	10
51	4825183	7287363	5508916	5962170	18152388	1325193	8758860	9
52	4827731	7282084	5512708	5955288	18139901	1326796	8757456	8
53	4830278	7276809	5516501	5948409	18127427	1328400	8756051	7
54	4832825	7271538	5520296	5941533	18114966	1330005	8754646	6
55	4835371	7266270	5524092	5934659	18102518	1331611	8753240	5
56	4837917	7261006	5527889	5927787	18090084	1333219	8751833	4
57	4840462	7255746	5531687	5920918	18077663	1334828	8750425	3
58	4843007	7250489	5535487	5914051	18065255	1336438	8749016	2
59	4845552	7245236	5539288	5907187	18052860	1338049	8747607	1
60	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	

M

Contra regulam adhibendi — G.61

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	60
1	4850640	7234712	5546893	5893468	18028109	1341274	8744787	59
2	4853184	7229500	5550697	5886612	18015753	1342888	8743376	58
3	4855727	7224262	5554503	5879759	18003410	1344503	8741964	57
4	4858270	7219027	5558310	5872906	17991079	1346119	8740551	56
5	4860812	7213795	5562118	5866059	17978761	1347736	8739137	55
6	4863354	7208567	5565927	5859213	17966456	1349354	8737722	54
7	4865895	7203342	5569738	5852368	17954164	1350974	8736307	53
8	4868436	7198121	5573550	5845520	17941885	1352595	8734891	52
9	4870977	7192903	5577363	5838686	17929618	1354217	8733475	51
10	4873517	7187689	5581177	5831849	17917364	1355840	8732058	50
11	4876057	7182478	5584993	5825014	17905123	1357464	8730640	49
12	4878596	7177271	5588810	5818182	17892894	1359089	8729221	48
13	4881135	7172068	5592628	5811353	17880678	1360715	8727801	47
14	4883674	7166868	5596447	5804526	17868475	1362342	8726381	46
15	4886212	7161672	5600268	5897701	17856285	1363971	8724960	45
16	4888750	7156480	5604090	5790879	17844107	1365601	8723538	44
17	4891287	7151291	5607913	5784059	17831942	1367232	8722116	43
18	4893824	7146106	5611737	5777242	17819790	5368864	8720693	42
19	4896361	7140924	5615562	5770427	17807651	1370497	8719269	41
20	4898897	7135746	5619388	5763615	17795524	1372131	8717844	40
21	4901433	7130572	5623216	5756806	17783410	1373766	8716418	39
22	4903968	7125401	5627045	5749999	17771309	1375402	8714992	38
23	4906503	7120234	5630875	5743195	17759220	1377039	8713565	37
24	4909037	7115070	5634707	5736392	17747143	1378678	8712138	36
25	4911571	7109909	5638540	5729591	17735079	1380318	8710710	35
26	4914105	7104752	5642374	5722793	17723027	1381959	8709281	34
27	4916638	7099598	5646210	5715997	17710987	1383601	8707851	33
28	4919171	7094448	5650047	5709204	17698960	1385244	8706420	32
29	4921703	7089301	5653885	5702413	17686945	1386888	8704989	31
30	4924235	7084158	5657725	5695625	17674941	1388533	8703557	30
31	4926767	7079018	5661566	5688839	17662951	1390179	8702124	29
32	4929298	7073882	5665408	5682056	17650972	1391826	8700691	28
33	4931829	7068749	5669251	5675275	17639006	1393474	8699257	27
34	4934359	7063620	5673096	5668496	17627052	1395123	8697822	26
35	4936889	7058494	5676942	5661719	17615111	1396775	8696386	25
36	4939418	7053372	5680789	5654945	17603182	1398427	8694949	24
37	4941947	7048253	5684617	5648173	17591266	1400080	8693512	23
38	4944476	7043138	5688486	5641404	17579362	1401734	8692074	22
39	4947004	7038026	5692337	5634637	17567470	1403389	8690636	21
40	4949532	7032918	5696189	5627873	17555591	1495045	8689197	20
41	4952059	7027814	5700043	5621111	17543724	1406703	8687757	19
42	4954586	7022713	5703898	5614351	17531869	1408362	8686316	18
43	4957113	7017615	5707754	5607593	17520026	1410022	8684873	17
44	4959639	7012521	5711611	5600838	17508189	1411683	8683431	16
45	4962165	7007430	5715469	5594085	17496369	1413345	8681988	15
46	4964690	7002342	5719329	5587334	17484559	1415008	8680544	14
47	4967215	6997258	5723190	5580586	17472764	1416672	8679100	13
48	4969740	6992177	5727052	5573840	17460981	1418337	8677655	12
49	4972264	6987099	5730916	5567095	17449210	1420004	8676209	11
50	4974788	6982025	5734781	5560353	17437451	1421672	8674762	10
51	4977311	6976954	5738647	5553613	17425704	1423341	8673314	9
52	4979834	6971886	5742515	5546875	17413969	1425011	8671866	8
53	3982356	6966822	5746384	5540140	17402246	1426682	8670417	7
54	4984878	6961761	5750254	5533407	17390534	1428354	8668968	6
55	4987399	6956704	5754125	5526677	17378834	1430027	8667518	5
56	4989920	6951650	5757998	5519949	17367146	1431701	8666067	4
57	4992441	6946600	5761872	5513224	17355469	1433376	8664615	3
58	4994961	6941553	5765747	5506500	17343804	1435053	8663162	2
59	4997481	6936509	5769624	5499778	17332150	1436731	8661708	1
60	5000000	6931469	5773502	5493059	17320508	1438410	8660254	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5000000	6931409	5773502	5493059	17320508	1438410	866 2 4	60
1	5002519	6926432	5777381	5486342	17308878	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5781262	5479628	17297258	1441771	8657344	58
3	5007556	6916369	5785144	5472916	17285651	1443453	8655888	
4	5010074	6911342	5789027	5466206	172 4056	1445136	86544 1	56
5	5012591	6906319	5792911	5459498	17262473	1446821	8652972	5
6	5015108	6901299	5796797	5452792	17250902	1448507	865151	54
7	5017624	6896282	5800684	5446088	17239342	1450194	8650 5	5
8	5020140	6891269	5804572	5439387	17227 94	1451 8	8648595	52
9	5022656	6886259	5808462	5432688	17216258	1453571	8647 34	51
10	5025171	6881253	5812353	5425992	17204734	1455261	864567	0
11	5027686	6876250	5816245	5419298	17193222	1456952	86442	49
12	5030200	6871250	5820139	5412605	17181721	1458645	8642748	4
13	5032714	6866254	5824034	5405915	17170231	1460339	8641284	47
14	5035227	6861261	5827930	5399227	17158752	1462034	8639820	46
15	5037740	6856271	5831828	5392541	17147285	146 730	863835	45
16	5040253	6851285	5835727	5385858	17135829	1465427	8636889	44
17	5042765	6846302	5839627	5379177	17124384	1467 25	8635423	43
18	5045277	6841323	5843528	5372499	17112950	1468824	863395	42
19	5047788	6836347	5847431	5365822	17101527	1470525	86 2488	41
20	5050299	6831374	5851335	5359147	17090115	1472227	863 9	40
21	5052809	6826405	5855241	5352475	17078714	1473930	8629549	9
22	5055319	6821439	5859148	5345805	17067325	1475634	8628 9	8
23	5057829	6816476	5863056	5339137	17055957	1477339	8626 8	
24	5060338	6811516	5866966	5332471	17044591	1479045	862	
25	5062847	6806560	5870877	5325808	17033236	1480752	862366	
26	5065355	6801607	5874789	5319147	17021892	1482460	8622192	34
27	5067863	6796657	5878702	5312488	17010560	1484169	8620718	3
28	5070370	6791710	5882617	5305831	16999239	1485879	8619243	32
29	5072877	6786767	5886533	5299177	16987929	1487590	8617768	31
30	5075384	6781827	5890450	5292525	16976631	1489302	8616292	30
31	5077890	6776890	5894369	5285874	16965344	1491016	8614815	29
32	5080396	6771956	5898289	5279225	16954068	1492731	8613338	28
33	5082901	6767026	5902211	5272579	16942803	1494447	8611860	27
34	5085406	6762099	5906134	5265934	16931549	1496165	8610381	26
35	5087911	6757175	5910058	5259291	16920506	1497884	8608901	25
36	5090415	6752255	5913984	5252651	16909074	1499604	8607420	24
37	5092919	6747338	5917911	5246013	16897851	1501325	8605939	23
38	5095422	6742424	5921839	5239377	16886644	1503047	8604457	22
39	5097925	6737513	5925769	5232743	16875446	1504770	8602975	21
40	5100427	6732606	5929700	5226112	16864259	1506494	8601492	20
41	5102929	6727702	5933633	5219482	16853083	1508220	8600008	19
42	5105430	6722802	5937567	5212855	16841918	1509947	8598523	18
43	5107930	6717905	5941502	5206230	16830764	1511675	8597037	17
44	5110431	6713011	5945438	5199607	16819621	1513404	8595551	16
45	5112931	6708120	5949376	5192986	16808489	1515134	8594064	15
46	5115431	6703232	5953315	5186367	16797367	1516865	8592577	14
47	5117930	6698348	5957255	5179751	16786256	1518597	8591089	13
48	5120429	6693467	5961197	5173137	16775156	1520330	8589600	12
49	5122927	6688589	5965140	5166525	16764067	1522064	8588110	11
50	5125425	6683714	5969084	5159914	16752989	1523800	8586619	10
51	5127922	6678842	5973030	5153305	16741922	1525537	8585127	9
52	5130419	6673974	5976776	5146699	16730866	1527275	8583635	8
53	5132916	6669109	5980926	5140095	16719820	1529014	8582142	7
54	5135412	6664247	5984876	5133403	16708785	1530754	8580649	6
55	5137906	6659388	5988827	5126892	16697760	1532496	8579155	5
56	5140402	6654532	5992780	5120293	16686746	1534239	8577660	4
57	5142898	6649680	5996734	5113697	16675742	1535983	8576164	3
58	5145393	6644831	6000690	5107103	16664749	1537728	8574668	2
59	5147887	6639985	6004647	5100511	16653766	1539474	8573171	1
60	5150381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5130381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	60
1	5152874	6630302	6012566	5087332	16631833	1542970	8570175	59
2	5155367	6625465	6016528	5080745	16620882	1547720	8568676	58
3	5157859	6620631	6020491	5074160	16609942	1546471	8567176	57
4	5160351	6615801	6024455	5067578	16599013	1548223	8565675	56
5	5162843	6610974	6028420	5060998	16588094	1549976	8564173	55
6	5165333	6606150	6032387	5054420	16577186	1551730	8562671	54
7	5167825	6601329	6036355	5047844	16566289	1553485	8561168	53
8	5170315	6596512	6040324	5041271	16555402	1555241	8559664	52
9	5172805	6591698	6044295	5034700	16544526	1556998	8558160	51
10	5175294	6586887	6048267	5028130	16533660	1558757	8556655	50
11	5177783	6582079	6052241	5021562	16522805	1560317	8555149	49
12	5180271	6577275	6056216	5014997	16511960	1562278	8553643	48
13	5182759	6572474	6060193	5008434	16501126	1564040	8552136	47
14	5185246	6567676	6064171	5001873	16490302	1565803	8550628	46
15	5187733	6562881	6068150	4995313	16479488	1567368	8549119	45
16	5190220	6553089	6072131	4988755	16468685	1569334	8547609	44
17	5192706	655 300	6076113	4982199	16457892	1571101	8546099	43
18	519519-	6548514	6080096	4975645	16447109	1572869	8544588	42
19	5197676	6543731	6084081	4969093	16436337	1574638	8543077	41
20	5200162	6538951	6088067	4962543	16425575	1576408	8541565	40
21	5202646	6534174	6092055	4955994	16414824	1578180	8540052	39
22	5205130	6529400	6096044	4949447	16404083	1579953	8538538	38
23	5207614	6524629	6100035	4942902	16393352	1581727	8537024	37
24	5210097	6519862	6104027	4936360	16382631	1583502	8535509	36
25	5212580	6515098	6108020	4929820	16371920	1585278	8533993	35
26	5215062	6510337	6112015	4923282	16361219	1587055	8532476	34
27	5217544	6505580	6116011	4916747	16350528	1588833	8530958	33
28	5220025	6500826	6120009	4910213	16339847	1590613	8529440	32
29	5222506	6496075	6124008	4903681	16329176	1592394	8527921	31
30	5224986	6491327	6128008	4897151	16318516	1594176	8526402	30
31	5227466	6486583	6132010	4890624	16307866	1595959	8524882	29
32	5229946	6481842	6136013	4884098	16297226	1597744	8523361	28
33	5232425	6477103	6140018	4877573	16286596	1599530	8521839	27
34	5234904	6472367	6144024	4871050	16275976	1601317	8520317	26
35	5237382	6467634	6148032	4867529	19265366	1603105	8518794	25
36	5239860	6462904	6152041	4858010	16254766	1604894	8517270	24
37	5242337	6458177	6156052	4851493	16244176	1606684	8515745	23
38	5244814	6453453	6160064	4844978	16233597	1608475	8514220	22
39	5247290	6448732	6164077	[illegible]	16223028	1610267	8512094	21
40	5249766	6444014	6168092	4831954	16212469	1612060	8511167	20
41	5252241	6439299	6172108	4825444	16201920	1613855	8509639	19
42	5254716	6434588	6176126	4818937	16191381	1615651	8508118	18
43	5257191	6429880	6180145	4812432	16180852	1617448	8506582	17
44	5259665	6425175	6184168	4805929	16170332	1619246	8505052	16
45	5262139	6420473	6188190	4799427	16159822	1621046	8503522	15
46	5264612	6415774	6192213	4792927	16149322	1622847	8501991	14
47	5267085	6411078	[illegible]	4786429	16138832	1624649	8500459	13
48	5269557	6406385	6200203	4779933	16128351	1626452	8498927	12
49	5272029	6401695	6204290	4773439	16117880	1628256	8497394	11
50	5274501	6397008	6208319	4766947	16107419	1630061	8495860	10
51	5276972	6392324	6212350	4760456	16096968	1631868	8494326	9
52	5279443	6387643	6216382	4753967	16086527	1633676	8492791	8
53	5281913	6382965	6220416	4747480	16076095	1635485	8491255	7
54	5284383	6378290	6224451	4740995	16065673	1637295	8489718	6
55	5286852	6373618	6228488	4734512	16055261	1639106	8488180	5
56	5289321	6368949	6232526	4728031	16044859	1640918	8486641	4
57	5291789	6364283	6236566	4721552	16034466	1642731	8485102	3
58	5294257	6359620	6240607	4715074	16024083	1644546	8483562	2
59	5296725	6354961	6244649	4708599	16013710	1646362	8482022	1
60	5299192	6350305	6248693	4702126	16003347	1648179	8480481	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5299192	6350305	6248693	4702120	16003347	[illegible]	[illegible]	[illegible]
1	5301659	6345652	6252738	4695655	15992994	1649997	[illegible]	[illegible]
2	5304125	6341002	6256785	4689186	15982651	1651816	[illegible]	[illegible]
3	5306591	6336354	6260834	4682717	15972315	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	5309056	6331709	6264884	4676240	[illegible]	1655459	[illegible]	[illegible]
5	5311521	6327067	6268935	4669785	15951076	1657282	[illegible]	[illegible]
6	5313985	6322428	6272988	4663322	15941370	1659106	[illegible]	[illegible]
7	5316449	6317792	6277042	4656861	15931073	1660931	[illegible]	[illegible]
8	5318913	6313159	6281098	4650402	15920785	1662757	[illegible]	[illegible]
9	5321376	6308529	6285155	4643944	15910507	1664585	8466579	[illegible]
10	5323839	6303902	6289214	4637488	15900238	1666414	[illegible]	[illegible]
11	5326301	6299278	6293274	4631034	15889979	1668244	8463452	49
12	5328763	6294657	6297336	4624582	15879729	1670075	[illegible]	[illegible]
13	5331224	6190039	6301399	4618131	15869489	1671908	[illegible]	47
14	5333685	6285424	6305464	4611682	15859259	1673742	[illegible]	46
15	5336145	6280812	6309530	4605235	15849038	1675577	[illegible]	[illegible]
16	5338605	6276203	6313598	4598790	15838827	1677413	[illegible]	44
17	5341065	6271597	6317667	4592347	15828625	1679250	[illegible]	[illegible]
18	5343524	6266994	6321738	4585906	15818433	1681088	8452618	[illegible]
19	5345983	6262394	6325810	4579467	15808251	1682927	[illegible]	[illegible]
20	5348441	6257797	6329883	4573030	15798078	1684767	8449509	40
21	5350898	6253203	6333958	4566594	15787915	1686609	[illegible]	[illegible]
22	5353355	6248612	6338034	4560160	15777761	1688452	[illegible]	[illegible]
23	5355812	6244024	6342112	4553728	15767616	1690296	[illegible]	[illegible]
24	5358268	6239439	6346191	4547298	15757480	1692141	[illegible]	[illegible]
25	5360724	6234857	6350272	4540859	15747353	1693988	[illegible]	[illegible]
26	5363179	6230278	6354355	4534442	15737235	1695836	8440161	[illegible]
27	5365634	6225702	6358439	4528017	15727127	1697685	8438600	[illegible]
28	5368088	6221129	6362525	4521594	15717028	5699535	8437039	[illegible]
29	5370542	6216559	63666[illegible]3	4515172	15706938	1701387	[illegible]	[illegible]
30	5372996	6211992	6370702	4508752	15696857	1703240	[illegible]	30
31	5375449	6207427	6374792	4502333	15686786	1705094	[illegible]	29
32	5377902	6202865	6378884	4495916	15676724	1706949	8430788	[illegible]
33	5380354	6198306	6382977	4489501	15666671	1708805	8429223	27
34	5382806	6193750	6387072	4483088	15656627	1710662	8427658	26
35	5385258	6189197	6391169	4476676	15646592	1712521	8426092	25
36	5387709	6184647	6395267	4470266	15636566	1714381	8424525	24
37	5390159	6180100	6399366	4463858	15626549	1716242	8422957	23
38	5392609	6175556	6403467	44574[illegible]	15616541	1718104	8421389	22
39	5395058	6171015	6407569	4451048	15606542	1719967	8419820	21
40	5397507	6166477	6411[illegible]3	4444646	15596552	1721831	8418250	20
41	5399855	6161942	6415779	4438245	15586571	1723697	8416679	19
42	5402403	6157400	6419886	4431845	15576599	1725564	8415108	18
43	5404851	6152879	6423995	4425447	15566636	1727432	8413536	17
44	5407298	6148352	6428105	4419051	15556682	1729301	8411963	16
45	5409745	6143828	6432216	4412656	15546738	1731172	8410390	15
46	5412191	6139307	6436329	4406263	15536803	1733044	8408816	14
47	5414637	6134789	6440444	4399872	15526877	1734917	8407241	13
48	5417082	6130274	6444560	4393483	15516960	1736791	8405666	12
49	5419527	6125762	6448678	4387096	15507052	1738666	8404090	11
50	5421972	6121253	6452798	4380711	15497153	1740542	8402513	10
51	5424416	6116747	6456919	4374527	15487263	1742420	8400935	9
52	5426859	6112244	6461042	4367945	15477382	1744299	8399357	8
53	5429302	6107744	6465166	4361565	15467510	1746179	8397778	7
54	5431743	6103246	6469292	4355186	15457646	1748060	8396199	6
55	5434186	6098751	6473419	4348809	15447791	1749942	8394619	5
56	5436629	6094259	6477548	4342433	15437945	1751826	8393038	4
57	5439070	6089770	6481678	4336059	15428108	1753711	8391456	3
58	5441510	6085284	6485809	4329687	15418280	1755597	8389873	2
59	5443950	6080800	6489942	4323316	15408461	1757484	8388290	1
60	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386706	0
								M.

G. 33				Iuxta Regulam adhibendi.				
M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386706	60
1	5448829	6071841	6498212	4310579	15388850	1761262	8385121	59
2	5451268	6067366	6502350	4304213	15379057	1763153	8383536	58
3	5453707	6062894	6506489	4297849	15369273	1765045	8381950	57
4	5456145	6058425	6510630	4291487	15359497	1766938	8380363	56
5	5458583	6053958	6514773	4285126	15349730	1768832	8378776	55
6	5461010	6049494	6518917	4278766	15339972	1770728	8377188	54
7	5463456	6045033	6523063	4272408	15330222	1772625	8375599	53
8	546589[illegible]	6040575	6527210	4266052	15320481	1774523	8374009	52
9	5468328	6036120	6531359	4259698	15310748	1776422	8372419	51
10	5470763	6031668	6535510	4253346	15301024	1778322	8370828	50
11	5473198	6027218	6539662	4246994	15291309	1780224	8369236	49
12	5475632	6022771	6543816	4240644	15281603	1782127	8367644	48
13	5478066	60183[illegible]	6547971	4234296	15271905	1784031	8366051	47
14	5480499	6013886	6552128	4227950	15262216	1785936	8364457	46
15	5482932	6009448	6556287	4221605	15252535	1787843	8362862	45
16	5485364	60050[illegible]3	6560447	4215262	15242863	1789751	8361266	44
17	5487796	6000580	6564609	4208920	15233200	1791660	8359670	43
18	5490228	5996150	6568772	4202580	15223545	1793570	8358073	42
19	5492659	5991723	6572937	4196241	15213899	1795482	8356476	41
20	5495090	5987299	6577103	4189904	15204261	1797395	8354878	40
21	5497520	5982878	6581271	4183569	15194632	1799309	8353279	39
22	5499950	5978460	6585440	4177236	15185011	2801224	8351680	38
23	5502379	5974044	6589611	4170904	15175398	1803140	8350080	37
24	5504808	5969631	6593784	4164573	15165794	1805058	8348479	36
25	5507236	5965221	6597958	4156244	15156199	1806977	8346877	35
26	5509664	5960814	6602134	4151917	15146612	1808897	8345274	34
27	5512091	5956409	6606312	4145591	15137034	1810818	8343671	33
28	5514518	5952007	6610491	4139267	15127464	1812740	8342067	32
29	5516944	5947608	6614672	4132944	15117903	1814664	8340463	31
30	5519370	5943212	6618855	4126623	15108351	1816589	8338858	30
31	5521795	5938829	6623039	4120314	15098807	1818515	8337252	29
32	5524220	5934438	6627225	4113996	15089271	1820442	8335646	28
33	5526645	5930050	6631413	4107680	15079744	1822370	8334039	27
34	5529069	5925665	6635603	4101366	15070225	1824299	8332431	26
35	5531493	5921273	6639792	4095043	15060714	1826230	8330822	25
36	5533916	5916893	6643984	4088731	15051211	1828162	8329212	24
37	5536338	5912516	66[illegible]78	4082421	15041717	1830095	8327602	23
38	5538760	5908142	6652373	4076113	15032231	1832029	8325991	22
39	5541182	5903771	6656570	4069[illegible]	15022753	1833964	8324380	21
40	5543603	5899402	6660768	4063501	150[illegible]83	1835901	8322768	20
41	5546024	5895036	6664968	4057197	15003821	1837839	8321155	19
42	5548444	5890673	6669170	4050895	14994368	1839778	8319541	18
43	5550864	5886313	6673373	4044594	14984923	1841719	8317927	17
44	5553283	5881955	6677578	4038294	14975486	1843661	8316312	16
45	5555702	5877600	6681785	4031996	14966058	1845604	8314696	15
46	5558120	5873248	6685994	4025700	14956638	1847548	8313079	14
47	5560538	5868899	6690204	4019405	14947226	1849494	8311462	13
48	5562956	5864552	6694416	4013111	14937822	1851441	8309844	12
49	5565373	5860208	6698630	4006819	14928426	1853389	8308226	11
50	5567790	5855867	6702845	4000529	14919038	1855338	8306607	10
51	5570206	5851529	6707062	3994241	14909659	1857288	8304987	9
52	5572622	5847193	6711281	3987953	14900288	1859240	8303367	8
53	5575037	5842860	6715501	3981667	14890925	1861193	8301746	7
54	5577452	5838530	6719723	3975383	14881570	1863147	8300124	6
55	5579866	5834203	6723946	3969101	14872223	1865102	8298[illegible]01	5
56	5582280	5829878	6728171	3962819	14862884	1867059	8296877	4
57	5584693	5825556	6732397	3956535	14853553	1869017	8295253	3
58	5587105	5821237	6736625	3950261	14844230	1870976	8293628	2
59	5589518	5816920	6740854	3943984	14834916	1872936	8292002	1
60	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	8290376	0
								M.
				Contra regulam adhibendi				G. 56

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	829037[illegible]	60
1	5594340	5808295	6749318	3931435	14816312	1876860	8288794	59
2	5596751	5803987	6753553	3925163	14807022	1878824	8287121	58
3	5599161	5799681	6757789	3918892	14797740	1880789	[illegible]	[illegible]
4	5601571	5795378	6762027	3912623	14788466	1882755	[illegible]	[illegible]
5	5603981	5791078	6766267	3906355	14779200	1884723	[illegible]	[illegible]
6	5606390	5786780	6770508	3900088	14769941	1886692	8280603	[illegible]
7	5608798	5782485	6774751	3893823	14760690	1888662	8278972	[illegible]
8	5611206	5778192	6778996	3887559	14751447	1890633	[illegible]	[illegible]
9	5613614	5773902	6783243	3881297	14742212	1892605	[illegible]	51
10	5616021	5769615	6787491	3875036	14732985	1894579	8274075	50
11	5618427	5765330	6791741	3868776	14723765	1896554	827244	49
12	5620833	5761048	6795993	3862518	14714553	1898530	[illegible]	[illegible]
13	5623239	5756769	6800246	3856261	14705349	1900508	8269170	47
14	5625644	5752493	6804501	3850006	14696153	1902487	[illegible]	46
15	5628049	5748219	6808758	3843752	14686965	1904467	[illegible]	[illegible]
16	5630453	5743948	6813016	3837500	14677785	1906448	8264259	44
17	5632857	5739680	6817276	3831249	14668613	1908431	[illegible]	[illegible]
18	5635260	5735414	6821538	3824999	14659449	1910415	8260982	42
19	5637663	5731151	6825801	3818751	14650293	1912400	[illegible]	41
20	5640066	5726891	6830066	3812505	14641146	1914386	[illegible]	40
21	5642468	5722634	6834333	3806261	14632007	1916373	8256062	[illegible]
22	5644869	5718379	6838602	3800017	14622875	1918362	[illegible]	[illegible]
23	5647270	5714127	6842872	3793775	14613750	1920352	[illegible]	[illegible]
24	5649670	5709878	6847144	3787538	14604633	1922343	[illegible]	[illegible]
25	5652070	5705631	6851417	3781296	14595523	1924335	[illegible]	[illegible]
26	5654469	5701387	6855692	3775059	14586421	1926328	8247847	[illegible]
27	5656868	5697145	6859969	3768822	14577327	1928323	[illegible]	[illegible]
28	5659266	5692906	6864247	3762587	14568241	1930319	[illegible]	[illegible]
29	5661665	5688670	6868527	3756354	14559162	1932316	8242909	[illegible]
30	5664062	5684436	6872809	3750122	14550091	1934314	8241262	30
31	5666459	5680205	6877093	3743891	14541028	1936314	8239614	29
32	5668856	5675976	6881379	3737661	14531972	1938315	8237965	28
33	5671252	5671750	6885666	3731433	14522924	1940317	8236316	27
34	5673648	5667527	6889955	3725206	14513883	1942321	8234666	26
35	5676043	5663306	6894246	3718980	14504850	1944326	8233015	25
36	5678438	5659088	6898539	3712756	14495825	1946332	8231363	24
37	5680832	5654872	6902833	[illegible]	[illegible]	1948340	8229711	23
38	5683226	5650659	6907129	[illegible]	14477797	1950349	8228058	22
39	5685619	5646449	[illegible]	3694090	14468794	1952359	8226405	21
40	5688012	5642241	6915725	3687871	14459799	1954370	8224751	20
41	5690404	5638036	6920026	3681653	14450812	1956383	8223096	19
42	5692796	5633834	6924329	3675437	14441833	1958398	8221440	18
43	5695187	5629635	6928634	3669223	14432861	1960412	8219784	17
44	5697578	5625438	6932940	3663010	14423896	1962428	8218127	16
45	5699968	5621244	6937248	3656799	14414939	1964445	8216469	15
46	5702358	5617052	6941558	3650588	14405990	1966464	8214810	14
47	5704747	5612863	6945869	3641379	14397048	1968484	8213151	13
48	5707136	5608676	6950182	3638171	14388113	1970505	8211491	12
49	5709524	5604492	6954497	3634965	14379186	1972527	8209831	11
50	5711912	5600311	6958813	3625761	14370266	1974550	8208170	10
51	5714299	5596132	6963131	3619557	14361354	1976575	8206508	9
52	5716686	5591956	6967451	3613355	14352451	1978601	8204846	8
53	5719072	5587782	6971773	3607154	14343552	1980628	8203183	7
54	5721458	5583611	6976097	3600954	14334662	1982657	8201519	6
55	5723844	5579443	6980423	3594756	14325780	1984687	8199854	5
56	5726229	5575277	6984750	3588559	14316905	1986718	8198188	4
57	5728613	5571114	6989079	3582364	14308037	1988750	8196522	3
58	5730997	5566952	6993409	3576169	14299177	1990784	8194855	2
59	5733381	5562795	6997741	3569976	14290325	1992819	8193188	1
60	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	60
1	5738147	5554486	7006411	3557594	14272643	1996892	8189851	59
2	5740529	5550336	7010749	3551405	14263813	1998931	8188182	58
3	5742011	5546198	7015088	3545217	14254990	2000971	8186512	57
4	5745292	5542043	7019429	3539031	14246174	2003012	8184841	56
5	5747672	5537900	7023772	3531846	14237365	2005054	8183170	55
6	5750052	5533760	7028117	3526662	14228563	2007098	8181498	54
7	5752432	5529622	7032463	3520479	14219769	2009143	8179825	53
8	5754811	5525487	7036811	3514298	14210982	2011189	8178151	52
9	5757190	5521354	7041161	3508118	14202202	2017236	8176477	51
10	5759568	5517224	7045513	3501939	14193429	2015285	8174802	50
11	5761946	5513096	7049867	3495761	14184663	2017335	8173126	49
12	5764323	5508971	7054223	3489585	14175904	2019386	8171449	48
13	5766700	5504849	7058581	3483410	14167153	2021439	8169772	47
14	5769076	5500729	7062940	3477236	14158409	2023493	8168094	46
15	5771452	5406612	7067301	3471064	14149672	2025548	8166416	45
16	5773827	5492497	7071664	3464892	14140943	2027605	8164737	44
17	5776202	5488385	7076029	3458722	14132221	2029663	8163057	43
18	5778576	5484275	7080395	3452553	14123506	2031722	8161376	42
19	5780950	5480168	7084763	3446386	14114798	2033782	8159695	41
20	5783324	5476063	7089133	3440219	14106097	2035844	8158013	40
21	5785697	5471961	7093505	3434054	14097402	2037907	8156330	39
22	5788069	5467861	7097879	3427890	14088715	2039971	8154647	38
23	5790441	5463764	7102254	3421728	14080035	2042036	8152963	37
24	5792812	5459669	7106631	3415566	14071363	2044103	8151278	36
25	5795183	5455577	7111010	3409406	14062699	2046171	8149593	35
26	5797553	5451488	7115391	3403248	14054040	2048240	8147907	34
27	5799923	5447401	7119773	3397090	14045389	2050311	8146220	33
28	5802292	5443317	7124157	3390934	14036746	2052383	8144532	32
29	5804661	5439235	7128543	3384779	14028110	2054456	8142844	31
30	5807030	5435156	7132931	3378626	14019481	2056530	8141155	30
31	5809398	5431079	7137321	3372473	14010859	2058606	8139465	29
32	5811766	5427005	7141713	3366422	14002244	2060683	8137775	28
33	5814133	5422933	7146106	3360172	13993636	2062761	8136084	27
34	5816499	5418864	7150501	3354024	13985035	2064840	8134393	26
35	5818865	5414797	7154898	3347877	13976441	2066920	8132701	25
36	5821230	5410733	7159297	3341731	83967853	2069002	8131008	24
37	5823595	5406671	7163698	3335586	13959272	2071085	8129314	23
38	5825959	5402612	7168100	3329443	13950698	2073169	8127620	22
39	5828323	5398555	7172504	3323300	13942131	2075255	8125925	21
40	5830687	5394501	7176910	3317159	13933571	2077342	8124229	20
41	5833050	5390449	7181318	3311019	13925017	2079430	8122532	19
42	5835412	5386400	7185728	3304880	13916470	2081520	8120835	18
43	5837774	5382353	7190140	3298742	13907930	2083611	8119137	17
44	5840136	5378308	7194554	3292605	13899397	2085703	8117439	16
45	5842497	5374266	7198970	3286470	13890872	2087796	8115740	15
46	5844858	5370226	7203387	3280335	13882354	2089891	8114040	14
47	5847218	5366189	7207806	3274202	13873843	2091987	8112339	13
48	5849578	5362154	7212227	3268070	13865339	2094084	8110638	12
49	5851937	5358122	7216650	3261939	13856842	2096183	8108936	11
50	5854295	5354093	7221075	3255810	13848352	2098283	8107234	10
51	5856653	5350067	7225502	3249683	13839869	2100384	8105531	9
52	5859010	5346043	7229931	3243557	13831392	2102486	8103827	8
53	5861367	5342021	7234362	3237431	13822922	2104590	8102122	7
54	5863724	5338002	7238794	3231307	13814459	2106694	8100417	6
55	5866080	5333985	7243228	3225184	13806002	2108801	8098711	5
56	5868436	5329970	7247664	3219061	13797552	2110909	8097004	4
57	5870791	5325958	7252102	3212940	13789109	2113018	8095296	3
58	5873145	5321948	7256541	3206820	13780673	2115128	8093588	2
59	5875499	5317940	7260982	3200700	13772243	2117240	8091879	1
60	5877852	5313935	7265424	3194582	13763820	2119353	8090170	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5877852	5313935	7265424	3194582	13763820	2119353	8090[illegible]70	60
1	5880205	5309932	7269869	3188465	13755403	2121467	8088460	59
2	5882558	5305932	7274316	3182350	13746993	2123582	8086749	58
3	5884910	5301935	7278765	3176230	13738590	2125699	8085018	57
4	5887262	5297940	7283216	3170123	13730194	2127817	8083325	[illegible]
5	5889613	5293947	7287669	3164011	13721805	2129936	8081613	[illegible]
6	5891964	5289957	7292124	3157900	13713422	2132057	8079899	[illegible]
7	5894314	5285969	7296581	3151790	1370[illegible]046	2134179	8078185	[illegible]
8	5896664	5281984	7301040	3145682	13696077	2136302	8076470	52
9	5899013	5278001	7305501	3139575	13688315	2138426	8074754	51
10	5901361	5274020	7309963	3133468	13679959	2140552	8073038	50
11	5903709	5270042	7314427	3127363	13671610	2142679	80[illegible]1321	49
12	5906056	5266066	7318893	3121259	13663268	2144807	8069603	48
13	5908403	5262092	7323361	3115155	13654932	2146937	8067885	47
14	5910750	5258121	7327831	3109053	13646602	2149068	8066166	46
15	5913096	5254152	7332303	3102952	13638279	2151200	8064446	45
16	5915442	5250186	7336777	3096853	13629963	2153333	8062[illegible]26	44
17	5917787	5246222	7341253	3090754	13621653	2155468	8061005	43
18	5920132	5242261	7345731	3084657	13613350	2157604	8059283	42
19	5922476	5238302	7350210	3078561	13605054	2159741	8057561	41
20	5924820	5234346	7354691	3072466	13596764	2161880	8055838	40
21	5927163	5230392	7359174	3066372	13588481	2164020	80541[illegible]4	39
22	5929505	5226441	7363659	3060280	13580204	2166161	8052389	38
23	5931847	5222492	7368146	3054188	13571934	2168304	8050664	37
24	5934189	5218545	7372635	3048097	13563670	2170448	80489[illegible]8	36
25	5936530	5214601	7377126	3042008	13555413	2172593	8047212	[illegible]
26	5938871	5210659	7381619	3035919	13547162	2174740	8045485	34
27	5941211	5206720	7386114	3029832	13538918	2176888	804[illegible]757	[illegible]
28	5942551	5202783	7390611	3023749	13530680	2179037	8042028	32
29	5945890	5198848	7395110	3017660	13522449	2181188	8040299	31
30	5948228	5194916	7399610	3011576	13514224	2183340	8038569	30
31	5950566	5190986	7404112	3005493	13506006	2185493	8036838	29
32	5952904	5187059	7408616	2999412	13497794	2187647	8035107	28
33	5955241	5183134	7413122	2993331	13489589	2189803	8033375	27
34	5957578	5179211	7417630	2987251	13481390	2191960	8031642	26
35	5959914	5175291	7422140	2981173	13473197	2194118	8029909	25
36	5962250	5171373	7426652	2975095	13465011	2196278	8028175	24
37	5964585	5167457	7431167	2969018	13456832	2198439	8026440	23
38	5966919	5163544	7435684	2962943	13448659	2200601	8024705	22
39	5969253	5159633	7440203	2956868	13440492	2202765	8022969	21
40	5971586	5155724	7444724	2950794	13432331	2204930	8021232	20
41	5973919	5151818	7449246	2944722	13424177	2207096	8019494	19
42	5976251	5147914	7453770	2938650	13416029	2209264	8017756	18
43	5978583	5144012	7458296	2932579	13407888	2211433	8016017	17
44	5980915	5140113	7462824	2926510	13399753	2213603	8014278	16
45	5983246	5136216	7467354	2920442	13391624	2215774	8012538	15
46	5985577	5132322	7471886	2914375	13383502	2217947	8010797	14
47	5987907	5128430	7476420	2908309	13375386	2220121	8009056	13
48	5990237	5124540	7480956	2902244	13367276	2222296	8007314	12
49	5992566	5120653	7485494	2896180	13359172	2224473	8005571	11
50	5994894	5116768	7490033	2890117	13351075	2226651	8003828	10
51	5997222	5112886	7494574	2884056	13342984	2228830	8002084	9
52	5999549	5109006	7499117	2877995	13334899	2231011	8000339	8
53	6001876	5105128	7503663	2871935	13326821	2233193	7998593	7
54	6004202	5101253	7508211	2865877	13318749	2235376	7996847	6
55	6006528	5097380	7512761	2859819	13310683	2237561	7995100	5
56	6008853	5093509	751731[illegible]	2853762	13302624	2239747	7993352	4
57	6011178	5089641	7521867	2847706	13294571	2241935	7991604	3
58	6013502	5085775	752642[illegible]	2841651	13286524	2244124	7989855	2
59	6015826	5081911	7530981	2835597	13278483	2246314	7988105	1
60	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangente.	Differentiæ & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	60
1	6020473	5074191	7540103	2823492	13262419	2250699	7984604	59
2	6022796	5070334	7544667	2817441	13254196	2252893	7982852	58
3	6025118	50664[illegible]	7549233	2811391	13246380	2255088	7981100	57
4	6027439	506202[illegible]	7553801	2805342	13238369	2257285	7979347	56
5	6029760	5058777	7558371	2799234	13230365	2259483	7977593	55
6	6032080	5054929	7562943	2793247	13222367	2261682	7975838	54
7	6034400	5051084	7567517	2787201	13214375	2263883	7974084	53
8	6036719	5047241	7572093	2781156	13206390	2266085	7972328	52
9	6039038	5043401	7576670	2775113	13198411	2268288	7970572	51
10	6041357	5039563	7581249	2769071	13190438	2270492	7968815	50
11	6043675	5035727	7585830	2763029	13182472	2272698	7967057	49
12	6045992	5031894	7590413	2756989	13174512	2274905	7965299	48
13	6048309	502806[illegible]	7594999	2750949	13166558	2277114	7963540	47
14	6050625	5024234	7599587	2744910	13158610	2279324	7961780	46
15	6052940	[illegible]2040[illegible]	7604177	2738873	13150668	2281535	7960020	45
16	6055255	5016584	7608769	2732836	13142732	2283748	7958259	44
17	6057570	5012762	7613363	2726800	13134802	2285962	7956497	43
18	6059884	5008942	7617959	2720764	13126877	2288178	7954735	42
19	6062198	5005125	7622557	2714730	131189[illegible]9	2290395	7952972	41
20	6064511	5001310	7627157	2708696	13111045	2292614	7951208	40
21	6066824	4997497	7631759	2702663	13103138	2294834	7949443	39
22	6069136	4993687	7636363	2696632	13095237	2297055	7947678	38
23	6071448	4989879	7640969	2690602	13087343	2299277	7945912	37
24	6073759	4986073	7645577	2684573	13079455	2301500	7944146	36
25	6076069	4982270	7650187	2678545	13071573	2303725	7942379	35
26	6078379	4978469	7654799	2672518	13063697	2305951	7940611	34
27	6080688	4974670	7659413	2666492	13055827	2308178	7938842	33
28	6082997	4970873	7664030	2660467	13047963	2310406	7937073	32
29	6085306	4967079	7668649	2654444	13040105	2312635	7935303	31
30	6087614	4963287	7673270	2648421	13032253	2314866	7933533	30
31	6089922	4959497	7677893	2642399	13024407	2317098	79[illegible]1762	29
32	6092229	4955710	7682518	2636378	13016567	2319332	7929990	28
33	6094536	4951925	7687145	2630358	13008732	2321567	7928218	27
34	6096842	4948142	7691774	2624338	13000903	2323804	7926445	26
35	6099147	4944361	7696405	2618319	12993080	2326042	7924671	25
36	6101452	4940582	7701038	2612301	12985263	2328281	7922896	24
37	6103756	4936806	7705673	2606284	12977457	2330522	7921121	23
38	6106060	4933032	7710310	2600268	12969647	2332764	7919345	22
39	6108364	4929260	7714949	2594252	12961848	2335008	7917569	21
40	6110667	4925490	7719590	2588237	12954055	2337253	7915792	20
41	6112970	4921723	7724233	2582224	12946267	2339499	7914014	19
42	6115272	4917958	7728878	2576211	12938485	2341747	7912235	18
43	6117573	4914195	7733525	2570199	12930709	2343996	7910456	17
44	6119873	4910435	7738175	2564189	12922939	2346246	7908676	16
45	6122173	4906677	7742827	2558179	12915175	2348498	7906896	15
46	6124473	4902921	7747481	2552170	12907417	2350751	7905114	14
47	6126772	4899168	7752137	2546163	12899665	2353005	7903332	13
48	6129071	4895417	7756795	2540156	12891919	2355261	7901550	12
49	6131369	4891668	7761455	2534150	12884179	2357518	7899767	11
50	6133667	4887921	7766117	2528145	12876445	2359776	7897983	10
51	6135964	4884177	7770781	2522141	12868717	2362036	7896198	9
52	6138261	4880435	7775447	2516138	12860994	2364297	7894413	8
53	6140557	4876695	7780116	2510136	12853277	2366559	7892627	7
54	6141853	4872957	7784787	2504134	12845565	2368823	7897841	6
55	6145148	4869222	7789460	2498134	12837859	2371088	7889054	5
56	6147442	4865489	7794135	2492135	12830159	2373354	7887266	4
57	6149746	4861758	7798812	2486136	12822463	2375622	7885477	3
58	6152030	4858029	7803491	2480138	12814776	2377891	7883688	2
59	6154323	4854302	7808172	2474140	12807093	2380162	7881898	1
60	6156615	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	7880107	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6156615	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	788[illegible]08	[illegible]
1	6158907	4846856	7817542	2462149	12791745	2384707	7878317	[illegible]
2	6161198	4843136	7822230	2456154	12784080	2386982	7876525	[illegible]
3	6163489	4839418	7826920	2450160	12776420	2389258	7874732	[illegible]
4	6165781	4835702	7831612	2444167	12768765	2391535	7872939	[illegible]
5	6168070	4831989	7836306	1438175	12761116	2393814	7871145	[illegible]
6	6170259	4828278	7841002	2432184	12753473	2396094	7869350	[illegible]
7	6172648	4824569	7845700	2426193	12745835	2398376	7867555	[illegible]
8	6174936	4820862	7850400	2420203	12738203	2400659	786 759	52
9	6177224	4817158	7855102	2414215	12730577	2402943	7863963	51
10	6179512	4813456	7859807	2408227	12722956	2405229	7802166	50
11	6181799	4809756	7864514	2402240	12715341	2407516	7860368	49
12	6184085	4806058	7869223	2396254	12707732	2409804	7858569	48
13	6186371	4802363	7873934	2390269	12700128	2412094	7856770	47
14	6188656	4798670	7878647	2384285	12692530	2414385	7854970	46
15	6190940	4794979	7883363	2378301	12684937	2416678	7853169	45
16	6193224	4791290	7888081	2372318	12677350	2418972	7851368	44
17	6195508	4787603	7892801	2366336	12669769	2421267	7849566	4[illegible]
18	6197791	4783919	7897523	2360355	12662194	2423564	7847764	42
19	6200074	4780237	7902247	2354375	12654624	2425862	784596[illegible]	41
20	6202356	4776557	7906973	2348396	12647060	2428161	78441[illegible]	40
21	6204638	4772880	7911702	2342418	12639501	2430462	78423[illegible]2	[illegible]9
22	6206919	4769205	7916433	2336441	12631948	2432764	7840547	[illegible]
23	6209199	4765532	7921166	8330465	12624400	2435067	7838741	37
24	6211479	4761861	7925901	2324489	12616858	2437372	783[illegible]3	3[illegible]
25	6213758	4758192	7930638	2318514	12609321	2439678	7835128	35
26	6216037	4754525	7935378	2312539	12601790	2441986	7833320	34
27	6218315	4750860	7940120	2306565	12594265	2444295	7831511	[illegible]
28	6220593	4747198	7944864	2300593	12586746	2446605	7829702	32
29	6222870	4743538	7949610	2294621	12579232	2448917	7827892	31
30	6225146	4739880	7954358	2288650	12571724	2451230	7826082	30
31	6227422	4736224	7959109	2282680	12564222	8453544	7824271	29
32	6229698	4732571	7963862	2276711	12556725	2455860	7822459	28
33	6231973	4728920	7968617	2270743	12549234	2458177	7820647	27
34	6234248	4725271	7973374	2264775	12541746	2460496	7818834	26
35	6236522	4721624	7978133	2258808	12534264	2462816	7817020	25
36	6238796	4717979	7982895	2252842	12526787	2465137	7815205	24
37	6241069	4714336	7987659	2246876	12519316	2467460	7813390	23
38	6243342	4710695	7992425	2240911	12511850	2466784	7811574	22
39	6245614	4707056	7997193	2234946	12504389	2472110	7809758	21
40	6247885	4703419	8001963	2228982	12496934	2474437	7807941	20
41	6250156	4699785	8006736	2223020	12489484	2476765	7806123	19
42	6252426	4696153	8011511	2217058	82482039	2479095	7804304	18
43	6254696	4692523	8016288	2211097	12474600	2481426	7802485	17
44	6256966	4688895	8021067	2205136	12467167	2484759	7800665	16
45	6259235	4685269	8025849	2199176	12459739	2486093	7798845	15
46	6261503	4681645	8030633	2193217	82452317	2488428	7797024	14
47	6263771	4678024	8035419	2187259	12444900	2490765	7795202	13
48	6266038	4674405	8040207	2181302	12437489	2493103	7793380	12
49	6268305	4670788	8044997	2175345	12430083	2495443	7791557	11
50	6270572	4667173	8049790	2169389	12422683	2497784	7789733	10
51	6272838	4663561	8054585	2163435	12415288	2500126	7787909	9
52	6275103	4659951	8059382	2157481	12407900	2502470	7786084	8
53	6277368	4656343	8064181	2151528	12400515	2504815	7784258	7
54	6279632	4652737	8068983	2145575	12393136	2507162	7782432	6
55	6281895	4649133	8073787	2139623	12385762	2509510	7780605	5
56	6284158	4645531	8078593	2133672	12378394	2511859	7778777	4
57	6286420	4641931	8083401	2127721	12371031	2514210	7776949	3
58	6288682	4638334	8088212	2121772	12363673	2516562	7775120	2
59	6290943	4634739	8093025	2115824	12356320	2518915	7773290	1
60	6293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	0293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	60
1	6295464	4627555	8102658	2103929	12341630	2525626	7769629	59
2	6297724	4623966	8107478	2097982	12334293	2525984	7767797	58
3	6299983	4620379	8112300	2092036	12326961	2528345	7765965	57
4	6302242	4616794	8117124	2086091	12319635	2530703	7764132	56
5	6304501	4613211	8121951	2080140	12312314	2533065	7762299	55
6	6306759	4609630	8126780	2074202	12304998	2535428	7760465	54
7	6309016	4606052	8131611	2068259	12297687	2537793	7758630	53
8	6311273	4602476	8130444	2062317	12290381	2540159	7756794	52
9	6313529	4598902	8141280	2056376	12283081	2542526	7754958	51
10	6315784	4595330	8146118	2050435	12275786	2544895	7753121	50
11	6318039	4591760	8150958	2044495	12268496	2547265	7751283	49
12	6320293	4588292	8155801	2038555	12261212	2549637	7749445	48
13	6322547	4584627	8160646	2032617	12253933	2552010	7747606	47
14	6324800	4581064	8165493	2026679	12246659	2554385	7745766	46
15	6327053	4577503	8170343	2020742	12239390	2556761	7743926	45
16	6329305	4573944	8175195	2014800	12232126	2559138	7742085	44
17	6331557	4570387	8180049	2008870	12224867	2561517	7740244	43
18	6333808	4566832	8184905	2002935	12217613	2563897	7738402	42
19	6336059	4563279	8189764	1997000	12210364	2566279	7736559	41
20	6338310	4559728	8194625	1991066	12203121	2568662	7734716	40
21	6340560	4556179	8199488	1985133	12195883	2571046	7732872	39
22	6342809	4552632	8204354	1979200	12188650	2573432	7731028	38
23	6345058	4549088	8209222	1973269	12181422	2575819	7729183	37
24	6347305	4545546	8214092	1967338	12174199	2578208	7727337	36
25	6349553	4542006	8218965	1961408	12166981	2580598	7725490	35
26	6351800	4538468	8223840	1955478	12159768	2582990	7723642	34
27	6354046	4534932	8228717	1949549	12152561	2585383	7721794	33
28	6356292	4531398	8233597	1943621	12145359	2587777	7719945	32
29	6358537	4527866	8238479	1937693	12138162	2590173	7718096	31
30	6360782	4524336	8243363	1931766	12130970	2592570	7716246	30
31	6363026	4520808	8248250	1925839	12123783	2594969	7714395	29
32	6365270	4517282	8253139	1919913	12116601	2597369	7712544	28
33	6367513	4513758	8258031	1913988	12109424	2599770	7710692	27
34	6369756	4510236	8262925	1908063	12102252	2602173	7708839	26
35	6371999	4506717	8267821	1902140	12095085	2604577	7706986	25
36	6374241	4503200	8272720	1896217	12087923	2606983	7705132	24
37	6376482	4499685	8277621	1890295	12080766	2609390	7703277	23
38	6378722	4496172	8282524	1884373	12073614	2611799	7701422	22
39	6380962	4492661	8287429	1878452	12066467	2614209	7699566	21
40	6383201	4489152	8292337	1872531	12059325	2616621	7697710	20
41	6385440	4485645	8297247	1866611	12052188	2619034	7695853	19
42	6387678	4482140	8302160	1860692	12045056	2621448	7693995	18
43	6389916	4478637	8307075	1854773	12037929	2623864	7692137	17
44	6392153	4475136	8311992	1848855	12030809	2626281	7690278	16
45	6394390	4471637	8316912	1842937	12023690	2628700	7688418	15
46	6396626	4468140	8321834	1837020	12016578	2631120	7686558	14
47	6398862	4464646	8326759	1831105	12009472	2633541	7684697	13
48	6401097	4461154	8331686	1825190	12002370	2635964	7682835	12
49	6403332	4457664	8336615	1819276	11995274	2638388	7680973	11
50	6405566	4454176	8341547	1813363	11988183	2640813	7679110	10
51	6407799	4450690	8346481	1807450	11981097	2643240	7677246	9
52	6410032	4447206	8351418	1801537	11974015	2645669	7675382	8
53	6412264	4443724	8356357	1795625	11966938	2648099	7673517	7
54	6414496	4440244	8361298	1789714	11959866	2650530	7671652	6
55	6416728	4436766	8366242	1783803	11952799	2652963	7669786	5
56	6418959	4433290	8371188	1777893	11945737	2655397	7667919	4
57	6421189	4429816	8376136	1771983	11938680	2657833	7666051	3
58	6423419	4426344	8381087	1766074	11931628	2660270	7664183	2
59	6425648	4422875	8386040	1760166	11924580	2662709	7662314	1
60	6427876	4419408	8390996	1754259	11917537	2665149	7660445	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6427876	4419408	8390996	1754259	1191753	[illegible]	7660445	[illegible]
1	6430104	4415943	8395954	1748353	11910499	[illegible]	7658575	[illegible]
2	6432331	4412480	8400915	1742447	11903460	[illegible]	7656704	[illegible]
3	6434558	4409019	8405878	1736542	11896438	[illegible]	[illegible]	[illegible]
4	6436785	4405560	8410844	1730637	11889417	[illegible]	[illegible]	[illegible]
5	6439011	4402103	8415812	1724733	11882397	[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	6441236	4398648	8420782	1718829	11875383	[illegible]	7649215	[illegible]
7	6443461	4395195	8425754	1712926	11868374	[illegible]	7647341	53
8	6445685	4391743	8430729	1707022	[illegible]	[illegible]	7645460	[illegible]
9	6447909	4388293	8435706	1701119	11854371	[illegible]	[illegible]	[illegible]
10	6450132	4384845	8440686	1695216	11847377	[illegible]	[illegible]	[illegible]
11	6452355	4381399	8445668	1689314	11840388	2692085	[illegible]	49
12	6454577	4377955	8450653	1683412	11833404	2694543	7637960	[illegible]
13	6456799	4374514	8455640	1677512	11826424	2697002	7636082	[illegible]
14	6459020	4371075	8460630	1671613	11819449	2699462	7634204	46
15	6461240	4367638	8465622	1665714	11812479	2701924	[illegible]	[illegible]
16	6463460	4364203	8470617	1659816	11805514	[illegible]	[illegible]	44
17	6465679	4360770	8475614	1653918	11798553	2706852	7628564	[illegible]
18	6467898	4357339	8480614	1648021	11791597	2709318	[illegible]	42
19	6470116	4353910	8485617	1642124	11784646	2711786	[illegible]	[illegible]
20	6472333	4350483	8490622	1636228	11777700	2714255	[illegible]	40
21	6474550	4347058	8495629	1630332	11770758	2716726	[illegible]	[illegible]
22	6476766	4343635	8500639	1624437	11763821	2719198	[illegible]	[illegible]
23	6478982	4340214	8505651	1618542	11756889	2721672	[illegible]	[illegible]
24	6481198	4336795	8510666	1612648	11749962	2724147	[illegible]	[illegible]
25	6483413	4333378	8515683	1606755	11743039	2726623	[illegible]	[illegible]
26	6485628	4329963	8520703	1600862	11736121	2729101	[illegible]	34
27	6487842	4326550	8525725	1594970	11729208	2731580	[illegible]	[illegible]
28	6490055	4323993	8530750	1589078	11722300	2734061	[illegible]	[illegible]
29	6492268	4319730	8535777	1583187	11715396	2736543	7605949	31
30	6494480	4316323	8540806	1577296	11708497	2739027	7604060	30
31	6496692	4312919	8545838	1571407	11701602	2741512	7602170	29
32	6498903	4309517	8550872	1565518	11694712	2743999	7600280	28
33	6501114	4306116	8555909	1559629	11687827	2746487	7598389	[illegible]
34	6503324	4302717	8560949	1553740	11680947	2748977	7596498	26
35	6505533	4299320	8565991	1547852	11674071	2751468	7594606	[illegible]
36	6507742	4295925	8571036	1541964	11667200	2753961	7592713	24
37	6509950	4292532	8576083	1536077	11660334	2756455	7590819	23
38	6512158	4289141	8581133	1530191	11653472	2758950	7588925	22
39	6514365	4285752	8586185	1524305	11646615	2761447	7587031	21
40	6516572	4282365	8591239	1518420	11639763	2763945	7585136	20
41	6518778	4278980	8596290	1512535	11632915	2766445	7583240	19
42	6520984	4275597	8601355	1506651	11626072	2768946	7581343	18
43	6523189	4272226	8606417	1500767	11619234	2771449	7579446	17
44	6525394	4268837	8611482	1494884	11612401	2773953	7577548	16
45	6527598	4265460	8616549	1489001	11605572	2776459	7575650	15
46	6529801	4262085	8621619	1483119	11598748	2778966	7573751	14
47	6532004	4258712	8626692	1477237	11591928	2781475	7571851	13
48	6534206	4255341	8631767	1471356	11585112	2783985	7569951	12
49	6536408	4251972	8636845	1465476	11578301	2786496	7568050	11
50	6538609	4248605	8641926	1459596	11571494	2789009	7566148	10
51	6540809	4245240	8647009	1453717	11564691	2791523	7564246	9
52	6543009	4241877	8652095	1447838	11557893	2794039	7562343	8
53	6545208	4238516	8657183	1441960	11551100	2796556	7560439	7
54	6547407	4235157	8662273	1436082	11544312	2799075	7558535	6
55	6549606	4231800	8667366	1430205	11537529	2801595	7556630	5
56	6551804	4228445	8672461	1424328	11530751	2804117	7554724	4
57	6554001	4225092	8677559	1418451	11523977	2806641	7552818	3
58	6556198	4221741	8682659	1412575	11517208	2809166	7550911	2
59	6558394	4218392	8687762	1406699	11510444	2811693	7549004	1
60	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	7547096	0
								M

41 Iuxta Regulam adhibendi.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	7547096	60
1	6562785	4211693	8697075	1394947	11496929	2816751	7545187	59
2	6564979	4208354	8703085	1389072	11490178	2819282	7543277	58
3	6567172	420[illegible]	8708195	1383197	11483411	2821815	7541367	57
4	6569367	4201672	8713314	1377323	11476688	2824349	7539457	56
5	6571560	4198334	8718433	1371450	11469950	2826884	7537546	55
6	6573753	4194999	8723555	1365578	11463216	2829421	7535634	54
7	6575045	4191666	8728679	1359707	11456487	2831959	7533721	53
8	6578130	4188335	8733806	1353836	11449762	2834499	7531808	52
9	6580326	4185006	8738935	1347966	11443042	2837040	7529894	51
10	6582516	4181679	8744067	1342097	11436326	2839582	7527980	50
11	6584705	4178354	8749201	1336228	11429615	2842126	7526065	49
12	6586894	4175030	8754338	1330358	11422908	2844672	7524149	48
13	6589082	4171708	8759478	1324489	11416206	2847219	7522233	47
14	6591270	4168388	8764620	1318620	11409508	2849768	7520316	46
15	6593458	4165070	8769764	1312752	11402815	2852318	7518398	45
16	6595645	4161754	8774911	1306884	11396126	2854870	7516480	44
17	6597831	4158440	8780061	1301017	11389442	2857423	7514561	43
18	6600016	4155128	8785214	1295150	11382762	2859978	7512642	42
19	6602201	4151818	8790369	1289284	11376086	2862534	7510722	41
20	6004386	4148510	8795527	1283418	11369415	2865092	7508801	40
21	6606570	4145204	8800688	1277553	11362748	2867651	7506879	39
22	6608753	4141900	8805851	1271688	11356086	2870212	7504957	38
23	6610936	4138598	8811017	1265824	11349428	2872774	7503034	37
24	6613118	4135298	8816186	1259960	11342774	2875338	7301111	36
25	6615300	4132000	8821357	1254097	11336125	2877903	7499187	35
26	6617481	4128703	8826531	1248233	11329480	2880470	7497262	34
27	6619661	4125408	8831708	1242370	11322899	2883038	7495336	33
28	6621841	4122115	8836887	1236507	11316203	2885608	7493410	32
29	6624021	4118824	8842069	1230645	11309571	2888179	7491484	31
30	6626200	4115535	8847253	1224783	11302944	2890752	7489557	30
31	6628379	4112248	8852440	1218922	11296321	2892326	7487629	29
32	6630557	4108963	8857630	1213061	11289702	2895902	7485700	28
33	6632734	4105680	8862822	1207201	11283088	2898479	7483771	27
34	6634911	4102399	8868017	1201341	11276478	2901058	7481842	26
35	6637087	4099120	8873215	1195482	11269873	2903638	7479912	25
36	6639263	4095843	8878415	1189623	11263272	2906220	7477981	24
37	6641438	4092567	8883628	1183763	11256675	2908804	7476049	23
38	6643612	4089293	8888824	1177904	11250082	2911389	7474117	22
39	6645786	4086021	8894033	1172045	11243494	2913976	7472184	21
40	6647959	4082751	8899244	1166187	11236910	2916564	7470251	20
41	6650132	4079483	8904458	1160329	11230330	2919154	7468317	19
42	6652304	4076217	8909675	1154472	11223755	2921745	7466382	18
43	6654476	4072953	8914894	1148615	11217184	2924338	7464447	17
44	6656647	4069691	8920116	1142759	11210617	2926932	7462511	16
45	6658817	4066431	8925341	1136904	11204054	2929527	7460574	15
46	6660987	4063173	8930568	1131049	11197496	2932124	7458637	14
47	6663156	4059917	8935798	1125195	11190942	2934722	7456699	13
48	6665325	4056663	8941031	1119341	11184392	2937322	7454761	12
49	6667493	4053410	8946267	1113487	11177846	2939923	7452822	11
50	6669661	4050159	8951506	1107633	11171305	2942526	7450882	10
51	6671828	4046910	8956747	1101780	11164768	2945130	7448941	9
52	6673994	4043663	8961991	1095927	11158235	2947736	7447000	8
53	6676160	4040418	8967238	1090074	11151706	2950344	7445058	7
54	6678326	4037175	8972487	1084222	11145182	2952957	7443116	6
55	6680491	4033934	8977739	1078370	11138662	2955564	7441172	[illegible]
56	6682655	4030695	8982994	1072518	11132146	2958177	7439226	4
57	6684818	4027458	8988252	1066667	11125634	2960791	7437284	[illegible]
58	6686981	4024223	8993512	1060816	11119126	2963407	7435339	2
59	6689144	4020990	8998775	1054966	11112623	2966024	7433394	1
60	6691306	4017759	8004040	1049116	11106124	2968943	7431448	0
								M.

Contra regulam adhibendi G. 48

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6691306	4017759	9004040	1049110	11100124	2968642	743144[illegible]	60
1	6693468	4014529	9009308	1043200	11099629	2971263	7429501	59
2	6695629	4011301	9014579	1037400	11093138	2973885	742[illegible]553	58
3	6697789	4008075	9019853	1031567	11086652	2976508	74256[illegible]	57
4	6699949	4004851	9025130	1025718	11080170	2979133	7423657	56
5	6702108	4001629	9030410	1019870	11073692	2981759	7421708	55
6	6704267	3998409	9035693	1014023	11067218	2984386	7419758	54
7	6706425	3995191	9040978	1008170	11060748	2987015	7417807	53
8	6708582	3991974	9046266	1002329	11054283	2989645	7415856	52
9	6710739	3988759	9051557	996482	11047822	2992277	7413905	51
10	6712895	3985540	9056850	990036	11041365	2994910	7411953	50
11	6715051	3982335	9062146	984790	11034912	2997545	7410000	49
12	6717206	3979120	9067445	978944	11028403	3000182	7408046	48
13	6719361	3975919	9072747	973099	11022018	3002820	7406092	47
14	6721515	3972714	9078052	967254	11015577	3005460	7404137	46
15	6723668	3969511	9083360	961409	11009140	3008102	7402181	45
16	6725821	3966310	90886[illegible]0	955505	11002708	3010745	7400225	44
17	6727973	3963110	9093983	949720	10996280	3013390	7398268	43
18	6730125	3959912	9099299	943876	10989856	3016036	7396311	42
19	6732276	3956716	9104618	938032	10983436	3018684	7394353	41
20	6734427	3953522	9109940	932189	10977020	3021333	7392394	40
21	6736577	3950330	9115265	920340	10970608	3023984	7390435	39
22	6738726	3947140	9120593	920504	10964200	3026036	7388475	38
23	6740875	3943951	9125923	914661	10957796	3029290	7386515	37
24	6743024	3940764	9131256	908819	10951396	3031945	7384554	36
25	6745172	3937579	9136592	902977	10945000	3034602	7382592	35
26	6747319	3934396	9141930	897135	10938608	3037261	7380629	34
27	6749465	3931215	9147271	891294	10932221	3039921	7378666	33
28	6751011	3928036	9152615	885453	10925838	3042583	7376702	32
29	6753757	3924859	9157962	879613	10919459	3045246	7374738	31
30	6755902	3921684	9163312	873773	10913084	3047911	7372773	30
31	6758047	3918511	9168665	867934	10906713	3050577	7370807	29
32	9760191	3915339	9174021	822094	10900346	3053245	7368841	28
33	6762334	3912169	9179380	856255	10893983	3055914	7366874	27
34	6764477	3909001	9184741	850416	10887624	3058585	7364907	26
35	6766619	3905835	9190105	844577	10881269	3061258	7362939	25
36	6768760	3902671	9195472	838739	10874918	3063932	7360970	24
37	6770901	3899509	9200842	832901	10868571	3066608	7359001	23
38	6773041	3896348	9206215	827063	10862228	3069285	7357031	22
39	6775181	3893189	9211590	821225	10855889	3071964	7355061	21
40	6777320	3890032	9216968	815388	10849554	3074644	7353090	20
41	6779459	3886877	9222349	809551	10843222	3077326	7351118	19
42	6781597	3883723	9227733	803714	10836895	3080009	7349145	18
43	6783734	3880571	9233120	797877	10830572	3082694	7347173	17
44	6785871	3877421	9238510	792041	10824253	3085380	7345199	16
45	6788007	3874273	9243903	786205	10817938	3088068	7343225	15
46	6790143	3871127	9249299	780369	10811627	3090758	7341250	14
47	6792278	3867983	9254698	774534	10805320	3093449	7339274	13
48	6794413	3864841	9260100	768699	10799017	3096142	7337298	12
49	6796547	3861701	9265505	762865	10792718	3098836	7335322	11
50	6798681	3858563	9270913	757031	10786423	3101522	7333345	10
51	6800814	3855426	9276324	751197	10780132	3104229	7331367	9
52	6802946	3852291	9281738	745363	10773845	3106928	7329388	8
53	6805078	3849158	9287155	739529	10767562	3109629	7327409	7
54	6807209	3846027	9292574	733690	10761282	3112331	7325429	6
55	6809340	3842898	9297996	727863	10755006	3115035	7323449	5
56	6811470	3839770	9303421	712029	10748734	3117741	7321468	4
57	6813599	3836644	9308849	716196	10742466	3120448	7319486	3
58	6815728	3833520	9314280	710363	10736202	3123157	7317504	2
59	6817856	3830398	9319714	704530	10729942	3125868	7315521	1
60	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537	0
								M.

43	Iuxta Regulam adhibendi.							
M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentia & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537	60
1	6822111	3824160	9330591	692866	10717434	3151294	7311553	59
2	6824237	3821044	9336034	687035	10711186	3134009	7309568	58
3	6826363	3817929	9341480	681203	10704942	3136726	7307583	57
4	6828489	3814816	9346929	675372	10698702	3139444	7305597	56
5	6830614	3811705	9352381	669541	10692466	3142164	7303610	55
6	6832738	3808596	9357835	663711	10686233	3144885	7301623	54
7	6834861	3805488	9363292	657880	10680004	3147608	7299635	53
8	6836984	3802382	9368752	652050	10673779	3150332	7297647	52
9	6839107	3799278	9374215	646221	10667558	3153057	7295658	51
10	6841229	3796176	9379682	640392	10661341	3155784	7293668	50
11	6843350	3793075	9385152	634562	10655128	3158513	7291678	49
12	6845471	3789976	9390625	628732	10648919	3161244	7289687	48
13	6847591	3786879	9396101	622903	10642713	3163976	7287695	47
14	6849711	3783784	9401580	617074	10636511	3166710	7285703	46
15	6851830	3780691	9407062	611246	10630313	3169445	7283710	45
16	6853949	3777600	9412547	605418	10624119	3172182	7281716	44
17	6856067	3774510	9418034	599589	10617929	3174921	7279722	43
18	6858184	3771422	9423524	593760	10611742	3177662	7277728	42
19	6860301	3768336	9429017	587932	10605559	3180404	7275733	41
20	6862417	3765252	9434513	582104	10599380	3183148	7273737	40
21	6864533	3762170	9440012	576277	10593205	3185893	7271741	39
22	6866648	3769090	9445514	570450	10587034	3188640	7269744	38
23	6868762	3756011	9451019	564622	10580867	3191389	7267746	37
24	6870876	3752934	9456528	558795	10574703	3194139	7265748	36
25	6872989	3749859	9462040	552968	10568543	3196891	7263749	35
26	6875102	3746786	9467555	547142	10562387	3199644	7261749	34
27	6877214	3743714	9473073	541315	10556235	3202399	7259748	33
28	6879325	3740644	9478594	545489	10550087	3205155	7257747	32
29	6881436	3737576	9484118	529663	10543942	3207913	7255746	31
30	6883546	3734510	9489645	523838	10537801	3210672	7253744	30
31	6885656	3731446	9495175	518013	10531664	3213435	7251741	29
32	6887765	3728383	9500708	512187	10525531	3216196	7249737	28
33	6889874	3725322	9506244	506361	10519401	3218961	7247733	27
34	6891982	3722263	9511783	500536	10513275	3221727	7245739	26
35	6894089	3719206	9517325	494711	10507153	3224495	7243724	25
36	6896196	3716150	9522870	488886	10501034	3227264	7241718	24
37	6898302	3713096	9528419	483061	10494919	3230035	7239712	23
38	6900408	3710044	9533971	477236	10488808	3232808	7237704	22
39	6902513	3706994	9539526	471411	10482701	3235583	7235697	21
40	6904617	3703946	9545084	465587	10476597	3238359	7233689	20
41	6906721	3700899	9550645	459762	10470497	3241137	7231681	19
42	6908824	3697854	9556209	453938	10464401	3243916	7229672	18
43	6910927	3694811	9561776	448114	10458309	3246697	7227662	17
44	6913029	3691770	9567346	442291	10452220	3249479	7225651	16
45	6915131	3688730	9572919	436467	10446135	3252263	7223639	15
46	6917232	3685692	9578495	430644	10440054	3255048	7221627	14
47	6919332	3682656	9584074	424821	10433976	3257835	7219614	13
48	6921432	3679622	9589656	418999	10427902	3260623	7217601	12
49	6923531	3676590	9595241	413177	10421832	3263413	7215588	11
50	6925630	3673559	9600830	407355	10415765	3266204	7213574	10
51	6927728	3670530	9606422	401533	10409702	3268997	7211559	9
52	6929825	3667503	9612017	395711	10403643	3271792	7209543	8
53	6931922	3664478	9617615	389889	10397587	3274589	7207527	7
54	6934018	3661454	9623216	384067	10391535	3277387	7205511	6
55	6936114	3658432	9628820	378245	10385487	3280187	7203494	5
56	6938209	3655412	9634427	372423	10379443	3282989	7201476	4
57	6940303	3652394	9640037	366602	10373402	3285792	7199457	3
58	6942397	3649377	9645651	360780	10367365	3288597	7197438	2
59	6944491	3646362	9651268	354958	10361332	3291404	7195418	1
60	6946584	3643349	9656888	349136	10355302	3294213	7193398	0
								M.
			Contra regulam adhibendi					G. 46

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiae & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6940584	3643349	9656888	349130	10355302	3294213	719339[illegible]	[illegible]
1	6948676	3640338	9662511	343315	10349276	3297023	7191377	[illegible]
2	6950767	3637329	9668137	337494	10343253	3299835	7189355	[illegible]
3	6952858	3634321	9673766	331673	10337234	3302648	7187[illegible]	[illegible]
4	6954949	3631315	9679399	325852	10331219	3305463	7185[illegible]	[illegible]
5	6957039	3628311	9685034	320032	10325207	3308279	7183287	[illegible]
6	6959128	3625308	9690674	314211	10319199	3311097	7181263	[illegible]
7	6961216	2622307	9696315	308390	10313194	3313917	7179238	5[illegible]
8	6963304	3619308	9701960	302570	10307193	3316738	7177[illegible]	5[illegible]
9	6965392	3616311	9707609	296750	10301196	3319561	7175187	51
10	6967479	3613315	9713261	290930	10295202	3322385	7173161	50
11	6969565	3619321	9718916	285110	10289212	3325211	7171134	49
12	6971651	3607329	9724574	279290	10283225	3328039	7169106	48
13	6973736	3604338	9730235	273469	10277242	3330869	7167078	47
14	6975821	3601849	9735900	267649	10271262	3333700	7165049	46
15	6977905	3598362	9741568	261829	10265286	3336533	7163019	4[illegible]
16	6979988	3595377	9747239	256009	10259314	3339368	7160989	44
17	6982071	3592394	9752913	250190	10253345	3342204	7158958	4[illegible]
18	6984153	3589412	9758591	244370	10247380	3345042	7156927	4[illegible]
19	6986235	3586432	9764272	238550	10241418	3347882	715489	4[illegible]
20	6988316	3583454	9769956	232731	10235460	3350723	7152[illegible]6	[illegible]
21	6990396	3580478	9775643	236912	10229506	3353566	7150810	39
22	6992476	3577504	9781334	221093	10223555	3356411	7148[illegible]96	[illegible]8
23	6994555	3574531	9787028	215274	10217607	3359257	71467[illegible]	[illegible]7
24	6996634	3571560	9792725	209455	10211663	3362105	71441[illegible]	[illegible]
25	6998712	3568590	9798425	203635	10205722	3364955	7142091	3[illegible]
26	7000789	3565622	9804128	197616	10199785	3367806	714065[illegible]	34
27	7002866	3562656	9809835	191997	10193852	3370659	7138618	3[illegible]
28	7004942	3559691	9815545	186178	10187922	3373513	7136581	3[illegible]
29	7007018	3556728	9821257	180359	10181996	3376369	7134543	31
30	7009093	3553767	9826974	174541	10176073	3379226	7132504	30
31	7011167	3550808	9832694	168723	10170154	3382085	7130465	29
32	7013241	3547851	9838417	162905	10164239	3384946	7128425	28
33	7015314	3544895	9844143	157087	10158327	3387808	7126385	27
34	7017387	3541941	9849872	151269	10152418	3390672	7124344	26
35	7019459	3538989	9855605	145451	10146513	3393538	7122303	25
36	7021530	3536038	9861341	139633	10140611	3396406	7120261	24
37	7023601	3533089	9867030	133814	10134713	3399275	7118218	23
38	7025671	3530142	9872822	127996	10128818	3402146	7116175	22
39	7027741	3527197	9878568	122178	10122926	3405019	7114131	21
40	7029810	3524243	9884317	116359	10117038	3407894	7112086	20
41	7031879	3521311	9890069	110541	10111153	3410770	7110041	19
42	7033947	8518371	9895826	104723	10105272	3413648	7107995	18
43	7036014	8515432	9901585	98904	10099394	3415528	7105949	17
44	7038081	3512495	9907347	93886	10093520	3419409	7103402	16
45	7040147	3509560	9913113	87268	20087649	3422292	7101854	15
46	7042213	3506626	9918882	81450	1008 1782	3425176	7099806	14
47	7044278	3503694	9924654	75632	10075918	3428062	7097757	13
48	7046342	3500764	9930430	69824	10070058	3430940	7095708	12
49	7048406	3497835	9936209	64006	10064201	3433829	7093658	11
50	7050469	3494908	9941991	58178	10058347	3436730	7091607	10
51	7052532	3491983	9947777	52360	10052497	3439623	7089556	9
52	7054594	3489060	9953566	46543	10046651	3442517	7087504	8
53	7056655	3486139	9959359	40726	10040808	3445413	7085852	7
54	7058716	3483219	9965155	34908	10034968	3448311	7083399	6
55	17060776	3480301	9970954	29090	10029132	3451211	7081345	5
56	7062836	3477385	9976756	23273	10023299	3454112	7079291	4
57	7064895	3474470	9982562	17455	10017469	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	9988371	11637	10011643	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	9994184	5818	10005820	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	1000000	0	10000000	3465735	7071068	0
								M.

INDEX

Propositionum totius Operis.

Maior

Com-

INDEX

Co-

Conoides.

Conuersio.

Corpora.

Crus.

Cubus.

Cum Rationali linea.

Cylindrus.

Cylindri superficies.

Cylindraceum corpus.

D

Defectus.

Definitio.

Denominator.

Descriptio.

Trian.

Quæ-

INDEX

I

Icosaedrum.

Inclinatio.

Incommensurabiles lineæ.

Incommensurabilia latera.

Indiuisibilia.

Indiuiduatio.

Infinitas.

Inscriptio.

Intercepta.

Interuallum.

Interſectio.

Inuerſa ratio

Inuolucrum.

Iſoperimetræ.

Iſoſceles.

L

Latus.

Lemma.

Linea.

Logarithmus.

Normalis arcus.

Normalis linea plano, vel plana inuicem.

Nota.

Numerus.

O

Obliquangulum, Triangulum sphæricum.

Obliquangulum rectilineum.

Octaedrum.

Orthogonalis.

INDEX

Similia

Quin-

Puncta.

Pyramis.

Q

Quadratrix.

Quadratus numerus.

Reciprocæ figuræ.

Rectangulum.

Rectangulum triangulum sphęricum.

Rectangulum planum.

Reflexio.

Regulare corpus.

Regula aurea.

Reliquæ.

Replicatio.

Residuatio.

Residuum.

Rhombus.

S

Sagitta.

Secantes.

Sectio.

Sectiones conicę.

Sector.

Segmentum Circuli.

Segmenta linearum.

Segmenta planorum.

Segmenta corporum.

Series.

Series corporum proportionalium.

Series numerorum.

Similitudo.

Similes numeri plani.

Simplex.

Sinus.

Solidi numeri.

Solidum

INDEX

Solidum.

Species.

Sphæra.

Sphæræ superficies.

Sphæroidea.

Sphęrica triangula.

Spiralis linea, spatium corpus.

Stereographia.

Qui

Terminus.

I N D E X

Quando

Triangula inscripta conicis.

Triangulum quoad aream.

V

Vertex:

Vmbelicus:

Vngula.

Vnitas:

Z

Zetema:

INDEX TRIGONOMETRICVS

Triangula plana rectangula.

Triangula plana obliquangula.

Triangula ſphærica rectangula.

Data.	*Quæsita.*
Latera duo, quæ sint quadrante minora ex pr.24.pag.367.	Angulus oppositus, cuiuis laterum ex prop. 24 vel 25. pag. 478. & 10. Coroll. 474. vel logarithmicè pr. 47. casu 3. pag. 484 Basis ex pr 32.& 33.pag 480 & pr.6. pag 473. & logarithmicè prop.47. casu 4. pag. 484.
Anguli duo acuti, vt crura sint minora quadrante ex propos.28.pag.370.	Latus oppositum alteri eorum ex pr.34 & 35. pag. 480. & Coroll pr.5. pag. 473. & logarithmicè inuertendo casum 2. pr.45. pag.483. Basis ex pr 22. pag. 477. & logarithmicè pr. 46. casu 3. pag. 484.

Cognoscitur verò basis quadrante minor ex pr. 28. & Coroll. pag.370.

Triangula sphærica obliquangula.

Data.	*Quæsita.*
Duo crura, & Angulus oppositus vni quadrante minora, si anguli reliqui sint specie cogniti, ex prop. 24.pag. 367	Angulus oppositus alteri pr. 54. pag 487 & 65. pag 490 Basis pr.56 pag 488.& pr.73. pag. 492. Angulus verticalis p.58.pag. 488.& pr.76. pag.493.
Duo crura Angulus verticalis acutus si quadrante, singula crura sint minora, vt ex pr.23.pag.567.	Alteruter angulorum ad basim pr.60. pag.489. & pr. 75.pag 492. Basis pr.60. pag 489. & pr. 72. pag. 492.
Duo Anguli acuti, vel vnus saltem, & Basis minor quadrante.	Angulus verticalis prop. 79. pag 493. & 61. pag.4 9. Alterutrum crurum pr. 79. pag 493. & 61. pag.489.
Duo Anguli. Crus alteri eorũ oppositũ si reliqua crura nota sint specie ex pr. 22.pag 366.nempe aut maiora, aut minora quadrante.	Crus alterum oppositum pr. 55. pag 480. & prop.66. pag 490. Angulus verticalis pr. 70. pag.491 & pr.59 pag.488 Basis, si alterum crus sit specie notum pr.57. pag.488. & pr.78. pag.493.
Crura tria.	Anguli omnes, tamquam si essent verticales prop.82. pag.494.
Tres Anguli.	Crura, tamquam si essent bases pr.69. pag.491.

Reducere obliquangulum ad duo rectangula. datis tribus lateribus obliquanguli sphærici pr.81.pag. 494. & pr.54.pag.484.

Commutare angulos in latera, & latera in angulos pr.49.pag 486. & pr.50. ibidem.

Dato triangulo obtuso substituere acutum triangulum pr.48. pag.486.

Vice sinus primo loco ponere Radium propos.51. pag.487.

Vice secantis primo loco ponere Radium prop.52. pag. eadem.

Vice tangentis ponere primo loco Radium pr.53. pag. eadem.

